F 1812
F 1812
1970 JUN 17

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul XV (XIX)

FASC. 1—2

1969

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul XV (XIX)

FASC. 1—2

1969

1989

COLEGIUL DE REDACŢIE

Prof. emerit dr. doc. GH. ALEXA, prof. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOŢIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIŞ, prof. dr. doc. D. RUSU, prof. ing. A. ŞESAN, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (preşedinte)

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA F 1812 FOLYÓIRAT OSZTÁLY

COMITETELE DE REDACŢIEALE SECŢIILOR

I. MATEMATICĂ.
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

Prof. dr. doc. Al. Climescu
Prof. Gh. Ciobanu
Prof. dr. doc. V. Petrescu

II. CHIMIE INDUSTRIALĂ

Prof. dr. doc. M. Dima
Prof. dr. ing. Gh. Chiriţă
Conf. ing. Gh. Botez

III. ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

Prof. dr. doc. N. Boţan
Conf. dr. ing. D. Bărbulescu
Conf. dr. ing. L. Sebastian

IV. MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. Fărcaş
Prof. ing. G. d'Albon
Conf. ing. Cr. Linde

V. CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

Conf. ing. C. Ciobanu
Conf. ing. Vl. Boghian
Lector ing. A. Radu

VI. INDUSTRIE UŞOARĂ

Prof. ing. I. Ştefănescu
Conf. ing. V. Copilu
Conf. ing. V. Cociu

VII. ŞTIINŢE ECONOMICE

Conf. P. Mâlcomete
Conf. A. Jeanrenaud

REDACŢIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)

Lector dr. ing. H. ROSMAN (secretar secţiile II, III, V)

Lector dr. ing. A. BRAIER (secretar secţiile I, IV, VI, VII)

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2 1969

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratcímtár
388/1970

SUMAR

Pag.

Secţia I

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

AL. CLIMESCU, Vectori şi construcţia de modele concrete de spaţii vectoriale (franc., rez. rom.) 1

GH. COSTOVICI, Algebra Boole completă a grafelor definite pe o mulţime (engl., rez. rom.) 7

I. ENESCU, Algebre asociative pe un corp necomutativ (franc., rez. rom.). 9

F. S. ROSSI (Italia), Teoria calculului combinatoriu generalizat (ital., rez. rom.). 17

I. POP, Asupra unei probleme de prelungire în spaţii care nu sînt simple (franc., rez. rom.). 27

B. BROSOWSKI (R. F. G.), Caracterizarea soluţiilor minimale în spaţiul $C[Q,H]$ (germ., rez. rom.). 31

B. D'ORGEVAL (Franţa), Asupra unei configuraţii de puncte, drepte şi cuadrice (franc., rez. rom.). 35

F. MARCUS, Asupra funcţiei N din teoria congruenţelor W (franc., rez. rom.). 39

ŞT. RUSCIOR, Asupra unor proprietăţi afine ale suprafeţelor riglate din E_n (franc., rez. rom.). 43

P. S. BULLEN (Canada), Asupra unor teoreme ale lui Popoviciu (engl., rez. rom.). 45

L. M. MILNE-THOMSON (Australia), Operatorul nabla (engl., rez. rom.). 49

V. MURGESCU, Asupra comportării asimptotice a soluţiilor unor ecuaţii liniare cu diferenţe (franc., rez. rom.). 55

D. PETROVANU, Soluţii mărginite pentru sisteme liniare discrete şi de tipul Volterra-Stieltjes (franc., rez. rom.). 59

Pag.

A. CORDUNEANU, Despre stabilitatea soluției ecuațiilor de tip Volterra (rusă, rez. rom.). 69

M. N. OGUZTÖRELI (Canada), O problemă de contur pentru o ecuație integro-diferențială de tip polivibrant (engl., rez. rom.). . . . 75

M. STIEGLITZ (R.F.G.), O teoremă de tip Tauber privitoare la metodele circumferinței din teoria limitării pentru șirurile duble (germ., rez. rom.). 79

D. MANGERON și M. N. OGUZTÖRELI (Canada), Condiții necesare de optimalitate în sisteme de control cu parametri distribuiți (engl., rez. rom.). 87

J. CULLUM (S.U.A.), Funcții de penalizare și probleme de control optimal (engl., rez. rom.). 93

E. J. SCOTT (S.U.A.), Asupra unei clase de ecuații cu derivate parțiale, liniare, cu argument întîrziat (engl., rez. rom.). 99

CH. P. TSOKOS, R. M. RAO (S.U.A.), Stabilitatea în timp finit a sistemelor de comandă și inegalități integrale (engl., rez. rom.). . . . 105

J. HUBERT, T. V. NARAYANA (Canada), Asupra problemei natalității (engl., rez. rom.). 113

R. S. ADAMIA, F. F. MIHAILENKO (U.R.S.S.), Asupra folosirii metodei gradientului pentru sinteza sistemelor mecanice cu amortizare optimă (rusă, rez. rom.). 119

R. MÜLLER (Noua Zeelandă), Hodograful traiectoriilor balistice aproape verticale (engl., rez. rom.). 125

A. BRAIER, Un calcul simbolic ce utilizează algebre pe corpul real (engl., rez. rom.). 129

J. GOTTLIEB, Asupra legilor de conservare în fizică (franc., rez. rom.). 135

S. G. RÎJANOV (U.R.S.S.), Limita inferioară a energiei de legătură a excitonului în unele cristale (rusă, rez. rom.). 139

D. ZOLER, R. V. DEUTSCH, Cuplajul undelor monocromatice în modelul elastohidrodinamic (franc., rez. rom.). 143

V. PETRESCU, P. POGÎNGEANU, M. CREȚU, Cercetarea căldurilor specifice pe intervale mari de temperatură (incluzînd punctul Curie) prin compararea curbelor de răcire (rom., rez. engl.). . . . 151

M. MOISE, GH. TACU, Analiza spectrografică a unor minereuri cu taliu (germ., rez. rom.). 157

Secția II

CHIMIE INDUSTRIALĂ

AL. DUCA, GH. MOROI, M. CARAMLĂU, Determinarea indirectă a cantităților submicrograme de fosfat și arseniat, alături de silicat, prin metoda polarografică (rom., rez. germ.). 1

Pag.

T. GOLGOȚIU, I. ROȘCA, V. PETRACOVSCHI, S. APOSTOL, Studiul reacției acetatului de zinc cu amoniacul în mediu apos (rom., rez. rusă). 11

I. BURLACU, S. LICĂ, Viteza de reacție a oxidării argintului în soluție de hidroxid de potasiu (rom., rez. franc.). 19

J. LINDE, M. APOSTOLESCU, Studiul spectrofotometric al combinației complexe a Fe III cu vanilina (rom., rez. franc.). 27

C. BOTEZ, R. SMOCOT, V. ERHAN, B. IONESI, Cercetări asupra proprietăților adsorbante ale unor argile din împrejurimile orașului Siret (rom., rez. franc.). 33

EL. DIACONESCU, FL. CHIRIAC, Schimbători de cationi din turba de la Dersca-Dorohoi (rom., rez. germ.). 41

C. CALISTRU, R. VASILIU, C. LEONTE, Asupra cineticii descompunerii amalgamului de sodiu (rom., rez. franc.). 49

I. MATEI, T. LIXANDRU, Condensarea acenaftenchinonei cu diamine aromatice. Complecși metalici (engl., rez. rom.). 57

GH. BOTEZ, C. GOREA, E. MERICĂ, C. ONISCU, Sulfamidele acizilor fenoxipropionici. Nota II, Derivați sulfamidați ai acizilor α—crezoxipropionici și α—xilenoxipropionici (rom., rez. engl.). 67

GH. LUPUȘOR, E. COMANIȚĂ, V. GORDUZA, Coloranți azoici obținuți din acidul dianisidin N(4—nitrofenil—2—sulfonic), cu diverse componente de cuplare (germ., rez. rom.). 79

E. COMANIȚĂ, M. TUTOVEANU, Acil-semicarbazide și tiosemicarbazide ale hidrazidei naftilacetice (germ., rez. rom.). 89

S. IFRIM, EL. MATEI, Sinteza unor coloranți azoici reactivi (rom., rez. engl.). 99

CR. SIMIONESCU, A. CERNĂTESCU-ASANDEI, Contribuții la studiul proprietăților fizico-chimice ale ligninei (franc., rez. rom.). . . 107

A. CHIRIȚĂ, GH. CHIRIȚĂ, Studii privind obținerea bizonului pentru încălțămintea confecționată prin vulcanizare (rom., rez. franc.) . 123

I. POPESCU, M. DIMA, Comportarea ca îngrășământ a unor reziduri din industria metalurgică (franc., rez. rom.). 131

CH. POPESCU, I. POPA, I. VOICU, Influența îngrășămintelor asupra producției și consumului de apă la cîteva plante furajere (rusă, rez. rom.). 137

Secția III

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

E. LUCA, O. SCUTARU, A. VASILIU, I. MATEI, Proprietățile dielectrice ale unor cauciucuri poliuretanice și variația lor cu temperatura, frecvența și cu doza de iradiere cu radiații X (franc., rez. rom.). 1

P. ELLISON, N. MULLINEUX, J. R. REED (Anglia), Evoluția fluxului magnetic în miez după întreruperea curentului de magnetizare al unui transformator (engl., rez. rom.). 7

Pag.

H. ROSMAN, Rezonanța globală la porțile de acces ale unui cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc, în regim permanent sinusoidal (rom., rez. franc.). 19

GH. SAVIN, S. MITREA, N. ZITRON, Multiplicator de frecvență feromagnetic static monofazat cu factor de multiplicare liniar (engl., rez. rom.). 25

I. POPESCU, E. SIMION, Asupra rezonanței în circuitul electric neliniar de tip paralel cu bobina comandată (rom., rez. franc.). . . . 33

N. POEATĂ, O nouă schemă de calcul pentru realizarea oricărei funcții de transfer de ordinul doi—doi (rom., rez. franc.). 41

V. PETRESCU, M. CREȚU, TR. BĂLAN, P. GAVRILESCU, Asupra măsurării reactanțelor cu puntea de modul (engl., rez. rom.). 47

M. ANTONIU, Logometru electrostatic cu variație de tensiune (rom., rez. franc.). 51

V. BĂRBOIU, C. ONU, Dispozitiv tranzistorizat pentru măsurarea susceptibilității magnetice (rom., rez. engl.). 59

V. N. NEDELCU, Cu privire la definirea sensului fizic al puterii reactive (germ., rez. rom.). 65

C. SAAL, Contribuții la studiul funcționării oscilomotorului bifazat sincron (II) (engl., rez. rom.). 77

V. D. SAVIUC, M. T. LUCANU, Calculul capacității servomotorului asincron cu condensator cu înfășurări nesimetrice pe stator (engl., rez. rom.). 85

I. BERGMAN, Studiul experimental al acționării electrice cu un motor asincron alimentat de la un generator trifazat cu colector autoexcitat (germ., rez. rom.). 97

TR. GIOSAN, Contribuții la studiul regimurilor mașinilor sincrone (rom., rez. engl.). 105

N. V. BOȚAN, S. CABA, C. BOȚAN, CL. CACIAUNOV, Studiul sintetic al unui sistem de comandă reglabil cu motoare asincrone, alimentate cu tensiuni nesimetrice (franc., rez. rom.). 111

V. PRISĂCARU, L. PREDA, D. IOACHIM, Asupra calculului iluminării de la aparate de iluminat nesimetrice cu lumină directă (franc., rez. rom.). 119

L. PREDA, Metodă simplificată de proiectare a iluminării unei străzi folosind lămpi H.R.F. (rom., rez. franc.). 127

G. BALABAN, I. BEJAN, Asupra posibilităților de folosire a modulatorului magnetic ca element logic (rom., rez. engl.). 133

H. LECOCQ (Belgia), Realizarea unui analizor diferențial bazat pe calculul incremental (franc., rez. rom.). 139

AL. VALACHI, Metodă practică de sinteză simultană a funcțiilor logice pătratice (ranc., rez. rom.). 155

Pag.

Secția IV

MECANICĂ TEHNICĂ

D. MANGERON, A. OPREA, FL. POTERAȘU, Tehnica computațională în tratarea problemelor de inginerie modernă. Nota I, Asupra unor probleme de termotehnică (franc., rez. rom.). 1

ȘT. RUSCIOR, A. ORĂNESCU, O extindere a proprietăților planimetrului Amsler (franc., rez. rom.). 5

W. SCHMID (R.F.G.), Oscilații de nutație excitate la giroscoape cardanice în mișcare rapidă (germ., rez. rom.). 9

A. BRAIER, I. IBĂNESCU, M. STANCU, Un aspect al derivării versorilor triortogonali cu aplicații în cinematică (franc., rez. rom.). . . 21

A. H. SONI (S.U.A.), Perechi de mecanisme înrudite cu mecanismele cu opt elemente având organe ternare și articulații duble (engl., rez. rom.). 25

M. LUCIUS (Franța), Cercetări asupra unei legi de comportare a unui material vîscoelastic (franc., rez. rom.). 35

ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, Asupra curgerii plane prin medii poroase neomogene de tipul al doilea (engl., rez. rom.). 45

C. CIOBANU, M. RĂDULESCU, Asupra scurgerii prin orificii practicate în pereți cilindrici (franc., rez. rom.). 53

S. N. KOJEVNIKOV, N. M. DOLGOV (U.R.S.S.), Calculul deformațiilor dinamice din elementele sistemelor mecanice în cazul mișcării nepermanente a suportului (rusă, rez. rom.). 59

I. CURIEVICI, D. PERETZ, CR. CAPATU, A. ANDREESCU, Studiul experimental al unui nou tip de schimbător de căldură (engl., rez. rom.). 73

D. PERETZ, Ecuații cinetice pentru reacțiile de predetonație din amestecul final în motoarele cu aprindere prin scînteie (germ., rez. rom.). . 81

M. GUTMAN, L. TURIC, Supapă cu acționare rapidă pentru prelevarea probelor de gaz (rom., rez. germ.). 89

I. ZĂGĂNESCU, C. URSU, Contribuții la studiul pe model a calității de mers a locomotivei LDI construită de „Uzinele 23 August" (rom., rez. rusă) 99

M. GAFIȚANU, Contribuții la studiul capacității portante a angrenajelor cilindrice din poliamidă pe oțel. Nota I, Contribuții la studiul angrenării roților dințate cilindrice din poliamidă pe oțel cu dantură dreaptă (franc., rez. rom.). 107

TR. DEMIAN, Studii relative la rulmenți cu contact punctiform (engl., rez. rom.). 113

N. IONIȚĂ, Cu privire la analiza și sinteza angrenajelor planetare pentru transmisia puterilor mari (I) (rom., rez. ital.). 127

GH. CAȘLER, AL. RENER, D. ZETU, Determinarea coeficienților și exponenților din relațiile momentului de torsiune și a forței axiale, la burghierea oțelurilor românești STAS 880—60 (rom., rez. germ.). . 133

Pag.

Secţia V

CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. E. CALLARI (Italia), Asupra calculului plăcilor circulare pe sol elastic supuse la sarcini parţiale de suprafaţă şi la sarcini liniare (ital., rez. rom.). 1

A. ŞESAN, G. D'ALBON, I. CIONGRADI, L. STRAT, O nouă platformă seismică folosită la încercarea structurilor (engl., rez. rom.). . 19

T. SILION, Contribuţie la calculul grinzilor poligonale de fundaţie (germ., rez. rom.). 25

N. PREDA, N. UNGUREANU, Influenţa forţei tăietoare asupra grinzilor rezemate pe mediu elastic (germ., rez. rom.). 29

V. ILLE, P. PETRINA, Asupra calculului reacţiunilor marginale la plăcile plane oblice (germ., rez. rom.). 37

AL. EFTIMIE, G. BOTEZ, Deplasările punctelor semispaţiului elastic transversal anizotrop în cazul problemei de deformaţie plană (franc., rez. rom.). 43

D. DIACONU, N. UNGUREANU, Calculul diafragmelor cu goluri folosind matricele de transfer (rom., rez. franc.). 51

A. VULPE, Generalizări în rezolvarea structurilor cu ajutorul operatorilor matriceali (rom., rez. engl.). 57

N. UNGUREANU, Fundaţii pe piloţi cu dală elastică (franc., rez. rom.). 67

V. FOCŞA, M. POPPEL, L. BIBOROSCH, AL. VEREŞ, Asupra îmbunătăţirii audibilităţii într-o sală de conferinţe (germ., rez. rom.). . . 73

A. MIHUL, Industrializarea fundaţiilor (germ., rez. rom.). . . . 79

A. BOGHIAN, L. GROLL, Influenţa regimului de vibrare asupra betoanelor cu agregate de formă plată şi aciculară (franc., rez. rom.). . 89

C. BRANIŞTE, E. BOTEZ, I. BURLACU, Rezistenţa chimică a cimentului silicios cu adaos de baritină (rom., rez. franc.). 95

V. ZBEGAN, C. JURA, M. GIURCONIU, GH. CREŢU, Contribuţii la ameliorarea separatorului suspensional pentru evacuarea continuă a vasului şi recuperarea apei în camera de concentrare (franc., rez. rom.). 103

E. BLIDARU, C. CISMARU, V. BLIDARU, Contribuţii cu privire la calculul hidraulic al canalelor de irigaţii (rom., rez. franc.). 109

Secţia VI

INDUSTRIE UŞOARĂ

D. RUSU, TH. NEAGU, GH. BĂNĂŢEANU, Prelucrarea mecanizată a datelor în industria uşoară (rom., rez. franc.). 1

P. A. LEBEDEV, N. A. TIHONOV (U.R.S.S.), Sinteza unui sistem plan cu patru articulaţii care admite o pauză aproximativă a elementului condus (franc., rez. rom.). 7

Pag.

V. HANGANU, V. BAUȘIC, I. ASANDEI, C. CUZIC, D. MARFIEVICI, Asupra determinării turațiilor critice la arborii principali de la mașinile de filat și de răsucit (rom., rez. franc.). 15

V. COPILU, N. COJOCARU, Influența vitezelor mari de cardare asupra calității cardării și caracteristicilor produsului la carda cu garnitură rigidă pentru bumbac (rom., rez. engl.). 23

T. FORST, I. OPREA, M. GRINDEA, Cercetări asupra mecanismului vopsirii lînii cu coloranți acizi (franc., rez. rom.). 37

Secția VII

ȘTIINȚE ECONOMICE

P. MÂLCOMETE, G. MEDRIHAN, Progresul tehnic și unele modificări în structura forței de muncă în țara noastră (rom., rez. franc.). . 1

D. RUSU, O. JABA, Unele probleme privind fundamentarea deciziilor de folosire a capacităților de producție (rom., rez. franc.). . . . 17

E. POPA, I. ADUMITRĂCESEI, M. PONTA, V. RĂUȚU, Contribuția industriei chimice la valorificarea superioară a unor resurse naturale din R.S.R. (lemn, stuf, paie) (rom., rez. franc.). 23

I. ADUMITRĂCESEI, Rolul hotărîtor al industrializării în înfăptuirea procesului de urbanizare (rom., rez. rusă) 31

C. RUSU, Îmbunătățirea organizării producției într-un sector al unei țesătorii de lînă (franc., rez. rom.). 45

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Vol. XV (XIX), Fasc. 1–2 1969

CONTENTS

Pag.

Section I

MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

AL. CLIMESCU, Vecteurs et construction de modèles concrets d'espaces vectoriels (French, Romanian summary). 1

GH. COSTOVICI, The complete Boolean Algebra of the Graphs defined on a Set (English, Romanian summary). 7

I. ENESCU, Algèbres associatives sur un corps noncommutatif (French, Romanian summary) 9

F. S. ROSSI (Italy), Teoria del calcolo combinatorio generalizzato (Italian, Romanian summary). 17

I. POP, Sur un problème de prolongement dans des espaces qui ne sont pas simples (French, Romanian summary). 27

B. BROSOWSKI (Federal Republic of Germany), Zur Characterisierung von Minimallösungen in Raume $C[Q,H]$ (German, Romanian summary). 31

B. D'ORGEVAL (France), Sur une configuration de points, droites et quadriques (French, Romanian summary). 35

F. MARCUS, Sur la fonction N de la théorie des congruences W (French, Romanian summary). 39

ŞT. RUSCIOR, Sur quelques propriétés affines des hypersurfaces réglées dans E_n (French, Romanian summary). 43

P. S. BULLEN (Canada), On some Theorems of Popoviciu (English, Romanian summary). 45

L. M. MILNE-THOMSON (Australia), The Operator Nabla (English, Romanian summary). 49

V. MURGESCU, Sur le comportement asymptotique des solutions de quelques équations linéaires aux différences (French, Romanian summary). 56

D. PETROVANU, Solutions bornées pour des systèmes linéaires discrets et du type de Volterra-Stieltjes (French, Romanian summary). . 60

A. CORDUNEANU, Stability of Solution of Volterra's Equation (Russian, Romanian summary). 69

M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), A Boundary Value Problem for an Integro-Differential Equation of Polyvibrating Type (English, Romanian summary). 75

M. STIEGLITZ (Federal Republic of Germany), Ein Taubersatz für die Kreisverfahren der Limitierungstheorie bei Doppelfolgen (German, Romanian summary). 79

Pag.

D. MANGERON and M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), Necessary Conditions of Optimality Concerning Distributed Parameter Control Systems (English, Romanian summary). 87

J. CULLUM (U.S.A.), Penalty Functions and Continuous Optimal Control Problems (English, Romanian summary). 93

E. J. SCOTT (U.S.A.), On a Class of Linear Partial Differential Equations with Retarded Argument in Time (English, Romanian summary). . 99

CH. P. TSOKOS, R. M. RAO (U.S.A.), Finite Time Stability of Control Systems and Integral Inequalities (English, Romanian summary). . 105

J. HUBERT, T. V. NARAYANA (Canada), A Note on the Birthday Problem (English, Romanian summary). 113

R. SH. ADAMIA, F. F. MICHAILENKO (U.S.S.R.), Synthesis of Dynamic Systems with Optimal Damping using the Gradient Method (Russian, Romanian summary). 119

R. MÜLLER (New Zealand), The Hodograf of Almost Vertical Ballistic Trajectories (English, Romanian summary). 125

A. BRAIER, A Symbolic Calculus Using Algebras on the Real Field (English, Romanian summary). 129

J. GOTTLIEB, Sur les lois de conservation de la Physique (French, Romanian summary). 135

S. G. RIJANOV (U.S.S.R.), Energy of Liason Inferior Limit for Exciton in some Crystals (Russian, Romanian summary). 139

D. ZOLER, R. V. DEUTSCH, Le couplage des ondes monochromatiques dans le modèle élastohydrodynamique (French, Romanian summary). 143

V. PETRESCU, P. POGÎNGEANU, M. CREŢU, Ferites Specific Heat Investigation Corresponding to Large Intervals of Temperature by Comparison with Cooling Curves (Romanian, English summary). . 151

M. MOISE, GH. TACU, Spectralanalyse einiger Thalliumerze (German, Romanian summary). 157

Section II

CHEMICAL ENGINEERING

AL. DUCA, GH. MOROI, M. CARAMLĂU, Indirekte polarographische Bestimmung von Phosfat und Arseniat (Romanian, German summary) 1

T. GOLGOŢIU, I. ROŞCA, V. PETRACOVSCHI, S. APOSTOL, L'étude de la réaction de l'acétat de zinc avec l'ammoniac dans un milieu aqueux (Romanian, Russian summary). 11

I. BURLACU, S. LICĂ, Vitesse de réaction d'oxydation de l'argent dans une solution de hydroxide de potassium (Romanian, Franch summary) 19

J. LINDE, M. APOSTOLESCU, Étude spectrophotométrique du complexe Fe (III) — vanilline (Romanian, French summary). . . . 27

C. BOTEZ, R. SMOCOT, V. ERHAN, B. IONESI, Recherches concernant les propriétés adsorbantes de certaines argiles aux environs de la ville Siret (Romanian, French summary). 33

EL. DIACONESCU, FL. CHIRIAC, Kationen-Austauscher aus Dersca—Dorohoi Torf (Romanian, German summary). 41

C. CALISTRU, R. VASILIU, C. LEONTE, La cinétique de la décomposition de l'amalgame de sodium (Romanian, French summary). . . 49

I. MATEI, T. LIXANDRU, Condensation of Acenaphthenequinone with Aromatic Diamines. Metallic Compounds (English, Romanian summary). 67

Pag.

GH. BOTEZ, C. GOREA, E. MERICĂ, C. ONISCU, Sulfamides of the Phenoxypropyonic Acids. Note II, Sulfamidated derivatives of the α—crezoxy— and α—xilenoxypropyonic acids (Romanian, English summary). 67

GH. LUPUŞOR, E. COMANIŢĂ, V. GORDUZA, Aus Dianisidin N (4 Nitrophenyl — 2 — Sulfon) Säure mit verschiedenen Kupplungskomponenten hergestellte Azofarbstoffe (German, Romanian summary) . 79

E. COMANIŢĂ, M. TUTOVEANU, Acyl-semicarbazide und Thiosemicarbazide von Naphthylacethydrazid. Cyclisierungsproducte (German, Romanian summary). 89

S. IFRIM, E. MIHAI, Synthesis of some Reactive Azo-dyes (Romanian, English summary) 99

CR. SIMIONESCU, A. CERNĂTESCU-ASANDEI, Contribution à l'étude des propriétés physico-chimique des lignines (French, Romanian summary) 107

A. CHIRIŢĂ, GH. CHIRIŢĂ, Etudes concernant l'obtention des cuirs „bizon" pour la fabrication des chaussures vulcanisées (Romanian, French summary) 123

I. POPESCU, M. DIMA, Comportement comme engrais de quelques résidus de l'industrie métallurgique (French, Romanian summary) . 131

CH. POPESCU, I. POPA, I. VOICU, L'influence des engrais sur la production et la consommation de l'eau pour quelques plantes fourragères (Russian, Romanian summary) 137

Section III

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

E. LUCA, O. SCUTARU, A. VASILIU, I. MATEI, Propriétés diélectriques de quelques caoutchoucs polyurétaniques et leur variation en fonction de la température, de la fréquence et de la dose d'irradiation par rayons X (French, Romanian summary) . . 1

P. ELLISON, N. MULLINEUX, J. R. REED (England), The Behaviour of the Core Flux following the Chopping of Transformer Magnetising Current (English, Romanian summary) 7

H. ROSMAN, La résonance globale aux portes d'acces d'un quadripôle diporte, linéaire, passif et réciproque, en régime permanent sinusoïdal (Romanian, French summary) 19

GH. SAVIN, S. MITREA, N. ZITRON, Single Phase Static Ferromagnetic Frequency Multiplier with and Odd Multiplication Factor (English, Romanian summary) 25

I. POPESCU, E. SIMION, Sur la résonance dans le circuit électrique nonlinéaire du type parallèle, à bobine commandée (Romanian, French summary) 33

N. POEATĂ, Un nouveau schéma de calcul pour réaliser une fonction arbitraire d'ordre deux-deux (Romanian, French summary) . . 41

V. PETRESCU, M. CREŢU, TR. BĂLAN, P. GAVRILESCU, On the Measure of Reactances with the Modulus Bridge (English, Romanian summary) 47

M. ANTONIU, Logomètre électrostatique à variation de tension (Romanian, French summary) 51

V. BĂRBOIU, C. ONU, A Transistorised Apparatus for the Measure of the Magnetic Susceptibility (Ramanian, English summary) 59

Pag.

V. N. NEDELCU, Zur Bestimmung der physikalischen Sinnes der Blindleistung (German, Romanian summary) 65

C. SAAL, Study of an Oscillating Biphase Synchronous Linear Motor (II) (English, Romanian summary) 77

V. D. SAVIUC, M. T. LUCANU, The Capacitance Calculation of the Capacitor Servo-Motor with Asymmetrical Stator Windings (English, Romanian summary) 85

I. BERGMAN, Erfahrungsmässige Studium des elektrischen Antriebes mit einem von einem selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator gespeisten Asynchronmotor (II) (German, Romanian summary) . 97

TR. GIOSAN, Study Concerning the Behaviour of the Synchronous Machines Systems (Romanian, English summary) 105

N. V. BOȚAN, S. CABA, C. BOȚAN, CL. CACIAUNOV, Etude synthétique d'un système de commande réglable de moteurs asynchrones alimentés avec des tensions asymétriques (French, Romanian summary) 111

V. PRISĂCARU, L. PREDA, D. IOACHIM, Sur le calcul de l'éclairement des appareils d'éclairage asymétriques avec lumière directe (French, Romanian summary) 119

L. PREDA, Méthode simplifiée pour établir l'éclairage d'une rue en employant des lampes H.R.F. (Romanian, French summary) . . 127

G. BALABAN, I. BEJAN. On the Possibilities of Utilisation of the Magnetical Modulator as Logical Element (Romanian, English summary) 133

H. LECOCQ (Belgium), Mise en oeuvre d'un analyseur différentiel numérique basé sur le calcul incrémental (French, Romanian summary) 139

AL. VALACHI, Méthode pratique de synthèse simultanée des fonctions logiques quadratiques (French, Romanian summary) 155

Section IV

MECHANICAL ENGINEERING

D. MANGERON, A. OPREA, FL. POTERAȘU, La technique computationelle pour l'étude des problèmes de l'ingénieur moderne. Note I, Quelques problèmes posés par la thermotechnique (French, Romanian summary) 1

ȘT. RUSCIOR, A. ORĂNESCU, Une extension des propriétés du planimètre Amsler (French, Romanian summary) 5

W. SCHMID (Federal Republic of Germany), Angefachte Nutationsschwingungen bei hochlaufenden Kardankreiseln (German, Romanian summary) 9

A. BRAIER, I. IBĂNESCU, M. STANCU, Un aspect de la dérivation des verseurs perpendiculaires et ses applications dans la cinématique (French, Romanian summary) 21

A. H. SONI (U.S.A.), Coupler Cognates of Eight-Link Mechanism with Ternary Links and Double Joints (English, Romanian summary) . 25

M. LUCIUS (France), Recherche d'une loi de comportement d'un matériau viscoélastique (French, Romanian summary) 35

ST. I. GHEORGHIȚĂ, On the Plane Flow through Inhomogeneous Porous Media of the Second Type (English, Romanian summary) . . 45

C. CIOBANU, M. RĂDULESCU, Sur l'écoulement par des orifices en parois cylindriques (French, Romanian summary) 53

Pag.

S. N. KOZHEVNIKOV, N. M. DOLGOV (U.S.S.R.), Determination of Dynamic Deformation in Joints pertaining to Mechanical Systems during the Non-steady Motion of the Support (Russian, Romanian summary) 59

I. CURIEVICI, D. PERETZ, CR. CAPATU, A. ANDREESCU, An Experimentat Study of a new Type of Heat Exchanger (English, Roumanian summary) 73

D. PERETZ, Kinetische Gleichungen für Vorreaktionen im Ladungsrest bei klopfender Verbrennung in Ottomotoren (German, Romanian summary) 81

M. GUTMAN, L. TURIC, Schrellgesteuertes für Gasprobenentnahme (Romanian, German summary) 89

I. ZĂGĂNESCU, C. URSU, Contributions à l'étude sur modèle de la qualité de marche de la locomotive LDI des „Usines 23 Août" (Romanian, Russian summary) 99

M. GAFIŢANU, Contributions à l'étude de la capacité portante des engrenages cylindriques en polyamide sur acier. Note I, Contributions à l'étude de l'engrènement des roues dentées cylindriques polyamide-acier avec denture droite (French, Romanian summary) . . 107

TR. DEMIAN, Investigations about the Point Bearings (English, Romanian summary) 113

N. IONIŢĂ, Sopra l'analisi e le sintesi degli ingranaggi planetari per la transmissione delle grandi potenze (1) (Romanian, Italian summary) 127

GH. CAŞLER, AL. RENER, D. ZETU, Die Bestimmung der von den Relationen der Axialkraft und des Drehmomentes Koeffizienten und Exponenten beim Bohren der rumänischen Stahlsorten, STAS 880—60 (Romanian, German summary) 133

Section V

CONSTRUCTIONS. HYDROTECHNICS

C. E. CALLARI (Italy), Sul calcolo della lastra circolare su suolo elastico soggetta a carichi parziali di superficie ed a carichi lineari (Italian, Romanian summary) 1

A. ŞESAN, G. D'ALBON, I. CIONGRADI, L. STRAT, A new Shaking Table used to Test Structures at Seismic Actions (English, Romanian summary) 19

T. SILION, Zur Berechnung von polygonalförmigen Gründungsbalken (German, Romanian summary) 25

N. PREDA, N. UNGUREANU, Der Einfluss der Querkraft über die auf elastischer) Unterlage gelagerte Trägern (German, Roumanian summary) 29

V. ILLE, P. PETRINA, Über die Berechnung der Randauflagerkräfte schiefwinkliger Platten (German, Romanian summary) . . . 37

AL. EFTIMIE, G. BOTEZ, Déplacements des points du demi-espace transversal anisotrope au cas du problème des déformations planes (French, Romanian summary) 43

D. DIACONU, N. UNGUREANU, Calcul des contreventements des bâtiments utilisant les matrices de transfert (Romanian, French summary) 51

A. VULPE, Generalizations in Solving the Structures with Matrix Operators (Romanian, English summary) 57

Pag.

N. UNGUREANU, Fondations sur pieux avec dalle élastique (French, Romanian summary) 67

V. FOCȘA, M. POPPEL, L. BIBOROSCH, AL. VEREȘ, Zur Verbesserung der Hörsamkeit einer Vortragssaal (German, Romanian summary) . 73

A. MIHUL, Industrialisierung der Grundbauten (German, Romanian summary) 79

A. BOGHIAN, L. GROLL, Influence du régime de vibration sur les bétons à agrégats de forme plate et aciculaire (French, Romanian summary) 89

C. BRANIȘTE, E. BOTEZ, I. BURLACU, Résistance chimique du ciment silicieux avec addition de baritine (Romanian, French summary) . 95

V. ZBEGAN, C. JURA, M. GIURCONIU, GH. CREȚU, Contributions à l'amélioration du séparateur suspensionnel pour l'évacuation continue de la vase et la récuperation de l'eau de la chambre de concentration (French, Romanian summary) 103

E. BLIDARU, C. CISMARU, V. BLIDARU, Contributions concernant le calcul hydraulique des canaux d'irrigation (Romanian, French summary) 109

Section VI

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

D. RUSU, TH. NEAGU, GH. BĂNĂȚEANU, Le traitement mécanisé des données dans l'industrie légère (Romanian, French summary) . 1

P. A. LEBEDEV, N. A. TIKHONOV (U.S.S.R.), Synthèse su système plan à quatre articulations admettant la pause approchée de l'élément mené (French, Romanian summary) 7

V. HANGANU, V. BAUȘIC, C. CUZIC, D. MARFIEVICI, Sur la détermination des vitesses critiques des arbres principaux des continus à filer et à retordre (Romanian, French summary) 15

V. COPILU, N. COJOCARU, The Influence of Cotton High-Speed Carding on the Processes and Yarn Quality (Romanian, English summary) . 23

T. FORST, I. OPREA, M. GRINDEA, Recherches sur le mécanisme de la teinture de la laine avec les colorants acides (French, Romanian summary) 37

Section VII

ECONOMICS

P. MÂLCOMETE, G. MEDRIHAN, Le progrès technique et les modifications survenues dans la structure de la force de travail dans notre pays (Romanian, French summary) 1

R. RUSU, O. JABA, Problèmes qui regardent la consolidation des décisions dans l'emploi des capacités de production (Romanian, French summary) 17

E. POPA, I. ADUMITRĂCESEI, M. PONTA, V. RĂUȚU, La contribution de l'industrie chimique à la valorisation supérieure des unes des ressources naturelles de R.S.R. (Romanian, French summary) . 23

I. ADUMITRĂCESEI, Le rôle décisif de l'industrialisation dans l'accomplissement du processus d'urbanisation (Romanian, Russian summary) 31

C. RUSU, Amélioration et organisation de la mise à jour de la production dans un des secteurs d'une tissage de laine (French, Romanian summary) 45

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том. XV(XIX), вып. 1—2 1969

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Секция I

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

АЛ. КЛИМЕСКУ, Векторы и построение конкретных моделей векторных пространств (франц., рез. рум.) 1

Г. КОСТОВИЧ, Польная булевая алгебра графов определенных на множество (англ., рез. рум.) 7

И. ЭНЕСКУ, Асоциативные алгебры над некоммутативным полем (франц., рез. рум.) 9

Ф. С. РОССИ (Италия), Теория обобщенной комбинаторики (итал., рез. рум.) 17

И. ПОП, Об одном проблеме продолжения в не простых пространствах (франц., рез. рум.) 27

Б. БРОЗОВСКИ (ГФР), Характеристика минимальных решении в пространстве $C[QH]$ (нем., рез. рум.) 31

Б. Д'ОРЖЕВАЛЬ (Франция), Об одном конфигурации точек прямых и квадрик (франц., рез. рум.) 35

Ф. МАРКУС, О функции N теории конгруенций W (франц., рез. рум.) . 39

Ш. РУШЕР, Некоторые аффиные своиства линеигамых гиперповерхностеи в E_n (франц., рез. рум.) 43

П. С. БУЛЛЕН (Канада), О некоторых теоремах Т. Поповича (англ., рез. рум.) 45

Л. М. МИЛЬН-ТОМСОН (Австралия), Оператор Набла (англ., рез. рум.) 49

В. МУРДЖЕСКУ, Об асимптотическои поведении решений некоторых линейных уравнений с разностями (франц., рез. рум.) . . 55

Д. ПЕТРОВАНУ, Ограниченные решения для линейных дискретных систем типа Вольтерра—Стильтьеса (франц., рез. рум.) . . . 59

Стр.

А. КОРДУНЯНУ, Об устойчивости решения уравнений типа Вольтерра (русс., рез. рум.) 69

М. Н. ОГЮСТОРЕЛИ (Канада), Один контурный вопрос для интегро-дифференциального уравнения поливибрационного типа (англ., рез. рум.) 75

М. СТИГЛИЦ (ГФР), Тауберова теорема для методов окружности теории предела в двойных рядах (нем., рез. рум.) 79

Д. МАНЖЕРОН и М. Н. ОГЮСТОРЕЛИ (Канада), Необходимые условия оптимальности в системах регулирования, с запаздывающим аргументов (англ., рез. рум.) 87

ДЖ. ДЖ. КАЛЛУМ (США), Функции пенализации и задачи оптимального контроля (англ., рез. рум.) 93

Е. ДЖ. СКОТТ (Англия), Об одном классе линейных уравнений с частными производными, с запаздывающим аргументов (англ., рез. рум.) 99

Ч. Р. ТСОКОС, Р. М. РАО (США), Устойчивость при конечном времени систем управления и интегральные неравенства (англ., рез. рум.) . 105

ДЖ. ГУБЕРТЬ, Т. В. НАРАИЯНА (Канада), О задаче рождаемости (англ., рез. рум.) 113

Р. Ш. АДАМИЯ, Ф. Ф. МИНАЙЛЕНКО (СССР), Об использовании метода градиента для синтеза динамических систем с наилучшим затуханием (русск., рез. рум.) 119

Р. МЮЛЛЭР (Новая Зеландия), Годограф баллистических почти вертикальных траекторий (англ., рез. рум.) 125

А. БРАЙЕР, Один символический расчет использующий алгебры над реальном поле (англ., рез. рум.) 129

И. ГОТТЛИБ, О законах сохранения в физике (франц., рез. рум.) . 135

С. Г. РЫЖАНОВ (СССР), Нижняя граница связи экситона в некоторых кристаллах (русск., рез. рум.) 139

Д. ЦОЛЕР, Р. В. ДОЙЧ, Куплаж монохроматических волн в эластогидродинамической модели (франц., рез. рум.) 143

В. ПЕТРЕСКУ, П. ПОГЭНДЖАНУ, М. КРЕЦУ, Исследование специфической теплоты феррит на больших интервалах температур, сравнением кривых охлаждения (рум., рез. англ.) 151

М. МОИСЭ, Г. ТАКУ, Спектрографический анализ некоторых руд содержащих талий (нем., рез. рум.) 157

Секция II

ХИМИЯ

АЛ. ДУКА, Г. МОРОЙ, М. КАРАМЛЭУ, Непосредственное определение подмикрограммовых количеств фосфата и арсената наряды с силикатом полярографическим методом (рум., рез. нем.) 1

Стр.

Т. ГОЛЬГОЦЮ, И. РОШКА, В. ПЕТРАКОВСКИЙ, С. АПОСТОЛЬ, Изучение реакции уксуснокислого цинка с аммиаком в водной среде (рум., рез. русск.) 11

И. БУРЛАКУ, С. ЛИКЭ, Скорость реакции окисления серебра в растворе К.О.Н. (рум., рез. франц.) 19

Ж. ЛИНДЭ, М. АПОСТОЛЕСКУ, Спектрофотометрическое изучение комплексного соединения Fe III с ванилином (рум., рез. франц.) . 27

К. БОТЕЗ, Р. СМОКОТ, Б. ЭРХАН, Б. ИОНЕСИ, Изучение адсорбционных свойств некоторых глин в области города Сирета (рум., рез. франц.) 33

ЭЛ. ДИАКОНЕСКУ, Ф. КИРИЯК, Ионообметители из торфа района Дерска—Дорохой (рум., рез. нем.) 41

К. КАЛИСТРУ, Р. ВАСИЛИУ, К. ЛЕОНТЕ, К вопросу кинетики разложения амальгамы натрия (рум., рез. франц.) 49

И. МАТЕЙ, Т. ЛИХАНДРУ, Конденсация аценафтенкинона с ароматическими диаминами. Металические комплексы (англ., рез. рум.) . 57

Г. БОТЕЗ, К. ГОРЯ, Э. МЕРИКЭ, К. ОНИСКУ, Сулфамиды фенокеипропионовых кислом. II. Сульфамидные производные α-крезокеипропионовых и α-гиленокеипропионовых кислом (рум., рез. англ.) . 67

Г. ЛУПУШОР, Э. КОМАНИЦЭ, В. ГОРДУЗА, Азокрасители полученные из дианидриновой кислоты *N* (4 — нитрофенил — 2 — силфононой с различными сцепляющими компонентами (нем., рез. рум.) . . 79

Э. КОМАНИЦЭ, М. ТУТОВЯНУ, Ацил-семикарбазиды и тиосемикарбазиды нафтилацетового гидразида (нем., рез. рум.) 89

С. ИФРИМ, ЭЛ. МИНАИ, Синтез нескольких реагирующих азокрасителей (рум., рез. англ.) 99

КР. СИМИОНЕСКУ, А. ЧЕРНЭТЕСКУ-АСАНДЕЙ, Вклад в изучение физико-химических свойств лигнинов (франц., рез. рум.) . . 107

А. КИРИЦЭ, Г. КИРИЦЭ, Исследования по вопросу получения бизона для изготовления обуву методом вулканизации (рум., рез. франц.) . 123

И. ПОПЕСКУ, М. ДИМА, Поведение в качестве упобрений некоторых отбросов металлургической промышлености (франц., рез. рум.) . 131

К. ПОПЕСКУ, И. ПОПА, И. ВОЙКУ, Влияние удобрений на урожам и расход вод на некоторые кормовые растения (русск., рез. рум.) . 137

Секция III

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

Е. ЛУКА, О. СКУТАРУ, А. ВАСИЛИУ, И. МАТЕЙ, Диэлектрические свойства некоторых полиуретановых каучуков и их изменения в связи с температурой, частотой и у радиацией *X*-излучением (франц., рез. рум.) 1

Стр.

П. ЭЛЛИСОН, Н. МУЛЛИНЕ, Д. Р. РИД (Англия), Эволуция магнитного потока после выключения тока намагнитвания трансформатора (англ., рез. рум.) 7

Г. РОСМАН, Полныи резонанс у входных зажимах линеиного дипортного пассивного и взаимного четырехполюсника при постоянном синусоидальном режиме (рум., рез. франц.) 19

Г. САВИН, С. МИТРЕА, Н. ЦИТРОН, Статический электромагнитныи однофазнои умножитель частоты с нечетным коеффицентом умножения (англ., рез. рум.) 25

И. ПОПЕСКУ, Э. СИМИОН, О резонансе в нелинеинной электрической цепи параллельного типа с управляемой катушкой (рум., рез. франц.) 33

Н. ПОЕАТЭ, Новая схема для реализации любой передаточной функции ордена два-два (рум., рез. франц.) 41

В. ПЕТРЕСКУ, М. КРЕЦУ, ТР. ВЭЛАН, П. ГАВРИЛЕСКУ, Об измерении реактансов с модульным мостиком (англ., рез. рум.) . . . 47

М. АНТОНЮ, Электростатический логометр с изменением напряжения (рум., рез. франц.) 51

В. БЭРБОЙ, К. ОНУ, Транзисторизируемый прибор для измерения магнитная восприимчивости (рум., рез. антл.) 59

В. Н. НЕДЕЛЬКУ, К определению физического смысла реактивнои мощности (нем., рез. рум.) 65

К. САЛ, К исследованию деиствия двухфазного синхроного осциломотора (англ., рез. рум.) 77

В. Д. САВЮК, М. Т. ЛУКАНУ, Расчет мощности асинхроного серводвигателя с конденсатором с асимметрическои статорном обмотки (англ., рез. рум.) 85

И. БЕРГМАН, Экеперимантальное исследование электрического действия с асинхронным двигателем подаваемый трехфазным генератором с автовозбужденным коллектором (нем., рез. рум.) . . . 97

ТР. ДЖИОСАН, Относительно изучения режимов синхронных машин (рум., рез. англ.) 105

Н. В. БОЦАН, С. КАБА, К. БОЦАН, КЛ. КАЧЯУНОВ, Синтетическое иследование системы регулируемого управления асинхронными двигателями питаемых несиметричными напряжениями (франц., рез.рум.) 111

В. ПРИСЭКАРУ, Л. ПРЕДА, Д. ИОАКИМ, О расчете освещения осветительных асимметричных приборов с прямым светом (франц., рез. рум.) 119

Л. ПРЕДА, Упрощеныи метод проэктирования освещения улицы используя лампы H. R. F. (рум., рез. франц.) 127

Г. БАЛАБАН, И. БЕЖАН, О возможностях применения магнитного модулятора в качестве логического элемента (англ., рез. рум.) . . 133

Г. ЛЕКОК (Франция), Построение дифференциального анализатора основанного на инкрементальном исчислении (франц., рез. рум.) . . 139

АЛ. ВАЛАКИ, Практический метод одновременного синтеза квадратических логических функций (франц., рез. рум.) 155

Стр.

Секция IV

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Д. МАНЖЕРОН, А. ОПРЯ, Ф. ПОТЕРАШУ, Вычислительная техника в исследовании современных инженерных проблем. I. Некоторые задачи теплотехники (франц., рез. рум.) 1

Ш. РУШЕР, А. ОРЭНЕСКУ, Расширение свойств планиметра Амслера (франц., рез. рум.) 5

В. ШМИД (ГФР), Возбужденные нутационные колебания быстровертящихся гироскопов (нем., рез. рум.) 9

А. БРАЙЕР, И. ИБЭНЕСКУ, М. СТАНКУ, Вид деривации триортогональных версоров с применением в кинематики (франц., рез. рум.) . 21

А. Х. СОНИ (США), Родственные пары восьмизвенных механизмов с тернарными звеньями и двойными тарнирами (англ., рез. рум.) . . 25

М. ЛУСЮС (Франция), Поиск закона поведения высокоупругого материала (франц., рез. рум.) 35

Щ. И. ГЕОРГИЦЭ, О плоскостной течении в пористой неоднородной среде второго типа (англ., рез. рум.) 45

К. ЧОБАНУ, М. РЭДУЛЕСКУ, О вытекании через отверстия проделанные в неплоских стенках (франц., рез. рум.) 53

С. Н. КОЖЕВНИКОВ, Н. М. ДОЛГОВ (СССР), К расчету динамических деформаций в звеньях механических систем при неустановившемся движении основания (русск., рез. рум.) 59

У. КУРИЕВИЧ, Д. ПЕРЕТЦ, К. КАПАТУ, А. АНДРЕЕСКУ, Экспериментальное исследование нового типа теплообменителя (англ., рез. рум.) 73

Д. ПЕРЕТЦ, Кинетические уравнения для преддетонационных реакций из конечной смеси в двигателях с горением искрами (нем.,рез.рум.) . 81

М. ГУТМАН, Л. ТУРИК, Быстродействующий клапан для предварительного вычета газовых проб (рум., рез. нем.) 89

И. ЗЭГЭНЕСКУ, К. УРСУ, Об изучении на шодели ходовых качеств тепловоза построенного на заводе „23 Августа“ (рум., рез. русск.) . 99

М. ГАФИЦЯНУ, Вклады на исследований нагрузочной способности полиамидных зубчатых передач. I. Вклады на исследование зацепления полиамидных зубратых передач с прямыми зубьями (франц., рез.рум.) 107

Т. ДЕМЯН, Исследование точечных подшипников (англ., рез. рум.) . 113

Н. ИОНИЦЭ, К анализу и синтезу планетарных зацеплений для передачи больших мощностей (I) (рум., рез. итал.) 127

Г. КАШЛЕР, АЛ. РЕНЕР, Д. ЗЕТУ, Определение коэффициентов и показателей входящих в соотношения крутильного момента и осевой силы при сверлении румынских сталей STAS 880—60 . . . 133

Стр.

Секция V

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕХНИКА

К. Э. КАЛЛАРИ (Италия), О расчете круглых плит эластическов грунте находящихся под частичными поверхностями нагрузками и под погонными нагрузками (итал., рез. рум.) 1

А. ШЕСАН, Г. Д'АЛЬБОН, У. ЧОНГРАДИ, Л. СТРАТ, Новая сейсмическая платформа, употребляемая при испытании структур (англ., рез. рум.) 19

Т. СИЛИОН, К вопросу о расчета фундаментных полигональных балок на упругом основании (нем., рез. рум.) 25

Н. ПРЕДА, Н. УНГУРЯНУ, Влияние перерезывающей силы над балками, опираемыми на эластической среде (нем., рез. рум.) . . . 29

В. ИЛЛЕ, П. ПЕТРИНА, Над расчетами боковых реакции у плоских косовых плит (нем., рез. рум.) 37

АЛ. ЭФТИМИЕ, Г. БОТЕЗ, Перемещения точек эластического поперечного анизотропного полупространства в случае вопроса плоского искажения (франц., рез. рум.) 43

Д. ДЬЯКОНУ, Н. УНГУРЯНУ, Расчет диафрагм с пустотами применяя матриц перевода (рум., рез. франц.) 51

А. ВУЛПЕ, Обобщения в решении структур при помощи матрицных операторов (рум., рез. англ.) 57

Н. УНГУРЯНУ, Свайные основания с упругой пластинкой (франц., рез. рум.) 67

В. ФОКША, М. ПОППЕЛЬ, Л. БИБОРОШ, АЛ. ВЕРЕШ, Улучение слуховых условий в одном зале речи (нем., рез. рум.) . . . 73

А. МИНУЛ, Индустриализация фундаментов (нем., рез. рум.) . . 79

А. БОГИАН, Л. ГРОЛЛ, Влияние вибрационого режима над бетонами с агрегатами плоского и угольчатого вида (франц., рез. рум.) . . 89

К. БРАНИШТЕ, Е. БОТЕЗ, И. БУРЛАКУ, Химическая стойкость кремневого цемента с добавлением барита (рум., рез. франц.) . . 95

В. ЗБЕГАН, С. ЮРА, М. ДЖУРКОНИЮ, Г. КРЕЦУ, Вклад в улучшение суспенсионного сепаратора для непрерывного удаления сосуда и рекуперации воды в концентрирующей комнате (франц., рез. рум.) . 103

Е. БЛИДАРУ, К. ЧИСМАРУ, В. БЛИДАРУ, Вклад в исследование гудравлического расчета иригационных каналов (рум., рез. франц.) . 109

Секция VI

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

Д. РУСУ, Т. НЯГУ, Г. БЭНЭЦЯНУ, Механизированная переработка данных в легкой промышленности (рум., рез. франц.) 1

Стр.

П. А. ЛЕБЕДЕВ, Н. А. ТИХОНОВ (СССР), Синтез плоского четырехзвенника с приближенным вытоем ведомого звена (франц., рез. рум.) . 7

В. ХАНГАНУ, В. БАУШИК, И. АСАНДЕЙ, К. КУЗИК, Д. МАРФИЕВИЧ, Определения критических скоростей для главных балов прядильных и крутяльных машин (рум., рез. франц.) 15

В. КОПИЛУ, Н. КОЖОКАРУ, Влияние высокого кардовами скорости на качести кардование и характеристики произведению у жесткую кардную гарнитуру (рум., рез. англ.) 23

Т. ФОРСТ, И. ОПРЯ, М. ГРИНДЯ, Исследования над механизмом окраски шерсти с кислыми красителями (франц., рез. рум.) . . . 37

Сеция VII

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

П. МЫЛЬКОМЕТЕ, Г. МЕДРИХАН, Технический прогресс и некоторые изменения в стуктуре рабочей силы в нашей стране (рум., рез. франц.) 1

Д. РУСУ, О. ЖАБА, Некоторые вопросы относительно основывания решения использующих производственную способность (рум., рез. франц.) 17

Е. ПОПА, И. АДУМИТРЭЧЕСЕЙ, М. ПОНТА, В. РЭУЦУ, Вклад химической промышленности в высшее превращение в щенности некоторых натуральных ресурсов в Румынии (дерево, камыш, солома) (рум., рез. франц.) 23

И. АДУМИТРЭЧЕСЕЙ, Решающая роль индустриализации в завершении процесса урбанизации (рум., рез. руск.) 31

К. РУСУ, Улучшение организирования производства в одном отделе ткацко-терстяной фабрики (франц., рез. рум.) 45

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECȚIA I

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 1—2, 1969

СЕКЦИЯ I

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECTION I

MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 512.864

VECTEURS ET CONSTRUCTION DE MODÈLES CONCRETS D'ESPACES VECTORIELS

PAR

AL. CLIMESCU

1. Dans son livre [3, p. 11] R. Miron donne la définition suivante des vecteurs, que nous reproduisons ici avec un léger changement de notation et d'expression :

Soit r une équivalence définie sur $E \times E$ (E est un espace amorphe) et M l'ensemble quotient de $E \times E$ par r. Un élément quelconque de M est, par définition, un vecteur de E par rapport à r.

Cette définition est jusqu'ici la forme la plus abstraite de la notion de vecteur conçu comme bipoint (pour une construction plus concrète des bipoints voir aussi [1]). Pour construire la géométrie élémentaire l'auteur est d'ailleurs obligé de postuler un grand nombre d'axiomes supplémentaires, ce qui semblerait indiquer la stérilité de la définition abstraite. Nous voulons montrer ici que loin d'être stérile, la définition abstraite est au contraire très productive moyennant une seule hypothèse supplémentaire, qui n'est pas un axiome mais plutôt une simple constatation de fait. D'ailleurs la définition des vecteurs que nous donnerons ci-dessous est plus générale et plus souple que celle du professeur Miron.

2. Commençons par des éclaircissements de nature méthodologique, terminologique et conceptuelle.

a) Nous renonçons aux équivalences en n'employant que la notion équivalente de partition du produit cartésien à deux facteurs.

b) Le triple $<E, F, f>$ formé de deux ensembles équipotents et d'une application bijective de E sur F donne naissance à une réplique de E après identification de chaque $a \in E$ avec son image $f(a) \in F$. Cette conception de deux ensembles distincts et pourtant formés d'éléments identifiés a des précédents ; il suffit de penser aux surfaces riemanniennes (plans complexes superposés et partiellement identifiés) ou à l'identification des éléments du corps premier d'un corps quelconque de caractéristique nulle avec les nombres rationnels (ce qui permet, si le besoin se fait sentir, de

considérer chaque corps de caractéristique nulle comme extension du corps des rationnels).

Le choix du mot réplique a été déliberé parce qu'il fait penser aux objets de série, en même temps identiques et distincts et suggère par conséquent à la fois l'identité et la distanciation.

Naturellement la relation „réplique de" est symétrique (E est une réplique de F par f^{-1}).

c) Une réplique partielle de E sera la réplique d'une partie propre de E.

d) Un ensemble sera structuré s'il est muni d'une partition, c'est-à-dire, s'il est considéré comme réunion d'une famille de parties non-vides et mutuellement disjointes ; une telle partie sera appelée domaine de la partition.

e) Soit E structuré et F une réplique (complète ou partielle) structurée (les deux partitions peuvent être ou ne pas être identiques même si F est une réplique complète). E et F peuvent avoir des éléments communs (donc non seulement identifiés mais identiques) mais il sera sous-entendu que la partie commune est une réunion de domaines qui appartiennent en même temps aux deux structures.

f) Terminons par une remarque d'une autre nature. Soit $f(x)$ une fonction définie pour x réel et $\geqslant 0$ et prenant des valeurs comprises dans l'intervale $[0, 2\pi)$. Considérons dans le plan euclidien la transformation définie par

$$x' = x \cos f(\sqrt{x^2 + y^2}) - y \sin f(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$y' = x \sin f(\sqrt{x^2 + y^2}) + y \cos f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Pour des raisons évidentes cette transformation peut être appelée rotation non rigide autour de l'origine. Il y a une vingtaine d'années ces rotations généralisées m'ont été signalées oralement par mon collègue et ami le professeur Ilie Popa, qui se demandait alors si elles peuvent intervenir naturellement dans un problème quelconque. Leur présence dans un exemple donné ci-dessous est une réponse possible à la question de M. Popa.

3. Soit E un ensemble donné, $F = E \times E$ et R une famille de répliques de F, certaines répliques pouvant être partielles. On structure chaque réplique, en tenant compte de la remarque c) du § 2, s'il y a lieu. Choisissons dans chaque ensemble de R une famille de domaines de la partition correspondante et soit K l'ensemble des domaines choisis pour chaque élément de R. Alors on arrive aussitôt à la définition du vecteur :

Chaque domaine appartenant à K est, par définition, un vecteur sur E et K est l'espace de ces vecteurs.

Introduisons l'hypothèse annoncée que nous formulerons de la manière suivante : *le nombre cardinal de K est un nombre pour lequel on connaisse au moins un espace vectoriel L* (sur un corps convenablement choisi).

Alors on a la proposition suivante :

L'espace des vecteurs peut être muni de la structure d'un espace vectoriel.

C'est immédiat à l'aide d'une bijection de L sur K et transfert des opérations.

L'objection principielle que l'on pourrait formuler contre la définition donnée serait fournie par la constatation de l'emploi répété de l'axiome du choix, mais cette objection n'en est pas une pour le „working mathematician".

Complétons le tableau par les définitions suivantes :

Soit f une bijection de E sur E et $\bar{f}$ la bijection induite sur F (et ses répliques, éventuellement après restriction), c'est-à-dire : $\bar{f}[(a, b)] = (f(a), f(b))$.

Une affinité de base E de K est une bijection f de E telle que $\bar{f}$ permute entre eux les domaines des K et en même temps induit un automorphisme du groupe additif de K.

En particulier *une translation sera une affinité qui induit l'automorphisme identique.*

Il est évident qu'on a la proposition suivante :

L'ensemble de toutes les affinités de base E forme, par composition, un groupe qu'on appellera le groupe total de K ; les translations forment un sousgroupe du groupe total.

Il est clair ce qu'on doit entendre par affinité et translation sans base (des bijections de F sur F qui possèdent les mêmes propriétés sans être de la forme $\bar{f}$).

4. Des hypothèses supplémentaires peuvent se révéler très utiles (une telle hypothèse est, par exemple, l'équipotence des domaines de K).

Il est aussi indispensable d'introduire de nouvelles hypothèses si l'on veut pouvoir opérer avec les représentants (un élement d'un domaine sera un représentant de ce domaine).

Si $(a, x) \in F$ appartient à un domaine, nous dirons que le domaine passe à gauche par a.

Acceptons l'hypothèse suivante : *quelque soit $a \in E$, chaque domaine passe par a à gauche au plus une fois.*

Alors on peut définir les opérations entre représentants par les définitions suivantes.

Soient D_1 et D_2 deux domaines $D_1 + D_2 = D_3$. Si $(a, b_1) \in D_1$, $(a, b_2) \in D_2$ on pose $(a, b_1) + (a, b_2) = (a, b_3)$ si $(a, b_3) \in D_3$; si D_3 ne passe pas par a, l'addition n'est pas définie. De même soit $\alpha D_1 = D_2$ alors $\alpha(a, b_1) = (a, b_2)$ si $(a, b_2) \in D_2$, $\alpha(a, b_1)$ restant indéfinie si D_2 ne passe pas à gauche par a. Il est clair que les opérations sont partout définies si l'on accepte l'hypothèse plus forte :

Par chaque $a \in E$ *chaque domaine passe à gauche une fois et une seule fois.* Dans ce cas $(a, b) + (c, d)$ reste indéfinie si $a \neq c$ (mais il en est ainsi déjà pour les segments orientés), de telle sorte que l'addition des représentants ressemble à un groupoïde de Brandt, dont elle a la plupart des propriétés et qu'on arrive ainsi très près des catégories.

Des définitions similaires pourraient conduire aux opérations à droite ou mixte ($(b, a) + (c, a)$, respectivement $(a, b) + (b, c)$), mais il est inutile d'insister là-dessus.

5. Donnons quelques exemples, choisis à dessein très simples avec des exemples d'affinités, sans chercher à déterminer le groupe total.

a) Soit $E = \{a, b\}$, $E \times E = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Partageons $E \times E$ en trois domaines, par exemple

$$\alpha = \{(a, a), (a, b)\}, \quad \beta = (b, a), \quad \gamma = (b, b).$$

$\{\alpha, \beta, \gamma\}$ peut être structuré en un corps à trois éléments, qui peut être considéré comme un espace vectoriel sur le corps des restes mod 3.

b) Soit E l'ensemble des réels, les domaines de F étant les circonférences centrées à l'origine, y compris (0, 0) considéré comme circonférence de rayon nul. Ajoutons une réplique F_1 identiquement structurée, les deux répliques ayant en commun la circonférence nulle. Faisons correspondre le nombre $r > 0$ à la circonférence de rayon r de F et le nombre $-r$ à la même circonférence de F_1, (0, 0) correspondant au nombre 0. Cette bijection de K sur le corps des réels le transforme aussitôt en un espace de dimension 1 sur les réels ; on ne peut exécuter à gauche que les additions du type $(a, 0) + (a, 0)$; $(a, b) \to (ka, kb)$, $k \neq 0$ est une affinité de base E ; les rotations non-rigides sont aussi des rotations vectorielles sans base.

c) E l'ensemble des réels, chaque point de F est un domaine, l'ensemble des points du type $(a, -a)$ est K. L'espace vectoriel des domaines est de dimension 1 sur les réels. Chaque domaine ayant un seul représentant, le problème des opérations avec les représentants est inexistant. Sauf la translation identique il n'y a pas de translations de base E ; toute application bijective satisfaisant à la condition $f(x) = y \Rightarrow f(-x) = -y$ est une affinité de base E (en particulier $f(x) = kx, k \neq 0$). Si l'on partage E en classes de deux éléments définissons $g[(x, -x)] = (\bar{x}, -\bar{x})$, x et $\bar{x}$ appartenant à la même classe et $g[(\bar{x}, -\bar{x})] = (x, -x)$; g est une translation sans base et des affinités sans base existent aussi.

d) Soit E l'ensemble des réels ; les domaines seront les rayons ouverts partant de l'origine, après élimination de l'axe des ordonnées. Les rayons de droite sont en correspondance biunivoque avec les réels, de même les rayons de gauche. Finalement les domaines de K seront tous les couples possibles de la forme (d, g), où d est un rayon de droite et g un rayon

de gauche. L'espace vectoriel des couples le plus naturel et dont la construction est évidente sera isomorphe à l'espace vectoriel à deux dimensions sur les réels.

e) Soit E l'ensemble des réels ; choisissons comme domaines sur F deux circonférences concentriques notées C_{-1} et C_1. A chaque suite de réels x_1, x_2,... faisons correspondre une réplique de F identiquement structurée et choisissons dans K, C_{-1} si $x_1 \leqslant 0$, C_1 si $x_1 > 0$; on obtient immédiatement un espace vectoriel isomorphe à l'espace vectoriel des suites réelles à scalaires réels.

6. La détermination de toutes les affinités étant en général un problème difficile (il l'est déjà pour certains des exemples indiqués), on peut se borner à prendre pour groupe de K un sousgroupe du groupe total qu'on peut directement construire. On peut compléter la construction en étendant à l'espace la topologie de L.

En notant par $\overline{K}$ l'ensemble qu'on obtient en faisant la réunion des domaines de K considérés comme des ensembles de points, on peut encore topologiser d'une autre manière : chaque ouvert sera une réunion de domaines de K et on obtient tous les ouverts non-vides de cette manière. Cette topologie n'est pas en général Hausdorff et pout elle chaque ouvert est un fermé et vice-versa.

La construction est ainsi achevée dans ses grandes lignes. Elle semble présenter un certain intérêt à un double point de vue : en partant de E donné, on peut construire d'une infinité de manières des espaces vectoriels pour un même E et pour un seul de ces espaces on a encore la liberté de choisir le groupe de K ; pour les espaces vectoriels c'est une méthode de construction de modèles concrets d'espace connus, chaque modèle étant en outre muni d'une structure groupale.

7. Remarques finales.

a) La construction se prête sans modification notable à la construction d'autres structures ; par exemple, les circonférences de l'exemple b) peuvent être considérées comme les éléments d'un espace vectoriel à scalaires $\geqslant 0$ (v. [2]).

b) Un problème intéressant mais difficile est le suivant : en partant de E déterminer les structures vectorielles à groupe total donné.

c) Un problème naturel est, en partant de E, chercher les espaces K dont le groupe total est le produit direct d'un groupe de translations et d'un autre groupe d'affinités (pour se rapprocher des vecteurs élémentaires on peut même imposer la commutativité du groupe des translations).

d) Caractériser l'espace des vecteurs élémentaires (peut-être par linéarité et minimalité).

c) La construction indiquée pourait être aisément généralisée aux multipoints (éléments de E^n avec $n > 2$). Pourtant les multipoints semblent plus intéressants comme éléments d'une géométrie des figures finies.

Reçue le 18 V 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Climescu Al., *Vectorii ca bipuncte*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *3–4*, pp. 1–6.
2. — *Les espaces à scalaires* $\geqslant 0$. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3–4*, pp. 1–6.
3. Miron R., *Geometrie elementară*. EDP, Buc., 1968.

VECTORI ŞI CONSTRUCŢIA DE MODELE CONCRETE DE SPAŢII VECTORIALE

(Rezumat)

Se generalizează definiţia dată vectorilor de către R. Miron în [3, p. 11] şi cu ajutorul ipotezei menţionate în § 3 se ajunge la construcţia de spaţii vectoriale izomorfe cu spaţii cunoscute însă îmbogăţite cu o structură grupală.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secția I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 517.11

THE COMPLETE BOOLEAN ALGEBRA OF THE GRAPHS DEFINED ON A SET

BY

GH. COSTOVICI

The purpose of this note is to show that the set of the graphs defined on a set forms a complete Boolean algebra, complete isomorphic with complete Boolean algebra of the binary relations defined on the same set.

Definition 1. The triple (A, B, f) denotes the mapping for which A is the domain, B is the range and f is the correspondence law, which assings, to every element of A a single element of B.

Definition 2. The mapping $R_\rho = (M \times M, \{0, 1\}, \rho)$ is said to be the binary relation R_ρ defined on the set M.

Definition 3. The mapping $G_\alpha = (M, P(M), \alpha)$ is said to be the graph G_α defined on the set M.

We have noted by $M \times M$ the Cartesian product of M by M, by the $\{0, 1)$ the set with two elements 0 and 1, and with $P(M)$ the set of the subsets of M.

We suppose that the empty $\varnothing \in P(M)$.

The definition 3 slightly differs in the form with respect to the definition of the graph given in [1].

Theorem 1. *The set $A(M, B)$ of the mappings $A_\alpha = (M, B, \alpha)$ where M is a set and B a complete Boolean algebra, forms a complete Boolean algebra with respect to the order (reflexive, antisymmetric and transitive binary relation)*

$$R_a = (A(M, B) \times A(M, B), \quad \{0, 1\}, \quad a)$$

where $a(A_\alpha, A_\beta) = 1 \Leftrightarrow a'(\alpha(x), \beta(x)) = 1$ for all $x \in M$ and where $R_{a'} = (B \times B, \{0, 1\}, a')$ denotes the order in B.

Supplement: $\inf \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} = A_\Pi$, $\sup \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} = A_\Sigma$, $(A_\gamma)' = A_{\gamma'}$, are defined by: $\Pi(x) = \inf \{\gamma(x)\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\Sigma(x) = \sup \{\gamma(x)\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\gamma'(x) = (\gamma(x))'$.

The least element of $A(M, B)$ ist A_i where $i(x) = i$, the least element of B and the greatest element of $A(M, B)$ is A_s where $s(x) = s$ the greatest element of B, for all $x \in M$.

The demonstration of the supplement and the verification of the distributive law in $A(M, B)$ is left to the reader.

Corollary. The set $G(M)$ of the graphs $G_\alpha = (M, P(M), \alpha)$ forms a complete Boolean algebra with respect to the order $R_g = (G(M) \times G(M), \{0, 1\}, g)$ where $g(G_\alpha, G_\beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha(x) \subseteq \beta(x)$ for all $x \in M$.

Theorem 58 [2]. *The set $R(M)$ of the binary relations $R_\rho = (M \times M, \{0, 1\}, \rho)$ forms a complete Boolean algebra with respect to the order $R_r = (R(M) \times R(M), \{0, 1\}, r)$ where $(r(R_\alpha, R_\beta) = 1) \Leftrightarrow (\alpha(x, y) = 1 \Rightarrow \beta(x, y) = 1)$, x and y in M.*

Supplement: $\inf \{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} = R_\Pi$, $\sup \{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} = R_\Sigma$, $(R_\gamma)' = R_{\gamma'}$, are defined by: $\Pi(x, y) = 1 \Leftrightarrow \gamma(x, y) = 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma$, $(\Sigma(x, y) = 1) \Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma$ and $\gamma(x, y) = 1)$, $\gamma'(x, y) = 1 \Leftrightarrow \gamma(x, y) = 0$.

The least element of $R(M)$ is R_i where $i(x, y) = 0$ for all x and y in M and the greatest element of $R(M)$ is R_s where $s(x, y) = 1$ for all x and y in M.

Theorem 2. *The mapping $(G(M), R(M), f)$ where $f(G_\alpha) = R_\alpha$ and $\alpha(x, y) = 1 \Leftrightarrow y \in \alpha(x)$ is a complete latticialy isomorphism.*

The demonstration follows taking in account the corollary and supplements.

Received the 14 XII 1968

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics II

REFERENCES

1. Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, Paris, 1958.
2. Szász G., *Introduction to Lattice Theory*. 3. ed., Budapest, Akadémiai Kiadó, 1963.

ALGEBRA BOOLE COMPLETĂ A GRAFELOR DEFINITE PE O MULȚIME

(Rezumat)

Se arată că mulțimea grafelor definite pe o mulțime, formează o algebră Boole completă, complet izomorfă cu algebra Boole completă a relațiilor binare definite pe aceeași mulțime.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 512.9

ALGÈBRES ASSOCIATIVES SUR UN CORPS NONCOMMUTATIF

PAR

I. ENESCU

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Université de Jassy, 25—27 octobre 1968

1. La commutativité du corps des scalaires sur lequel on définit une algèbre, joue un rôle essentiel pour ses propriétés de structure et fait, pratiquement possible, leur étude.

Compte tenu que la notion d'espace linéaire peut être facilement généralisée pour un corps noncommutatif de scalaires, nous nous proposons de construire un modèle d'algèbre associative sur un tel corps.

Bien que la construction qui serra présentée est tributaire au cas commutatif, nons croyons qu'elle peut constituer un point de départ pour un domaine quelconque d'opérateurs.

2. Définition 1. Une algèbre associative sur un corps noncommutatif K, est un anneau associatif A, pour lequel on définit une opération extérieure bilatère, la multiplication à scalaires de K, notée par αx et respectivement $x\alpha$ ($\alpha \in K$, $x \in A$), satisfaisant les axiomes:

(*) $\alpha x \in A$, $x\alpha \in A$; $\forall x \in A$, $\forall \alpha \in K$;

(1) $\alpha x = x\alpha$ si et seulement si x appartient au centre de A ou α appartient au centre de K;

(2) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x \qquad 1 \in K$;

(3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, (3′) $(x\alpha)\beta = x(\alpha\beta)$;

(4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, (4′) $x(\alpha + \beta) = x\alpha + x\beta$;

(5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, (5′) $(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$;

(6) $$(\alpha x)(y\beta) = \alpha[(xy)\beta] = [\alpha(xy)]\beta,$$
$$\forall \alpha, \forall \beta \in K, \quad \forall x, \forall y \in A.$$

Il en résulte les conséquences:

(7) $ox = xo = 0$, $o \in K$, $0 \in A$, $\forall x \in A$;

$$\alpha 0 = 0\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in K, \quad 0 \in A; \tag{8}$$

$$\alpha (xy) = (\alpha x) y, \quad \forall \alpha \in K, \quad \forall x, \forall y \in A; \tag{9}$$

$$(xy)\,\beta = x(y\beta), \quad \forall\, \beta \in K, \quad \forall x, \forall y \in A; \tag{10}$$

$$(\alpha x)(x\alpha) = (\alpha x^2)\,\alpha = \alpha (x^2\,\alpha), \quad \forall \alpha \in K, \quad \forall x \in A; \tag{11}$$

$(\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(xy)$ seulement pour x, y contenus dans le centre de A, ou α, β dans le centre de K. (12)

Les relations (7) et (8) sont celles connues du cas des scalaires commutatifs et en résultent par la même voie.

Les relations (9), (10) et (11) s'obtiennent de l'axiome (6) dans laquelle on remplace respectivement $\beta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = \alpha$, $y = x$. Enfin, la conséquence (12) résulte de (6) et (1), parce que, si x et y appartient au centre de A, le produit xy en est aussi et donc, il est permutable avec tous les scalaires de K: $\alpha[(xy)\,\beta] = \alpha[\beta\,(xy)] = (\alpha\beta)(xy)$. Si α et β se trouvent dans le centre de K, alors $\alpha[(xy)\,\beta] = \alpha[\beta\,(xy)] = (\alpha\beta)(xy)$, compte tenu de l'axiome (1).

On constate facilement que, dans le cas des scalaires commutatifs, les axiomes (3), (4) et (5) coïncident avec (3'), (4') et (5') respectivement et ont comme conséquence (6), tandis que l'axiome (1) est verifiée pour $\forall \alpha \in K$ et $\forall x \in A$.

Définition 2. Les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de A sont linéaires indépendants à gauche (à droite) si la relation

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0, \quad \text{ou} \tag{13}$$

$$x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \ldots + x_n \beta_n = 0, \qquad \alpha_i, \ \beta_i \in K, \tag{13'}$$

est possible seulement pour tous $\alpha_i = 0$ (ou $\beta_i = 0$).

Si (13) ou (13') ont lieu sans l'annulation de tous α_i (ou β_i), les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéaires dépendants à gauche (à droite).

Definition 3. Les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéaires indépendants, si, ils sont linéaires indépendants à gauche et à droite.

Définition 4. Le nombre maximum d'éléments linéaires indépendants appartenant au centre de A, forme une base de l'algèbre A et ce nombre est l'ordre de l'algèbre.

Remarques. 1. Nous supposons, par définition, que tout élément de A est exprimable par des combinaisons linéaires des éléments d'une base.

2. Si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forment une base dont la loi de multiplication est $e_i \cdot e_j = \gamma_{ij}^k e_k$, les constantes de structure γ_{ij}^k, $(i, j, k = 1, 2, \ldots n)$, appartiennent au centre de K.

3. Le centre de A n'est pas un sousespace linéaire sur K et, en conséquance, ne forme pas une sousalgèbre de A. Mais, le centre de A est une algèbre commutative sur le centre du corps K; notons cette algèbre par C.

Théorème 1. *Tout élément de A s'exprime uniquement comme une combinaison linéaire des éléments d'une base.*

En effet, soit $x = \sum_1^n \alpha_i e_i$ et $x = \sum_1^n \beta_i e_i$; alors, nous avons:

$$\sum_1^n (\alpha_i e_i - \beta_i e_i) = 0 \Rightarrow \sum_1^n (\alpha_i - \beta_i) e_i = 0 \Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i ,$$

$$(i = 1, 2,..., n).$$

Les cas $x = \sum_1^n e_i \alpha_i$, $x = \sum_1^n e_i \beta_i$ ou $x = \sum_1^n e_i \alpha_i$ et $x = \sum_1^n \beta_i e_i$, reviennent, compte tenu de (1), à celui déjà présenté.

Remarque. Bien que le produit des éléments d'une base est commutatif, l'algèbre A n'est pas commutative, ainsi comme en résulte compte tenu de (1). Par conséquent, toutes les algèbres définies par (1),...,(6) ne sont pas commutatives, en exceptant la coïncidence avec le centre et alors, on retrouve le cas du corps des scalaires commutatifs.

Théorème 2. *Si C est une somme directe de p sousalgèbres, l'algèbre A est la somme directe de p sousalgèbres sur K.*

En effet, soit $n_1, n_2,...,n_n$ les éléments d'une base pour A, ainsi qu'ils forment respectivement des bases pour chaque composante C_i $(i = 1, 2,..., p)$, de la décomposition $C = C_1 \dot{+} C_2 \dot{+} ... \dot{+} C_p$.

Alors, [1], $U_i . U_j = 0$ si U_i et U_j appartiennent à des algèbres C_i différentes. Ce fait, attire pour A l'existence des p sousensembles, dont l'intersection est le zéro de A et ayant la propriété que, le produit des deux éléments quelconques, contenus respectivement dans des sousensembles differents est égal à zéro.

Le fait que ces sousensembles forment respectivement des sousalgèbres est évident.

3. Si nous déffinissons les notions d'idéal gauche, droit, bilatère élément idempotent, nilpotent, proprement nilpotent, algèbre simple, semisimple, nilpotente, radical, etc., comme celles du cas des scalaires commutatifs, [1], on voit qu'il est possible d'entreprendre un étude parallel à celui, bien connu, des algèbres à scalaires commutatifs.

Compte tenu que la structure de C joue un rôle essentiel pour la structure de A, nous allons étudier successivement les cas dans lesquels C est simple, semisimple, nilpotente et à radical propre.

4. Soit C une algèbre simple. Alors, il n'existe pas aucune base pour A ayant la propriété que, quelques uns de ses éléments forment une base pour un idéal propre de C, ce qui attire l'absence des idéaux propres pour A, qui est donc simple.

Réciproquement, soit A simple. Alors C n'a pas des idéaux propres, parce que, en cas contraire, dans C existerait une base avec la propriété qu'une partie de ses éléments, multipliés par les autres, serraient exprimables

seulement par les premiers, ce qui attirerait l'existence d'un idéal propre pour A, qui est impossible. Nous avons donc démontré le

Théorème 3. *Une algèbre A sur K est simple, si et seulement si, son centre est une algèbre simple sur le centre du corps K.*

Compte tenu qu'une algèbre simple commutative est un corps commutatif, [1], le théorème 3 peut être encore formulé:

La condition nécessaire et suffisante affin qu'une algèbre A soit simple, est que son centre soit un corps commutatif.

Remarques. 1. Dans le cas d'un corps commutatif, cette condition n'est pas assurée, tel comme le démontre l'exemple suivant: soit l'algèbre, à scalaires réels, d'ordre $4n$, formée par le produit direct du corps des quaternions réels et l'algèbre polynômiale, H_{λ^n}, générée par le polynôme $P(\lambda) = \lambda^n$. Bien que son centre est un corps commutatif (isomorphe au corps réel), l'algèbre n'est pas simple, parce qu'elle possède un idéal propre formé par son radical [2].

2. Si K est un corps dont le centre est isomorphe au corps réel, il existe seulement deux types d'algèbres A simples: le corps K considéré comme algèbre sur lui même (C est isomorphe au corps réel) et l'algèbre simple d'ordre deux, qui corresponde au cas quand C est isomorphe au corps complexe.

5. Soit maintenant C semisimple. Dans ce cas, C est une somme directe de p corps commutatifs et, après le théorème 2, l'algèbre A est une somme directe de p sousalgèbres qui, compte tenu de théorème 3, sont simples.

Ayant en vue qu'aucune de cettes sousalgèbres n'est pas nilpotente (au cas contraire parmi les sousalgèbres de la décomposition de C existeraient des unes nilpotentes, ce qui est impossible), il en résulte qu'aucune sousalgèbre ne contient pas des éléments proprement nilpotents (en exceptant le zéro) et alors l'algèbre A est semisimple.

Réciproquement, si A ne contient pas aucun élément proprement nilpotent différent de zéro, l'algèbre C n'en contient pas de tels éléments, parce que le centre de l'algèbre A est un sousanneau de A.

Les résultats établis démontrent le

Théorème 4. *La condition nécessaire et suffisante affin que l'algèbre A soit semisimple, est que les éléments du son centre forment une algèbre semisimple sur le centre du corps K.*

Conséquence. Une algèbre semisimple est pourvue d'unité principale.

En effet, soit e l'unité principale de C. Si $U_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ forment une base, soit x un élément arbitraire de A: $x = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \cdots + \alpha_n U_n$; nous avons

$$ex = e(\alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_n U_n) = e(\alpha_1 U_1) + e(\alpha_2 U_2) + \cdots + e(\alpha_n U_n) = e(U_1 \alpha_1) +$$
$$+ e(U_2 \alpha_2) + \cdots + e(U_n \alpha_n) = (e U_1)\alpha_1 + (eU_2)\alpha_2 + \cdots + (eU_n)\alpha_n =$$
$$= U_1 \alpha_1 + U_2 \alpha_2 + \cdots + U_n \alpha_n = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \cdots + \alpha_n U_n = x\,.$$

Puis, parce que $e \in C$, il en résulte $ex = xe$, donc $ex = xe = x$.

6. Supposons C nilpotente d'indice p. Alors, le produit de p éléments arbitraires de C est égal à zero. Parce que le produit de p éléments arbitraires de A s'exprime seulement par des produits qui contiennent p facteurs de la base, il en résulte que ce produit est égal à zéro, ce qui attire la nilpotence d'indice p de l'algèbre A.

D'autre part, si A est nilpotente d'indice p, le produit de p éléments de C est égal à zéro et alors, a lieu le

Théorème 5. *La condition nécessaire et suffisante affin que l'algèbre A soit nilpotente d'indice p, est que son centre soit une algèbre nilpotente d'indice p sur le centre du corps K.*

Conséquence. Parce que pour C l'indice de nilpotence $p \leqslant n+1$ (n = l'ordre de C), [3], il en résulte la même limitation pour l'indice de nilpotence de A.

7. Considérons maintenant que l'algèbre C a du radical propre dont l'indice de nilpotence est α et soit ξ un élément du radical de C et x un élément arbitraire de A.

Compte tenu que $\xi x = x\xi$, il en résulte que $(x\xi)^\alpha = x^\alpha \xi^\alpha = \xi^\alpha x^\alpha = (\xi x)^\alpha = 0$, ce qui démontre que l'élément ξ est proprement nilpotent pour A.

Réciproquement, soit A une algèbre avec radical propre ; alors, ayant en vue les théorèmes 3, 5 et 6, il en résulte que C ne peut être pas respectivement corps commutatif, semisimple ou nilpotente, c'est-à-dire C a du radical propre.

Nous avons ainsi démontré le

Théorème 6. *La condition nécessaire et suffisante affin qu'une algèbre A soit dotée du radical propre, est que son centre ait cette propriété.*

Remarque. Le théorème 6 n'est pas vrai pour le cas des scalaires commutatifs, tel comme le démontre l'exemple donné par $Q \times H_{\lambda^n}$, qui a du radical propre, mais son centre est un corps commutatif [2].

8. Nous allons maintenant construire des exemples, dans lesquels, pour simplifier les calculs, nous considérons des algèbres d'ordre deux, définies sur le corps Q des quaternions réels.

9. Soit A l'ensemble des couples ordonnées (a, b) des quaternions réels et posons :

$$x = (a, b), \qquad y = (c, d). \tag{14}$$

Nous définissons la somme des deux couples par

$$x + y = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \tag{15}$$

et la multiplication à gauche et à droite par les scalaires de Q respectivement par

$$\lambda (a, b) = (\lambda a, \lambda b) ; \qquad (a, b)\lambda = (a\lambda, b\lambda). \tag{16}$$

Définissant le produit de couples par

$$xy = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc), \tag{17}$$

l'ensemble A devient une algèbre sur le corps Q.

On constate que, indépendament de la définition (17) du produit, la relation $\lambda x = x\lambda$ revient à $\lambda a = a\lambda$ et $\lambda b = b\lambda$, $\forall \lambda \in Q$ et a, b, des nombres réels arbitraires.

Or, ce fait attire a fortiori, que λ soit réel, ou a et b soyent réels, ce que signifie que $\lambda x = x\lambda$ si et seulement si λ appartient au centre de Q, ou x appartient au centre de A.

On peut vérifier sans difficultés les axiomes (2), (3), (4), (5), (3'), (4'), (5'). Nous démontrons que l'axiome (6) est aussi vérifiée. Soit $\alpha x = (\alpha a, \alpha b)$ et $y\beta = (c\beta, d\beta)$; nous avons

$$(\alpha x)(y\beta) = (\alpha a, \alpha b)(c\beta, d\beta) = (\alpha ac\beta - \alpha bd\beta, \alpha ad\beta + \alpha bc\beta) =$$

$$= [\alpha (ac - bd, ad + bc)]\beta = \alpha [(ac - bd, ad + bc)\beta].$$

On voit encore que le centre C de A est formé par l'ensemble des couples ordonnées de nombres réels.

On constate immédiatement que les éléments

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1) \tag{18}$$

constituent une base pour A, qui, en conséquence, a l'ordre deux.

Les éléments e_1, e_2 se multiplient par la loi

$$e_1 e_1 = e_1, \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2, \quad e_2 e_2 = -e_1, \tag{19}$$

c'est-à-dire, C est une algèbre isomorphe au corps complexe, sur le centre de Q. Alors, après le théorème 3, A est une algèbre simple. Nous remarquons que A n'est pas un corps, parce qu'elle a des diviseurs du zéro. En effet si $x = (i, j)$, $y = (k, -1)$, le produit $xy = (ik + j, jk - i) = (0, 0) = 0$.

10. En multipliant les couples (14) après la loi

$$xy = (a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc), \tag{20}$$

nous obtenons une algèbre d'ordre deux sur Q, pour laquelle une base est formée par les éléments (18), dont le produit est donné par

$$e_1 e_1 = e_1, \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2, \quad e_2 e_2 = e_1. \tag{21}$$

En changeant la base par

$$U_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2), \quad U_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2), \tag{22}$$

on aboutit à la loi

$$U_1 U_1 = U_1, \quad U_1 U_2 = U_2 U_1 = 0, \quad U_2 U_2 = U_2, \tag{22'}$$

ce qui démontre que le centre C est une algèbre semisimple à scalaires réels et donc, l'algèbre A est aussi semisimple ayant une structure de somme directe de deux algèbres simples d'ordre un, respectivement isomorphes au corps Q.

11. Soit le produit des couples (14), défini par

$$xy = (a, b)(c, d) = (0, ac). \tag{23}$$

On obtient une algèbre A pour laquelle une base est formée par les éléments (18) qui ont la loi de multiplication

$$e_1 e_1 = e_2, \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0, \quad e_2 e_2 = 0. \tag{23'}$$

On voit que C est nilpotente d'ordre deux et indice trois et alors, après le théorème 5, l'algèbre A est nilpotente d'indice trois sur Q.

12. Enfin introduisons le produit par

$$xy = (a, b)(c, d) = (ac, ad + bc). \tag{24}$$

Les éléments (18), qui constituent une base, ont la loi de multiplication

$$e_1 e_1 = e_1, \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2, \quad e_2 e_2 = 0, \tag{24'}$$

et alors C a du radical propre, formé par l'ensemble des éléments de la forme αe_2, ou α sont scalaires du centre de Q, donc nombres réels. Par conséquent, l'algèbre A a du radical propre, formé par les éléments λe_2, avec λ scalaire arbitraire de Q. On voit que le radical est une algèbre d'ordre un sur Q, dont une base est formée par l'élément e_2.

Parce que $e_2 e_2 = 0$, il en résulte que le radical de A est l'algèbre nulle d'ordre un sur le corps des quaternions réels.

Institut Polytechnique, Jassy
Chaire de Mathematiques II

BIBLIOGRAPHIE

1. Curtis C., Reiner I., *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Interscience Publ., New York, London, 1962.
2. Enescu I., *O extindere a algebrelor polinomiale cu scalari reali*. An. St. Univ. Iaşi, S. I., Mat., 1968, **XIV**, *1*, pp. 1–5.
3. Scorza G., *Sulla struttura delle algebre pseudonulle*. Atti Acc. Naz. dei Lincei, Rend., 1934, ser. 20, **6**, p. 143.

ALGEBRE ASOCIATIVE PE UN CORP NECOMUTATIV

(Rezumat)

Se prezintă un model de algebră peste un corp K necomutativ, ca fiind un inel asociativ pentru care se defineşte o operaţie exterioară de înmulţire cu scalarii din K, satisfăcînd axiomele (*), (1),..., (6).

Se construiesc exemple de asemenea algebre, dovedindu-se astfel necontradicţia axiomelor introduse.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I :
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 519.1

TEORIA DEL CALCOLO COMBINATORIO GENERALIZZATO

DI

FRANCESCO SAVERIO ROSSI

1. Introduzione

Il Calcolo Combinatorio, che ha iniziato i suoi primi passi in epoca remota[1]), si può dire che abbia raggiunto oramai la sua compiuta sistemazione, e tentativi di ricerche nuove in questo campo rischiano di sfociare in pure esercitazioni formali senza utili conseguenze. Tuttavia uno studio fondato su presupposti nuovi non dovrebbe mancare di dare un suo contributo a una rinnovata conoscenza dell' *Ars Combinatoria*[2]), soprattutto per le applicazioni che se ne potrebbero trarre. E' questa l'origine del presente lavoro che spero non del tutto inutile. Un trattato, un testo qualunque di Analisi Matematica presenta sempre un suo capitolo che discorre di *disposizioni, combinazioni, inversioni...*, inerenti a gruppi di n oggetti o enti ($n > 1$), da scegliere k alla volta ($k \leq n$), secondo certe definizioni o leggi, alle quali debbono soddisfare; capitolo al quale si articolano per necessità di calcolo altri seguenti. Ora, a me interessa mettere in rilievo che il numero di quei gruppi deriva sì da quelle leggi o norme, ma anche dall'aggregato particolare di oggetti o di enti da cui si parte, che nel noto Calcolo Combinatorio posso pensare assimilato a quello di semplici punti distinti, disposti su di una curva regolare — in particolare su di una retta — in maniera più o meno arbitraria, sì da formare un insieme di punti *discreto* (un discontinuo).

In una prima valutazione, la questione della collocazione degli n oggeti o punti su di una linea, o anche su di un piano o nello spazio, non ha alcuna importenza circa la formazione dei gruppi, in quanto: a) *si suppone che gli enti siano scambiabili fra di loro;* b) *che il loro ordine importi solo delle particolari caratteristiche dei gruppi sceiti* (ad esempio la classe delle permutazioni rispetto a una permutazione fondamentale[3]).

---

1) In uno scritto del matematico indiano Lukumar Ranjan Das essi si fanno risalire a circa 300 anni prima dell' e. v. (Periodico delle Matematiche, vol. II, S. IV, Zanichelli, Bologna, 1932; *La théorie des permutations et des combinaisons dans le Ganita hindou,* trad. da H. de Varigny, pp. 133—140).

2) La codificazione moderna del Calcolo Combinatorio si ha tra l'altro con l'opera di G. W. Leibniz, *Dissertatio de Arte Combinatoria,* edita a Lipsia nel 1666 (Werke Mathematische Schriften, Halle, 1888, C. I. Gerhardt) e, con l' ltra di Jacques Bernoulli, *Ars Conjectandi,* edita a Basilea nel 1713. La più completa opera sull'argomento è quel'a di Eugen Netto, [11]. Vi è una seconda edizione del 1927. Esistono tuttora ragguardevoli cultori di questo ramo delle mathematiche, come John Riordan, autore del volume [14] che, con i suoi risultati, si riallaccia all'opera del Netto.

3) Va detto, per inciso, che se A_1 è una delle leggi di formazione di quegli aggruppamenti, riflettenti le condizioni $a_1, a_2, ..., a_k$, da essa può farsi discendere un'altra A_2

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

Ma, desiderando instituire una teoria combinatoria per speciali ragguppamenti di enti od oggetti, cioè un calcolo combinatorio di enti condizionati da certe proprietà, si può partire, in astratto, da aggregati soddisfacenti all'appartenenza ad una figura di uno spazio a un numero qualunque di dimensioni r. E sarà bene stabilire subito per simili aggregati che gli enti che li compongono siano:

1) *semplicemente assimilati a punti dello spazio* S_r;

2) *disposti in modo che da essi sia sempre possibile estrarre ad arbitrio un aggregato parziale appartenente ancora allo* S_r *e mai interamente a un* S_k *dello* S_r $(k<r)$.

E'facile concepire un tale aggregato di punti, che simboleggeremo con $G^{(r)}$, partendo da un S_3, dal quale risaliremo per astrazione a un S_r qualunque. A chiarimento di quanto detto, ecco un esempio di costruzione di un simile aggregato [1, pp. 732—742], [12, pp. 554—557], [8, p. 170]:

a) Fissato in S_3 un sistema coordinato cartesiano ortogonale per i punti dello spazio (assimilabile a uno obliquo, senza venir meno alla generalità per il nostro scopo), di origine O e de unità U, unica per tutti gli assi orientati, come è lecito, pensiamo disposti su ciascun asse dei punti a distanze uguali l'uno dall'altro, indi costruiamo degli S_2 per ciascun punto paralleli agli S_2 fondamentali.

In tal modo, di astrazione in astrazione, si perverrà finalmente all'individuazione di determinati S_{r-1} dello S_r affini a quelli fondamentali (con $r-1$ punti all' ∞ comuni). L'iniseme di tutti i punti così disposti, determinati dall'intersezione di tali S_{r-1} è un $G^{(r)}$ infinito, dal quale è possibile estrarre un r-parallelepipedo (un r-cubo), con $n_1, n_2, \ldots, n_r$ punti (n^r), essendo $n_i > 1$ e $i=1,2,\ldots,r$. Esso è un *aggregato numerabile.*

Il più semplice $G^{(r)}$, constituito da un sol punto dello S_r, si ottiene ponendo $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$. Per $r=1$, si deduce l'aggregato che è alla base del classico Calcolo Combinatorio.

Nel seguito ammetteremo che un aggregato qualunque di punti sia un particolare $G^{(r)}$, cioè tutti i punti non appartengano mai interamente allo stesso iperpiano, nè a un medesimo S_k $(k<r)$, affine a uno fondamentale.

2. Disposizioni e combinazioni semplici per un $G_n^{(r)}$ [4])

Per semplicità, in un primo tempo, ci riferiremo all'aggregato $G_n^{(r)}$ formato dall'r-cubo A contenente n^r punti-nodi; non sarà difficile estendere i risultati a un r-parallelepipedo contenente $n_1, n_2, \ldots, n_r$ punti-nodi. Inoltre sottintenderemo gli indici relativi al punto P, individuato come intersezione degli r iperpiani $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ non essendo per ora questi indispensabili.

Poniamo quindi la definizione: *disposizioni semplici alla classe* k (o a k a k) *degli* n^r *punti-nodi* (oggetti) *di un r-cubo, constituenti l'aggregato* $G_n^{(r)}$, *è il numero totale degli aggruppamenti di* k *di essi distinti, di cui mai 2*

---

imponendo condizioni ulteriori più restrittive: $a_1, a_2, \ldots, a_k$ con $k>h$: diremo allora che $A_2 < A_1$. Così le permutazioni o le combinazioni (A_2) possono farsi derivare dalle disposizioni di n oggetti alla classe $m\,(A_1)$ con l'imporre $m=n$, ovvero l'indifferenza rispetto all'ordine degli elementi in due gruppi qualsiansi alla medesima classe.

4) Per tutte le definizioni combinatorie ved. [11].

appartengano allo stesso iperpiano (o a uno stesso S_k, con k minore di r) *affine a uno fondamentale, differenti fra di loro per un oggetto-nodo almeno o per l'ordine attribuito ad esso.* In simboli diremo tale nomero $D^{(r)}_{n,k}$.

Si trova che esso è dato da

$$D^{(r)}_{n,k} = (D^{(1)}_{n,k})^r . \tag{1}$$

Infatti si ha: $D^{(r)}_{n,1} = n^r$; e, in generale, la relazione ricorrente

$$D^{(r)}_{n,k} = D^{(r)}_{n,k-1}\,(n-k+1)^r , \tag{2}$$

onde facilmente si trae la (1). In particolare, per $k=n$,

$$D^{(r)}_{n,n} = P^{(r)}_{n} = (P^{(1)}_{n})^r = (n\,!)^r , \tag{3}$$

che costituisce il numero delle permutazioni di $G^{(r)}_{n}$.

In modo analogo si trattono le combinazioni semplici $C^{(r)}_{n,k}$, definite come il numero dei gruppi ottenuti prendendo k degli n punti-nodi con le stesse condizioni precedenti, in modo che due gruppi differiscano almeno per un oggetto.

Si deduce direttamente che

$$C^{(r)}_{n,k} = D^{(r-1)}_{n,k}\, C^{(1)}_{n,k} , \tag{4}$$

in base al ben noto ragionamento:

$$C^{(r)}_{n,k}\, P^{(1)}_{k} = D^{(r)}_{n,k} . \tag{5}$$

Per $k=1$, $C^{(r)}_{n,1} = 1$; per $k=n$, $C^{(r)}_{n,n} = (n\,!)^{r-1}$.

Dall'ultima relazione per $r=2$, $C^{(2)}_{n,n} = n\,!$ (numero dei termini di una matrice quadrata di ordine n); per $r=3$, si ha $C^{(3)}_{n,n} = (n!)^2$ (numero dei termini di un $G^{(3)}_{n}$ scelti a n a n, ovvero dei termini di una matrice cubica).

La transposizione dei risultati dallo spazio a $r-1$ dimensioni, a quello a r dimensioni, fermi restando k e n, comporta:

$$C^{(r)}_{n,k} : C^{(r-1)}_{n,k} = D^{(1)}_{n,k} \tag{6}$$

e, in generale, per $s \leqslant r$

$$C^{(r)}_{n,k} : C^{(s)}_{n,k} = D^{(r-s)}_{n,k} . \tag{7}$$

3. Disposizioni con ripetizione. Combinazioni complete

Se alle definizioni precedenti si aggiunge la condizione che gli enti possano essere ripetuti una o più volte si dedurranno le disposizioni o le combinazioni complete o con ripetizione, $D'^{(r)}_{n,k}$, $C'^{(r)}_{n,k}$.

Il computo di tutte le disposizioni complete si otterrà osservando che

$$D'^{(r)}_{n,1} = n^r, \quad D'^{(r)}_{n,2} = D^{(r)}_{n,2} + D^{(r)}_{n,1}. \tag{8}$$

Quest'ultima si interpreta dicendo che, per ottenere le disposizioni binarie complete, a ciascun punto del $G^{(r)}_n$ basta accoppiare un punto qualunque dell'aggregato $H^{(r)}_{n-1}$ estratto dal primo nella maniera più arbitraria e in più aggiungere il numero dei punti stessi. Si osservino i risultati:

$$\begin{aligned} D'^{(r)}_{n,3} &= D^{(r)}_{n,3} + 3D^{(r)}_{n,2} + n^r, \\ D'^{(r)}_{n,4} &= D^{(r)}_{n,4} + 6D^{(r)}_{n,2} + 7D^{(r)}_{n,1} + n^r, \text{... e cosi via.} \end{aligned} \tag{9}$$

Andiamo ora a dimostrare la relazione per le combinazioni con ripetizione. Si ha:

$$C'^{(r)}_{n,k} = C^{(r)}_{n,k} + \binom{k-1}{1} C^{(r)}_{n,k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} C^{(r)}_{n,1}. \tag{10}$$

Intanto il secondo membro della (10) contiene l'addendo $C^{(r)}_{n,k}$ come è evidente. Se dal gruppo di combinazioni contenenti due oggetti identici, ne pensiamo soppresso uno (sempre il medesimo), se ne ottengono $C^{(r)}_{n,k-1}$, e se a ciascuno di questi anteponiamo uno alla volta $i\,(k-1)$ oggetti, si dedurrà il loro numero essere uguale a $\binom{k-1}{1} C^{(r)}_{n,k-1}$; analogamente per i raggruppamenti con tre oggetti-punti identici: ne sopprimiamo 2, e si avrà per essi il numero $C^{(r)}_{n,k-2}$; ora, se in ciascuno anteponiamo $i\,(k-2)$-punti stessi si avranno gruppi con $(k-1)$ termini, i quali, se poniamo innanzi a ciascuno $i\,(k-1)$ termini stessi, genereranno $\binom{k-1}{2}$ combinazioni ciascuno, cioè in tutto $\binom{k-1}{2} C^{(r)}_{n,k-2}$ aggruppamenti.

Così seguitando si perverrà alla fine a $C^{(r)}_{n,1}$ aggruppamenti, contenenti un oggetto-nodo, ossia a $\binom{k-1}{k-1} C^{(r)}_{n,1}$; onde la (10).

Casi particolari: $r=1$, allora $C'^{(1)}_{n,k} = \binom{n}{k} + \binom{k-1}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots = \binom{n+k-1}{k}$, come è ben noto; per $k=n$, $C'^{(r)}_{n,n} = (n!)^{r-1} + \binom{n-1}{1} D^{(r-1)}_{n,n-1}\binom{n}{n-1} + \cdots =$

$= (n!)^{r-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i D^{(r-1)}_{n,n-i}$, ove $a_i = \binom{n-1}{i}\binom{n}{n-i}$; per $k=1$, si ha $C'^{(r)}_{n,1} =$

$= C^{(r)}_{n,1} = 1$.

Risultati sostanzialmente analoghi si deducono considerando un $G^{(r)}$ formato dai nodi di r-parallelepipedo rettangolo con $n_1, n_2, \ldots, n_r$ punti distanziati sugli assi a partire dall'origine. Si ha:

(11) $$D^{(r)}_{n_1, n_2, \ldots, n_r, k} = D^{(1)}_{n,k}\, D^{(1)}_{n_1, k} \ldots D^{(1)}_{n_r, k},$$

(12) $$k!\, C^{(r)}_{n_1, n_2, \ldots, n_r, k} = D^{(r)}_{n_1, n_2, \ldots, n_r},$$

ecc.

Osservazioni. a) Il principio di dualità nello S_r stabilisce una corrispondenza biunivoca fra gli S_r e gli S_{r-k-1} di S_r [7, pp. 32—33). Onde, instituendo un calcolo combinatorio fra gli aggregati degli S_k dello S_r, questo non differisce da quello applicato agli aggregati degli S_{r-k-1} duali dei precedenti nel medesimo S_r. In particolare, fra gli iperpiani S_{r-1} vale lo stesso Calcolo fondato sugli aggregati di punti, mutando la parola punto in questo con la parola iperpiano. In tal guisa nella definizione di disposizioni si dirà: *le disposizioni a k a k semplici degli n^r iperpiani* (aggregato $G^{(r)}_n$ costituito da tutti gli iperpiani affini a quelli coordinati a r a r convergenti ciascun punto dell' r-cubo definito prima) *è il numero totale dei gruppi di k di essi distinti, dei quali mai due passanti per uno stesso punto, differenti almeno per un iperpiano o per l'ordine attribuito ad essi.* Ora i risultati raggiunti attraverso un tale calcolo possono dedursi assimilando i nuovi enti a punti-nodi di un $G^{(r)}$.

b) Importante si rivela l'istituzione del Calcolo Combinatorio relativo a un numero N qualsiasi di punti dello S_r; questo può ottenersi fondandolo su determinati aggregati dello S_r. L'arbitrio consiste nella costruzione del $G^{(r)}_N$. Così se $N = 14$ (cioè non è una potenza r-ma o il prodotto di r fattori $\geqslant 2$) [5], si potrebbe costituire il $G^{(r)}$ scegliendo $N = n^r + p$ [6]; resterebbe da disporre n^r punti in modo da formare ad esempio un r-cubo e disporre gli altri punti, in numero di p, sui vertici-nodi „diagonali" dei successivi cubi ad r dimensioni $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+p}$. L'$r$-curbo A_{n+p} contiene tutti i punti-oggetti e su di essi si può operare come innanzi.

4. Sugli aggregati complementari

Due aggregati dello S_r, $G^{(r)}_{n-m}$ e $H^{(r)}_m$, li denomineremo *complementari* se essi contengono nel loro insieme punti di tutti gli iperpiani affini dell'r-cubo A di base n senza averne alcuno in comune (si pensi a due matrici complementari in una matrice A dello S_2).

Ponendo il problema di determinare tutti i gruppi di punti appartenenti a tutti i possibili aggregati complementari associati a una certa base i, è chiaro che i $G^{(r)}_i$ sono in numero di $\binom{n}{i}^r$ e tutti gli $H^{(r)}_{n-i}$ in numero di $\binom{n}{n-i}^r = \binom{n}{i}^r$. Ora le permutazioni di $G^{(r)}_i$ sono $(i!)^r$, quelle di $H^{(r)}_{n-i}$ invece

5) Per $N = n^r$ può rendersi valido il Calcolo precedente; e così per $N = n_1 n_2 \ldots n_r$.

6) p potrebbe essere se mai un numero primo: $736 = 9^3 + 7$ punti-grandezze dello S_3.

$[(n-i)!]^r$; e allora il numero totale dei gruppi associati delle coppie di aggregati di punti risulta

$$\binom{n}{i}^r (i!)^r [(n-i)!]^r = (n!)^r, \tag{13}$$

cioè uguale al numero complessivo delle permutazioni di A.

Non è disagevole l'estensione degli aggregati *complementari* con le *catene di aggregati complementari*, nelle quali ognuno diventi il complementare del successivo e tutti contengano nel loro insieme tutti gli iperpiani dell'r-cubo A senza alcuna ripetizione. Allora, dall'aggregato $G_n^{(r)}$ si deducano $G_{i_1}^{(r)}$, $G_{i_2}^{(r)}$,..., $G_{i_h}^{(r)}$ corrispondenti agli r-cubi A_1, A_2,..., A_h. Si verifica che i gruppi di permutazioni associati per tutti (quando $i_1 + i_2 + \dots + i_h = n$) sono in numero di

$$\binom{n}{i_1}^r \binom{n}{i_2}^r \dots \binom{n}{i_h}^r (i_1!)^r (i_2!)^r \dots (i_h!)^r = (n!)^r \,^{7}). \tag{14}$$

5. Classi di permutazioni

In un raggruppamento di oggeti-punti non abbiamo finora parlato in modo specifico di particolari ordinamenti dei termini che compongono i singoli gruppi [11, cap. 4, pp. 92—118], ma desiderando ora stabilire un ordine fra gli iperpiani affini, possiamo nominarli progressivamente secondo il crescere degli indici, a partire da quello passante per l'origine in ciascuna delle direzioni fondamentali. Una trasposizione qualsiasi degli indici comporta allora una variazione nell'ordine di essi. Nella teoria classica uno scambio di due qualsiasi indici provoca un'*inversione*. Se il numero delle inversioni è *pari* o *dispari* rispetto alla permutazione fondamentale — che non ne contiene — essa si dice, come è noto, *di classe pari o dispari*[8]). Uno scambio di due termini produce $2h+1$ inversioni (h numero oportuno) e genera perciò un cambiamento di classe.

Per estendere queste nozioni al $G_n^{(r)}$ dello S_r *convenzionalmente* occorre premettere:

a) *l'indipendenza degli ordini degli iperpiani affini di una direzione rispetto a un'altra*;

b) *il principio additivo per il computo globale delle inversioni per i gruppi di iperpiani*. Fissato cioè un punto di $G_n^{(r)}$: $P_{i_1, i_2, \dots, i_r}$, diciamo $i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \dots, i_1^{(r)}$; $i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \dots, i_2^{(r)}$; ...; $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \dots, i_n^{(r)}$, le permutazioni fondamentali degli indici degli n gruppi di iperpiani affini fra loro. Ora, uno scambio fra due punti

---

7) E' sintomatico il riferimento alle matrici quadrate piane e, per estensione, a quelle spaziali.

8) La cosa può esprimersi con il linguaggio delle sostituzioni.

di un aggruppamento (permutazione fra i punti) di $G_n^{(r)}$ corrispondente al passaggio da $i_1^{(h)}, i_2^{(h)},...,i_r^{(h)}$ a $i_1^{(k)}, i_2^{(k)},...,i_r^{(k)}$ dà luogo per la b) a $2t+r$ cambiamenti di classe. Onde, attribuendo al gruppo, a puro titolo di distinzione di classe, il segno — o + a seconda che la classe sia dispari o pari, concluderemo con la proprietà: *se il numero r di dimensioni dello spazio è pari, lo scambio di 2 termini in ciascun gruppo non reca variazione alla classe del gruppo; se è dispari apporta un cambiamento di classe; per r pari il segno dell'aggruppamento è quindi positivo, per r dispari, negativo.*

Per un riferimento singolare si può dire che nello sviluppo di un determinante (nello S_2) lo scambio delle linee con le colonne non ne altera il valore; lo scambio di due linee fra di loro provoca invece un cambiamento di classe per tutti i gruppi, giacchè l'inversione avviene per i soli primi indici; in un determinante tridimensionale lo scambio di due piani, un cambiamento di classe, ecc. Qualunque sia r, il numero di permutazioni di classe pari eguaglia quello di classe dispari [1, pp. 742—743].

6. Un'applicazione del Calcolo Combinatorio generalizzato

Combinazioni dipendenti i indipendenti. Una questione suggestiva può porsi ora circa gli oggeti-punti dello S_r. Dato in questo $r+1$ punti indipendenti $P_0, P_1,..., P_r$ consideriamo un aggregato constituito da n punti con $n \geqslant r+1$. E' ben noto che per i punti $P_i\,(i=1,2,...)$ si può (per le loro coordinate omologhe) scrivere simbolicamente

$$P_i \equiv \lambda_0^{(i)} P_0 + \lambda_1^{(i)} P_1 ... + \lambda_r^{(i)} P_r, \tag{15}$$

essendo le $\lambda_k^{(i)}$ le coordinate baricentriche del Möbius di $P_i\,(i=r+1,...,n)$ (13) con $\sum_{k=0}^{r} \lambda_k^{(i)} = 1$ [9]).

Allora, una qualunque combinazione binaria $(P_i P_j)$, i e $j > r$, può assimilarsi a una combinazione delle corrispondenti coordinate del Möbius, e quindi, con una certa illazione, la chiameremo *dipendente* dai gruppi combinatorii dell'aggregato $P_0, P_1,..., P_r$. Perciò, in base alla (15), scriveremo per convenzione:

$$(P_0 P_J) \sim \sum_{s=0}^{r(r+1)/2} \mu_s (P_k, P_h); \quad 0 \leqslant k, \quad h \leqslant r. \tag{16}$$

La cosa può estendersi alle combinazioni ternarie (o di classe k), in quanto, ad esempio, siamo indotti a pensare alla proprietà associativa $(P_s, P_k, P_h) \sim$ $\sim [(P_s, P_k), P_h]$, ecc.

---

9) Si tenga presente, per quanto sopra è stato dichiarato che un punto può corrispondere a un ente geometrico, o figura, o a una grandezza fisica.

Invertiamo il ragionamento. Questo simbolismo può far sorgere un problema di un certo interesso: *può un numero N di gruppi di punti, combinazioni binarie* (ovvero ternarie, ecc.) *di certi punti, servire a individuare lo* S_r? Innanzi tutto occorre che N si riferisca a combinazioni indipendenti (binarie,...,a k a k [10]), anzi constituisca il *massimo* numero di combinazioni *ind pendenti di punti* (binarie semplici, per comodità); e cioè:

$$(P_0 P_1),\quad (P_0 P_2),\ldots,(P_{r-1}, P_r). \tag{17}$$

E ciò e logico, giacchè se fosse, a mò d'esempio,

$$P_r \equiv \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{r-1} P_{r-1}, \tag{18}$$

una qualunque combinazione $(P_r P_h)$, $h = 0,\ldots, r$, sarebbe dipendente dal gruppo formato da una parte delle (17). Lo S_r resta perciò individuato perfettamente dagli $r+1$ punti e ogni altra combinazione di altri punti, in base alla (16), dipenderà dal gruppo (17) completo. Il problema posto si presenterà allora ben determinato [11]).

Que to genere di relazione fra combinazioni di punti e dimensioni presenterebbe sotto una forma nuova gli spazi subordinati a un dato S_r. Fissato un tipo di combinazioni ordinarie $C^{(1)}_{n,k}$, facendo variare opportunamente n e k da 0 a 2, esse combinazioni daranno delle rette dello S_r, giacchè qualunque combinazione dipendente dai due pu ti P_0, P_1 è una combinazione di pertinenza di un certo S_1, e così di seguito: le combinazioni dei primi k punti della piramide fondamentale (binarie ordinarie) indipendenti individuano un S_k dello S_r.

7. Aggregati in corrispondenza

L'aggregato $G^{(r)}$ può concepirsi disposto sopra una varietà algebrica dello S_r. Invero, riferendoci per semplicità ai punti della superficie $V^{(2)}_2$ di un S_3, in particolare a una sfera W_2 [12]), facciamo alcune osservazioni. Un sistema di curve chiuse Γ_1 non intersecantisi, appartenenti alla superficie di W_2, che intersechi però un altro sistema di curve chiuse Γ_2 sulla stessa sfera, in maniera che una curva Γ_1 ne incontri una Γ_2 in non più di due vertici-nodi, può assimilarsi a un aggregato $G^{(2)}$ del piano $S^{(2)}$. Ma ciò può concepirsi in vari modi; cosi:

a) Lacerando la superficie in un punto qualunque non vertice del reticolo sferico e pensando che la superficie sia una pellicola elastica stira-

10) Cioè tali che almeno una coordinata di uno qualunque dei punti P che compaiono in (17) non dipenda da quelle omologhe dei rimanenti.

11) Se una combinazione qualunque viene assimilata a un punto di un certo spazio, può farsi luogo alla considerazione di iperspazi a $C^{(r)}_{n,k}$ dimensioni ($k = 1,2,\ldots$). Sarebbe interessante dedurre le proprietà di questi spazi e collegarle con quelle dello S_r generatore.

12) Ved. G. Scorza, *Elementi di Geometria Analitica*, Principato, Messina, 1925, pp. 609—612.

bile in tutti i sensi e distendendola su di un piano coordinato: i punti, tutti distinti, finiranno per costituire un aggregato equivalente a un $G^{(2)}$ [13]).

b) Riportando su di una retta del piano una linea del sistema Γ_1 e punteggiandola con un numero di punti uguali ai vertici situati sulla linea, indi construendo un $G^{(2)}$ con le altre linee analogamente punteggiate.

La cosa può essere generalizzata per un S_r qualunque.

8. Relazioni combinatorie

Il primo teorema di Pascal può estendersi [14]) alle combinazioni generalizzate, per mezzo della

$$C^{(r)}_{h,k} = \frac{(k!)^{r-1}}{(n-k)!^{r-1}} C^{(r)}_{n,n-k} \quad [15]), \tag{19}$$

per deduzione da:

$$C^{(r)}_{n,k} = (k!)^{r-1} \left[\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\right]^r. \tag{20}$$

Ponendo nella (20) $r = 1$, $k = n$, occorre fare la nota convenzione $0! = 1$ perchè essa sia sempre valida; si deduce allora $C^{(r)}_{n,0} = 1$.

Il secondo teorema di Pascal corrisponde a

$$C^{(r)}_{n,k} = (C^{(r)}_{n-1,k} + C^{(r)}_{n-1,k-1}) \frac{n^r}{(n-k)^r + k}. \tag{21}$$

In generale, qualunque relazione combinatoria fra i coefficienti binomiali classici dà luogo a una combinazione combinatoria per le combinazioni r-dimensionali, tenendo presente la (4) (ved. anche [4, pp. 52, 124, 129]).

9. Conclusione

Si può dunque parlare di aggregati numerabili dello S_r sottoposti a certe condizioni, di aggregati subordinati a uno stesso $\Gamma^{(r)}$, di aggregati equivalenti o di aggregati in corrispondenza biunivoca: essi sono tali se a ciascun $G^{(r)}_{n-1}$, $G^{(r)}_{n-2}$,..., $G^{(r)}_1$ subordinati di $G^{(r)}_n$, è possibile far corrispondere uno ed uno solo subordinato al secondo aggregato. Un Calcolo Combina-

---

13) Ved. [1, cap. III], particolarmente pp. 141—143. La corrispondenza dele facce non è qui biunivoca (corrispondenza *lacunosa*). Detto F il numero delle facce sopra W_2, S quello degli spigoli, V quello dei punti-vertici, si deduce la relazione di Euler.

14) Ved. [11, p. 246 e segg.], ove sono riportati ben 45 risultati espressi da formole numeriche.

15) Per $r = 1$, $C^{(1)}_{n,k} = C^{(1)}_{n,n-k}$.

torio stabilito per il primo aggregato è certo valido per il secondo e altrettanto può dichiararsi per due aggregati $G_k^{(r)}$ e $G_k'^{(r)}$ di punti-oggetti in corrispondenza biunivoca. Sotto questo profilo uno spazio ad esempio di vettori o uno di entità geometriche (sfere, ellissoidi) possono figurare come generatori di aggregati equivalenti.

Un Calcolo Combinatorio con le sue leggi e i suoi risultati è legato dunque sostanzialmente allo struttura dell'aggregato di oggetti o enti sui quali si opera. In fondo ciò ho cercato di dimostrare con gli esampi addotti precedentemente. Al variare di r (dimensione), i risultati che si conseguono sono diversi come sarebbero diversi aggregando nello stesso S_r i medesimi N punti in modo varia[16]). Ora, nulla vieta di accettare le conseguenze che si traggono dai diversi aggregati relativi; esse sono egualmente valide.

Concludendo, a mio avviso, *non esiste un Calcolo Combinatorio assoluto, ma esso è sempre relativo all'aggregato di punti che si considera, sul quale si applicano le definizioni dal medesima poste.*

Ministero di Pubblica Istruzione, Roma, Italia

Ricevuto il 24 VIII 1968

BIBLIOGRAFIA

1. Aleksandrov P. S., *Topologia Combinatoria* (trad. di Lucio Lombardo Radice). Einaudi, Torino, 1957.
2. Gigli D., *Calcolo Combinatorio.* In „Enciclopedia italiana", vol. X, Torino, 1931.
3. Pascal E., *I Determinanti.* II-a ed, Hoepli, Milano, 1923.
4. Peano G., *Formulaire de Mathématiques.* V-a ed., Bocca, Torino, 1903.
5. Scorza G., *Corpi numerici ed Algebre.* Principato, Messina, 1921.
6. — *Corso di geometria analitica.* P. II, Principato, Messina, 1925.
7. Severi F., *Introduzione alla Geometria Algebrica. Geometria Numerativa.* Ed. Univ. Roma, 1947.
8. — *Lezioni di Analisi.* II-ed., Zanichelli, Bologna, 1938.
9. Berzolari L., *Calcolo Combinatorio.* In „Enciclopedia delle Matematiche Elementari", Vol I, p. *II*, Hoepli, Milano, 1932.
10. Amato V., *Richiami di Analisi Algebrica.* In „Repertorio di Matematiche", Ed. Cedam, Padova, 1951.
11. Netto E., *Lehrbuch der Combinatorik.* Täubner, Leipzig, 1901.
12. Vivanti G., *Elementi della teoria degli aggregati.* In „Enciclopedia delle Matematiche Elementari", art. XIX, vol. I, p. *II*, Hoepli, Milano, 1932.
13. Zappa e Permutti, *Gruppi, Corpi, Anelli.* Feltrinelli, Milano, 1966.
14. Riordan T., *An Introduction to Combinatorial Analysis.* Willey and Sons, New York, 1958.

TEORIA CALCULULUI COMBINATORIU GENERALIZAT

(Rezumat)

Autorul elaborează un calcul combinatoriu generalizat bazat pe proprietăţile de structură ale agregatelor de obiecte, pe care le introduce.

16) Basti pensare $N = n^r + p$ ovvero $N = n_1 n_2 \ldots n_r + q$ per ottenere formole numeriche diverse.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 519.56

SUR UN PROBLÈME DE PROLONGEMENT DANS DES ESPACES QUI NE SONT PAS SIMPLES

PAR

I. POP

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Univérsité de Jassy, 25-27 Octobre 1968

1. Le problème du prolongement d'une application $f: A \to Y$ où A est un sousensemble de X, est résolu quand X est un polyèdre simpliciel et Y un espace n-simple. Quand l'espace Y n'est pas simple, le problème a été résolu par l'introduction des systèmes locaux de coefficients.

Dans cette Note, nous allons résoudre un problème de prolongement sans faire des restrictions sur l'espace Y et aussi, sans considérer des systèmes locaux de coefficients, mais en limitant la classe des applications dont il s'agit.

2. Soit K un complexe simpliciel et K' son complexe dérivé : soit aussi L un souscomplexe de K et L' son complexe dérivé. Enfin, soit σ'_{n+1} un simplexe orienté de $K' \bmod L'$ et $s_{n+1} \in K^{n+1}$ son portant et $b_{(s_{n+1})}$ le barycentre du simplexe s_{n+1}.

Définition 1. Une application $f \mid K'^n \cup L' \mid \to Y$ est nommée $b_{(n+1)}$-application si $f\, b_{(s_{n+1})} = y_o$, pour tous $\sigma'_{n+1} \in K \bmod L'$, y_o étant un point fixé de Y.

Nous étudierons une application de type $b_{(n+1)}$, $f: \mid K'^n \cup L' \mid \to Y$ en trouvant des conditions nécessaires et suffisantes de prolongement vers $\mid K'^{n+1} \cup L' \mid$. Tout d'abord, cherchons les conditions dans lesquels f est prolongeable à $\overline{\sigma'}_{n+1}$ où $\sigma'_{n+1} \in K' \bmod L'$.

Remarquons que $f'/\dot{\sigma}_{n+1}$ est définie, parce que $\dot{\sigma}_{n+1} \in \mid K'^n \cup L' \mid$.

Compte tenu que $b_{(s_{n+1})} \in \dot{\sigma}'_{n+1}$ et que par hypothèse $f(b_{(s_{n+1})}) = y_o$, il en résulte :

$$(1) \qquad (f/\dot{\sigma}'_{n+1}): \dot{\sigma}'_{n+1}, b_{(s_{n+1})} \to Y, y_o$$

Il est bien connu [1], que une application $f: S^n, x_* \to Y, y_o$ est prolongeable à V^{n+1} si et seulement si $\{f\} = 0$. On sait encore, que $\dot{\sigma}'_{n+1}$ et $\bar{\sigma}'_{n+1}$ sont respectivement homéomorphe à une sphere n-dimensionelle et à V^{n+1}.

En revenant à l'application (1), nous voyons qu'elle définit un élément $\{f/\dot{\sigma}'_{n+1}\} \in \Pi_n(Y, y_o)$ et, définissons un cochaine $C_f \in C^{n+1}(K', L', \Pi_n(Y, y_o))$ par l'égalité $C_f(\sigma'_{n+1}) = \{f/\dot{\sigma}'_{n+1}\}$. Compte tenu que f est un $b_{(n+1)}$ application, le cochaine C_f est bien défini.

Si $\sigma'_{n+1} \in L'$, compte tenu que $f/\dot{\sigma}'_{n+1}$ a de prolongement à $\bar{\sigma}'_{n+1}$ il en résulte ayant en vue [1], que $\{f/\dot{\sigma}'_{n+1}\} = 0$ et donc $C_f(\sigma'_{n+1}) = 0$ pour tous $\sigma'_{n+1} \in L'$, ce qui attire que C_f est un cochaine relatif de $K' \bmod L'$.

Apelons C_f un cochaine d'obstruction d'application f.

Proposition 1. *La $b_{(n+1)}$-application $f: |K'^n \cup L'| \to Y$ est prolongeable à $|K'^{n+1} \cup L'|$ si et seulement si son cochaine d'obstruction est égal à zéro.*

En effet, f est prolongeable à $\bar{\sigma}'_{n+1}$ si et seulement si $\{f/\dot{\sigma}'_{n+1}\} = 0$ c'est à dire $C_f(\sigma'_{n+1}) = 0$ pour tous $\sigma'_{n+1} \in K' \bmod L'$ et donc $C_f = 0$.

Si $C_f = 0$, f est prolongeable aux toutes $\bar{\sigma}'_{n+1}$ et ayant en vue que sur l'intersection de deux d'elles, les prolongements coïncident, il en résulte [1] que f est prolongeable à $|K'^{n+1} \cup L'|$.

Il en résulte immédiatement la

Proposition 2. *Si $f_o \simeq f_1: |K'^n \cup L'| \to Y$ sont deux $b_{(n+1)}$-applications, alors $C_{fo} = C_{f1}$.*

En effet, considérant $\sigma'_{n+1} \in K' \bmod L'$ nous avons $f_o \simeq f_1: \dot{\sigma}'_{n+1} \xrightarrow{b_{s_{n+1}}} Y, y_o$ d'où il en résulte $\{f_0/\dot{\sigma}'_{n+1}\} = \{f_1/\dot{\sigma}'_{n+1}\}$, donc $C_{f0}(\sigma'_{n+1}) = C_{f1}(\sigma'_{n+1})$ pour tous $\sigma'_{n+1} \in K' \bmod L'$, ce qui attire que $C_{fo} = C_{f1}$.

On peut aussi démontrer que C_f est un cocycle dans $C^{\cdot}(K', L'; \Pi_n(Y, y_0))$. Si f et f' sont deux $b_{(n+1)}$-applications définies sur $|K'^n \cup L'|$ qui ont les restrictions à $|K'^{n-1} \cup L'|$ égaux, alors on peut introduire un cochaine $d(f, f') \in C^n(K', L'; \Pi_n(Y, y_0))$ [1], et a lieu la:

Proposition 3. *Pour deux $b_{(n+1)}$-applications f et f' qui coïncident sur $|K'^{n-1} \cup L'|$ a lieu l'égalité:*

$$C_f - C_{f'} = (-1)^n \, \delta \, d(f, f'), \tag{2}$$

ce qui attire le fait que les cocycles d'obstruction de deux $b_{(n+1)}$-applications qui prolongent la même application $|K'^{n-1} \cup L'| \to Y$ sont cohomologues: $C_f \sim C_{f'}$.

Il en résulte immédiatement, la

Proposition 4. *Si* $f:|K'^n \cup L'| \to Y$ *et* $C_f \sim z$, *où* z *est un cocycle de* $C^{\cdot}(K' L'; \Pi_n(Y, y_0))$, *alors, il existe un prolongement* f' *de* $f|K'^{n-1} \cup L'|$ *ainsi que* $C_{f'} = z$.

Nous donnons encore la

Proposition 5. *Si* $f^{n-1}: |K'^{n-1} \cup L'| \to Y$ *admet un prolongement à* $f = f^n: |K'^n \cup L'| \to Y$ *qui est une* $b_{(n+1)}$*-application, alors, la condition nécesaire et suffisante afin que* f^{n-1} *soit prolongeable à* $|K'^{n+1} \cup L'|$ *est que son cocycle d'obstruction soit homologue à zéro, c'est à dire soit une cofrontière.*

En effet si f' est le prolongement de f^{n-1} à $|K'^{n+1} \cup L'|$, alors $f'|K'^n \cup L'|$ en est aussi et donc $C_f \sim C_{f'}$; mais, ayant en vue que $f'|K'^n \cup L'|$ est prolongeable à $|K'^{n+1} \cup L'|$, il en résulte, compre tenu de la proposition 1 que $C_{f'} = 0$ et donc $C_f \sim 0$. Réciproquement, si $C_f \sim 0$ alors, compte tenu de la proposition 4, il existe un prolongement f'' de $f|K'^{n+1} \cup L'|$ ainsi que $C_{f''} = 0$, ce qui attire, ayant en vue la proposition 1, que f'' est prolongeable à $|K'^{n+1} \cup L'|$.

Soit maintenant une application $f^{n-1}: |K'^{n-1} \cup L'|, \cup b_{(s_{n+1})} \to Y, y_0$ où, dans $\cup b_{(s_{n+1})}$ on considère tous les barycentres des simplexes de K porteurs des simplexes $\sigma'_{n+1} \in K' \bmod L'$; supposons encore que f est une $b_{(n)}$-application. Alors, a lieu la

Proposition 6. *La condition nécesaire et suffisante afin que* f^{n-1} *soit prolongeable à* $|K'^{n+1} \cup L'|$ *est que* $Cf^{n-1} = 0$ *et, si* $f: |K'^n \cup L'| \to Y$ *est un prolongement de* f^{n-1} *à* $|K'^n \cup L'|$, *ait lieu la relation* $C_f \sim 0$.

La démonstration résulte immédiatement de la proposition 5, remarquant que le prolongement f est une $b_{(n+1)}$-application.

3. Le prolongement d'une homotopie. Soit $F: (|K'| \times \dot{I}) \cup (|K'^n \cup L'| \times I) \to Y$ une homotopie et on pose la question du son prolongement à $(|K'| \times \dot{I}) \cup (|K'^{n+1} \cup L'| \times I)$.

Définition 2. L'application $F: (|K'| \times \dot{I}) \cup (|K'^{n+1} \cup L'| \times I) \to Y$ est un $b_{(n)}$-homotopie si, pour tous σ'_n, $F(b_{(s_n)}, 0) = y_0$ où y_0 est un point fixé de Y.

Soit $(\bar{\sigma}'_n \times I)^{\cdot} = (\dot{\bar{\sigma}}'_n \times I) \cup (\bar{\sigma}'_n \times \dot{I})$, donc $(\bar{\sigma}'_n \times I)^{\cdot} \in (|K'| \times \dot{I}) \cup (|K'^n \cup L'| \times I)$ ce qui attire que F est définie sur elle, ce qui permmet de considérer l'application $F: (\bar{\sigma}'_n \times I)^{\cdot}, (b_{(s_n)} \times 0) \to Y, y_0$. Compte tenu que $(\sigma'_n \times I)^{\cdot}$ est homeomorphe à une sphère n-dimensionelle, il en résulte que cette application définit une classe d'homotopie $\{F|(\bar{\sigma}'_n \times I)^{\cdot}\}$. Déffinissons maintenant un cochaine $C_F \in C^n(K', L'; \Pi_n(Y, y_0))$, par l'égalité $C_F(\sigma'_n) = \{F|(\dot{\sigma}'_u \times I)^{\cdot}\}$ et comme F est une $b_{(n)}$-homotopie, il en résulte que le cochaine C_F est bien défini.

On peut démontrer que C_F est un cocycle et aussi la

Proposition 7. *La condition nécesaire et suffisante afin qu'une* $b_{(n)}$*-homotopie* $F: Q_{n-1} \to Y$ *soit prolongeable à* $Q_n = (|K'| \times \dot{I}) \cup (|K'^n \cup L'| \times I)$ *est que* $C_F = 0$.

On peut aussi donner des conditions nécessaires et suffisantes de prolongement d'une homotopie F^{n-1} à $(|K'| \times \dot{I}) \cup (|K'^{n+1} \cup L'| \times I)$.

Nous démontrerons maintenant la

Proposition 8. *Si* $f_0, f_1 : |K'| \to Y$ *sont deux applications qui appliquent tous les sommets de* K' *au même point* y_0 *et si* $\Pi_n (Y, y_0) = 0$ *pour tous* n, *alors* $f_0 \simeq f_1$.

En effet, nous avons $f_0 / |K'^0| \simeq f_1 / |K'^0|$ et alors, évidemment, il existe une homotopie constante $F^0 : |K'^0| \times I \to Y$, $F(x, t) = y_0$. Mais F^0 est une $b_{(n)}$-homotopie et comme $C_{F^0} \in C^0 (K', L' ; \Pi_0 (Y, y_0))$ et, par hypothèse $\Pi_0 (Y, y_0) = 0$ il en résulte $C_{F^0} = 0$, ce qui attire, compte tenu de la proposition 7, que F^0 est prolongeable à une homotopie $F^1 : |K'^1| \to Y$. Supposons maintenant que nous connaissons déja l'homotopie $F^n |K'^n| \to Y$ de $f_0 / |K'^n|$ avec $f_1 / |K'^n|$. Parce que $F^n (b_{(s_{n+1})}, 0) = f_0 (b_{(s_{n+1})}) = y_0$ et compte tenu que $b^s_{(n+1)}$ est un sommet de K', il en resulte que F^n est une $b_{(n+1)}$-homotopie. D'autre part, $C_{F^n} \in C^{n+1} (K', L' ; \Pi_{n+1} (Y, y_0))$ et, ayant en vue que $\Pi_{n+1} (Y, y_0) = 0$ il en résulte que $C_{F^n} = 0$ et, en utilisant la proposition 7, il en résulte que l'homotopie est prolongeable à $|K'^{n+1}|$.

Le théorème est ainsi démontré, parce que, même dans le cas d'un complexe infini, en considérant la réunion de cettes homotopies, on obtient une homotopie de f_0 et f_1.

Institut Polytehnique, Jassy,
Chaire de Mathematiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Hilton P. J., Wylie S., *Homology Theory (An Introduction to Algebraic Topology).* University Press, Cambridge, 1960.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE PRELUNGIRE ÎN SPAŢII CARE NU SÎNT SIMPLE

(Rezumat)

Se prezintă problema prelungirii unei aplicaţii de tip special, b_{n+1}-aplicaţie, $f: |K'^n \cup L'| \to Y$ (Definiţia 1) fără nici o restricţie asupra spaţiului Y. Se foloseşte noţiunea de colanţ de obstrucţie a unei $b_{(n+1)}$-aplicaţii pentru a da condiţii necesare şi suficiente de prelungire a unei astfel de aplicaţii.

Se defineşte noţiunea de b_n-homotopie şi se dau condiţii necesare şi suficiente de prelungire a unei astfel de homotopii.

Ca aplicaţie se demonstrează o teoremă de homotopie a două aplicaţii care aplică vîrfurile unul complex simplicial într-un acelaşi punct al unui spaţiu Y.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. K. 513.835

ZUR CHARAKTERISIERUNG VON MINIMALLÖSUNGEN IM RAUME $C[Q, H]$

VON

BRUNO BROSOWSKI

1. Einführung

Es sei Q ein kompakter Hausdorffscher Raum und H ein Prae-Hilbert-Raum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen, d. h. ein linearer Raum, in dem für je zwei Elemente $h_1, h_2 \in H$ ein definites Skalarprodukt (h_1, h_2) mit den üblichen Rechenregeln definiert ist. Wir bezeichnen die durch das Skalarprodukt in H induzierte Norm mit $\|.\|_H$. Es sei $C[Q, H]$ die Menge der stetigen Abbildungen $f: Q \to H$. Diese Menge bildet einen normierten linearen Raum, wenn wir Addition und Multiplikation mit Skalaren punktweise erklären und für jedes Element f dieses Raumes durch die Gleichung

$$\|f\| := \max_{x \in Q} \|f(x)\|_H$$

eine Norm definieren. Man nennt diese Norm die Tschebyscheff-Norm.

Unter der Tschebyscheff-Approximation eines gegebenen Elementes f aus $C[Q, H]$ bezüglich einer Teilmenge $V \subset C[Q, H]$ verstehen wir die Auswahl eines Elementes $v_0 \in V$ in der Art, dass $\|f - v_0\| \leqslant \|f - v\|$ für jedes Element $v \in V$ gilt. Jedes derartige Element v_0 heisst eine beste Approximierende für das Element f bezüglich V.

Ein stets hinreichendes Kriterium für eine Minimallösung wird durch die Verallgemeinerung eines von A. N. Kolmogoroff [3] für die Approximation reell- oder komplexwertiger Funktionen durch Elemente eines linearen Raumes V gegeben. Dieses Kriterium lautet:

Satz 1. *Gegeben sei eine Teilmenge $V \subset C[Q, H]$, ein Element $v_0 \in V$ und ein Element $f \in C[Q, H]$. Genügt jedes Element $v \in V$ der Ungleichung*

$$\min_{x \in \Sigma[f - v_0]} \mathrm{Re}\,(f(x) - v_0(x),\ v(x) - v_0(x)) \leqslant 0,$$

so ist v_0 eine Minimallösung für f bezüglich V.

Dabei bezeichnet $\Sigma[f - v_0]$ die Menge

$$\Sigma[f - v_0] := \{x \in Q : \|f - v_0\| = \|f(x) - v_0(x)\|_H\},$$

also die Menge der Abweichungspunkte der Abbildung $f - v_0$. Für einen Beweis dieses Satzes vgl. B. Brosowski [2, S. 29—31]. Ist V ein linearer Teilraum, so ist dieses Kriterium auch notwendig. Wie Beispiele zeigen, ist dieses Kriterium jedoch im allgemeinen nicht notwendig (vgl. B. Brosowski [2, S. 31—32]). Es erhebt sich daher die Frage nach einer Bedingung, die diejenigen Teilmengen von $C[Q, H]$ charakterisiert, für die das verallgemei-

nerte Kolmogoroffsche Kriterium stets notwendig für eine Minimallösung ist. Zur Beantwortung dieser Frage führte B Brosowski [2, S. 73–74] reguläre Teilmengen von $C[Q, H]$ ein und zeigte, dass für kompakte metrische Räume Q eine Minimallösung bezüglich einer Teilmenge $V \subset C[Q, H]$ genau dann durch das verallgemeinerte Kolmogoroffsche Kriterium charakterisiert wird, wenn V eine reguläre Teilmenge ist.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, dass dieser Satz auch gültig ist, wenn Q kein metrischer Raum ist.

2. Definition der regulären Funktionensysteme

Definition. Eine Teilmenge V aus $C[Q, H]$ heisst regulär, wenn für jedes Paar von Elementen $v, v_0 \in V$ und für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset Q$ und für jedes Element $f \in C[Q, H]$ mit

$$\mathcal{R}e\,(f(x),\ v(x) - v_0(x)) > 0$$

für $x \in A$ und für jede reelle Zahl $\lambda > 0$ ein Element $v_\lambda \in V$ existiert mit den Eigenschaften

(R1) $$2\,\mathcal{R}e\,(f(x),\ v_\lambda(x) - v_0(x)) \geq \| v_\lambda(x) - v_0(x) \|_H^2, \qquad \text{für } x \in A;$$

(R2) $$\| v - v_0 \| < \lambda.$$

Beispiele für reguläre Funktionensysteme sind lineare Räume, konvexe Mengen und verallgemeinerte rationale Funktionen.

3. Charakterisierung der regulären Systeme

Wir beweisen den

Satz 2. *Eine Teilmenge $V \subset C[Q, H]$ ist genau dann regulär, wenn gilt: Ist v_0 eine Minimallösung für f bezüglich V, so gilt für jedes Element $v \in V$ die Ungleichung*

$$\min_{x \in \Sigma[f - v_0]} \mathcal{R}e\,(f(x) - v_0(x),\ v(x) - v_0(x)) \leq 0.$$

Beweis. *Notwendigkeit.* Der Beweis der Notwendigkeit verläuft wie in [2, S. 78].

Hinlänglichkeit. Gegeben seien die Elemente $v, v_0 \in V$, eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset Q$, eine Abbildung $f \in C[Q, H]$ mit $\mathcal{R}e\,(f(x), v(x) - v_0(x)) > 0$ für $x \in A$ und eine positive reelle Zahl $\lambda > 0$. Aus der Ungleichung $\mathcal{R}e\,(f(x), v(x) - v_0(x)) > 0$ folgt, dass $\| f(x) \|_H > 0$ für $x \in A$ gilt. Da A als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge Q kompakt ist, existiert eine reelle Zahl a mit $\| f(x) \|_H \geq a > 0$ für $x \in A$. Die Abbildung $g_a : H \to H$, die durch

$$g_a(h) := \begin{cases} h, & \text{für} \quad h \in \{h \in H : \| h \|_H \leqslant a\} \\ \dfrac{h}{\| h \|_H}, & \text{für} \quad h \in \{h \in H : \| h \|_H \geqslant a\} \end{cases}$$

definiert ist, ist stetig. Daher ist die Abbildung $g := g_a \circ f$ eine stetige Abbildung von Q in die Einheitssphäre von H, für die $\| g(x) \|_H = 1$ für $x \in A$ gilt. Nach dem Erweiterungssatz von P. Urysohn (vgl. P. Alexandroff und H. Hopf [1]) gibt es eine auf Q stetige reellwertige Funktion $m(x)$, die für jeden Punkt aus A den Wert 1 und für jeden Punkt der abgeschlossenen Menge

$$\{x \in Q : \mathcal{R}e\,(g(x),\ v(x) - v_0(x)) \leqslant 0\}$$

den Wert Null annimmt. Für jeden Abweichungspunkt der Abbildung $m \cdot g$ gilt die Ungleichung $\mathcal{R}e\,(m(x) \cdot g(x),\ v(x) - v_0(x)) > 0$.

Zu den Abweichungspunkten von $m \cdot g$ gehören insbesondere die Punkte aus A. Daher hat die Abbildung $m \cdot g + v_0$ nicht das Element v_0 als Minimallösung bezüglich V. Ebenso hat die Abbildung

$$F := \frac{1}{2} \min(a,\ \lambda) \cdot m \cdot g + v_0$$

nicht das Element v_0 als Minimallösung bezüglich V.

Es gibt daher ein Element $v \in V$, für das

$$\left\| \frac{1}{2} \min(a,\ \lambda)\, m \cdot g + v_0 - v_\lambda \right\| < \frac{1}{2} \min(a,\ \lambda)$$

gilt. Daher folgt die Abschätzung

$$\| v_0 - v_\lambda \| = \left\| \frac{1}{2} \min(a,\ \lambda) \cdot m \cdot g + v_0 - v_\lambda - \frac{1}{2} \min(a,\ \lambda) \cdot m \cdot g \right\| < \tag{A}$$

$$< \frac{1}{2} \min(a,\ \lambda) + \frac{1}{2} \min(a,\ \lambda) < \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda.$$

Für jeden Punkt $x \in A$ gilt die Abschätzung

$$\| F(x) - v_\lambda(x) \|_H^2 = \| F(x) - v_0(x) - (v_\lambda(x) - v_0(x)) \|_H^2 = \| F(x) - v_0(x) \|_H^2 -$$

$$- 2\,\mathcal{R}e\,(F(x) - v_0(x),\ v_\lambda(x) - v_0(x)) + \| v_\lambda(x) - v_0(x) \|_H^2,$$

aus der die Abschätzung

$$2\,\mathcal{R}e\left(\frac{1}{2} \min(a,\ \lambda)\, m(x) \cdot g(x),\ v_\lambda(x) - v_0(x)\right) > \| v_\lambda(x) - v_0(x) \|_H^2$$

und wegen $m(x) = 1$ und $\| f(x) \|_H \geqslant a$ für $x \in A$ schliesslich die Ungleichung

(B) $$2\mathcal{R}e\,(f(x),\ v_\lambda(x)-v_0(x))>\|v_\lambda(x)-v_0(x)\|_H^2$$

folgt.

Durch die Ungleichungen (A) und (B) ist die Hinlänglichkeit bewiesen.

Eingegangen am 18 V 1968

Max Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, Bundesrepublik Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

1. Alexandroff P., Hopf H., *Topologie.* Berlin, Springer-Verlag, 1935.
2. Brosowski B., *Nicht-lineare Tschebyscheff-Approximation.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1968.
3. Колмогоров А. Н., УМН., 1948, *3,* стр. 216—221.

CARACTERIZAREA SOLUŢIILOR MINIMALE ÎN SPAŢIUL C [Q, H]

(Rezumat)

Autorul, urmînd ordinea de idei a lucrării sale [2, p. 74], demonstrează că teorema stabilită acolo este valabilă şi în cazul cînd Q nu este spaţiu metric.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 513.821.91

SUR UNE CONFIGURATION DE POINTS, DROITES ET QUADRIQUES

PAR

BERNARD D'ORGEVAL

1. Introduction

Dans une note récente, M. Alvaro Sainz Eguizabal [1] souligne les relation entre certaines homographies planes et des familles de quadriques. L'application de ses idées à un espace de Galois n'est peut-être pas sans intérêt et donne dans le cas particulier du champ de Galois de caractéristique 2, certaines configurations qui ne semblent pas triviales.

2. Projectivités et quadriques

Considérons un espace S_3, construit sur un champ de Galois d'ordre q, caractéristique p ($q = p^n$) et dans cet espace deux plans P et P' se coupant selon la droite Δ. Nous supposerons qu'il existe dans S_3 une projectivité H entre les plans P et P', pour laquelle Δ est unie, et telle que la projectivité induite sur Δ soit hyperbolique, de points unis A et B.

Soit d une droite issue de A, appartenant à P, son homologue dans H est une droite d' passant par A et située dans P'; la projectivité entre d et d', induite par H est une perspective, en sorte que les droites joignant les points homologues concourent en un point C_d^A. Dans le plan P, il existe q droites d, auxquelles correspondent q points C_d^A, distincts, sinon H induirait sur Δ l'identité. Les droites de P, issues de B, permettent de construire également q points C_d^B.

Soit alors r une droite de P coupant Δ en un point R distinct de A et B, son homologue r' est dans P' et passe par R' homologue de R. Comme les droites r et r' ne se rencontrent pas, les droites g qui en joignent deux points homologues définissent une demiquadrique réglée contenant Δ. Mais les droites de P autres que Δ ou les d issues de A ou B sont $1 + q + q^2 - (2q + 1) = q^2 - q$.

Il existe donc $q^2 - q$ quadriques Q, puisqu'une telle quadrique ne peut être engendrée de deux manières, devant couper P selon une seule droite r. Sur ces quadriques, nous appellerons génératrices les droites joignant les couples de points homologues de r et r', que nous dirons les directrices, celles-ci caractérisées par le fait qu'elles se correspondent par la projectivité H.

Nous allons maintenant montrer que les plans de la forme dAd' ou dBd' sont tangents à ces quadriques Q. Soit donc une quadrique Q de directrices r et r'; puisque r est dans P, elle coupe d, et de même r' coupe d', ces deux points étant homologues dans H; la droite qui joint ces points est dans dd' et est génératice de Q passant par le point C_d correspondant. Il en résulte que les plans dd' d'origine A ou B sont tangents à Q. Ceci est vrai quelles que soient r et r', donc ces plans sont tangents à toutes les Q, qui de plus passent par tous les points C_d^A et C_d^B.

Considérons maintenant un point M commun à deux quadriques Q_1 et Q_2, n'appartenant pas à Δ. Par M passe une génératrice g_1 de Q_1, une génératrice g_2 de Q_2, coupant respectivement P en M_1 et M_2, le plan P' en M_1' et M_2'; les points M_1, M_1' sont homologues par H; de même M_2 et M_2'; les droites M_1M_2 et $M_1'M_2'$ sont homologues, donc passent par A ou B; ce sont donc des droites d et d'; le plan $g_1 g_2$ est un plan dd' d'où rèsulte que le point M est un point C_d^A ou C_d^B.

Mais les directrices de Q_1 et Q_2 respectivement r_1, r_2 et r_1', r_2' sont coplanaires; Q_1 et Q_2 ont donc en commun la génératrice définie par le couple de points homologues $r_1 \cap r_2$, $r_1' \cap r_2'$, soit g_{12}; comme elles contiennent deux droites g_{12} et Δ d'un même système, le reste de leur intersection est formée de deux autres droites appartenant au système des directrices et contenant les points C_d^A et C_d^B. Ces points sont donc alignés avec A et B. Les plans dAd' et dBd' forment donc faisceau; le nombre de points de ces droites $q + 1$ montre que tous leurs points sont de ces types.

Soit alors un point C_d^A, centre de projectivité pour le plan dAd', les quadriques tangentes à ce plan contiennent toutes, une génératrice issue de C_d^A dont la trace M_1 sur le plan P permet de définir $q - 1$ droites r; il y a donc $q - 1$ telles quadriques.

Les $q^2 - q$ quadriques Q se divisent donc en q faisceaux de $q - 1$ quadriques. En y joignant les plans définis par Δ et les deux droites, lieux des points C, dont les couples forment $2q + 1$ quadriques décomposées, on obtient $q^2 + q + 1$ quadriques Q, ce qui correspond à l'∞^2 de la théorie dans l'espace ordinaire.

Si l'on suppose que la projectivité induite sur Δ est elliptique, les points A et B n'existent plus que dans une extension quadratique du champ γ_q. Dans l'espace construit sur cette extension, tout se passe comme précédemment, mais en revenant à l'espace de définition, nous n'avons que $q^2 + q$ quadriques Q non décomposées passant toutes par Δ, et par

deux droites du système des directrices, n'appartenant qu'à l'extension quadratique.

Si l'on suppose que l'homographie induite par H est parabolique sur Δ, de point uni appartenant au champ de définition, il y aura q^2 quadriques Q non décomposées, passant toutes par Δ et tangentes le long de la droite lieu des points C ici unique. Ce cas suppose que la caractéristique soit 2.

3. Le champ de base est le champ d'ordre 2

Supposons que l'espace S_3 soit construit sur le champ de Galois d'ordre 2. Notre espace contiendra 15 points et 35 droites.

Prenons pour droite Δ, la droite d'équation $z = u = 0$.

Envisageons, une transformation de la forme $x, y, z \to y, x, u$; elle laisse fixe le point (1, 1, 0, 0) et échange les points (1, 0, 0, 0) et (0, 1, 0, 0). On pourra donc construire les quatre quadriques prévues précédemment. Mais, on peut encore considérer les projectivités:

$$x, y, z \to y + u, x + u, u; \quad x + z, y + z, z \to y, x, u;$$

$$x + z, y + z, z \to y + u, z + u, u$$

ce qui conduit à augmenter le nombre des quadriques ainsi définies.

Nous allons ainsi trouver 8 quadriques, contenant chacune six droites et neuf points; la répartition de ces droites et de ces points donne une répartition présentant certaines symétries. Je me contenterai de donner un tableau récapitulatif de cette configuration, à laquelle il est sans doute possible de donner un aspect plus ordonné, par un jeu sur les indices affectant les points et les droites.

Les points, numérotés de 1 à 15 ont pour coordonnées: 1 (1, 1, 0, 0); 2 (0, 1, 0, 0); 3 (1, 0, 0, 0); 4 (0, 0, 0, 1); 5 (0, 1, 0, 1); 6 (0, 0, 1, 0); 7 (1, 0, 1, 0); 8 (1, 1, 0, 1); 9 (1, 0, 0, 1); 10 (1, 1, 1, 0); 11 (0, 1, 1, 0); 12 (0, 0, 1, 1); 13 (1, 1, 1, 1); 14 (0, 1, 1, 1); 15 (1, 0, 1, 1).

Les droites sont données par ce tableau, où sont placés entre les points qu'elles contiennent:

D_1 (1, 2, 3); D_2 (1, 12, 13); D_3 (4, 6, 12); D_4 (5, 7, 13);

D_5 (8, 10, 12); D_6 (9, 11, 13); D_7 (2, 4, 5); D_8 (2, 8, 9);

D_9 (3, 4, 9); D_{10} (3, 8, 5); D_{11} (3, 6, 7); D_{12} (3, 10, 11);

D_{13} (2, 6, 11); D_{14} (2, 10, 7); D_{15} (4, 10, 13); D_{16} (5, 11, 12);

D_{17} (6, 8, 13); D_{18} (7, 9, 12); D_{19} (1, 4, 8); D_{20} (1, 5, 9);

D_{21} (1, 6, 10); D_{22} (1, 7, 11); D_{23} (2, 12, 14); D_{24} (2, 13, 15);

$D_{25}(3, 12, 15)$; $D_{26}(3, 13, 14)$; $D_{27}(5, 6, 14)$; $D_{28}(5, 10, 15)$;
$D_{29}(4, 7, 14)$; $D_{30}(4, 11, 15)$; $D_{31}(6, 9, 15)$; $D_{32}(7, 8, 15)$;
$D_{33}(9, 10, 14)$; $D_{34}(8, 11, 14)$; $D_{35}(1, 14, 15)$.

Les quadriques seront

Q_1 $(D_1, D_2, D_3, D_4, D_7, D_{11})$ contenant (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13);
Q_2 $(D_1, D_2, D_5, D_6, D_8, D_{12})$ contenant (1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 13);
Q_3 $(D_1, D_2, D_3, D_6, D_9, D_{13})$ contenant (1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 13);
Q_4 $(D_1, D_2, D_4, D_5, D_{10}, D_{14})$ contenant (1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13);
Q_5 $(D_1, D_2, D_7, D_{12}, D_{15}, D_{16})$ contenant (1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13);
Q_6 $(D_1, D_2, D_8, D_{11}, D_{17}, D_{18})$ contenant (1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 13);
Q_7 $(D_1, D_2, D_9, D_{14}, D_{15}, D_{18})$ contenant (1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 12, 13);
Q_8 $(D_1, D_2, D_{10}, D_{13}, D_{16}, D_{17})$ contenant (1, 2, 3, 5, 6, 8, 11, 12, 13).

Les points se distribuent en cinq (1, 2, 3, 12, 13) communs aux huit quadriques, en huit (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) appartenant chacun à quatre quadriques et deux (14, 15) extérieurs à toutes les quadriques.

Les droites se distribuent en deux (D_1 et D_2) communes à toutes les quadriques, seize (D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{16}, D_{17}, D_{18}) se trouvent sur deux quadriques; une (D_{35}) est tangente à toutes les Q au même point, quatre (D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}) sont sécantes des huit quadriques, quatre (D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26}) sont sécantes des huit Q aux mêmes points et huit sont sécantes de deux Q, extérieures à 2 Q, tangentes aux autres

D_{27}	Q_1, Q_8	Q_2, Q_7		D_{31}	Q_3, Q_6	Q_4, Q_5	
D_{28}	Q_4, Q_5	Q_3, Q_6		D_{32}	Q_4, Q_6	Q_3, Q_5	
D_{29}	Q_1, Q_7	Q_2, Q_8		D_{33}	Q_2, Q_7	Q_1, Q_8	
D_{30}	Q_3, Q_5	Q_4, Q_6		D_{34}	Q_2, Q_8	Q_1, Q_7	

Reçue le 12 III 1969

Université de Dijon, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Sainz Eguizabal A., *Un sistema de cuadricas en relacion con cuestiones de homografias especiales*. Gac. Mat. Madrid, 1968, **I**, *20*, pp. 17 – 20.

ASUPRA UNEI CONFIGURAŢII DE PUNCTE, DREPTE ŞI CUADRICE

(Rezumat)

Autorul aplică la un spaţiu Galois şi în particular unui cîmp Galois de caracteristică 2, unele din ideile din [1] relative la relaţiile dintre anumite omografii plane şi familii de cuadrice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secția I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 513.712

SUR LA FONCTION N DE LA THÉORIE DES CONGRUENCES W

PAR

F. MARCUS

1. Soit Γ une congruence de droites W dont la première nappe focale (x) soit représentée par le système

$$(1)\qquad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x, \\ x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x. \end{cases}$$

La deuxième nappe focale (x) que l'on suppose non dégénérée est engendrée par le point

$$(2)\qquad \overline{x} = \mu x + 2(A x_u + B x_v),$$

où A, B est une solution (différente de $A = B = 0$) du système

$$(3)\qquad A_v + B\gamma = 0, \quad B_u + A\beta = 0$$

et

$$(4)\qquad \mu = -A_u - A\theta_u - B_v - B\theta_v .$$

Dans la théorie de Fubini [1] sur les congruences W un rôle important est joué par les fonctions N, S, T, définies respectivement par

$$(5)\qquad \begin{cases} N = \lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap_{11}) - 2B(\mu_v + 2Bp_{22}), \\ S = \dfrac{N_u}{2A}, \qquad T = -\dfrac{N_v}{2B}, \end{cases}$$

où

$$(4')\qquad \lambda = -A_u - A\theta_u + B_v + B\theta_v ,$$

car la connaissance de ces fonctions permet la détermination de la seconde nappe focale de la congruence.

En effet la seconde nappe focale est représentée par le système

$$(1') \qquad \begin{cases} \bar{x}_{uu} = \bar{\theta}_u \bar{x}_u + \bar{\beta}\bar{x}_v + \bar{p}_{11}\bar{x}, \\ \bar{x}_{vv} = \bar{\gamma}\bar{x}_u + \bar{\theta}_v x_v + \bar{p}_{22}\bar{x}, \end{cases}$$

où

$$(6) \qquad \begin{cases} \bar{\theta} = \theta + \log|N|, \quad \bar{\beta} = -\beta - 2B\dfrac{S}{N} = -\beta - \dfrac{B}{A}\dfrac{N_u}{N}, \\ \bar{\gamma} = -\gamma - 2A\dfrac{T}{N} = -\gamma - \dfrac{A}{B}\dfrac{N_v}{N}, \qquad \bar{a}_{12} = \pm N a_{12}, \quad (a_{12} = x,\ x_u x_v, x_{uv}), \\ \bar{p}_{11} = p_{11} + \beta_v + \beta\theta_v + \lambda\dfrac{S}{N}, \quad \bar{p}_{22} = p_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u + \lambda\dfrac{T}{N}. \end{cases}$$

Observons encore que la fonction N satisfait à l'équation fondamentale

$$(7) \qquad N_{uv} + \frac{A}{B}\beta N_v + \frac{B}{A}\gamma N_u = 0,$$

qui est nommée *l'équation en N* [1].

2. L'éminent et très regretté géomètre A. Terracini a donné [2] une interprétation de la fonction N et des fonctions S et T, en utilisant la représentation sur la quadrique de Klein, des deux nappes focales (x) et $(\bar{x})$. On peut donner une interprétation de la fonction N sans utiliser la représentation hyperspatiale.

En effet, considérons la correspondance ponctuelle entre les deux nappes focales réalisée par la congruence et dans les points correspondants les droites xX et $\bar{x}\bar{X}$ où

$$(8) \qquad X = \frac{x_{uv}}{a_{12}}, \qquad \bar{X} = \frac{\bar{x}_{uv}}{\bar{a}_{12}}.$$

D'après Fubini, chacune de ces droites engendre la plus générale congruence à ces surfaces.

Les points

$$(9) \qquad x' = x + \rho X, \quad \bar{x}' = \bar{x} + \bar{\rho}\bar{X},$$

sont les points focaux de ces droites si ρ et $\bar{\rho}$ sont respectivement les solutions des équations

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2} + 2\Omega\dfrac{1}{\rho} + \Omega^2 - \dfrac{\pi_{11}\pi_{22}}{a_{12}^2} = 0, \\ \dfrac{1}{\bar{\rho}^2} + 2\bar{\Omega}\dfrac{1}{\bar{\rho}} + \bar{\Omega}^2 - \dfrac{\bar{\pi}_{11}\bar{\pi}_{22}}{\bar{a}_{12}^2} = 0, \end{cases}$$

où

$$(11)\qquad \begin{cases} \Omega = \dfrac{\beta\gamma + \theta_{uv}}{a_{12}}, \quad \bar{\Omega} = \dfrac{\bar{\beta}\bar{\gamma} + \bar{\theta}_{uv}}{\bar{a}_{12}}, \\ \pi_{11} = p_{11} + \beta_v + \beta\theta_v, \quad \pi_{22} = p_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u. \end{cases}$$

En tenant compte de (11), on tire de (10)

$$(12)\qquad \sum \frac{1}{\rho_i} = -2\Omega, \quad \sum \frac{1}{\bar{\rho}_i} = -2\bar{\Omega}, \quad (i = 1, 2).$$

Dans notre Note [3], nous avons montré qu'entre les coefficients θ, β, γ; $\bar{\theta}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ des nappes focales d'une congruence W a lieu la relation suivante

$$(13)\qquad \bar{\beta}\,\bar{\gamma} + \bar{\theta}_{uv} = \beta\gamma + \theta_{uv},$$

et, en observant que $\bar{a}_{12} = \pm Na_{12}$, il résulte

$$(14)\qquad N^2 = \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\rho_i} : \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\bar{\rho}_i}\right)^2,$$

qui donne l'interprétation cherchée.

Cette relation a une *signification géométrique*.

En effet, attachons avec Fubini à chaque nappe focale de la congruence une géométrie métrique, définie dans l'espace par $ds^2 = F_2 + du^2$, où $F_2 = 2a_{12}\,du\,dv$, en considérant u, v, ω comme les coordonnées curvilignes des points

$$(15)\qquad x(u, v) + \omega X, \quad \bar{x}(u, v) + \bar{\omega}\bar{X}.$$

Dans ces métriques, les surfaces $\omega = 0$ sont les nappes focales (x) et $(\bar{x})$. Les lignes coordonnées $u = \text{const.}$; $v = \text{const.}$ sont les droites xX et $\bar{x}\bar{X}$; les surfaces $\omega = \text{const.}$ sont les surfaces parallèles aux surfaces (x) et $(\bar{x})$. Dans ces géométries métriques les ρ_i et $\bar{\rho}_i$ $(i = 1, 2)$ sont les distances des points x et $\bar{x}$ aux points focaux des droites xX et $\bar{x}\bar{X}$, c'est-à-dire elles sont *les distances focales de la première, respectivement seconde nappe focale.*

Par conséquent, *le carré de la fonction N est égal au carré du rapport de la somme des inverses des distances focales de la première et de la seconde nappe focale.*

Reçue le 18 XI 1968

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Fubini G., *Relazioni tra le due falde facoli di una congruenza W etc.* Rend. dell'Accad. Naz. dei Lincei, 1923, s.V, **XXXII**, pp. 301—305.
2. Terracini A., *Le congruenze W.* Rend. del Sem. Mat. e Fis. di Milano, 1950, **XXI**.
3. Marcus F., *Sopra una proprietà caratteristica delle congruenze di rete W.* Rend. dell'Accad. Naz. dei Lincei, 1948, s. VIII, **IV**, *6*.
4. Fubini G., Čech, E., *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces.* Paris, 1931.

ASUPRA FUNCȚIEI *N* DIN TEORIA CONGRUENȚELOR *W*

(Rezumat)

Autorul dă o interpretare a funcției *N* din teoria congruențelor *W* fără utilizarea reprezentării hiperspațiale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 513.821.5

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS AFFINES DES HYPERSURFACES RÉGLÉES DANS E_n

PAR

ŞTEFANIA RUSCIOR

Dans plusieurs travaux antérieurs [1] ... [8] et, en particulier, dans notre travail insére dans le *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences* [6], nous avons étudié les hypersurfaces réglées dans E_4 et E_5 et établi des correspondances par parallélisme entre les diverses catégories de variétés réglées de ces espaces.

Dans le présent travail nous introduisons une classification affine des hypersurfaces réglées, nécessaire pour aborder le problème de la correspondance par parallélisme dans S_n.

Une hypersurface réglée (V) de E_n peut être conçue comme lieu de points, ou bien comme lieu de droites. Considérée comme lieu de points, fonction de $n-2$ paramètres, (V) peut être définie par l'équation $\overline{r} = \overline{\rho}(u_i) + w\overline{\alpha}(u_i)$, $(i = 1, 2, ..., n-2)$, où $\overline{\rho} = \overline{\rho}(u_i)$ représente la variété directrice et $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(u_i)$ le verseur de la génératrice.

L'hyperplan tangent est déterminé dans un point non singulier par l'équation $[\overline{R} - \overline{\rho}, \overline{\rho}_{u_1} + w\overline{\alpha}_{u_1}, \overline{\rho}_{u_2} + w\overline{\alpha}_{u_2}, ..., \overline{\rho}_{u_{n-2}} + w\overline{\alpha}_{u_{n-2}}, \overline{\alpha}] = 0$.

On obtient entre autres les théorèmes suivants:

I. Lorsque la génératrice générique de l'hypersurface (V) contient a points singuliers et la section impropre de (V) a la dimension d, alors

$$a + d \geqslant n - 2. \tag{1}$$

II. (1er théorème réciproque de I). S'il existe sur une génératrice générique de (V) a points singuliers et la relation (1) est remplie, alors la dimension de la section impropre est d.

III. (2e théorème réciproque de I). Si une hypersurface (V) a une section impropre de dimension d et la relation (1) est remplie, alors on trouve a points singuliers sur chaque génératrice.

IV. Le nombre des catégories d'hypersurfaces réglées distinctes du point de vue affine est $N = n(n-1)/2$. On les représentera par (V_a^d).

V. Si chaque génératrice contient un point singulier multiple d'ordre $n-2$, l'hypersurface est conique.

VI. (Théorème réciproque de V). Une hypersurface conique a sur chaque génératrice un point singulier multiple d'ordre $n-2$, situé au sommet.

VII. Losque chaque génératrice contient un point singulier impropre d'ordre $n-2$, l'hypersurface est cylindrique.

VIII. (Théorème réciproque de VII). Une hypersurface cylindrique a sur chaque génératrice un point singulier impropre multiple d'ordre $n-2$.

IX. Lorsque sur chaque génératrice existe un point singulier d'ordre $n-3$, les hyperplans tangents menés le long d'une génératrice constituent un faisceau.

X. (Thèorème réciproque de IX). Quand les hyperplans tangents menés le long d'une génératrice générique constituent un faisceau, alors on trouve sur chaque génératrice un point singulier multiple d'ordre $n-3$.

XI. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une correspondance par parallélisme des hyperplans tangents qui conserve les génératrices des variétés est que les variétés mises en correspondance soient de la même catégorie (V_a^d).

Les résultats crystallisés dans les énonces des théorèmes ci dessus constituent la généralisation de nos travaux concernant la classification et la correspondance par parallélisme des variétés réglées.

Reçue le 29 V 1968

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Ruscior Şt., *La correspondance par plans tangents complètement parallèles entre deux surfaces réglées dans* E_4. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, **III (VII)**, *3 — 4*, pp. 25 — 28.
2. — *La correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces réglées dans* E_4. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *1 — 2*, pp. 17 — 24.
3. — *Corespondenţe prin hiperplane tangente paralele între două hipersuprafeţe riglate din* S_4 *afin.* An. şt. Univ. Iaşi, S.I, Mat., fiz., chim., 1962, **VIII**, pp. 369 — 394.
4. — *Despre o corespondenţă prin plane tangente semiparalele între două familii de suprafeţe din* S_4 *afin.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *1 — 2*, pp. 35 — 40.
5. — *Sur une classification affine des hypersurfaces réglées dans* E_4. Bull. Acad. Royale de Belgique, Cl. sci., Sér. 5, 1964, **50**, pp. 309 — 314.
6. — *Sur les propriétés des hypersurfaces réglées dans* E_5. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astronom. et phys., 1965, **13**, pp. 225 — 227.
7. — *Despre unele clasificări ale hipersuprafeţelor din* S_5. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1 — 2*, pp. 31 — 37.
8. — *Despre o corespondenţă prin varietăţi liniare tangente parţial paralele în* S_{2n}. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3 — 4*, pp. 43 — 47.

ASUPRA UNOR PROPRIETĂŢI AFINE ALE SUPRAFEŢELOR RIGLATE DIN E_n

(Rezumat)

Se introduce o clasificare afină a hipersuprafeţelor riglate, necesară pentru abordarea problemei corespondenţei prin paralelism în S_n.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 517.51

ON SOME THEOREMS OF POPOVICIU

BY

P. S. BULLEN

1. In [1], it is proved that if A_n, G_n denote respectively the arithmetic and geometric means of the first n terms of the positive sequence $a_1, a_2, \ldots$ then

$$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \leqslant \left(\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\right)^{n+1}, \tag{1}$$

with equality if $a_{n+1} = A_n$. (The conditions of equality are wrongly stated in [1]; for the correct form and comments see [2]. This is a multiplicative analogue of Rado's inequality, [4, p. 61],

$$n(A_n - G_n) \leqslant (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1}), \tag{2}$$

with equality if $a_{n+1} = G_n$.

It appears that (1) is in fact due to Popoviciu [6]. In [6] a careful analysis is made of (2), leading to two general inequalities, one generalising (1) and the other generalising (2)

In this note it is shown that these two general inequalities of Popoviciu are themselves special cases of a single inequality.

2. If f is any real valued function of a real variable, and if x_1, x_2, x_3 are any three distinct points in the domain of f, let us write

$$[x_1, x_2, x_3; f] = \frac{1}{(x_3 - x_1)}\left\{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right\},$$

the second divided difference of f. If for all such x_1, x_2, x_3 we have

$$[x_1, x_2, x_3; f] \geqslant 0, \tag{3}$$

then f is said to be convex; if in (3) the inequality is strict then f is said to be strictly convex. If $-f$ is convex then f is said to be concave. The main properties of convex functions can be found in [4, p. 70].

In what follows let $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $q = \{q_1, q_2, \ldots\}$ be two sequences of positive numbers; also write $Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k$, $(n = 1, 2, \ldots)$. If f is any real valued

function whose domain includes all of $a_1, a_2, \ldots$ then we will write $f(a)$ for the sequence $\{f(a_1), f(a_2), \ldots\}$.

The following notations are standard:

$$M_n^{[r]}(a;q) = \left(\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k a_k^r\right)^{1/r}, \quad r \neq 0, \quad |r| < \infty,$$

$$A_n(a;q) = M_n^{[1]}(a;q),$$

$$G_n(a;q) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{1/Q_k} = M_n^{[0]}(a;q).$$

In what follows function will mean real valued function of a real variable whose domain is R_+.

Theorem 1. *If φ, ψ are any two functions such that* (a) φ *is strictly monotonic,* (b) $\psi \cdot \varphi^{-1}$ *is convex then*

$$\psi \cdot \varphi^{-1}(A_n(\varphi(a);q)) \leqslant A_n(\psi(a);q). \tag{4}$$

If further $\psi \cdot \varphi^{-1}$ is strictly convex then inequality (4) *is strict unless* $a_1 = \ldots = a_n$.

Proof. A trivial application of the convexity of $\psi \cdot \varphi^{-1}$, [4, (3.5.2)]

Remarks. (i) If we take $\varphi(x) = x^r$, $\psi(x) = x^s$ then $\psi \cdot \varphi^{-1}(x) = x^{s/r}$ which is convex if $s/r \geqslant 1$ or $s/r \leqslant 0$ and strictly convex if $s/r \neq 1, 0$. From this and (4) it is easy to see that,

$$M_n^{[r]}(a;q) \leqslant M_n^{[s]}(a;q) \tag{5}$$

provided $r \leqslant s$, $r \neq 0$, $s \neq 0$; further for these values of r, s equality can occur in (5) if either $r = s$ or $r < s$ and $a_1 = \ldots = a_n$.

(ii) If we now take $\varphi(x) = \log x$, $\psi(x) = x^s$ then $\psi \cdot \varphi^{-1}(x) = e^{sx}$, and it is strictly convex for all $s \neq 0$; we can extend (5) to allow $r = 0$ and, or, $s = 0$. In particular if $s = 1$ we get that $G_n(a;q) \leqslant A_n(a;q)$, with equality if $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

(iii) If in Theorem 1 ψ is assumed to be strictly monotonic increasing then (4) can be written more symmetrically as

$$\varphi^{-1}(A_n(\varphi(a); a_k)) \leqslant \psi^{-1}(A_n(\psi(a); q_k)).$$

(iv) If in (4) we put $b_k = \psi(a_k)$, assume that ψ is strictly monotonic and write F for $\psi \cdot \varphi^{-1}$ then Theorem 5 reads: *if F is strictly monotonic and convex then*

$$F(A_n(F^{-1}(b);q)) \leqslant A_n(b;q), \tag{6}$$

with equality when F is strictly convex if $b_1 = \ldots = b_n$.

In this form the proof is immediate since (6) is equivalent to the definition of convexity [4]. Further (6) suggests that when comparing two

means we can without loss of generality assume that one is the arithmetic mean; this remark is used in [3] and [5].

Theorem 2. *Let F, G be two functions such that* (a) *F is strictly monotonic,* (b) *G is concave, and put*

$$\Delta_n = Q_n\{G(A_n(a;q) - G\cdot F(A_n(F^{-1}(a);q))\}.$$

Then if $G\cdot F$ is convex

$$\Delta_n \leqslant \Delta_{n+1}. \tag{7}$$

Further if G is strictly concave and $G\cdot F$ strictly convex then the inequality (7) *strict unless* (i) $a_{n+1}=(A_n(a);q))$ *and* (ii) $a_{n+1}=F(A_n(F^{-1}(a);q))$.

If G is linear and $G\cdot F$ is strictly convex then inequality (7) *is strict unless* (ii) *holds; if G is strictly concave and $G\cdot F$ is linear, inequality* (7) *is strict unless* (i) *holds.*

Proof. The proof is suggested by one due to Popoviciu [6].

Put $B_n = A_n(F^{-1}(a);q)$ and note the following identity,

$$Q_n(B_n - F^{-1}(a_{n+1})) = Q_{n+1}(B_{n+1} - F^{-1}(a_{n+1})). \tag{8}$$

Then

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} - \Delta_n &= Q_{n+1}G(A_{n+1}(a;q)) - Q_nG(A_n(a;q)) - \\ &- Q_{n+1}G\cdot F(B_{n+1}) + Q_nG\cdot F(B_n) \geqslant \\ &\geqslant q_{n+1}G(a_{n+1}) - Q_{n+1}G\cdot F(B_{n+1}) + Q_nG\cdot F(B_n),\end{aligned}$$

since G is concave. Hence

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} - \Delta_n &\geqslant q_{n+1}G\cdot F(F^{-1}(a_{n+1})) - Q_{n+1}G\cdot F(B_{n+1}) + Q_nG\cdot F(B_n) = \\ &= \frac{q_{n+1}Q_n}{Q_{n+1}}\cdot(F^{-1}(a_{n+1}) - B_n)^2[B_n, B_{n+1}, F^{-1}(a_{n+1}); G\cdot F]\end{aligned}$$

using (8). It follows from (3) that Δ_n is an increasing function of n if $G\cdot F$ is convex.

This proves the first part of the theorem. The cases of equality are immediate.

Remarks. (i) Taking $G=1$, F strictly monotonic and convex, Theorem 2 implies that

$$\begin{aligned}&Q_n\{A_n(a;q) - F(A_n(F^{-1}(a);q))\} \leqslant \\ &\leqslant Q_{n+1}\{A_{n+1}(a;q) - F(A_{n+1}(F^{-1}(a);q))\}\end{aligned}$$

and if F strictly convex this inequality is strict unless $a_{n+1} = F(A_n(F^{-1}(a);q))$. This is a generalisation of Popoviciu's generalisation of (2) [6, Theorem 2]. In particular if $F(x) = x^{1/r}$, $r \leqslant 1$ then $Q_n\{A_n(a;q) - M_n^{[r]}(a;q)\}$ is an increasing function of n; particular cases of this are given in [6].

(ii) Taking now $G \cdot F = 1$, Theorem 2 implies that if G is a strictly monotonic concave function

$$Q_n \{G(A_n(a;q)) - A_n(G(a);q)\} \leqslant$$
$$\leqslant Q_{n+1}\{G(A_{n+1}(a;q)) - A_{n+1}(G(a);q)\}$$

and if G is strictly concave this inequality is strict unless $a_{n+1} = A_n(a;q)$. This is a generalisation of another result of Popoviciu [6, Theorem 4]. In particular if we take $G(x) = \log x$ this implies that

$$\left(\frac{A_n(a;q)}{G_n(a;q)}\right)^{Q_n} \leqslant \left(\frac{A_{n+1}(a;q)}{G_{n+1}(a;q)}\right)^{Q_{n+1}}$$

with equality if $a_{n+1} = A_n(a;q)$. This is a generalisation of (1) proved earlier in a different way, [2].

(iii) It is easy to deduce from the proof of Theorem 2 that (a) if F is strictly monotonic, and G linear then (17) holds if $G \cdot F$ is convex; (b) if F is strictly monotonic and $G \cdot F$ linear then (17) holds if G is concave [6].

Received the 28 IX 1968

University of British Columbia,
Vancouver, Canada

REFERENCES

1. Bullen P. S., Marcus M., *Symmetric means and matrix inequalities.* Proc. American Math. Soc., 1961, **12**, pp. 285–290.
2. Bullen P. S., *Somme more inequalities involving the arithmetic and geometric means.* Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., 1967, No. *181–196.*
3. — *On some inequalities of Mitrinovič and Vasič.* Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., 1968 (in print).
4. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G., *Inequalities.* Cambridge, 1934.
5. Mitrinovič D. S., Vasič P. M., *Une classe d'inégalités où interviennent les moyennes d'ordre arbitraire.* Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., 1966, No. *159–170.*
6. Popoviciu T., *Asupra unei inegalităţi intre medii.* St. şi Cerc. Mat. (Cluj), 1960, *11,* pp. 344—354.

ASUPRA UNOR TEOREME ALE LUI POPOVICIU

(Rezumat)

Se stabileşte o inegalitate unică care generalizează două rezultate datorite lui T. Popoviciu relative la mediile aritmetică şi geometrică ale unui şir de n numere pozitive.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secția I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 517.431

THE OPERATOR NABLA

BY

L. M. MILNE-THOMSON

1. Introduction

In the early part of the last century the linear vector differentiation operator ∇ was introduced by the Irish mathematician Sir William Rowan Hamilton the discoverer of quaternions. To this operator ∇ Hamilton gave the name *nabla* from its fancied resemblance to a harp. Since then, various other names for example „del", „atled" have been given to ∇ but there seems to be no good reason for departing from the name devised by its inventor.

The whole of tensor analysis can be founded easily and naturally upon nabla. The purpose of this presentation is to give an integral property (proved here, it is believed, for the first time) suited to three-dimensional Euclidean space E_3 and from this property to derive Gauss's theorem.

Let $\varphi(\mathbf{P}) = \varphi$ be a smooth scalar-valued function of vector position $\mathbf{P}$. The adjective smooth is used to imply continuous differentiability to the order required by the context.

Let x^q $(q = 1, 2, 3)$ be cartesian coordinates and $\mathbf{i}_q$ the corresponding orthonormal set of vectors. Then in the notation of differentials we have

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^q}\,\mathrm{d}x^q, \quad d\mathbf{P} = \mathbf{i}_q\, dx^q. \tag{1}$$

Using $(\,\cdot\,)$ to denote scalar multiplication of vectors (1) can be written in the form

$$d\varphi = d\mathbf{P} \,.\, \nabla\varphi, \tag{2}$$

where

$$\nabla = \mathbf{i}_q \frac{\partial}{\partial x^q}\cdot \tag{3}$$

Equation (2) may be taken as the definition of ∇ without reference to coordinates. On the other hand equation (3) is the representation of ∇ in the particular coordinate system defined above.

Since φ is scalar-valued, (2) yields the basic relation of differential operators

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}\mathbf{P}\cdot\nabla. \tag{4}$$

From this it appears that ∇ is an operational vector.

By means of the operator d we can form the differential of any smooth *tensor* $T^{(n)}$ of rank n.

By a tensor we mean the operator defined as follows.

2. Definition of a tensor

A linear vector operator $T^{(n)}$ is a tensor of positive integral rank n if the following conditions are satisfied.

(i) A scalar is a tensor $T^{(0)}$ of rank zero.

(ii) Let $\mathbf{x}$ be an arbitrary vector. Then for every positive integer $n > 0$, $T^{(n)}\cdot\mathbf{x}$ is a tensor of rank $n-1$.

Thus the vector $\mathbf{a}$ is a tensor of rank 1 since $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}$ is a scalar i. e. by (i) a tensor of rank zero.

Again using Jaumann's semicolon (;) to denote dyadic multiplication' the dyad $\mathbf{a};\mathbf{b}$ is a tensor of rank 2 since $(\mathbf{a};\mathbf{b})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})$ is a vector, i. e. a tensor of rank 1. It is not asserted, and it is in fact false, thai every tensor of rank 2 is a single dyad, but it is easy to prove that in Euclidean space E_3, every tensor of rank 2 can be expressed as the sum of at most three dyads.

Proceeding in the above way we can show that tensors of every positive integral rank exist.

Using (4) we now have for a tensor $T^{(n)}$ of rank n

$$\mathrm{d}T^{(n)} = (\mathrm{d}\mathbf{P}\cdot\nabla)\,T^{(n)} = \mathrm{d}\mathbf{P}\cdot(\nabla;\,T^{(n)}). \tag{5}$$

We call

$$\nabla;\,T^{(n)} \tag{6}$$

the *tensor derivative* of the tensor $T^{(n)}$.

The tensor derivative is a tensor of rank $(n+1)$. In particular take $n=1$ and in (5) put $T^{(1)} = \mathbf{P}$, the position vector, which is a tensor of the first rank. Then $\mathrm{d}\mathbf{P} = \mathrm{d}\mathbf{P}\cdot(\nabla;\,\mathbf{P})$.

Therefore introducing the *idemfactor* $\underline{\underline{1}}$, or unit tensor of the second rank, we have

$$\nabla;\,\mathbf{P} = \underline{\underline{1}}. \tag{7}$$

Thus if $\mathbf{x}$ is an arbitrary vector

$$\mathbf{x}\cdot\underline{\underline{1}} = \mathbf{x}. \tag{8}$$

In particular $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\,(\mathbf{x}\cdot\underline{\underline{1}}) = \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\underline{\underline{1}} + \mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\underline{\underline{1}} = \mathrm{d}\mathbf{x} + \mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\underline{\underline{1}}$. Therefore $\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\underline{\underline{1}} = 0$ and since $\mathbf{x}$ is arbitrary $\mathrm{d}\underline{\underline{1}} = 0$.

It follows that $0 = d\underline{\underline{1}} = d\mathbf{P} . (\nabla; \underline{\underline{1}})$ and since $d\mathbf{P}$ is arbitrary

$$\nabla; \underline{\underline{1}} = 0, \tag{9}$$

which means that the tensor derivative of the idemfactor is zero, that is to say the idemfactor behaves as a constant in tensor differentiation. This apparently trivial result is more general than might appear at first sight. The definition of nabla embodied in (4) generalises at once to Euclidean n-space, and even more generally to other spaces such as, for example, Riemannian spaces which can be osculated locally by a Euclidean n-space. The same argument then yields equation (9). An obvious illustration is the two-dimensional surface of an ellipsoid imbedded in E_3.

3. Integral representation of the idemfactor in E_3

Theorem 1. *Let P be a fixed point interior to the volume τ enclosed by the convex boundary surface $\partial\tau$. Let $\mathbf{r}$ be the position vector with respect to P of a point Q of this surface. Let $d\mathbf{S}$ be the outwardly directed vector element of surface at Q. Then we have the following integral representation of the idemfactor*

$$\underline{\underline{1}} = \frac{1}{\tau} \int_{\partial\tau} d\mathbf{S}; \mathbf{r}. \tag{10}$$

Proof. Take P as origin and an orthonormal set of vectors $\mathbf{i}_\alpha$ as basis at P. Let $\mathbf{r} = r^\alpha \mathbf{i}_\alpha$. Then we can write $d\mathbf{S} = d\sigma^\alpha \mathbf{i}_\alpha$, where $d\sigma^\alpha$ is the signed projection of $d\mathbf{S}$ on the plane $r^\alpha = 0$.

Suppose a slender cylinder having cross-section $d\sigma^\alpha$ and generators parallel to $\mathbf{i}_\alpha$ to meet the surface $\partial\tau$ at the points $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$ where the elements of area are $d_1\mathbf{S}$ and $d_2\mathbf{S}$. Let $d_1\mathbf{S}$ be the element for which $r_1^\alpha \geqslant r_2^\alpha$. Then

$$\int_{\partial\tau} d\mathbf{S}; \mathbf{r} = \int (d_1\mathbf{S}; \mathbf{r}_1 + d_2\mathbf{S}; \mathbf{r}_2) = \int (d_1\sigma^\alpha r_1^\beta + d_2\sigma^\alpha r_2^\beta)(\mathbf{i}_\alpha; \mathbf{i}_\beta) =$$

$$= \int (r_1^\beta - r_2^\beta)\, d_1\sigma^\alpha (\mathbf{i}_\alpha; \mathbf{i}_\beta).$$

Since $d_2\sigma^\alpha = -d_1\sigma^\alpha$.

If $\beta \neq \alpha$, $r_1^\beta - r_2^\beta = 0$ and the integrand vanishes, while if $\beta = \alpha$, $r_1^\alpha - r_2^\alpha = h$ the length of the cylinder. But $h\, d_1\sigma^\alpha = d\tau$ the volume of the cylinder and therefore $\int_{\partial\tau} d\mathbf{S}; \mathbf{r} = \tau(\mathbf{i}_\alpha; \mathbf{i}_\alpha) = \tau\, \underline{\underline{1}}$.

4. Integral representation of nabla in E_3

Theorem 2. *Let P be a fixed point interior to the volume τ enclosed by the convex boundary surface $\partial\tau$, whose maximum diameter is ε. Then for any smooth field tensor T*

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \frac{1}{\tau}\int_{\partial\tau} d\mathbf{S}\circ T = \nabla\circ T \tag{11}$$

where $\nabla\circ T$ is calculated at P.

Here the small circle ($\circ$) denotes any allowable type of multiplication arithmetic, scalar, vector or dyadic.

Proof. Let $\mathbf{r}_Q$ be the position vector of Q with respect to P. We shall indicate by suffix P or Q the point to which we are referring. We take ε to be small. Then for Q on $\partial\tau$, $|\mathbf{r}_Q| = O(\varepsilon)$ and from (5) $T_Q = T_P + (\mathbf{r}_Q\cdot\nabla_P)\,T_P + O(\varepsilon^2)$.

Since $\int_{\partial\tau} d\mathbf{S} = 0$ for any closed surface ∂r it follows that

$$\frac{1}{\tau}\int_{\partial\tau} d\mathbf{S}_Q\circ T_Q = \frac{1}{\tau}\int_{\partial\tau} d\mathbf{S}_Q\circ(\mathbf{r}_Q\cdot\nabla_P)\,T_P + O(\varepsilon).$$

Also since $(\mathbf{r}_Q\cdot\nabla_P)$ is a scalar operator we have

$$d\mathbf{S}_Q\circ(\mathbf{r}_Q\cdot\nabla_P)\,T_P = [(d\mathbf{S}_Q;\ \mathbf{r}_Q)\cdot\nabla_P]\circ T_P.$$

Therefore, using Theorem 1,

$$\frac{1}{\tau}\int_{\partial\tau} d\mathbf{S}_Q\circ T_Q = \left[\left(\frac{1}{\tau}\int d\mathbf{S}_Q;\ \mathbf{r}_Q\right)\cdot\nabla_P\right]\circ T_P + O(\varepsilon) = [\underline{1}\cdot\nabla_P]\circ T_P + O(\varepsilon) =$$

$$= \nabla_P\circ T_P + O(\varepsilon).$$

Proceeding to the limit the theorem follows.

5. Gauss's theorem

Theorem 3. *For a closed surface $\partial\tau$ enclosing the volume τ*

$$\int_{\tau}\nabla\circ T\,d\tau = \int_{\partial\tau} d\mathbf{S}\circ T \tag{12}$$

where T is any smooth field tensor and the small circle ($\circ$) denotes any allowable type of multiplication.

Proof. We can suppose the volume τ divided into cells of volume $\delta\tau$ and small maximum diameter ε. Let $\partial(\delta\tau)$ denote the boundary surface of one such cell. Then from theorem 2

$$\nabla \circ T\,\delta\tau = \int_{\partial(\delta\tau)} \mathrm{d}\mathbf{S} \circ T + \mathbf{O}(\varepsilon^4).$$

Sum for the whole region and note that at a boundary point common to two cells $\mathrm{d}\mathbf{S}$ has opposite signs. Proceeding to the limit the theorem follows.

Some consequences of Gauss's theorem

Integral of the tensor derivative

$$\int_\tau \nabla; T\,\mathrm{d}\tau = \int_{\partial\tau} \mathrm{d}\mathbf{S}; T. \tag{13}$$

For a scalar-valued function φ

$$\int_\tau \nabla\varphi\,\mathrm{d}\tau = \int_{\partial\tau} \varphi\,\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{14}$$

For fluid velocity $\mathbf{q}$

$$\int_\tau \nabla \cdot \mathbf{q}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\partial\tau} \mathbf{q} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \text{outward flux through } \partial\tau. \tag{15}$$

For the Laplacian $\nabla^2\varphi = \nabla(\nabla\varphi)$

$$\int_\tau \nabla^2\varphi\,\mathrm{d}\tau = \int_{\partial\tau} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \nabla\varphi = \int_{\partial\tau} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S. \tag{16}$$

For the vorticity $\mathbf{v} = \nabla_\wedge \mathbf{q}$

$$\int_\tau \mathbf{v}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\partial\tau} \mathrm{d}\mathbf{S}_\wedge\,\mathbf{q} = \int_{\partial\tau} \mathbf{n}_\wedge\,\mathbf{q}\,\mathrm{d}S, \tag{17}$$

where $\mathbf{n}$ is the outward unit normal to $\partial\tau$.

6. Green's identities

Let φ, ψ be scalar-valued functions of position. Then from $\nabla \cdot (\varphi\nabla\psi) = (\nabla\varphi) \cdot (\nabla\psi) + \varphi\nabla^2\psi$ we have

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) - \varphi \nabla^2 \psi = (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi) = \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) - \psi \nabla^2 \varphi.$$

Application of Gauss's theorem gives *Green's first identity* namely

$$\int_{\partial\tau} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{d}S - \int_{\tau} \varphi \nabla^2 \psi \mathrm{d}\tau = \int_{\partial\tau} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S - \int_{\tau} \psi \nabla^2 \varphi \mathrm{d}\tau = \int_{\tau} (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi)\, d\tau.$$

Rearrangement of this yields *Green's second identity* namely

$$\int_{\partial\tau} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \mathrm{d}S = \int_{\tau} (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi)\, \mathrm{d}\tau.$$

Now take a fixed point P within $\partial\tau$ and let $r = PQ$, where Q is any point within or upon $\partial\tau$. Describe a sphere Σ about P, its radius R being small enough to ensure that Σ lies within $\partial\tau$. Apply Green's second identity to the region τ' between Σ and $\partial\tau$, taking $\psi = 1/r$. Then

$$\int_{\tau'} \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi \, \mathrm{d}\tau = \int_{\partial\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \mathrm{d}S - \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} - \varphi \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \right] \mathrm{d}\Sigma.$$

Take $d\Sigma = R^2 \, \mathrm{d}\omega$ so that $\mathrm{d}\omega$ is the solid angle subtended at P by $\mathrm{d}\Sigma$, and let $R \to 0$.

Then $\tau' \to \tau$ and the last integral $\to 4\pi\varphi_P$ where φ_P is the value of φ at P. This gives *Green's third identity* namely

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi \, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \mathrm{d}S.$$

Many special cases arise when φ or ψ or both are harmonic functions in the region τ.

In the usual way we can take account of singularities at particular points, lines, or surfaces.

Received the 12 V 1969

University of Queensland,
St. Lucia, Australia

OPERATORUL NABLA

(Rezumat)

Autorul stabilește o proprietate integrală a operatorului nabla și deduce de aici teorema lui Gauss.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secția I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 516.949.21

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DE QUELQUES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES

PAR

VIOREL MURGESCU

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28–30 septembre 1967

1. Introduction

Dans cette Note on se propose de faire quelques observations concernant la possibitité d'élargir le champ d'application d'un théorème de Guelfand [1] et d'un théorème de Poincaré [2], qui traitent sur le comportement asymptotique des solutions des équations linéaires aux différences dont les coefficients satisfont à des conditions données. Ces observations ont été suggérées par l'étude d'une équation aux différences finies [3], dont les coefficients ne satisfont pas aux conditions du théorème de Poincaré.

2. Sur le théorème de Guelfand

Soit

$$f(x+n) + a_1 f(x+n-1) + \cdots + a_n f(x) = 0, \quad (a_n \neq 0), \tag{2.1}$$

une équation linéaire et homogène aux différences, à coefficients constants a_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, et sa équation caractéristique

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{2.2}$$

Alors est valable le théorème suivant (Guelfand): *Si toutes les racines de l'équation* (2.2) *ont leurs modules distincts, $f(x)$ étant une solution (non triviale) quelconque de l'équation* (2.1), *la limite du rapport de $f(x+1)$ et $f(x)$, pour $x \to \infty$, est égale à l'une des racines de l'équation* (2.2).

On veut démontrer, dans ce qui suit, que *le résultat reste valable même si l'équation* (2.2) *a des racines multiples, pourvu que les racines distinctes (s'il en existent) diffèrent en module.*

En vérité, si p ($\leqslant n$) est le nombre des racines distinctes de l'équation (2.2), alors toute solution $f(x)$ de l'équation (2.1) aura la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} Q_k(x)\,\lambda_k^x, \tag{2.3}$$

où

$$Q_k(x) = \sum_{i=\alpha_k-1}^{0} c_{ki}\,x^i, \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{2.4}$$

c_{ki} étant des constantes généralisées données, et α_k étant l'ordre de multiplicité de la racine λ_k de l'équation (2.2).

On suppose encore, conformément à l'hypothèse, que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_p| \tag{2.5}$$

et on fait la remarque que les nombres α_k satisfont à l'égalité $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = n$.

Alors, si c_{rq} est la première constante non nulle du (2.3) dans l'ordre déjà établie, on peut écrire $f(x)$ de la manière

$$f(x) = (c_{r,q}\,x^q + c_{r,q-1}\,x^{q-1} + \cdots + c_{r,0})\,\lambda_r^x + \sum_{k=r+1}^{p} Q_k(x)\,\lambda_k^x, \tag{2.6}$$

$$(1 \leqslant r \leqslant p, \quad 0 \leqslant q \leqslant \alpha_r - 1).$$

Il s'ensuit maintenant qu'on a

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{[c_{r,q}(x+1)^q + c_{r,q-1}(x+1)^{q-1} + \cdots + c_{r,0}]\,\lambda_r^{x+1} + \sum_{k=r+1}^{p} Q_k(x+1)\lambda_k^{x+1}}{[c_{r,q}\,x^q + c_{r,q-1}\,x^{q-1} + \cdots + c_{r,0}]\,\lambda_r^x + \sum_{k=r+1}^{p} Q_k(x)\,\lambda_k^x},$$

où, après la suppression du facteur λ_r^x,

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{[c_{r,q}(x+1)^q + c_{r,q-1}(x+1)^{q-1} + \cdots + c_{r,0}]\lambda_r + \sum_{k=r+1}^{p} Q_k(x+1)\lambda_k(\lambda_k/\lambda_r)^x}{[c_{r,q}\,x^q + c_{r,q-1}\,x^{q-1} + \cdots + c_{r,0}] + \sum_{k=r+1}^{p} Q_k(x)\,(\lambda_k/\lambda_r)^x}, \tag{2.7}$$

Compte tenu que tous les rapports $(\lambda_k/\lambda_r)^x$, $(k = r+1, \ldots, p)$, ont la limite zéro pour $x \to \infty$, parce que $|\lambda_k/\lambda_r| < 1$, il en résulte de (2.7) l'égalité

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lambda_r, \tag{2.8}$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Si toutes les racines de l'équation (2.2) on le même module et deux au moins sont distinctes, le résultat n'est pas plus vrai ; on peut le montrer en considérant, par exemple, l'équation $f(x+2) - 4f(x) = 0$.

3. Un théorème réductible au théorème de Poincaré

Considérons cette fois l'équation linéaire et homogène aux coefficients variables

$$f(x+n)+P_{n-1}(x)f(x+n-1)+\cdots+P_1(x)f(x+1)+P_0(x)f(x)=0, \tag{3.1}$$

où $P_0(x),\ldots,P_{n-1}(x)$ sont des fonctions données; alors est valable le résultat suivant:

Théorème. *S'il existe un nombre réel* ν *et les nombres* $\alpha_k \in R$, *définis par les limites*

$$\lim_{x\to\infty}[P_{n-k}(x)/x^{k\nu}]=\alpha_{n-k}, \quad (k=1,\ 2,\ldots,n), \tag{3.2}$$

et si toutes les racines de l'équation

$$\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_1\lambda+\alpha_0=0 \tag{3.3}$$

ont leurs modules distincts, alors quelque soit la solution particulière $f(x)$ *de l'équation* (3.1), *on a*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{x^{\nu}f(x)}=\lambda_p, \tag{3.4}$$

où λ_p *est une racine de l'équation* (3.3).

On observe immédiatement que pour $\nu=0$, le théorème précedent coïncide avec le théorème de Poincaré [1]). Il reste donc à supposer que même si les limites de (3.4) n'existent pas (finies), il existe un nombre réel ν ainsi que les conditions du théorème énoncé soient satisfaites. Alors on veut montrer que même dans ce cas on peut faire la réduction de ce théorème au théorème de Poincaré, mais pour une autre équation, qui s'obtient de (3.1) par la transformation

$$f(x)=[\Gamma(x)]^{\nu}\varphi(x), \tag{3.6}$$

où $\varphi(x)$ est la nouvelle fonction inconnue. Par conséquent, l'équation (3.1) devient

$$\varphi(x+n)+Q_{n-1}(x)\varphi(x+n-1)+\cdots+Q_0(x)\varphi(x)=0, \tag{3.7}$$

où les nouveaux coefficients ont l'expression

$$Q_{n-k}(x)=\frac{P_{n-k}(x)}{[(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+n-k)]^{\nu}}, \quad (k=1,\ 2,\ldots,n). \tag{3.8}$$

---

[1]) Théorème de Poincaré: *Étant donnée l'équation* (3.1), *si toutes les racines de l'équation*

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{3.5}$$

(*où* $a_i=\lim_{x\to\infty}P_i(x)$, $i=0,\ 1,\ 2,\ldots,n-1$) *diffèrent par leurs modules, alors quelque soit la solution particulière* $f(x)$ *de l'équation* (3.1), *on a* $\lim_{x\to\infty}[f(x+1)/f(x)]=\lambda_p$, λ_p *étant une solution de l'équation* (3.4).

En vértu de (3.2) il résulte qu'on a

$$\lim_{x\to\infty} Q_{n-k}(x) = \alpha_{n-k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.9}$$

et donc l'équation (3.7) satisfait aux conditions du théorème de Poincaré. Par conséquent, $\lim_{x\to\infty} [\varphi(x+1)/\varphi(x)] = \lambda_p$, λ_p étant une racine de l'équation (3.3). Maintenant en revenant à $f(x)$ par la substitution (3.6), la limite précédente devient $\lim_{x\to\infty} f(x+1)/[x^\nu f(x)] = \lambda_p$, (c. q. f. d.).

Observations. 1° Si en ce qui concerne le théorème de Poincaré les solutions de l'équation $f(x+1) - [\lambda_p + \varepsilon(x)] f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$, sont celles qui indiquent le comportement à l'infini de la solution correspondante de l'équation (3.1), dans les conditions du théorème qu'on a établi auparavant, c'est l'équation $f(x+1) + x^\nu (\lambda_p + \varepsilon(x)) f(x) = 0$ qui joue le même rôle. En supposant $\varepsilon(x)$ negligeable pour x assez grand, on peut observer que l'équation

$$f(x+1) + \lambda_p x^\nu f(x) = 0 \tag{3.10}$$

peut être réduite par la substitution (3.6) à l'équation $\varphi(x+1) + \lambda_p \varphi(x) = 0$, dont la solution générale est $\varphi(x) = \omega(x)(-\lambda_p)^x$; donc la solution générale de l'équation (3.10) a la forme $f(x) = \omega(x)[\Gamma(x)]^\nu (-\lambda_p)^x$, où $\omega(x)$ est une constante généralisée.

2° Si $P_0(x)$ n'a pas des zéros entiers et $\nu > 0$, on peut faire des précisions supplémentaires sur les solutions de l'équation (3.1), semblables aux conclusions du théorème de Perron [4].

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques II

BIBLIOGRAPHIE

1. Ghelfand A. O., *Calculul cu diferențe finite.* Ed. tehn., Buc., 1956 (trad. du russe)
2. Poincaré H., Amer. J. Math., 1885, **7**, pp. 203–258.
3. Murgescu V., Bul. Inst. polit. Iași, 1968, **XIV (XVIII)**, *1–2*, pp. 75–77.
4. Perron O., J. rein u. angew. Math., 1909, **136**, pp. 17–38.

ASUPRA COMPORTĂRII ASIMPTOTICE A SOLUȚIILOR UNOR ECUAȚII LINIARE CU DIFERENȚE

(Rezumat)

Se demonstrează în condiții mai largi o teoremă a lui Ghelfand relativă la ecuațiile liniare cu diferențe și se stabilește următoarea propoziție (ce generalizează o teoremă a lui Poincaré):

Dacă există un număr real ν *și numerele* $\alpha_k \in R$, *definite prin limitele* (3.2) *și dacă toate rădăcinile ecuației* (3.3) *au modulii distincți atunci, oricare ar fi soluția particulară* $f(x)$ *a ecuației* (3.1), *are loc relația* (3.4), *în care* λ_p *este o rădăcină a ecuației* (3.3).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 517.948

SOLUTIONS BORNÉES POUR DES SYSTÈMES LINÉAIRES DISCRETS ET DU TYPE DE VOLTERRA-STIELTJES

PAR

DAN PETROVANU

Plusieurs mémoires et livres (par exemple [2], [6]) ont mis en relief une certaine tendence actuelle: celle d'établir des „analogues discrets" pour des résultats de la théorie des équations intégrales ou différentielles et, réciproquement, d'établir des „analogues continus" ou mixtes pour des résultats concernant les systèmes discrets. Dans [6] on trouve des transpositions pour le cas discret ou mixte de certaines inégalités connues dans le cas „continu" (lemme de Gronwall etc...).

Dans cet ordre d'idées, nous nous proposons d'établir des conditions suffisantes pour que les solutions des systèmes récurrents (1.1) soient bornées (§ 1), et des conditions suffisantes pour que les solutions des systèmes linéaires (2.1) du § 2 soient aussi bornées. Dans les deux cas, on cherche à tirer profit (d'une manière qui a été déjà exploitée par A. P. Moiseenko [4] pour le cas des systèmes ordinaires) d'un analogue discret, ou d'un analogue „en termes d'équations intégrales de Volterra-Stieltjes", de la formule de résolution d'une équation ordinaire linéaire, du premier ordre (v. les formules (1.4), respectivement (2.3) ci-dessous).

Si les théorèmes du § 1 peuvent être intéressants au point de vue pratique, compte tenu de la très grande généralité des conditions et de l'importance pour la pratique des récurrences de la forme (1.1), le théorème du § 2 a, nous semble-t-il, un intérêt purement théorique, sensiblement reduit par le commentaire qui suit après le théorème. Enfin, les résultats du § 3 se rapporteat à l'étude de l'existence et du comportement des solutions des équations Volterra-Stieltjes non-linéaires, d'une forme spéciale.

1. Considérons les récurrences

$$x^{(k)} = x^{(0)} + \sum_{0 \leq i < k} P^{(i)} x^{(i)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots; \ \sum_{0 \leq i < 0} (.) = 0), \tag{1.1}$$

où $P^{(i)}$ sont des matrices données, fonctions de l'argument naturel i. Evidemment, (1.1) est équivalent à

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + P^{(k-1)} x^{(k-1)}, \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.2}$$

Si $p^{(i)}_{\alpha\beta}$ sont les composantes de $P^{(i)}$ et $x^{(k)}_{\alpha}$ celles de $x^{(k)}$, on peut encore écrire (1.2) sous la forme

$$x_\alpha^{(k)} = x_\alpha^{(k-1)}\left[1 + p_{\alpha\alpha}^{(k-1)}\right] + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{n} p_{\alpha\beta}^{(k-1)} x_\beta^{(k-1)}, \tag{1.3}$$

$(\alpha = 1, 2, .., n; k = 1, 2, ...)$. Remarquons maintenant que (1. 3) entraîne

$$x_\alpha^{(k+k_0)} = x_\alpha^{(k_0)} \prod_{k_0 \leqslant j < k+k_0} (1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}) + \tag{1.4}$$

$$+ \sum_{k_0 \leqslant i < k+k_0} \left[\left(\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{n} p_{\alpha\beta}^{(i)} x_\beta^{(i)} \right) \prod_{i<j<k+k_0} (1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}) \right],$$

comme il résulte en multipliant la relation (1.3), écrite pour $k = i + 1$, avec $\prod_{i<j<k+k_0} (1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)})$ et en sommant pour tous les i, $(k_0 \leqslant i < k + k_0)$. (Ici, on pose, par définition, $\prod_{k_0<j<k_0+1} = 1$ et $\prod_{k+k_0-1<j<k_0+k} = 1$).

On a maintenant de (1.4):

$$|x_\alpha^{(k+k_0)}| \leqslant |x_\alpha^{(k_0)}| \prod_{k_0 \leqslant j < k+k_0} |1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}| + \tag{1.5}$$

$$+ \max_{\substack{1\leqslant\beta\leqslant n \\ k_0\leqslant s\leqslant k+k_0}} |x_\beta^{(s)}| \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{n} \sum_{k_0 \leqslant i < k+k_0} |p_{\alpha\beta}^{(i)}| \prod_{i<j<k+k_0} |1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}|,$$

$$(\alpha = 1, 2, .., n; k = 1, 2, ...).$$

Remarque 1. Si

$$\prod_{k_0 \leqslant j < k+k_0} |1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}| \leqslant R, \tag{1.6}$$

$$\sum_{k_0 \leqslant i < k+k_0} |p_{\alpha\beta}^{(i)}| \prod_{i<j<k+k_0} |1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}| < \frac{1}{2(n-1)},$$

$(\beta \neq \alpha; \alpha, \beta = 1, 2, .., n; k = 1, 2, ...; k_0 \geqslant 0$ fixé) on obtient de (1.5)

$$|x_\alpha^{(k+k_0)}| < 2|x_\alpha^{(k_0)}|R, \qquad (\alpha = 1, 2, .., n; k = 1, 2, ...). \tag{1.7}$$

Cette remarque permet d'énoncer le

Théorème 1. *Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*

(I) *Pour* $(1 \leqslant \alpha \leqslant q)$ *on a*

$$\prod_{i \leqslant j < k+k_0} |1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}| \leqslant \frac{R}{(1+M)^{k+k_0-i}}, \tag{1.8}$$

pour $k = 1, 2, ...,$ *où* $M > 0, k_0 \leqslant i < j < k + k_0$,

$$|p_{\alpha\beta}^{(k+k_0)}| \leqslant N, \tag{1.9}$$

pour $\alpha < \beta, k = 0, 1, 2, ...,$

$$\lim_{k\to\infty} |p_{\alpha\beta}^{(k)}| = 0, \quad pour \quad \alpha > \beta, \tag{1.10}$$

avec

$$M > 2NR\,(n-1). \tag{1.11}$$

(II) *Pour* $(q+1 \leqslant \alpha \leqslant n)$ *on a*

$$\prod_{i \leqslant j < k+k_0} |1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}| \leqslant R^*, \tag{1.12}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} |p_{\alpha\beta}^{(s)}| < L, \qquad (\alpha \neq \beta). \tag{1.13}$$

Alors, toutes les récurrences $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ *définies par* (1.1) (c'est-à-dire (1.2)) *sont bornées, quel que soit le vecteur initial donné* $x^{(0)}$.

(*Commentaire.* Ici, $0 \leqslant q \leqslant n$. Si $q = 0$, on admet pour $1 \leqslant \alpha \leqslant n$ seulement les hypothèses (1.12), (1.13). Si $q = n$, on admet seulement (1.8) (1.9), (1.10), (1.11)).

Démonstration. Il suffit, évidemment, de démontrer que tous les $|x^{(k+k_0)}|$ sont bornés par le même nombre pour $k \geqslant 1$, avec k_0 naturel, fixé. Nous allons montrer que des conditions du type (1.6) sont vérifiées dans tous les cas. Remarquons d'abord qu'un changement d'échelle

$$x_{\alpha}^{(s)} = \varepsilon^{\alpha}\, x_{\alpha}^{(s)}, \qquad (\alpha = 1, 2, .., q\,; s = 0, 1, 2, \ldots),$$

change l'aspect des coefficients du système (1.3), mais n'altère ni sa linéarité, ni la propriété d'être bornées des solutions. Il suffit donc de démontrer que les coefficients $\bar{p}_{\alpha\beta}^{(k)}$ du système transformé satisfont à (1.6). Si on choisit

$$\frac{2}{3} < \varepsilon < 1, \qquad \varepsilon < \frac{M}{3NR\,(n-1)}, \tag{1.14}$$

on obtient, *pour* $\alpha < \beta$, en vertu de (1.9), (1.8),

$$|\bar{p}_{\alpha\beta}^{(k+k_0)}| = \varepsilon^{\beta-\alpha}\, |p_{\alpha\beta}^{(k+k_0)}| < N\varepsilon < \frac{M}{3R\,(n-1)},$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$, donc

$$\sum_{k_0 \leqslant i < k+k_0} |\bar{p}_{\alpha\beta}^{(i)}| \prod_{i < j < k+k_0} |1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}| < \frac{M}{3R\,(n-1)} \sum_{k_0 \leqslant i < k+k_0} \frac{R}{(1+M)^{k+k_0-i}} <$$

$$< \frac{1}{3(n-1)} < \frac{1}{2(n-1)}.$$

D'autre part, $\bar{p}_{\alpha\alpha}^{(s)} = p_{\alpha\alpha}^{(s)}$ et ces derniers satisfont, pour $1 \leqslant \alpha \leqslant q$ à la première condition de (1.6), en vertu de (1.8).

Pour $\alpha > \beta$, on a, en vertu de (1.10),

$$|\bar{p}_{\alpha\beta}^{(s)}| \leqslant N, \qquad (s = k_0,\ k_0+1, \ldots;\ \alpha > \beta;\ \alpha = 1,2,..,q),$$

à condition de fixer k_0 assez grand. On a donc, de (1.8), (1.14),

$$\sum_{k_0 \leqslant i < k+k_0} |\bar{p}_{\alpha\beta}^{(i)}| \prod_{i<j<k+k_0} |1 + \bar{p}_{\alpha\alpha}^{(j)}| \leqslant NR \sum_{k_0 \leqslant i < k+k_0} \frac{1}{(1+M)^{k+k_0-i}} =$$

$$= \frac{NR}{M} < \frac{1}{3\varepsilon(n-1)} < \frac{1}{2(n-1)},$$

et (1.6) sont de nouveau vérifiées pour le système transformé. Donc, $|x_\alpha^{(k+k_0)}|$ sont bornés, pour k_0 fixé et $1 \leqslant \alpha \leqslant q$.

Enfin, *si* $q+1 \leqslant \alpha \leqslant n$, on a, en vertu de (1.13),

$$\sum_{i=k_0}^{+\infty} |p_{\alpha\beta}^{(i)}| < \frac{1}{2(n-1)R^*} = L^*,$$

pour k_0 assez grand, mais fixé. Donc,

$$\sum_{k_0 \leqslant i < k+k_0} |p_{\alpha\beta}^{(i)}| \prod_{i<j<k+k_0} |1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}| < R^*L^* = \frac{1}{2(n-1)}.$$

C'est-à-dire les conditions (1.6) sont de nouveau vérifiées et le théorème est démontré.

Théorème 2. *Le théorème 1 est vrai dans les mêmes hypothèses, si on remplace* (1.8) *et* (1.11) *par les conditions, plus générales,*

$$(1.8^*) \qquad \prod_{i \leqslant j < k+k_0} |1 + p_{\alpha\alpha}^{(j)}| \leqslant R f_{k+k_0-i}, \qquad (k_0 \leqslant i < j < k+k_0),$$

avec $\sum_{s=1}^{\infty} f_s = f$, *où*

$$(1.11^*) \qquad f < \frac{1}{2NR(n-1)}.$$

La démonstration reste la même. Dans le théorème 1 on a, évidemment, $f_{k+k_0-i} = 1/(1+M)^{(k+k_0-i)}$, $f = 1/M$.

2. Dans ce paragraphe, nous considérons l'équation

$$(2.1) \qquad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} P(\tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\eta(\tau),$$

(où l'intégrale considérée est une intégrale de Riemann-Stieltjes, $P(t)$ est une matrice réelle du type $n \times n$, $x(t)$ le vecteur réel inconnu à n dimen-

sions et $\eta(t)$ une fonction scalaire, réelle) avec l'intention d'établir des conditions suffisantes pour que toutes les solutions de (2.1) soient bornées sur $[t_0, +\infty)$.

Nous allons établir d'abord le

Lemme 1. *Considérons l'équation*

$$u(t) = v(t) + \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, u(\tau)\, d\eta(\tau), \tag{2.2}$$

où $v(t)$ et $p(t)$ sont des fonctions scalaires continues, ou à variation bornée sur $[t_0, \infty)$, tandis que $\eta(t)$ est une fonction scalaire non-décroissante et continue sur $[t_0, \infty)$. On obtient alors

$$u(t) = u(t_0)\, \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(s)\, d\eta(s) \right) + \int_{t_0}^{t} \left[\exp\left(\int_{\tau}^{t} p(s)\, d\eta(s) \right) \right] dv(\tau). \tag{2.3}$$

Démonstration. Remarquons d'abord qu'en vertu des hypothèses ci-dessus, toutes les intégrales de Stieltjes qui interviendrons au cours de la démonstration existent. Puis, remarquons que pour la solution $u(t)$ de (2.2) on a

$$u(t) = v(t) + \int_{t_0}^{t} v(\tau) p(\tau)\, \exp\left(\int_{\tau}^{t} p(s)\, d\eta(s) \right) d\eta(\tau), \tag{2.4}$$

compte tenu de ce qui a été prouvé par Stephen Jones ([6], lemme 4). Mais, en vertu de la formule

$$\int_{t_0}^{t} v(\tau) p(\tau)\, \exp\left(\int_{\tau}^{t} p(s)\, d\eta(s) \right) d\eta(\tau) = -\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\left[\exp \int_{\tau}^{t} p(s)\, d\eta(s) \right], \tag{2.5}$$

(qui est un cas particulier de la formule de S. Jones (v. [6], lemme 4 formule (23)), on obtient de (2.4), (2.5),

$$\begin{aligned} u(t) &= v(t) - \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\left[\exp\left(\int_{\tau}^{t} p(s)\, d\eta(s) \right) \right] = v(t) - v(t) + \\ &+ v(t_0)\, \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(s)\, d\eta(s) \right) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{\tau}^{t} p(s)\, d\eta(s) \right) dv(\tau), \end{aligned} \tag{2.6}$$

après l'application, évidente, du théorème de l'intégration par parts (v.[1]). C.Q.F.D.

Considérons de nouveau le système (2.1), que nous allons écrire sous une forme scalaire, en désignant par $p_{ij}(t)$, $(i,j = 1, 2, .., n)$ les composantes de la matrice $P(t)$, et par $x_i(t)$, $(i = 1, 2, .., n)$ les composantes de $x(t)$. On a alors

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\tau)\, x_j(\tau)\, d\eta(\tau), \tag{2.1*}$$

$(i = 1, 2, .., n)$, ou bien

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} p_{ii}(\tau)\, x_i(\tau)\, d\eta(\tau) + \tag{2.7}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} p_{ij}(\tau)\, x_j(\tau)\, d\eta(\tau), \qquad (i = 1, .., n).$$

Théorème. *Supposons que $\eta(t)$ soit une fonction continue et non-décroissante et que $p_{ij}(t)$ soient des fonctions continues ou à variation bornée sur $[t_0, \infty)$. Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :*

(I) *Pour $1 \leqslant i \leqslant q$ on a*

$$\int_{z}^{t} p_{ii}(\tau)\, d\eta(\tau) < K - M(t - z), \qquad (M > 0\,;\ t_0 \leqslant z < t), \tag{2.8}$$

$$\int_{t}^{t+1} p_{ij}(\tau)\, d\eta(\tau) < N, \qquad (i < j,\ t \geqslant t_0), \tag{2.9}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{t}^{t+1} |p_{ij}(\tau)|\, d\eta(\tau) = 0, \qquad (i > j). \tag{2.10}$$

(II) *Pour $q + 1 \leqslant i \leqslant n$ on a*

$$\int_{z}^{t} p_{ii}(\tau)\, d\eta(\tau) < K, \qquad (t_0 \leqslant z < t), \tag{2.11}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} |p_{ij}(\tau)|\, d\eta(\tau) < L, \qquad (i \neq j). \tag{2.12}$$

Alors toutes les solutions du système (2.1) sont bornées pour $t \geqslant t_0$.*

Remarque. Ce théorème représente une transposition du résultat de Moiseenko [4], établi pour des équations ordinaires.

Démonstration. Puisque (2.1*) est équivalent à (2.7) et que (2.7), pour i fixé, est un cas particulier de l'équation (2.2), on obtient de (2.7), en vertu du lemme 1,

$$x_i(t) = x_i(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} p_{ii}(s)\, d\eta(s)\right) + \tag{2.13}$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \int_{t_0}^{t} p_{ij}(\tau) x_j(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^{t} p_{ii}(s)\, d\eta(s)\right) d\eta(\tau).$$

Cette égalité permet de paraphraser avec des modifications évidentes la démonstration du théorème de Moiseenko (v. [4]), et de démontrer ainsi le théorème énoncé.

Commentaire. Si $\eta(t)$ était supposée absolument continue, une intégrale de Stieltjes du type $\int_a^t f(\tau)\, d\eta(\tau)$ se reduirait à l'intégrale de Lebesgue $\int_a^t f(\tau)\, \eta'(\tau)\, d\tau$ et le résultat démontré serait une banalité. D'autre part, quoi que $\eta(t)$ soit, par hypothèse une fonction non-décroissante, c'est-à-dire à dérivée presque partout finie, elle ne satisfait pas la propriété de Zaretzki (v. [5], p. 307, exercice 12), donc elle n'est pas, en général, absolument continue.

3. Considérons d'abord le système

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\eta(\tau), \tag{3.1}$$

où l'intégrale considérée est au sens de Riemann-Stieltjes, $\eta(t)$ est une fonction scalaire, x, x_0 et f des vecteurs. Désignons par $|.|$ une norme matricielle quelconque d'une matrice (vecteur), par exemple la somme des valeurs absolues des composantes. Remarquons d'abord qu'on démontre immédiatement le

Théorème d'existence. *Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*

(α) *$\eta(t)$ est une fonction scalaire continue et non-décroissante sur l'intervalle*

(I) $\{t\,;t \geqslant t_0\,;\ \eta(t) \leqslant a + \eta(t_0)\}, \quad a > 0.$

(β) *La fonction vectorielle* $f(t, x)$ *est continue sur* $R = I \times Q$, *où*

(Q) : $|x - x_0| \leqslant b$, *c'est-à-dire on a aussi* $|f(t, x)| \leqslant M$, $(t, x) \in R$.

(γ) *On a pour tous les* $(t, x_1), (t, x_2) \in R$, $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L\,|x_1 - x_2|$.

Soit $\delta = \min\,(a,\ b/M)$ *et*

(I_1) $$\{t\,;t \geqslant t_0\,;\ \eta(t) \leqslant \delta + \eta(t_0)\}.$$

Le système (3.1) *a alors une solution continue sur* (I_1), *unique.*

La démonstration, immédiate, résulte par la méthode classique des approximations successives comme dans le cas des équations ordinaires.

Nous nous proposons de démontrer ici un théorème d'existence et de comportement du type de celui de [3]. En particulier, on obtient un critère pour que toutes les solutions du système soient bornées sur $[t_0, \infty)$.

Théorème. *Considérons le système* (3.1), *avec* x_0 *vecteur constant donné et supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*

(α) $\eta(t)$ *est une fonction scalaire continue et non-décroissante sur* $[t_0, \infty)$.

(β) $f(t, x)$ *est une fonction vectorielle réelle, définie sur* $[t_0, \infty) \times R^{(n)}$, *atisfaisant à*

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leqslant L(t)\,|x - \bar{x}|, \tag{3.2}$$

avec $L(t)$ *fonction scalaire, continue sur* $[t_0, \infty)$, *pour* $x, \bar{x} \in R^{(n)}$, $t \in [t_0, \infty)$.

(γ) *On a*

$$|f(t, 0)| = O\left(L(t) \exp\left[\alpha \int_{t_0}^{t} L(\tau)\, d\eta(\tau)\right]\right), \text{ pour } t \to \infty, \text{ où } \alpha > 1. \tag{3.3}$$

Alors, le système (3.1) *admet une seule solution* $x = x(t)$, *continue sur* $t \geqslant t_0$ *et telle que*

$$|x(t)| = O\left(\exp\left[\alpha \int_{t_0}^{t} L(\tau)\, d\eta(\tau)\right]\right), \text{ pour } t \to \infty. \tag{3.4}$$

Démonstration. Soit S_α l'espace des fonctions vectorielles $y(t)$, continues sur $t \geqslant t_0$ et telles que

$$|y(t)| = O\left(\exp\left[\alpha \int_{t_0}^{t} L(\tau)\, d\eta(\tau)\right]\right). \tag{3.5}$$

C'est un espace linéaire avec les opérations définies comme d'habitude. En posant

$$\|y\| = \sup_{t \geqslant t_0} \left\{ |y(t)| \exp\left[-\alpha \int_{t_0}^{t} L(\tau)\, d\eta(\tau) \right] \right\}, \tag{3.6}$$

on voit que S_α est un espace de Banach avec la norme $\|.\|$ définie dans (3.6). Considérons l'opérateur

$$(\Omega x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\eta(\tau). \tag{3.7}$$

Si on montre que l'opérateur $\Omega : S_\alpha \to S_\alpha$ et que Ω est contractant sur S_α, le théorème résulte démontré (principe des contractions).

Mais, la condition (3.3) entraîne l'existence d'un $T = T(k)$, tel que

$$|f(t, 0)| \leqslant k L(t) \exp\left[\alpha \int_{t_0}^{t} L(\tau)\, d\eta(\tau) \right], \tag{3.8}$$

pour $t_0 \leqslant T < t$.

Donc, en vertu de (3.2), (3.8), (3.5), on a pour tout $x(t) \in S_\alpha$,

$$|(\Omega x)(t)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(\tau, 0)|\, d\eta(\tau) + \int_{t_0}^{t} L(\tau)\, |x(\tau)|\, d\eta(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{T} |f(\tau, 0)|\, d\eta(\tau) + k \int_{t_0}^{t} L(\tau) \exp\left[\alpha \int_{t_0}^{\tau} L(s)\, d\eta(s) \right] d\eta(\tau) +$$

$$+ \|x\| \int_{t_0}^{t} L(\tau) \exp\left[\alpha \int_{t_0}^{\tau} L(s)\, d\eta(s) \right] d\eta(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{T} |f(\tau, 0)|\, d\eta(\tau) + \frac{k + \|x\|}{\alpha} \int_{t_0}^{t} d\left[\exp\left(\alpha \int_{t_0}^{\tau} L(s)\, d\eta(s) \right) \right] \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ |x_0| + \int_{t_0}^{T} |f(\tau, 0)|\, d\eta(\tau) + \frac{k + \|x\|}{\alpha} \right\} \exp\left[\alpha \int_{t_0}^{t} L(s)\, d\eta(s) \right],$$

c'est-à-dire Ω mène S_α dans S_α. D'une manière analogue on démontre que

$$|(\Omega x_1)(t) - (\Omega x_2)(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} L(\tau)\,|x_1(\tau) - x_2(\tau)|\,d\eta(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\|x_1 - x_2\| \exp\left[\alpha \int_{t_0}^{t} L(s)\,d\eta(s)\right],$$

donc $\|\Omega x_1 - \Omega x_2\| \leqslant (1/\alpha)\|x_1 - x_2\|$, c'est-à-dire Ω est contractant.

Remarque. Si, en particulier, on a dans (3.2) $L(t) = l = \text{constante}$ et $\eta(t) \leqslant h = \text{constante}$ pour $t \geqslant t_0$, alors $\exp\left[\alpha \int_{t_0}^{t} L(\tau)\,d\eta(\tau)\right] \leqslant M = \text{constante}$ et on obtiendra un critère pour que toutes les solutions de (3.1) soient bornées.

Reçue la 31 XII 1968

Université „Al. I. Cuza", Jassy

BIBLIOGRAPHIE

1. Apostol T., *Mathematical Analysis.* Addison Wisley, 1957, pp. 191—250.
2. Atkinson F. V., *Discrete and continuous boundary problems.* Academic Press, 1964, p. 447.
3. Corduneanu C., *Sur l'existence et le comportement des solutions d'une classe d'équations différentielles.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys., R. P. Roumaine, 1958, **2 (50)**, pp. 397—400.
4. Моисеенко А. П., *Об одном достаточном условий ограничености на полуоси всех решений систему линеиных дифференцяльных уравнений.* УМН, 1962, **XVII**, *1*, стр. 205—207.
5. Natanson I. P., *Thorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.* Berlin, 1961.
6. Stephen Jones K., *Fundamental inequalities for discrete and discontinuous functional equations.* RIAS Technical Report, *63*, april 1963.

SOLUŢII MĂRGINITE PENTRU SISTEME LINIARE DISCRETE ŞI DE TIPUL VOLTERRA-STIELTJES

(Rezumat)

În § 1 se demonstrează criterii generale de mărginire a iteraţiei (1.2). În § 2 se dă o teoremă de mărginire a soluţiilor sistemului liniar (2.1). În § 3 este dată o teoremă de existenţă cu comportare asimptotică prescrisă pentru sistemul (3.1).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

Д. К. 517.948.32

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

А. КОРДУНЯНУ

Цель этой заметки — дать дискретный аналог результатов, полученных в [1], и установить новую теорему о непрерывной зависимости решения уравнений типа Вольтерра (второго рода) от „свободного члена". Сперва дадим некоторые предложения.

Предложение 1. *Если* $k(x,s,u)$ *непрерывная функция при*

$$0 \leqslant x \leqslant s < +\infty, \quad -\infty < u < +\infty, \quad k(x,s,0) \equiv 0,$$
$$|k(x,s,u) - k(x,s,v)| \leqslant a(x)b(s)|u-v|,$$

где $a(x)$ *и* $b(x)$ *непрерывные функции при* $x \geqslant 0$ *и*

$$\sup_{x\geqslant 0} a(x)\int_x^\infty b(s)\, e^{\int_x^s a(\tau)b(\tau)d\tau}\, ds \leqslant B,$$

то решение уравнения

$$y(x) = f(x) + \int_x^\infty k(x,s,y(s))\,ds, \quad x \geqslant 0 \tag{1}$$

существует, единственно и устойчиво. Здесь f *есть измеримая ограниченная функция при* $x \geqslant 0$.

Доказательство. Легко получается методом последовательных приближений. Оно аналогично доказательству теоремы 3 из [1]. Следует, что $\|y\| \leqslant (1+B)\|f\|$, где $\|f\|$ означает $\operatorname{ess\,sup}_{x\geqslant 0} |f(x)|$.

Предложение 2. *Если линейный органиченный оператор* V *в* L_∞ (*пространство ограниченных последовательностей*) *определяется:*

$$(Vx)^{(k)} = \sum_{j=k+1}^{\infty} C_j^{(k)} x^{(j)}, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{2}$$

где $\sup\limits_{k\geqslant 1}\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}|C_j^{(k)}|<+\infty$, *то его спектральный радиус удовлетворяет неравенству*:

$$r(V)\leqslant\lim_{l\to\infty}\left\{\sup_{k\geqslant l}\sum_{j=k+1}^{\infty}|C_j^{(k)}|\right\}.$$

Предложение 3. *Если* $|C_j^{(k)}|\leqslant a_k b_j$, $k,j=1,2,3,\ldots$ и

$$\sup_k a_k\sum_{j=k+1}^{\infty}b_j\,e^{\sum\limits_{\tau=k+1}^{j}a_\tau b_\tau}\leqslant B,$$

то решение уравнения

$$x^{(k)}=f^{(k)}+\sum_{j=k+1}^{\infty}C_j^{(k)}x^{(j)},\quad k=1,2,3,\ldots \tag{3}$$

существует, единственно и устойчиво. Здесь $f\in L_\infty$.

Доказательство. Проводится методом последовательных приближений. Запишем уравнение в абстрактной форме $x=f+Vx$ и положим $x_0=f$, $x_1=f+Vx_0,\ldots,x_n=f+Vx_{n-1}\ldots$

Получим, что: $\|x_1-x_0\|=\|Vx_0\|\leqslant\sup\limits_k a_k\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}b_j\|f\|$.

Запомним, что норма элемента в L_∞ определяется $\|f\|=\sup\limits_{k\geqslant 1}|f^{(k)}|$.

Дальше следует, что:

$$\|x_2-x_1\|=\|V(x_1-x_0)\|\leqslant\sup_k\sum_{j=k+1}^{\infty}|C_j^{(k)}|\,|(x_1-x_0)^{(j)}|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_k\sum_{j=k+1}^{\infty}|C_j^{(k)}|\sum_{i=j+1}^{\infty}|C_i^{(j)}|\,\|f\|\leqslant\sup_k a_k\sum_{j=k+1}^{\infty}b_j\sum_{i=j+1}^{\infty}a_j b_i\|f\|=$$

$$=\sup_k a_k\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{i=j+1}^{\infty}a_j b_j b_i\|f\|=\sup_k a_k\sum_{i=k+2}^{\infty}b_i\sum_{j=k+1}^{i-1}a_j b_j\|f\|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_k a_k\sum_{j=k+1}^{\infty}b_j\left(\sum_{\tau=k+1}^{j}a_\tau b_\tau\right)\|f\|.$$

Рассмотрим теперь

$$\|x_3-x_2\|=\|V(x_2-x_1)\|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_k\sum_{j=k+1}^{\infty}|C_j^{(k)}|\,|(x_2-x_1)^{(j)}|\leqslant\sup_k\sum_{j=k+1}^{\infty}|C_j^{(k)}|\,a_j\sum_{i=j+2}^{\infty}b_i\sum_{\tau=j+1}^{i-1}a_\tau b_\tau\|f\|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_k a_k\sum_{j=k+1}^{\infty}\sum_{i=j+2}^{\infty}a_j b_j b_i\sum_{\tau=j+1}^{i-1}a_\tau b_\tau\|f\|=$$

$$= \sup_k a_k \sum_{i=k+3}^{\infty} b_i \sum_{j=k+1}^{i-2} a_j b_j \sum_{\tau=j+1}^{i-1} a_\tau b_\tau \|f\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k a_k \sum_{i=k+3}^{\infty} b_i \frac{\left(\sum_{\tau=k+1}^{i-1} a_\tau b_\tau\right)^2}{2!} \|f\| \leqslant \sup_k a_k \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j \frac{\left(\sum_{\tau=k+1}^{j} a_\tau b_\tau\right)^2}{2!} \|f\|.$$

Показывается, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \sup_k a_k \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j \frac{\left(\sum_{\tau=k+1}^{j} a_\tau b_\tau\right)^n}{n!} \|f\|$, применяя при этом неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \frac{(\alpha_{i+1} + \dots + \alpha_n)^p}{p!} \leqslant \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^{p+1}}{(p+1)!}, \quad \alpha_i \geqslant 0,$$

которое следует из формулы Ньютона для разложения $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^{p+1}$. Поэтому пяд $x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ сходится, и его сумма x удовлетворяет уравнению $x = f + Vx$ и оценке $\|x\| \leqslant (1+B)\|f\|$. Показывается также, что решение x единственно.

Предложение 4. *При тех же ограничениях над* $C_j^{(k)}$, *что и в предложении* 3, *если* $\widetilde{C}_j^{(k)}$ *удовлетворяет неравенству*:

$$\sup_k \sum_{j=k+1}^{\infty} |\widetilde{C}_j^{(k)}| < \frac{1}{1+B},$$

то решение уравнения

$$x^{(k)} = f^{(k)} + \sum_{j=k+1}^{\infty} (C_j^{(k)} + \widetilde{C}_j^{(k)}) x^{(j)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

также существует, едиственно и устойчиво.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 из [1].

Предложение 5. *Решение уравнения*

$$y(x) = f(x) + \int_0^{\infty} k(x,s)\, y(s)\, ds, \quad x \geqslant 0, \tag{5}$$

существует, единственно и устойчиво (*в* $L_\infty(0,\infty)$) если $f \in L_\infty(0,\infty)$, $k(x,s)$ *непрерывная функция при* $x \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ *и*

$$\sup_{x \geqslant 0} \int_0^x |k(x,s)|\, ds < \frac{1}{1+B},$$

где $\sup_{x\geqslant 0} a(x)\int_x^\infty b(s)\,e^{\int_x^s a(\tau)\,b(\tau)\,d\tau}\,ds \leqslant B$, $|k(x,s)| \leqslant a(x)\,b(s)$ *при* $0 \leqslant x \leqslant s < \infty$.

Замечание. Рассматривая уравнение $y^{(k)} = f^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} C_j^{(k)} y^{(j)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, можно сформулировать соответствующий дискретный аналог.

Доказательство опирается на возможность написания уравнений (5) в абстрактной форме $[I-(V_1+V_2)]y=f$, где V_1 и V_2 — два вольтерровых оператора:

$$(V_1 y)(x) = \int_0^x k(x,s)\,y(s)\,ds, \quad (V_2 y)(x) = \int_x^\infty k(x,s)\,y(s)\,ds, \quad x \geqslant 0.$$

Хорошо известно, что решение линейного уравнения типа Вольтерра (второго рода) зависит непрерывно от свободного члена $f(x)$ на конечном интервале. Эта зависимость сохраняется и тогда, когда ядро $k(x,s,u)$ удовлетворяет условию Липшица по u. В связи с этим мы утверждаем:

Теорема. *Если уравнение*

$$y(x) = f(x) + \int_0^x k(x,s,y(s))\,ds, \quad 0 \leqslant x \leqslant T$$

имеет единственное решение для каждого непрерывного f *с* $|f(x)| \leqslant \eta$ *на* $[0, T]$, $k(x,s,u)$ *— непрерывная функция при* $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant T$, $-R \leqslant u \leqslant R$, $k(x,s,0) = 0$ *и* $k(x,s,u)$ *— неубывающая по* u, *то решение зависит непрерывно от* f.

Доказательство. Сначала рассмотрим уравнение

$$y(x) = c + \int_0^x k(x,s,y(s))\,ds, \quad 0 \leqslant x \leqslant T,$$

которое имеет единственное решение, если $|c| \leqslant \eta$. Соответствие $y \rightleftarrows c$ взаимно однозначно и непрерывно от $y \to c$ в топологии $C[0, T]$. Это показывается таким образом: если $y_n \to y$ в топологии пространства $C[0, T]$, то есть, если y_n сходится равномерно на y, то c_n сходится на c. Множество

$$Y = \left\{ y(x);\, y(x) = c + \int_0^x k(x,s,y(s))\,ds, \quad 0 \leqslant x \leqslant T \right\}$$

относительно компактно в $C[0, T]$ (по теореме Арцела) и, следовательно, соответствие $c \to y$ также непрерывно. Дальше, если

$$y(x) = f(x) + \int_0^x k(x, s, y(s))\,ds, \quad 0 \leqslant x \leqslant T;$$

то

$$y(x) \leqslant \|f\| + \int_0^x k(x, s, y(s))\,ds \text{ и } y(x) \geqslant -\|f\| + \int_0^x k(x, s, y(s))\,ds.$$

Первое неравенство показывет, что $y(x) \leqslant z(x)$, а второе, что $y \geqslant u(x)$, где

$$z(x) = \|f\| + \int_0^x k(x, s, z(s))\,ds, \quad u(x) = -\|f\| + \int_0^x k(x, s, u(s))\,ds.$$

Но $\|z\| < \varepsilon$, $\|u\| < \varepsilon$, если $\|f\| < \delta(\varepsilon)$; следовательно $\|y\| < \varepsilon$, если $\|f\| < \delta(\varepsilon)$, что и требовалось доказать,

Замечание. Дискретные интегральные уравнения изучаются также в [2] и [3].

Поступила 20 VII 1968

Ясский политехнический институт,
Кафедра математики I

ЛИТЕРАТУРА

1. Кордуняну А, *Об устойчивости решения сингулярных интегральных уравнений Вольтерра 2 рода.* Bul. inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3—4* pp. 31—34.
2. Petrovanu D., *Équations Hammerstein intégrales et discrètes.* Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1966, **74**, pp. 227—254.
3. Гольденгершель Э. И., *О дискретном аналоге интегрального урвнения типа Вольтерра на полуоси.* УМН., 1966, **XXI**, *2*, стр. 223—225.

DESPRE STABILITATEA SOLUȚIEI ECUAȚIILOR DE TIP VOLTERRA

(Rezumat)

Se dau în formă discretă unele rezultate din [1] și se demonstrează o teoremă de stabilitate pe interval finit, folosind un rezultat general din topologie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 517.948.34

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF POLYVIBRATING TYPE

BY

MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI

1. Introduction

In a series of papers, D. Mangeron and L. E. Krivoshein [1]...[7] investigated several boundary value problems for a large class of integro-differential equations of polyvibrating type. Here the following simple equation of this kind is considered

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2\,\partial y^2} - \lambda u(x,y) = f(x,y) + \mu \iint_R K(x,y;\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{1.1}$$

$$(0 < x < a,\ 0 < y < b),$$

where λ and μ are real constants, $f(x,y)$ and $K(x,y;\xi,\eta)$ are certain given functions continuous for (x,y), $(\xi,\eta) \in R$, $R \equiv \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$, which are at least four times differentiable with respect to x and y on R. We assume that

$$\lambda \neq \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2}, \quad (m,n = 1,2,3,\ldots). \tag{1.2}$$

In this paper we investigate the solution of Eq. (1.1) which satisfies the boundary conditions

$$\begin{cases} u(0,y) = u(a,y) = 0, & 0 \leqslant y \leqslant b, \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \dfrac{\partial u(x,b)}{\partial y} = 0, & 0 \leqslant x \leqslant a. \end{cases} \tag{1.3}$$

This boundary value problem is closely connected with an optimization problem considered in [8].

2. Reduction to an Integral Equation

The boundary value problem (1.1) ... (1.3) can easily be transformed into a Fredholm integral equation of the second kind. To this end, consider the polyvibrating equation

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda u(x,y) = g(x,y), \tag{2.1}$$

where

$$g(x,y) = f(x,y) + \mu \iint_R K(x,y;\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{2.2}$$

Clearly, the function $g(x, y)$ is at least four times differentiable with respect to x and y on R. It is shown in [9], that under the condition (1.2), the solution of Eq. (2.1) which satisfies the boundary conditions (1.3) is given by the formula

$$u(x,y) = \iint_R G(x,y;\sigma,\tau)\, g(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau, \tag{2.3}$$

where

$$G(x,y;\sigma,\tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{4ab}{m^2 n^2 \pi^4 - \lambda a^2 b^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{m\pi\sigma}{a} \sin\frac{n\pi\tau}{b}. \tag{2.4}$$

Thus, combining Eqs. (2.2) and (2.3) and putting

$$f_1(x,y) = \iint_R G(x,y;\sigma,\tau)\, f(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau \tag{2.5}$$

and

$$H(x,y;\xi,\eta) = \iint_R G(x,y;\sigma,\tau)\, K(\sigma,\tau;\xi,\eta)\, d\sigma\, d\tau, \tag{2.6}$$

we obtain the following Fredholm integral equation of the second kind:

$$u(x,y) = f_1(x,y) + \mu \iint_R H(x,y;\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{2.7}$$

Note that the functions $f_1(x, y)$ and $H(x,y;\xi,\eta)$ are at least four times differentiable in $(x,y) \in R$, and $H(x,y;\xi,\eta)$ is continuous in $(\xi, \eta) \in R$. Let us also note that we have

$$G(x,y;\sigma,\tau)|_{\partial R} = 0 \tag{2.8}$$

for fixed $(\xi, \eta) \in R$, where ∂R is the boundary of the rectangle R, and

$$G(x, y; \sigma, \tau) = G(\sigma, \tau; x, y) \tag{2.9}$$

for (σ, τ), $(x, y) \in R$. Further, we have

$$\frac{\partial^4 G(x, y; \sigma, \tau)}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda G(x, y; \sigma, \tau) = \delta(x - \sigma)\, \delta(y - \tau), \tag{2.10}$$

for $0 < \sigma$, $x < a$, $0 < \tau$, $y < b$, $\delta(x)$ being Dirac's delta function. Although the Green's function G is symmetric, the kernel H is not symmetric in general. Furthermore, since for any continuous $\Phi(x, y)$ the function

$$\psi(x, y) = f_1(x, y) + \mu \iint_R H(x, y; \xi, \eta)\, \Phi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

is differentiable in R at least four times, any continuous solution of the integral equation (2.7) is differentiable in R at least four times. Thus, the solution of the boundary value problem (1.1) ... (1.3) is equivalent to the solution of the integral equation (2.7) in the class of continuous functions on R.

3. Solution of the Problem

By the remarks in the preceding section we may state the following theorem which is a natural consequence of the well known Fredholm theorems:

Theorem. *The boundary value problem* (1.1) ... (1.3) *is equivalent to the integral equation* (2.7) *with* (2.5) *and* (2.6), *in the sense that the solvability of* (2.7) *implies the solvability of the boundary value problem* (1.1)...(1.3). *The problem* (1.1)...(1.3) *is solvable in the class of four times differentiable functions in R if and only if there exists a continuous solution of the integral equation* (2.7). *Further, if* μ *is not an eigenvalue of the kernel* $H(x, y; \xi, \eta)$, *then the solution of the boundary value problem* (1.1) ... (1.3) *is uniquely determined by the formula*

$$u(x, y) = f_1(x, y) + \mu \iint_R \Gamma(x, y; \xi, \eta; \mu)\, f_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{3.1}$$

where $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ *is the resolvent of the kernel* $H(x, y; \xi, \eta)$. *If* μ *is an eigenvalue with multiplicity* ν *of the kernel* $H(x, y; \xi, \eta)$, *then Eq.* (2.7) *has no solution if the eigenfunctions* $e_1(x, y), \ldots, e_\nu(x, y)$ *of the integral equation adjoint to* (2.7) *corresponding to the eigenvalue* $\bar{\mu}$ *conjugate to* μ*:*

$$\iint_R f_1(x, y)\, e_i(x, y)\, dx\, dy = 0, \quad (i = 1, \ldots, \nu). \tag{3.2}$$

If the orthogonality conditions (3.2) *are all satisfied, then the boundary value problem* (1.1)...(1.3) *has a solution which is not uniquely determined and is given by the formula*

$$u(x,y) = U(x,y) + \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i E_i(x,y), \tag{3.3}$$

where $U(x,y)$ is a particular solution of Eq. (2.7), $E_1(x,y),...,E_\nu(x,y)$ are eigenfunctions of the kernel $H(x,y;\xi,\eta)$ corresponding to the eigenvalue μ, and $\gamma_1,...,\gamma_\nu$ are arbitrary constants.

Received the 15 III 1969

University of Alberta, Edmonton, Canada

REFERENCES

1. Mangeron D., Krivoshein L. E., *Sopra i Problemi al Contorno per le Equazioni Integro-Differenziali Lineari a Derivate Parziali con Derivata d'Ordine Superiore di Picone.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1963, **33**, pp. 226–266.
2. — *Valutazione degli Errori Commessi in Alcuni Metodi di Calcolo Numerico delle Soluzioni di una Classe di Problemi al Contorno per le Equazioni Integro-Differenziali a Derivate Totali d'Ordine Superiore.* Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fiz., Mat. e Nat., ser. 8, 1963, **34**, pp. 123–129.
3. — *Valutazione dei Moduli delle Soluzioni dei problemi al Controno non Lineari Spettanti ai Sistemi Polivibranti con Rimanenze ed Argomenti Ritardati.* Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fiz., Mat. e Nat., ser. 8, 1965, **34**, pp. 29–36.
4. — *Sulla Rizoluzione di una Classe di Problemi al Contorno per le Equazioni Integro-Differenziali a Derivati Parziali.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1964, **34**, pp. 344–367.
5. — *Sur Quelques Problèmes d'Approximation Relatifs à une Nouvelle Classe d'Equations Intégro-Différentielles.* Bull. Acad. Polonaise des Sciences, Ser. Sci. Math., Astro., Phys., 1961, **19**, pp. 707–712.
6. — *Sur le Problème de Goursat pour une Classe d'Équations Fonctionnelles Non-Lineaires Polyvibrantes.* Mathematica, 1963, **5 (28)**, *2*, pp. 215–231.
7. — *Il Problema di Goursat per una Classe di Equazioni Integro-Differenziali.* Mathematicae Notae Universidad Nacional del Litoral, 1964, *2*, pp. 79–91.
8. Oguztöreli M. N., *Optimal Controls in Distributed Parameter Systems* (in print).
9. — *A Boundary Value Problem for a Polyvibrating Equation* (in print).
10. Picone M., *Nuovi Metodi per il Calcolo dei Soluzioni delle Equazioni alle Derivate Parziali delle Fisica-Matematica.* Ann. Sci. Univ. Jassy, sec. I, 1940, **XXVI**, *1*, pp. 183–232.

O PROBLEMĂ DE CONTUR PENTRU O ECUAŢIE INTEGRO-DIFERENŢIALĂ DE TIP POLIVIBRANT

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare lucrările [1]...[7] ale lui D. Mangeron şi L. E. Krivoshein, consacrate studiului a numeroase probleme de contur pentru o largă clasă de ecuaţii integro-diferenţiale de tip polivibrant, şi ţinînd seamă de rezultatele proprii [8], studiază soluţia unei probleme de contur privitoare la ecuaţii integro-diferenţiale polivibrante.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. K. 517.522

EIN TAUBERSATZ FÜR DIE KREISVERFAHREN DER LIMITIERUNGSTHEORIE BEI DOPPELFOLGEN

VON

MICHAEL STIEGLITZ

Herrn Friedrich Lösch zum 65. Geburtstag am 10. Dezember 1968 gewidmet

Die im folgenden als Kreisverfahren bezeichneten Limitierungsverfahren für Doppelfolgen sind das Taylor $(T, \varkappa, \beta)$—, das Meyer-König-Vermes (S, α, β)—, das Euler-Knopp (E, α, β)—, das Valiron (F, α, β)— und das Borel (B)-Verfahren. Soweit bekannt, wurden von den Kreisverfahren im Hinblick auf Taubersätze nur das (E, α, α)— und das B-Verfahren untersucht, und zwar von Berekaschwili [2]. Bezeichnet man mit $(s_{\mu\nu})$ die Teilsummenfolge der Doppelreihe $\sum u_{\varkappa\lambda}$ und mit (S_{mn}) die zu $(s_{\mu\nu})$ gehörige Transformierte, so bewies Berekaschwili mit Hilfe der Tauberbedingung

$$|u_{\varkappa\lambda}| \leqslant \frac{C}{\varkappa^2 + \lambda^2}, \tag{1}$$

das bei den beiden genannten Verfahren aus der *gewöhnlichen (Pringsheimschen) Konvergenz* von (S_{mn}) gegen den Wert s die *restringierte Konvergenz* von $(s_{\mu\nu})$ gegen denselben Wert folgt.

In gewissem Sinn war es naheliegend, die Tauberbedingung (1) bei einem Umkehrsatz für das (E, α, α)— und B-Verfahren zu wählen, da dieselbe Bedingung schon beim Cesàro (C, α, β)—Verfahren [5] und beim Abel (A)-Verfahren [3] mit Erfolg verwendet worden war [1]). Nun gilt aber beim $C\alpha$ — und A-Verfahren für Einfachfolgen der Littlewoodsche $O\left(\frac{1}{x}\right) - A \to K$—Satz [6], womit eine gewisse „Dimensionsbeziehung" zwischen den Tauberbedingungen im ein —und zweidimensionalen Fall besteht. Beim $E\alpha$— und B-Verfahren für Einfachfolgen genügt dagegen schon die schwächere $O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$-Bedingung, da diese nach Meyer-König [7] sogar beim $S\alpha$-Verfahren eine Tauberbedingung ist [2]). Im Hinblick auf die erwähnte Dimensionsbeziehung würde man daher bei den Kreisverfahren für Doppelfolgen eher die im Vergleich zu (1) erheblich schwächere Bedingung

---

1) Beim (C, α, β) (α, β positive ganze Zahlen) — und A-Verfahren ist $(s_{\mu\nu})$ sogar gewöhnlich, also nicht nur restringiert konvergent.

2) Für $u_x = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ gelten der $E_\beta \to S_\alpha$ — und der $B \to S_\alpha$ - Satz [7; Satz 21 und 18].

(2) $$|u_{x\lambda}| \leqslant \frac{C}{x^{3/2}+\lambda^{3/2}}$$

erwarten. Tatsächlich hat Berekaschwili [2] im Sonderfall des $(E, 1, 1)$-Verfahrens diese Möglichkeit „nahezu" realisiert, indem er

(3) $$|u_{x\lambda}| \leqslant \frac{C}{x^{3/2+\rho}+\lambda^{3/2+\rho}}, \quad (\rho > 0)$$

als Tauberbedingung verwendete.

In dem folgenden Satz wird nun gleichzeitig für *alle Kreisverfahren* der Limitierungstheorie von Doppelfolgen eine Tauberbedingung angegeben, die noch schwächer als (3) (aber stärker als (2)) ist und mit deren Hilfe von der *restringierten Konvergenz* von (S_{mn}) gegen den Wert s auf die *restringierte Konvergenz* von $(s_{\mu\nu})$ gegen denselben Wert geschlossen werden kann. Somit wird das Ergebnis von [2] sowohl verschärft als auch sein Gültigkeitsbereich erweitert.

Satz. *Es seien* a_{mx} *und* $b_{n\lambda}$ *die Matrizenglieder der K (Kreis)-Verfahren der Limitierungstheorie:*

Taylor-Verfahren (T, α, β)

$$a_{mx} = (1-\alpha)^{m+1}\binom{x}{m}\alpha^{x-m}, \qquad b_{n\lambda} = (1-\beta)^{n+1}\binom{\lambda}{n}\beta^{\lambda-n},$$
$$(m, n, x, \lambda = 0, 1, \ldots;\ 0 < \alpha, \beta < 1),$$

Meyer-König-Vermes-Verfahren (S, α, β)

$$a_{mx} = (1-\alpha)^{m+1}\binom{m+x}{m}\alpha^{x}, \quad b_{n\lambda} = (1-\beta)^{n+1}\binom{n+\lambda}{n}\beta^{\lambda},$$
$$(m, n, x, \lambda = 0, 1, \ldots;\ 0 < \alpha, \beta < 1),$$

Euler-Knopp-Verfahren (E, α, β)

$$a_{mx} = \frac{1}{2^{\alpha m}}\binom{m}{x}(2^{\alpha}-1)^{m-x}, \quad b_{n\lambda} = \frac{1}{2^{\beta n}}\binom{n}{\lambda}(2^{\beta}-1)^{n-\lambda},$$
$$(m, n, x, \lambda = 0, 1, \ldots;\ \alpha, \beta > 0),$$

Valiron-Verfahren (F, α, β)

$$a_{mx} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi m}}\, e^{-\alpha\frac{(x-m)^2}{m}}, \qquad b_{n\lambda} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi n}}\, e^{-\beta\frac{(\lambda-n)^2}{n}},$$
$$(m, n = 1, 2, \ldots;\ x, \lambda, = 0, 1, \ldots; \alpha, \beta > 0),$$

Borel-Verfahren (B)

$$a_{mx} = e^{-m}\frac{m^x}{x!}, \qquad b_{n\lambda} = e^{-n}\frac{n^{\lambda}}{\lambda!}, \qquad (x, \lambda = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqslant m, n < \infty).$$

Ist dann $\sum_{\substack{0\leqslant x<\infty\\ 0\leqslant\lambda<\infty}} u_{x\lambda}$ *eine Doppelreihe, deren Glieder der Tauberbedingung*

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\,|u_{x\lambda}| = 0, \qquad (\textit{gleichmässig für } \lambda = 0,1,\ldots);\\ &\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{3/2}\,|u_{x\lambda}| = 0, \qquad (\textit{gleichmässig für } x = 0,1,\ldots), \end{aligned}$$

genügen, und

$$S_{mn} = S_{mn}^{(\alpha,\beta)}(K) = \sum_{\substack{0\leqslant x<\infty\\ 0\leqslant\lambda<\infty}} a_{mx}\, b_{n\lambda}\, s_{x\lambda}, \quad \left(m, n = 0,1,\ldots;\ s_{x\lambda} = \sum_{\substack{0\leqslant\xi\leqslant x\\ 0\leqslant\psi\leqslant\lambda}} u_{\xi\psi}\right)$$

ihre K-Transformierte, so folgt aus der restringierten Konvergenz von (S_{mn}) *gegen den Wert s, in Zeichen*

$$(5)\qquad [\lim]_{m,\,n\to\infty} S_{mn} = \lim_{\substack{m,n\to\infty\\ 0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant\theta^{-1}}} S_{mn} = s, \quad (0<\theta\leqslant 1),$$

die restringierte Konvergenz von $(s_{\mu\nu})$ *gegen denselben Wert, in Zeichen*

$$[\lim]_{\mu\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = \lim_{\substack{\mu,\nu\to\infty\\ \theta\leqslant\frac{\mu}{\nu}\leqslant\theta^{-1}}} s_{\mu\nu} = s, \quad (0<\theta\leqslant 1).$$

Beweis. Der Beweis gliedert sich in fünf Teile.

a) Existenz der K-Transformierten. Die Existenz von (S_{mn}) ist gesichert, da die Doppelfolge $(u_{x\lambda})$ auf Grund von (4) beschränkt, also

$$|s_{x\lambda}| \leqslant C_0\,(x+1)(\lambda+1), \quad (x, \lambda = 0,1,\ldots;\ C_0 > 0)$$

ist (vgl. (11)).

b) Formale Vereinfachung des Beweises. Wegen der Permanenz und Linearität der K-Verfahren genügt es, den Satz für $s = 0$ zu beweisen.

c) Vorbereitende Abschätzungen. Wichtigster Beweisteil für den Satz ist die Abschätzung des Einflusses der $s_{x\lambda}$ in demjenigen Rechteck des x, λ-Indexschemas, in welchem die Transformationsglieder a_{mx} und $b_{n\lambda}$ bei festem m und n ihre grössten Werte annehmen. Dazu werden für die einzelnen K-Verfahren zunächst Indizes $\mu = \mu(K,m)$ und $\nu = \nu(K,n)$ durch

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu(T,m) = \left[\frac{m}{1-\alpha}\right], \quad \mu(S,m) = \left[\frac{m\alpha}{1-\alpha}\right], \quad \mu(E,m) = \left[\frac{m+1}{2^\alpha}\right],\\ &\mu(F,m) = m, \quad \mu(B,m) = [m];\\ &\nu(T,n) = \left[\frac{n}{1-\beta}\right], \quad \nu(S,n) = \left[\frac{n\beta}{1-\beta}\right], \quad \nu(E,n) = \left[\frac{n+1}{2^\beta}\right],\\ &\nu(F,n) = n, \quad \nu(B,n) = [n] \end{aligned}\right.$$

definiert, wobei m und n die bei der Definition der K-Verfahren angegebenen Werte durchlaufen. Setzt man ferner zur Abkürzung

$$\sigma = \sigma(K, m, x) = \mu + x \geqslant 0 \quad \text{und} \quad \tau = \tau(K, n, \lambda) = \gamma + \nu \geqslant 0,$$

so ist für jedes feste φ mit $\frac{1}{2} < \varphi < \frac{2}{3}$ und jedes feste $\gamma \geqslant 0$

$$\begin{cases} \sum\limits_{|x| > m^{\varphi}} a_{m\sigma}\, \sigma^{\gamma} = O(\mathrm{e}^{-m^{\eta}}), & (m \to \infty), \\ \sum\limits_{|\lambda| > n^{\varphi}} b_{n\tau}\, \tau^{\gamma} = O(\mathrm{e}^{-n^{\eta}}), & (n \to \infty), \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{|x| \leqslant m^{\varphi}} a_{m\sigma}\, |x|^{\gamma} = O(m^{\frac{\gamma}{2}}), & (m \to \infty), \\ \sum\limits_{|\lambda| \leqslant n^{\varphi}} b_{n\tau}\, |\lambda|^{\gamma} = O(n^{\frac{\gamma}{2}}), & (n \to \infty), \end{cases} \tag{9}$$

wobei η in (8) unabhängig von K und stets positiv gewählt werden kann. Der erste Teil der Beziehung (8) ist für das T-, S-, E- und B-Verfahren identisch mit [1, Theorem 139], [2, Theorem 3], [1, Theorem 138] und [1, Theorem 137] und ergibt sich für das F-Verfahren aus einer einfachen Abschätzung unter Beachtung von $\varphi > \frac{1}{2}$. Zum Beweis des ersten Teils der Beziehung (9) benutzt man die in den zitierten Theoremen angegebene Abschätzung

$$a_{m\sigma} = \sqrt{\frac{\delta(K)}{\pi\mu}}\, \mathrm{e}^{-\delta(k)\frac{x^2}{\mu}} \left\{ 1 + O\left(\frac{|x| + 1}{m} \right) + O\left(\frac{|x|^3}{m^2} \right) \right\}$$

(gleichmässig für $|x| \leqslant m^{\varphi}$; $m \to \infty$), wobei $\delta(K)$ durch

$$\delta(T) = \frac{1-\alpha}{2\alpha}, \quad \delta(S) = \frac{1-\alpha}{2}, \quad \delta(E) = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha}-1}, \quad \delta(B) = \frac{1}{2}$$

definiert ist. Auf Grund dieser Darstellung für $a_{m\sigma}$ gibt es wegen $\varphi < \frac{2}{3}$ ein von K unabhängiges $\delta > 0$ mit

$$\sum_{|x| \leqslant m^{\varphi}} a_{m\sigma}\, |x|^{\gamma} = O\left\{ m^{-\frac{1}{2}} \sum_{|x| \leqslant m^{\varphi}} \mathrm{e}^{-\delta\frac{x^2}{m}}\, |x|^{\gamma} \right\}, \quad (m \to \infty). \tag{10}$$

(Beim F-Verfahren ist (10) trivialerweise mit $\delta(F) = \alpha$ erfüllt). Aus (10) folgt (9), wenn man bei der Abschätzung der Summe auf der rechten Seite von (10) zu einem bekannten Integral übergeht.

Den jeweils zweiten Teil von (8) und (9) beweist man analog. Verwendet man (8) mit $\gamma = \gamma$ und (9) mit $\gamma = 0$, so erhält man wegen $\varphi < \frac{2}{3}$

$$(11) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{0 \leqslant x < \infty} a_{mx}\, x^{\gamma} = O(m^{\gamma}), \quad (m \to \infty), \\ \sum\limits_{0 \leqslant \lambda < \infty} b_{n\lambda}\, \lambda^{\gamma} = O(n^{\gamma}), \quad (n \to \infty). \end{cases}$$

d) Grössenordnung der $s_{x\lambda}$. Wegen der schon unter a) erwähnten Beschränktheit der Doppelfolge $(u_{x\lambda})$ ist

$$(12) \qquad |\, s_{\mu\nu} - s_{x\lambda}\,| < C_1 \mu\nu (x+1)(\lambda+1), \quad (\mu, \nu > 0; \quad x, \lambda = 0, 1, \ldots; C_1 > 0).$$

Für die Abschätzung der Differenz $|\, s_{\mu\nu} - s_{\sigma\tau}\,|$ wird zunächst ein beliebiges, aber im folgenden festes $\varepsilon > 0$ gewählt. Dann gibt es auf Grund von (4) ein $\omega_0 > 0$ mit

$$(13) \qquad \begin{aligned} x^{3/2}\,|\, u_{x\lambda}\,| &< \varepsilon, \quad (x \geqslant \omega_0; \quad \lambda = 0, 1, \ldots); \\ \lambda^{3/2}\,|\, u_{x\lambda}\,| &< \varepsilon, \quad (\lambda \geqslant \omega_0; \quad x = 0, 1, \ldots). \end{aligned}$$

Ferner lässt sich bei Einschränkung der μ, ν auf den ϑ-Winkelraum

$$(14) \qquad \vartheta \leqslant \frac{\mu}{\nu} \leqslant \vartheta^{-1},$$

mit beliebigem, aber festem $0 < \vartheta \leqslant 1$ für alle K und alle x, λ mit

$$(15) \qquad |x| < m^{\varphi}, \quad |\lambda| < n^{\varphi},$$

wegen $\varphi < \frac{2}{3}$ ein $\omega_1 \geqslant \omega_0$ derart finden, dass $\sigma_1 \tau \geqslant \omega_0$ ist für $\mu \geqslant \omega_1$. Also kann (13) angewendet werden, und man erhält unter Ausnutzung der durch (6), (7), (14) und (15) definierten gegenseitigen Abhängigkeit von $\mu, \nu, m, n, \sigma, \tau, x$ und λ sowie unter Beachtung von $\varphi < \frac{2}{3}$ die Abschätzung

$$(16) \qquad |\, s_{\mu\nu} - s_{\sigma\tau}\,| < \varepsilon \frac{C_2}{\sqrt{\mu}} (|x| + |\lambda|), \quad (\mu \geqslant \omega_2),$$

wobei $C_2 > 0$ für hinreichend grosses $\omega_2 \geqslant \omega_1$ von K unabhängig ist.

e) Beweis der Behauptung des Satzes. Es ist

$$s_{\mu\nu}\sum_{\substack{0\leqslant x<\infty\\0\leqslant\lambda<\infty}} a_{mx}\,b_{n\lambda}=\sum_{\substack{0\leqslant x<\infty\\0\leqslant\lambda<\infty}} a_{mx}\,b_{n\lambda}\,(s_{\mu\nu}-s_{x\lambda})+\sum_{\substack{0\leqslant x<\infty\\0\leqslant\lambda<\infty}} a_{mx}\,b_{n\lambda}\,s_{x\lambda}=$$

$$(17)\quad =\Bigg(\sum_{\substack{0\leqslant x<\infty\\0\leqslant\lambda<\nu-n^{\varphi}}}+\sum_{\substack{0\leqslant x<\mu-m^{\varphi}\\\nu-n^{\varphi}\leqslant\lambda\leqslant\nu+n^{\varphi}}}+\sum_{\substack{\mu+m^{\varphi}<x<\infty\\\nu-n^{\varphi}\leqslant\lambda\leqslant\nu+n^{\varphi}}}+\sum_{\substack{0\leqslant x<\infty\\\nu+n^{\varphi}<\lambda<\infty}}\Bigg)a_{mx}\,b_{n\lambda}\,(s_{\mu\nu}-s_{x\lambda})+$$

$$+\sum_{\substack{\mu-m^{\varphi}\leqslant x\leqslant\mu+m^{\varphi}\\\nu-n^{\varphi}\leqslant\lambda\leqslant\nu+n^{\varphi}}} a_{mx}\,b_{n\lambda}\,(s_{\mu\nu}-s_{x\lambda})+\sum_{\substack{0\leqslant x<\infty\\0\leqslant\lambda<\infty}} a_{mx}\,b_{n\lambda}\,s_{x\lambda}=S^{(1)}+S^{(2)}+S^{(3)}.$$

Die Terme $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ lassen sich nach den obigen Vorbereitungen nun, wie folgt, abschätzen. Zunächst ist für alle K wegen (14), (12), (7), (11), (8) und (6) mit einem geeignet gewählten $\bar{\eta}>0$

$$S^{(1)}=O\Big\{\mu^{(2)}\Big[\sum_{0\leqslant x<\infty} a_{mx}\,(x+1)\sum_{|\lambda|>n^{\varphi}} b_{n\tau}\,(\tau+1)+$$

$$(18)\qquad \sum_{0\leqslant\lambda<\infty} b_{u\lambda}\,(\lambda+1)\sum_{|x|>m^{\varphi}} a_{m\sigma}\,(\tau+1)\Big]\Big\}=$$

$$=O\{\mu^{2}\,(me^{-n^{\bar{\eta}}}+ne^{-m^{\bar{\eta}}})\}=o\,(1),\quad(\mu\to\infty).$$

Ferner ist wegen (7) (16), (9) mit $\gamma=1$, (11) mit $\gamma=0$, (6) und (14) sowie einem passend gewählten, von K unabhängigen $C_3>0$

$$|S^{(2)}|\leqslant\sum_{\substack{|x|\leqslant m^{\varphi}\\|\lambda|\leqslant n^{\varphi}}} a_{m\sigma}\,b_{n\tau}\,|s_{\mu\nu}-s_{\sigma\tau}|<$$

$$<\varepsilon\frac{C_2}{\sqrt{\mu}}\Big(\sum_{|x|\leqslant m^{\varphi}} a_{mx}\,|x|\sum_{0\leqslant\lambda<\infty} b_{n\tau}+\sum_{|\lambda|\leqslant n^{\varphi}} b_{n\tau}\,|\lambda|\sum_{0\leqslant\sigma<\infty} a_{m\tau}\Big)<\varepsilon\,C_3,$$

sofern nur μ hinreichend gross ist. Also gilt

$$(19)\qquad S^{(2)}=o\,(1),\quad(\mu\to\infty).$$

Definiert man schliesslich Zahlen $\Phi(K)$ durch

$$\Phi(T)=\frac{1-\beta}{1-\alpha},\quad\Phi(S)=\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)},\quad\Phi(E)=\frac{2^{\beta}}{2^{\alpha}},\quad\Phi(F)=1,\quad\Phi(B)=1,$$

und setzt zur Abkürzung

$$\Theta=\min\left\{\frac{\vartheta}{2\Phi_0},\ \frac{\vartheta\Phi_1}{2}\right\},\quad\text{mit}\quad\Phi_0=\max_K\Phi(K)\quad\text{und}\quad\Phi_1=\min_K\Phi(K),$$

so ist wegen (6) und (14) für hinreichend grosse m und n, oder, was damit gleichbedeutend ist, für hinreichend grosse μ

$$\Theta \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \Theta^{-1}, \quad \text{mit} \quad 0 < \Theta \leqslant \frac{\vartheta}{2}.$$

Wegen (5) und $s = 0$ ist daher

$$S^{(3)} = S_{mn} = o(1), \quad (\mu \to \infty). \tag{20}$$

Auf Grund der Permanenz der K-Verfahren sowie (6) und (14) ist

$$\sum_{\substack{0 \leqslant x < \infty \\ 0 \leqslant \lambda < \infty}} a_{mx}\, b_{n\lambda} = 1 + o(1), \quad (\mu \to \infty).$$

Somit folgt aus (17), (18), (19) und (20)

$$s_{\mu\nu}\,(1 + o(1)) = s_{\mu\nu} \sum_{\substack{0 \leqslant x < \infty \\ 0 \leqslant \lambda < \infty}} a_{mx}\, b_{n\lambda} = o(1), \quad (\mu \to \infty),$$

also $[\lim\limits_{\mu,\,\nu \to \infty}]\ s_{\mu\nu} = 0$. Damit ist der Beweis fertig.

Bemerkung. Die Tauberbedingung (4) ist äquivalent der Bedingung

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} (x^{3/2} + \lambda^{3/2})\, |u_{x\lambda}| = 0, & (\lambda = 0, 1, \ldots), \\ \lim\limits_{\lambda \to \infty} (x^{3/2} + \lambda^{3/2})\, |u_{x\lambda}| = 0, & (x = 0, 1, \ldots), \\ \lim\limits_{x,\,\lambda \to \infty} (x^{3/2} + \lambda^{3/2})\, |u_{x\lambda}| = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Folgerung. Die Tauberbedingung (4) kann ersetzt werden durch die Bedingung

$$|u_{x\lambda}| \leqslant \frac{C}{x^{3/2+\rho} + \lambda^{3/2+\rho}} \quad (x, \lambda = 0, 1, \ldots; x + \lambda > 0;\ \rho > 0) \tag{22}$$

der Einleitung. Das ist wegen der obigen Bemerkung klar, da (22) stärker ist als (21).

Auf Grund dieser Folgerung bedeutet der obige Satz nicht nur die Ausdehnung der Gültigkeit der Resultate von [2] auf alle K-Verfahren, sondern gleichzeitig auch eine Abschwächung der in jener Arbeit verwendeten Tauberbedingungen. Offen bleibt die Frage, ob in (22) $\rho = 0$ gesetzt werden darf, d. h. ob die „o-Bedingung“ (4) bzw. (21) durch die O-Bedingung (2) ersetzt werden kann. Diese weitere Verschärfung entspräche einer „dimensionsgerechten Übertragung“ der Ergebnisse von Meyer-König [7, Satz 26] für Einfachfolgen auf Doppelfolgen.

Eingegangen am 14 IX 1968

Universität Stuttgart (TH),
Bundesrepublik Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

1. Anjaneyulu K., *Tauberian constants for Laurent series continuation matrix trausforms.* Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math., 1964, 7, pp. 157–168.
2. Berekaschwili W. A., *Über die Eulerschen Summationsmethoden für Doppelreihen* Soobsceniya Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, 1955, *16* (5), S. 337—342 (Russisch.).
3. Delange H., *Théorèmes taubériens pour les séries doubles.* C. R. Acad. Sci. Paris, 1947, 225, pp. 855—856.
4. Hardy G. H., *Divergent series.* Oxford, Clarendon Press, 1963.
5. Kloosterman H. D., *Tauberian theorems for Cesàro-summability of double series.* Proc. Acad. Wet. Amsterdam, 1940, 43, pp. 215–223.
6. Littlewood J. E., *The converse of Abel's theorem on power series.* Lond. M. S. Proc., 1911, 2, *9*, pp. 434—448.
7. Meyer-König W, *Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren.* Math. Z., 1949, 52, S. 257–304.

O TEOREMĂ DE TIP TAUBER PRIVITOARE LA METODELE CIRCUMFERINȚEI DIN TEORIA LIMITĂRII PENTRU ȘIRURILE DUBLE

(Rezumat)

Autorul stabilește o teoremă de tipul lui Tauber pentru *toate metodele circumferinței* din teoria limitării pentru șirurile duble.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secția I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 517.923

NECESSARY CONDITIONS OF OPTIMALITY CONCERNING DISTRIBUTED PARAMETER CONTROL SYSTEMS

BY

D. MANGERON and M. N. OĞUZTÖRELI

The authors are pleased to dedicate this paper to the University of Otago in its centennial year and to the University of Queensland in its Diamond Jubilee Year

Introduction

Continuing their commun research work crystallized in a set of Preprints of Research Papers, edited by the Department of Mathematics of the University of Alberta [1] and subsequently partially published in this *Bulletin* [2] as well as in some others periodicals [3], [4], the authors considered various optimization problems for a distributed parameter control system.

The accelerate growing of studies concerning this very important subject (see, f. i. the very recent ones [5]...[8]), determined the authors to continue the publication of their research work, initiated by the second of them since the time of elaboration of his an Academic Press' volume [9].

I. Description of the system

Let S be a given 1-dimensional control system defined on the interval $\mathcal{J} \equiv \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Let $I = [t_0, t_1]$ be a given time interval. We assume that the *state* ef the system S at time $t \in I$ is described by $u = u(t, x; \varphi, v)$, an ordinary function in $(t, x) \in I \times \mathcal{J}$ and a functional in $\varphi \in \Phi$ and $v \in V$, where Φ and V are the Banach spaces of functions continuous on $I \times \mathcal{J}$ with the uniform norm. Specifically, we assume that

$$u(t, x; \varphi, v) = T_1(\varphi)(t, x) + T_2(v)(t, x), \tag{I.1}$$

for $(t, x) \in I \times \mathcal{J}$ and $\{\varphi, v\} \in \Phi \times V$, where T_1 and T_2 are the operators acting on Φ and V respectivelv, defined by the following equations

$$T_1(\varphi)(t,\ x) = \varphi(t,\ x) + \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} K_1(t,\ x;\ \sigma,\ \xi)\,\varphi(\sigma,\ \xi)\,d\sigma\,d\xi +$$

$$+\frac{\lambda}{2!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} K_2(t,\ x;\ \sigma_1,\ \xi_1;\ \sigma_2,\ \xi_2)\,\varphi(\sigma_1,\ \xi_1)\,\varphi(\sigma_2,\ \xi_2)\,d\sigma_1\,d\xi_1\,d\sigma_2\,d\xi_2 \tag{I.2}$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{\lambda^{n-1}}{n!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b}\cdots\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} K_n(t,\ x;\ \sigma_1,\ \xi_1;\ldots;\ \sigma_n,\ \xi_n)\,\varphi(\sigma_1,\ \xi_1)\ldots\varphi(\sigma_n,\ \xi_n)\,d\sigma_1\,d\xi_1\ldots d\sigma_n\,d\xi_n$$

$$+\cdots$$

and

$$T_2(v)(t,\ x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} H_1(t,\ x;\ \sigma,\ \xi)\,v(\sigma,\ \xi)\,d\sigma\,d\xi$$

$$+\frac{\mu}{2!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} H_2(t,x;\ \sigma_1,\ \xi_1;\ \sigma_2,\ \xi_2)\,v(\sigma_1,\ \xi_1)\,v(\sigma_2,\ \xi_2)\,d\sigma_1\,d\xi_1\,d\sigma_2\,d\xi_2 \tag{I.3}$$

$$+\cdots,$$

$$+\frac{\mu^{n-1}}{n!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b}\cdots\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} H_n(t,\ x;\ \sigma_1,\ \xi_1;\ldots;\ \sigma_n,\ \xi_n)\,v(\sigma_1,\ \xi_1)\ldots$$

$$\ldots v(\sigma_n,\ \xi_n)\,d\sigma_1\,d\xi_1\ldots d\sigma_n\,d\xi_n$$

$$+\cdots,$$

where λ and μ are real parameters, K and H_n $(n = 1,\ 2,\ldots)$ are certain given functions continuous in $t,\ x;\ \sigma_1,\ \xi_1,\ \sigma_2,\ \xi_2,\ldots,\sigma_n,\ \xi_n$ and continuously differentiable in t and x for $(t,\ x)$, $(\sigma_1,\ \xi_1),\ldots,(\sigma_n,\ \xi_n) \in I \times \mathcal{J}$. The series in (I.2) and (I.3) as well as the series corresponding to $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ and $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ are supposed to be uniformly convergent for $(t,\ x) \in I \times \mathcal{J}$, $\{\varphi,\ v\} \in \Phi \times V$, $|\lambda| < R$ and $|\mu| < R$, R being a positive number. We also assume that the kernels $K_n(t,\ x;\ \sigma_1,\ \xi_1;\ldots;\ \sigma_n,\ \xi_n)$ and $H_n(t,\ x;\ \sigma_1,\ \xi_1;\ldots;\ \sigma_n,\ \xi_n)$ are symmetric with respect to $(\sigma_1,\ \xi_1),\ (\sigma_2,\ \xi_2),\ldots,(\sigma_n,\ \xi_n)$. Any pair $\{\varphi,\ v\} \in \Phi \times V$ will be called an *admissible policy*.

II. Optimal Problem

Let the performance of the system S under the policy $\{\varphi, v\} \in \Phi \times V$ be measured by a functional of the form

$$F(\varphi, u, v, u_x) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{a}^{b} Q(\varphi(t, x), u(t, x), v(t, x), u_x(t, x), t, x)\, dt\, dx \tag{II.1}$$

where $Q = Q(\varphi, u, v, u_x, t, x)$ is a given non-negative function, continuous in t and x, continuously differentiable in φ, u, v and u_x for $(t, x) \in I \times \mathcal{J}$, $\{\varphi, v\} \in \Phi \times V$, $u = u(t, x; \varphi, v)$ being given by Eq. (I. 1).

Our optimization problem consists of the finding an admissible policy $\{\varphi^\circ, v^\circ\} \in \Phi \times V$ for which the functional $F(\varphi, u, v, u_x)$ assumes its minimum provided that the assumptions mentioned above are all satisfied. Thus,

$$F(\varphi^\circ, u^\circ, v^\circ, u_x^\circ) = \min_{\{\varphi, v\} \in \Phi \times V} F(\varphi, u, v, u_x), \tag{II.2}$$

where $u \equiv u(t, x; \varphi, v)$ and $u^\circ \equiv u(t, x; \varphi^\circ, v^\circ)$. Any $\{\varphi^\circ, v^\circ\} \in \Phi \times V$ for which Eq. (II.2) holds, will be called an *optimal policy*.

The existence of an optimal control can be demonstrated under very general conditions on the sets Φ and V. We shall establish here only the necessary conditions for optimality of an admissible policy, using the methods of the dynamic programming.

III. Necessary Conditions for Optimality

Making use of the principle of optimality [10] and the method used in [3] and [11], we can easily show that for an optimal policy $\{\varphi, v\}$ the functional

$$G(\varphi, v; \tau) = -\int_{a}^{b} Q(\varphi(\tau, x), u(\tau, x), v(\tau, x), u_x(\tau, x), \tau, x)\, dx \tag{III.1}$$

assumes its minimum for each $\tau \in I$. Thus, for an optimal policy, we have

$$\delta_\varphi G(\varphi, v; \tau) = 0, \quad \delta_v G(\varphi, v; \tau) = 0, \quad \tau \in I, \tag{III.2}$$

where $\delta_\varphi G$ and $\delta_v G$ are the first variations of the functional G with respect to φ and v, corresponding to the increments $\delta\varphi \equiv \delta\varphi(t, x)$ and $\delta v \equiv \delta v(t, x)$ such that $\varphi + \delta\varphi \in \Phi$ and $v + \delta v \in V$, respectively.

Note that

$$\delta_\varphi u(t,\ x;\ \varphi,\ v) = \delta\varphi(t,\ x) + \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} K(t,\ x;\ \sigma,\ \xi)\,\delta\varphi(\sigma,\ \xi) \tag{III.3}$$

and

$$\delta_v u(t,\ x;\ \varphi,\ v) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} H(t, x;\ \sigma,\ \xi)\,\delta v(\sigma,\ \xi), \tag{III.4}$$

by Eq. (I.1), where

$$K(t,\ x;\ \sigma,\ \xi) = K_1(t,\ x;\ \sigma,\ \xi) +$$

$$+\frac{\lambda}{1!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} K_2(t,\ x;\ \sigma_1, \xi_1;\ \sigma,\ \xi)\,\varphi(\sigma_1, \xi_1)\,\mathrm{d}\sigma_1\,\mathrm{d}\xi_1 + \tag{III.5}$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} K_3(t,\ x;\ \sigma_1,\ \xi_1;\ \sigma_2, \xi_2;\ \sigma,\ \xi)\,\varphi(\sigma_1, \xi_1)\,\varphi(\sigma_2, \xi_2)\,\mathrm{d}\sigma_1\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\sigma_2\,\mathrm{d}\xi_2$$

$$+\cdots$$

and

$$H(t, x;\ \sigma,\ \xi) = H_1(t, x;\ \sigma,\ \xi) +$$

$$+\frac{\mu}{1!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} H_2(t,\ x;\ \sigma_1,\ \xi_1;\ \sigma,\ \xi)\,v(\sigma_1,\ \xi_1)\,\mathrm{d}\sigma_1\,\mathrm{d}\xi_1 + \tag{III.6}$$

$$+\frac{\mu^2}{2!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} H_3(t,\ x;\ \sigma_1,\ \xi_1;\ \sigma_2,\ \xi_2;\ \sigma,\ \xi)\,v(\sigma_1, \xi_1)\,v(\sigma_2,\ \xi_2)\,\mathrm{d}\sigma_1\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\sigma_2\,\mathrm{d}\xi_2$$

$$+\cdots$$

by Eq. (I.2) and (I.3). Obviously, the kernels K and H are continuously differentiable in $(t,\ x)$. Thus, differentiation under the integral signs is permitted in Eqs. (III.3) and (III.4) with respect to t and x.

By Eqs. (III.1) ... (III.2) we have

$$\int_a^b \left\{\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\,\delta\varphi + \frac{\partial Q}{\partial u}\,\delta_\varphi u + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\,\delta_\varphi u_x\right\}\mathrm{d}x = 0 \tag{III.7}$$

and

$$\int_a^b \left\{\frac{\partial Q}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial Q}{\partial u}\,\delta_v u + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\,\delta_v u_x\right\}\mathrm{d}x = 0, \tag{III.8}$$

where $Q \equiv Q(\varphi(\tau, x), u(\tau, x), v(\tau, x), u_x(\tau, x), \tau, x)$. Eqs. (III.7) ... (III.8) can be satisfied for arbitrary continuously differentiable $\delta\varphi$ and δu, if and only if

$$\frac{\partial Q}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial u_x}\right) = 0,$$

$$\text{(III.9)} \qquad \int_a^b \left\{\frac{\partial Q}{\partial u} K(\tau, x; \sigma, \xi) + \frac{\partial Q}{\partial u_x} K_x(\tau, x; \sigma, \xi)\right\} dx = 0,$$

$$\int_a^b \left\{\frac{\partial Q}{\partial u} H(\tau, x; \sigma, \xi) + \frac{\partial Q}{\partial u_x} H_x(\tau, x; \sigma, \xi)\right\} dx = 0,$$

for $\tau \in I$, $(\sigma, \xi) \in I \times J$. Thus, *optimal policies are among the admissible policies* $\{\varphi, v\}$ *satisfying the equations* (III.9), *simultaneously.*

Remarks. 1°. Series of our newest results concerning optimum control of distributed parameter systems with time delays are to be find in very recent issues of the *Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée.*

2°. We consider very useful to list here those journals which occurs frequently in studies related with our problems (of course, non exhaustively): *Automation and Remote Control* (English translation of Автоматика и Телемеханика), *IEEE Transaction on Automatic Control, International Journal of Control, The SIAM Journal of Control,...*

Received the 23 VIII 1968

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics II
and
University of Alberta, Canada

REFERENCES

1. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., *Optimal Problems in Distributed Parameter Control Systems*, I, II, III. Series A: Preprints of Research Papers, Dep. of Math., Univ. of Alberta, Edmonton, 1968, **4**, *36, 37, 38.*
2. — *Optimal Problems in Polyvibrating Distributed Parameter Control Systems.* Bul. Inst. polit. Iași, 1968, **XIV (XVIII)**, *3–4.*
3. — *Optimal Problems in Distributed Parameter Control Systems.* Archivum Mathematicum, Brno. Volume dedicated to Professor's Otakar Boruvka 70–th Birthday (in print).
4. Oğuztöreli M. N., Mangeron D., *Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. VIII, 1968, **XLV**, *1–2*, pp. 1–6.
5. Wang P. K. C., *Theory of Stability and Control for Distributed Parameter Systems (a Bibliography).* Int. J. Control, 1968, **7**, *2*, pp. 101–116.
6. Takahashi Y., Thal-Larsen H., Goldenberg E., Loskutoff W. V., Ragetly P. R., *Mode oriented design viewpoint for linear, lumped-parameter multivariable control systems.* Trans. ASME, 1968, D **90**, *2*, pp. 222–230.

9. Oğuztöreli M. N., *Una Classe di Equazioni Funzionali nella Teoria dei Controlli Ottimi.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. VIII (in print).
10. Bellman R. E., *Dynamic Programming.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.
11. Oğuztöreli M. N., *Necessary Conditions of Optimality in Distributed Parameter Control Systems.* Rev. Roum. Sci. Techn., s. Méc. Appl. (in print).

CONDIŢII NECESARE DE OPTIMALITATE ÎN SISTEME DE CONTROL CU PARAMETRI DISTRIBUIŢI

(Rezumat)

Autorii, continuîndu-şi munca ştiinţifică în comun, cristalizată într-o serie de lucrări publicate de către Universitatea din Alberta [1] şi succesiv inserate în acest *Buletin* [2], precum şi în *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* [3], [4], consideră aici şiruri de condiţii necesare de optimalitate referitoare la unele sisteme de control cu parametri distribuiţi.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secția I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 517.923

PENALTY FUNCTIONS AND CONTINUOUS OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

BY

JANE CULLUM

1. Introduction

Penalty functions have been examined by many authors [1]...[4]. This paper considers the use of penalty functions for the removal of state-space constraints in continuous optimal control problems.

A continuous optimal control problem consists of a system of ordinary differential equations $\dot{x} = f(x, u, t)$, connecting control functions u to state trajectories x; control and state space constraints; a fixed time interval of duration; and the objective of minimizing the first component of the state trajectory at the final time.

An optimization problem is usually solved by determining a quantity that satisfies the associated necessary conditions of optimality. In the case under consideration, these conditions consist of Pontryagin's maximum principle and its extensions [5]. At times that extremal trajectories encounter intermediate state constraint boundaries, the adjoint variables appearing in these conditions may be discontinuous. If these constraints are removed by the introduction of penalty functions, the adjoint variables will be continuous. However, even with continuity, it is still a nontrivial exercise to determine a quantity that satisfies the necessary conditions. This determination requires the solution of a two-point boundary-value problem whose system of equations is unstable. If the terminal constraints are also removed by penalty functions, [7], [8], circumvention of the instability is possible.

Applicable results on penalty functions are included in the papers by Butler and Martin [3] and Russell [4]. It is difficult (see [9]) to identify the generality of the results in [3]; however, the results in [4] are clear. In [4] under the hypotheses that the differential equations are linear in the control, results are obtained for penalty functions that correspond to intermediate state constraints. It is desirable to determine if these results apply to problems with more general differential systems and to penalty functions corresponding to terminal state constraints.

Theorem 2 states that if both types of state constraints are removed by penalty functions then the resulting sequence of unconstrained problems approximates the relaxation P^R of the original problem P. The sequence of optimal costs converges to the optimal cost of P^R, and any sequence of optimal trajectories, (if such a sequence exists) „converges" to an optimal trajectory of P^R. Therefore, the conclusions in [4] apply to this case if and only if the problem is the same as its relaxation.

Theorem 3 states that if the intermediate state constraints are removed by penalty functions and the optimal costs of the problems generated converge, they converge to some number between the optimal cost of P and the optimal cost of its relaxation. Convergence to either extreme may occur as is demonstrated by examples. Hence, neither the conclusions of Theorem 2 or those in [4] apply. For further details the reader is referred to (15).

2. Problem Statement and Notation

Let E^n denote n-dimensional Euclidean space, and let P denote a fixed time, continuous optimal control problem of the following type.

Equations:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad \text{a. e.} \quad t \in [0, T], \quad x = (x_1, \bar{x}), \quad f = (f_1, \bar{f}). \tag{1}$$

Constraints:

$$u(t) \in U \subseteq E^r, \quad \text{a. e.} \quad t \in [0, T]; \quad x(t) \in A \subseteq E^{n+1}, \quad t \in [0, T]; \quad t \in [0, T];$$
$$x(0) = x^0, \quad b(\bar{x}(T)) = 0. \tag{2}$$

Objective:

$$\text{Minimize } x_1(T) \text{ over all pairs } (x, u) \tag{3}$$

of absolutely continuous functions x and measurable functions u that satisfy equations (1) and (2).

It is assumed that pairs admissible for P exist and the optimal cost, $C(P)$, is finite. Moreover, f is not a function of x_1, f is continuous on an open set 0 containing $AXUX[0, T]$; U is compact and A is closed.

Definition I. A *trajectory* of P is an absolutely continuous function x defined on $[0, T]$ such that $x(0) = x^0$ and x is a solution of the differential equations of P for some measurable function u that satisfies the control constraints. If a trajectory satisfies all of the state constraints of P, then it is *admissible*.

Definition 2. A sequence $x(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ of trajectories admissible for P with $x_1(k, T)$, $k = 1, 2, \ldots$ convergent to the optimal cost of P is a *minimizing sequence* for P.

Corresponding to any problem P there is a problem P^R which is obtained from P by including in the minimization all absolutely continuous functions x defined on $[0, T]$ that satisfy the state constraints of P and the condition

$$\dot{x}(t) \in G(x(t), t), \quad \text{a. e.} \quad t \in [0, T], \tag{4}$$

where $G(x, t)$ denotes the convex hull of the closure of the set $F(x, t) = \{y \mid y = f(x, u, t), u \in U\}$. P^R is the relaxed problem associated with P [10].

If $p(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ is a sequence of penalty functions corresponding to the terminal and/or the intermediate state constraints of a problem P,

then define problems $P(k)$, $k = 1, 2,...$ as follows. Let $z = (z_1, z_2, \tilde{z})$, $\hat{z} = (z_1, \tilde{z})$ and $\bar{z} = (z_2, \tilde{z})$.

Equations:

$$\dot{z} = f^*(z, u, t) \equiv \begin{pmatrix} f_1(\tilde{z}, u, t) + p(k, \bar{z}, \dot{\tilde{z}}) \\ f_1(\tilde{z}, u, t) \\ \bar{f}(\tilde{z}, u, t) \end{pmatrix} \text{ a. e. } t \in [0, T]. \tag{5}$$

Constraints:

$$u(t) \in U \subseteq E^r \text{ a. e. } t \in [0, T]; \; t \in [0, T]; \; z(0) = (0, x^0); \tag{6}$$

$\bar{z}$ satisfies any state constraints of P not removed by $p(k)$.

Objective:

$$\text{Minimize } z_1(T). \tag{7}$$

A problem is unconstrained in the state if $b \equiv 0$ and $A = E^{n+1}$.

3. Extensions of (4)

Remarks. (1) A typical sequence of penalties for the terminal constraint $b(\bar{x}(T)) = 0$, is $kb^2(\bar{x}(T))$, $k = 1, 2,...$ The corresponding integral formulation has the integrand,

$$q(k, w, v) = k\left\{2b(w)\left[\frac{\partial b}{\partial x}(w), v\right] + \frac{b^2(\bar{x}^0)}{T}\right\}. \tag{8}$$

(2) It is clear that the definition given in equations (5), (6), and (7) for a problem P is directly extendable to any problem that is the relaxation of a continuous control problem P. (3) The sequence $P^R(k)$, $k = 1, 2,...$ in Theorem 1 corresponds to $p(k) = h(k)$, $q(k)$, or $(h(k) + q(k))$ where $q(k)$ is defined in equation (8), and h is any sequence of penalty functions of the first kind for the set A.

Theorem 1. *Let P^R be the relaxation of a continuous optimal control problem satisfying equations* (1), (2), *and* (3) *of Section* 2 *and the additional hypotheses.* (a) *There exists a compact sphere $B \subseteq E^{n+1}$ such that if x is any trajectory of P^R, $x(t) \in B$ for $t \in [0, T]$.* (b) *f is continous on an open set $0 \supseteq \{BXUX[0, T]\}$.* (c) *$f$ is continuously differentiable in x on $\{\mathcal{J}XUX[0, T]\}$ where $\mathcal{J}$ is an open set containing B.* (d) *b is continuously differentiable.* (e) *there exists a minimizing sequence $x(k)$, $k = 1, 2,...$ for P^R such that*

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^T p(k, x(k), \dot{\bar{x}}(k)) = 0.$$

Then (1) $C(P^R(k)) \to C(P^R)$, *as* $k \to \infty$; (2) *Any sequence of trajectories* $z(k)$, $k = 1, 2,...$ *admissible for the corresponding problems* $P^R(k)$, $k = 1, 2,...$ with $z_1(k, T) \leqslant C(P^R(k)) + \varepsilon(k)$ ($\varepsilon(k) \to 0$, $k \to \infty$) *contains a subsequence* (*w. l. o. g. denoted by* k) *such that* $\hat{z}(k)$, $k = 1, 2,...$ *converges pointwise to an optimal trajectory of* P^R.

4. Intermediate and Terminal Constraints

$P(k)$, $k = 1, 2,...$ in Theorem 2 denotes the sequence of problems defined by equations (5) to (7) with $p(k) = h(k) + q(k)$ where $h(k)$, $k = 1, 2,...$ is any sequence of penalty functions of the first kind corresponding to the set A, and $q(k)$, $k = 1, 2,...$ is the sequence of functions defined in (8).

Theorem 2. *Let* P *be a continuous optimal control problem defined in equations* (1), (2), *and* (3) *and satisfying hypotheses* (a), (b), *and* (c) *of Theorem 1 and the following hypotheses:* (d′) b *is twice continuously differentiable;* (e) *There exists a minimizing sequence* $x(k)$, $k = 1, 2,...$ *of* P *with*

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^T p(k, x(k), \dot{x}(k)) = 0.$$

Then, (1) $C(P(k)) \to C(P^R)$ *as* $k \to \infty$. (2) *Any sequence* $z(k)$ $k = 1, 2,..,$ *of trajectories admissible for the corresponding* $P(k)$, $k = 1, 2, ...,$ with $z_1(k,T) \leqslant C(P(k)) + \varepsilon(k)$ ($\varepsilon(k) \to 0$, $k \to \infty$) *contains a subsequence* (*w.* 1.0. *g, denoted by* k) *such that* $\hat{z}(k)$, $k = 1, 2,...$ *converges uniformly to an optimal trajectory* x^0 *of the relaxation of* P.

5. Intermediate State Constraints

$P(k)$, $k = 1, 2,..$ denotes a sequence of problems obtained from a problem P by introducing penalty functions of the first kind for the set A.

Theorem 3. *Let* P *satisfy the hypotheses of Theorem 2. Then* $C(P^R) \leqslant \lim_k \inf C(P(k)) \leqslant \lim_k \sup C(P(k)) \leqslant C(P)$.

Corollary 1. If $C(P) = C(P^R)$, then $C(P(k)) \to C(P)$, as $k \to \infty$.

Examples. Each example is a modification of an example in [10]. Since x_1 is not constrained, z can be replaced by $\hat{z}$, and f by $(f_1 + p(k), f)$.

Example 1. Let P denote the continuous control problem with $f(x, u, t) = ((x_2 - u^2), u, w(x_2))$ with w equal to s^2 if s is nonnegative, 0 if s is between -1 and 0, and $(s+1)^2$ otherwise; A is the subset of E^3 whose second coordinates are nonnegative; U is the scalar interval -1 to $+1$; $x(0) = (0, 0, 0)$; $[0, T] = [0, 1]$; and $x_3(1) = 0$.

$x \equiv (0, 0, 0)$ is the only admissible trajectory of P. Hence, $C(P) = 0$. However, $x \equiv (-t, 0, 0,)$ is admissible for P^R and $C(P^R) = -1$. Set $p(k) = kz_2^2 h(-z_2)$, $k = 1, 2,...$ where h is the unit step function. For $i = 0, 1,..., k-1$ set $l(i, k) = [i/k, (i+1)/k]$ and for $t \in l(i, k)$, define $u(k, t) = -1$ if i is even and $+1$ if i is odd. Then $-1/k \leqslant z_2(k, t) \leqslant 0$, $z_3(k, t) \equiv 0$, and $z_1(k, 1) \leqslant -1 + 1/k$. Therefore, $C(P(k)) \leqslant -1 + 1/k$, and by Theorem 3, $C(P(k)) \to C(P^R)$ as $k \to \infty$.

Example 2. Let P be the continuous optimal control problem obtained from Example 1 by replacing w by the function v where $v(x, t) = [(x_2 - t)(x_2 + t)(x_2 - t^2/2)\, x_2]^2$. P has exactly three admissible trajectories: $x = (0, 0, 0)$, $x = ((t^2/2 - t), t, 0)$ and $x = (-t^3/6, t^2/2, 0)$. Therefore, $C(P) = -1/2$. Clearly, again $C(P^R) = -1$. But for each k, $P(k)$ has exactly four admissible trajectories, so $C(P(k)) = C(P)$ for large k.

6. Summary and Conclusions

Theorem 2 states that if both the terminal and the intermediate state constraints of a continuous problem P are removed by penalty functions the ability of the resulting sequence of unconstrained problems to approximate P depends upon the relationship between P and its relaxation. It should be noted that in some problems it is only necessary that the constraints be satisfied to within a certain tolerance. In such a case, (see [10]), the problem actually under consideration is the relaxation of P, and hence, the penalty function technique yields the correct result.

If only intermediate state constraints are removed, the situation is not clear. The few problems with intermediate state constraints uncovered in a limited literature search [16], [17], [18] are encompassed by the results obtained in this paper. Further study is desirable, since the alternative procedures for solving such problems are not very attractive (see [6]).

Received the 15 IV 1969

IBM T. J. Watson Research Center,
Yorktown Heights, New York,
USA

REFERENCES

1. Courant R., *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations.* AMS Bull., 1943, *49*, pp. 1 – 23.
2. Rubin H., Ungar P., *Motion under a strong constraining force.* Comm. Pure App. Math., 1957, *10*, pp. 65 – 87.
3. Butler T., Martin A. V., *On a method of Courant for minimizing functionals.* J. Math. Physics, 1962, *41*, pp. 291 – 299.
4. Russell D. L., *Penalty functions and bounded phase coordinate control.* J. SIAM Control, 1965, *2*, pp, 409 – 422.
5. Pontryagin L. A., e. a., *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Interscience Publ., New York, 1962.

6. Mc Intyre J., Paiewonsky B., *On optimal control with bounded state variables.* „Advances in Control Systems" (ed. C. T. Leondes), Academic Press, New York, 1967, *5*, pp. 389 — 419.
7. Kopp R. E., Moyer H. G., *Trajectory optimization techniques.* „Advances in Control Systems" (ed. C. T. Leondes), Academic Press, New York, 1966, *4*, pp. 104 — 154.
8. Kelley H. J., *Method of gradients.* „Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems" (ed. G. Leitmann), Academic Press, New York, 1962, pp. 205 — 252.
9. Neustadt L. W., *An abstract variational theory. II, Applications.* J. SIAM Control, 1967, *5*, pp. 90 — 137.
10. Warga J., *Relaxed variational problems.* J. Math. Anal. Appl., 1962, *4*, pp. 111 — 128.
11. Lee E. B., Markus L., *Optimal control for nonlinear processes.* Arch. Ratl. Mech. Anal., 1961, *8*, pp. 36 — 58.
12. Roxin, E., *The existence of optimal controls.* Mich. Math. J., 1962, *9*, pp. 109 — 119.
13. Eggleston H. G., *Convexity.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1958.
14. Cullum J., *Discrete approximations to continuous optimal control problems.* SIAM J. Control, 1969. *7*, *1*.
15. — *Penalty functions and nonconvex continuous optimal control problems.* Proc. Conf. on Computing Methods in Optimization, San Remo, Italy, Sept. 1968 (ed. A. V. Balakrishnan and L. Neustadt), Academic Press, 1969 (in print).
16. Falco M., *Supersonic transport climb path optimization.* AIAA J., 1963, *1*, pp. 2859—2862.
17. McGill R., *Optimal control, inequality state constraints, and the generalized Newton-Raphson algorithm.* J. SIAM Control, 1965, *3*, pp. 291 — 298.
18. Denham W. F., Bryson A. E. Jr., *Optimal programming problems with inequality constraints.* (I), AIAA J., 1961, *2*, pp. 25 — 34; (II), AIAA J., 1963, *1*, pp. 2544 — 2550.

FUNCȚII DE PENALIZARE ȘI PROBLEME DE CONTROL OPTIMAL

(Rezumat)

Se studiază folosirea funcțiilor de penalizare pentru înlăturarea constrîngerilor spațiale de stare în probleme de control optimal.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 517.946.51

ON A CLASS OF LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENT IN TIME

BY

E. J. SCOTT

1. Introduction

As is well known, the description of physical phenomena requires, in many cases, that the equations governing these physical processes take into account not only the present state of affairs, but also their past history. This forces one to consider, not differential equations, but difference-differential equations. In contrast to ordinary difference-differential equations, partial difference-differential equations have been little studied [1]. It is natural to ask to what extent the method of separation of variables, together with various integral transforms, can be used to solve some boundary value problems involving partial differential equations with retarded arguments. To that end, I shall consider a set of linear partial differential equations with retarded arguments in time, two members of wich are the diffusion and wave equations in n-dimensional space. This generalizes the work considered in [2].

2. The Foundary Value Problem Defined

We wish to determine solutions of the class of linear partial difference-differential equations

$$\frac{\partial^k u(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t^k} = a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial x_i}\right) +$$

$$+ b^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_n,t-\tau)}{\partial x_i}\right) - \tag{1}$$

$$- c\,u(x_1,\ldots,x_n,t) - d\,u(x_1,\ldots,x_n,t-\tau),$$

in a fixed spacial region R bounded by a closed surface S for $t > \tau$ if in the interior of R,

$$
\begin{aligned}
& u(x_1, \ldots, x_n, t) = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, t), \\
& u_t(x_1, \ldots, x_n, t) = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad (0 \leqslant t \leqslant \tau), \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& u_{t^{k-1}}(x_1, \ldots, x_n, t) = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n, t),
\end{aligned} \tag{2}
$$

where k is a positive integer, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ are given functions such that φ_1 is continuos in t, φ_2 is once continuously differentiable in $t, \ldots, \varphi_k$ is $(k-1)$-times continuously differentiable in t, and $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ are twice continuously differentiable with respect to the variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. In addition, $p_i(x_1, \ldots, x_n) > 0$ are once continuously differentiable with respect to $x_1, \ldots, x_n$ in R and a^2, b^2, c, d are constants. We also stipulate that on the boundary of R

$$u|_S = 0, \quad (t > \tau). \tag{3}$$

It is to be observed that the cases $k = 1$, $2, n = 3$, yield the three-dimensional generalized diffusion and wave equations, respectively.

3. Solution of the Proposed Problem

We seek solutions of (1) subject to (2) and (3) representable in the form

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = v(x_1, \ldots, x_n)\, T(t). \tag{4}$$

It is easily verified that (1) is separable and we obtain

$$\frac{T^{(k)}(t) + cT(t) + d\,T(t-\tau)}{a^2 T(t) + b^2 T(t-\tau)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[p_i(x_1, \ldots, x_n)\, \frac{\partial v(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}\right]}{v(x_1, \ldots, x_n)} = -\lambda. \tag{5}$$

This relation leads to the eigenvalue problem for $v(x_1, \ldots, x_n)$, namely,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_i(x_1, \ldots, x_n)\, \frac{\partial v(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\right) + \lambda v(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad (t > \tau) \tag{6}$$

subject to the boundary condition

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n)|_S = 0, \qquad (t > \tau) \tag{7}$$

and the difference-differential equation for $T(t)$

$$T^{(k)}(t) + (c + \lambda a^2)\, T(t) + (d + \lambda b^2)\, T(t-\tau) = 0, \qquad (t > \tau). \tag{8}$$

The initial conditions for (8) are obtained by expanding each of the functions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ in a series of eigenfunctions of the eigenvalue problem (6), (7), (see [3]). Thus,

$$(9) \quad \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(t)\, v_j(x_1, \ldots, x_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ 0 \leqslant t \leqslant \tau)$$

where the $A_{ij}(t)$ are the Fourier coefficients as well as the initial conditions corresponding to equation (8).

We are now left with the problem of solving the system of difference-differential equations

$$(10) \quad \begin{gathered} T_j^{(k)}(t) + (c + \lambda_j a^2)\, T_j(t) + (d + \lambda_j b^2)\, T_j(t - \tau) = 0, \\ (j = 1, 2, 3, \ldots; t > \tau), \end{gathered}$$

subject to the initial conditions

$$(11) \quad T_j^{(i)}(t) = A_{i+1,j}(t), \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, k-1;\ j = 1, 2, 3, \ldots; 0 \leqslant t \leqslant \tau).$$

An integral representation of the solution of this system can be obtained by employing Laplace transforms [4]. Proceeding in the usual way, we find that

$$(12) \quad \begin{aligned} T_j(t) &= A_{kj}(\tau)\, K(t - \tau) + A_{k-1,j}(\tau)\, K^{(1)}(t - \tau) + \\ &+ A_{k-2,j}(\tau)\, K^{(2)}(t - \tau) + \ldots + A_{2j}(\tau)\, K^{(k-2)}(t - \tau) + \qquad (t > \tau), \\ &+ A_{1j}(\tau)\, K^{(k-1)}(t - \tau) - (d + \lambda_j b^2) \int_0^T A_{1j}(u)\, K(t - \tau - u)\, du, \end{aligned}$$

where $K(t) = L^{-1}\{1/[s^k + c + \lambda_j a^2 + (d + \lambda_j b^2)\, e^{-s\tau}]\}$, $(j = 1, 2, 3, \ldots)$.

Let the eigenfunctions of problem (6), (7) be $v_j(x_1, \ldots, x_n)$. Then the solution of problem (1), (2) is given by

$$(13) \quad u(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(x_1, \ldots, x_n)\, T_j(t).$$

4. The Generalized Diffusion Equation

As an application of the analysis presented above, let us consider a special case of equation (1) and initial conditions (2), where the eigenfunctions can be exhibited. To be specific, consider the generalized three-dimensional diffusion equation

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2^2} +$$

(14)

$$+ \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t-\tau)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t-\tau)}{\partial x_2^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t-\tau)}{\partial x_3^2}, \qquad (t > \tau),$$

in the region R: $0 \leqslant |x_1| \leqslant 1$, $0 \leqslant |x_2| \leqslant 1$, $0 \leqslant |x_3| \leqslant 1$, such that for $t > \tau$

$$u(0, x_2, x_3, t) = u(1, x_2, x_3, t) = u(x_1, 0, x_3, t) =$$

(15)

$$= u(x_1, 1, x_3, t) = u(x_1, x_2, 0, t) = u(x_1, x_2, 1, t) = 0$$

and

(16)

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = 1, \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau).$$

The eigenvalue problem in the function $v(x_1, x_2, x_3)$ is

(17)

$$\frac{\partial^2 v(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} +$$

$$+ \lambda v(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (t > \tau),$$

subject to the boundary conditions

(18)

$$v(0, x_2, x_3) = v(1, x_2, x_3) = v(x_1, 0, x_3) =$$

$$= v(x_1, 1, x_3) = v(x_1, x_2, 0) = v(x_1, x_2, 1) = 0.$$

Let us set $v(x_1, x_2, x_3) = X(x_1)\, Y(x_2)\, Z(x_3)$. Then, we have the following eigenvalue problems for X, Y, and Z:

(19) $\qquad X''(x_1) + \alpha X(x_1) = 0, \qquad X(0) = X(1) = 0;$

(20) $\qquad Y''(x_2) + \beta Y(x_2) = 0, \qquad Y(0) = Y(1) = 0;$

(21) $\qquad Z''(x_3) + \gamma Z(x_3) = 0, \qquad Z(0) = Z(1) = 0,$

where α, β, γ are the separation of variables constants which are connected by the relation $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$. The solutions of the problems (19), (20), (21) are the functions $X_l(x_1) = \sin l\pi x_1$, $X_m(x_2) = \sin m\pi x_2$, $X_n(x_3) = \sin n\pi x_3$, $(l, m, n = 1, 2, 3, \ldots)$, with $\alpha_l = (l\pi)^2$, $\beta_m = (m\pi)^2$, $\gamma_n = (n\pi)^2$.

Corresponding to the eigenvalues $\lambda_{l,n,m} = (l^2 + m^2 + n^2)\,\pi^2$, we have the eingenfunctions

$$v_{l,n,m}(x_1, x_2, x_3) = \sin l\pi x_1 \sin m\pi x_2 \sin n\pi x_3 . \tag{22}$$

Expanding (16) in a series of the eigenfunctions (22), we find, in view of orthogonality, that

$$A_{1\,lmn}(t) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{1}{lmn}, \quad (l, m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

These constitute the initial conditions for the system of equations

$$T^{(1)}_{lmn}(t) + (c + \lambda_{lmn} a^2)\, T_{lmn}(t) + (d + \lambda_{lmn} b^2)\, T_{lmn}(t - \tau) = 0$$

whose solution is given by

$$T_{lmn}(t) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{1}{lmn} \{K(t - \tau) - (x + \lambda_{lmn} b^2) \int_0^{\tau} K(t - \tau - u)\, du\},$$

where $K(t) = L^{-1}\{1/[s + c + \lambda_{lmn} a^2 + (d + \lambda_{lmn} b^2) e^{-s\tau}]\}$.

Thus, the solution of our boundary value problem for the generalized diffusion equation may be written as

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sin l\pi x_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\pi x_2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x_3\, T_{lmn}(t), \quad (t > \tau).$$

Received the 13 X 1968

University of Illinois,
Urbana, Illinois, USA

REFERENCES

1. È l'sgolć L. È., *Qualitative Methods in Mathematical Analysis.* Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc., 1964, Vol. **12**, Chap. V.
2. Scott E. J., *Boundary-value Problems Associated with the Inhomogeneous Diffusion and Wave Equations with Retarded Arguments in Time* (to appear in Bul. Inst. polit. Iaşi).
3. Petrowski I. G., *Partial Differential Equations.* W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1967.
4. Bellman R., Cooke K. L., *Differential-Difference Equations.* Academic Press, N. Y., 1963.

ASUPRA UNEI CLASE DE ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE, LINIARE, CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

(Rezumat)

Se extind metodele separării variabilelor şi a transformărilor integrale la clasa (1) de ecuaţii cu derivate parţiale, liniare, cu argument întîrziat, clasă care include ecuaţiile difuziei şi a undelor în spaţiul n-dimensional.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 517.924

FINITE TIME STABILITY OF CONTROL SYSTEMS AND INTEGRAL INEQUALITIES

BY

CHRIS P. TSOKOS and M. RAMA MOHANA RAO

1. Introduction

Let $\mathcal{J}$ denote the interval $[t_0, t_0 + T)$, $T > 0$ and $\widetilde{\mathcal{J}}$ denote the interval $[t_0, t_0 + T]$. Let R^n be the real Euclidean n-space, $\|.\|$ denotes any real valued continuous function on R^n, which need not represent the true norm.

We shall consider a control system of the form

$$x' = f(t, x) + \varphi(t, u), \quad \left[' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right] \tag{1.0}$$

where $f \in C[\mathcal{J} \times R^n, R^n]$, $\varphi \in C[\mathcal{J} \times R^m, R^m]$. Let $y(t)$ be any continuous differentiable function for $t \in \mathcal{J}$, which takes values from R^n.

One can pose the problem: Does there exist control function $u = u(t)$ under the influence of which the solution $x(t)$ of the control system (1.0) can be approximated so as to be arbitrarily close to the target function $y(t)$ over a finite time interval, provided that the function $f(t, x)$ is well behaved? This question has been investigated by Bellman [1], [2], Barbasin [3], Liberman [4], [5], and quite recently by Tsokos and Lakshmikantham [6], with respect to its asymptotic behavior. That is, in [6] it was concluded that there exists controls such that the target function $y(t)$ is, in fact, asymptotically stable.

In thys paper, we extend the definitions of various types of stability over a finite time interval [8] and employ the concept of Lyapunov's like functions and the theory of integral inequalities to study the problem in a unified approach by characterizing the controls in different ways.

Finally, an example is constructed to illustrate our results.

2. Preliminaries

Let $y(t)$ be a given target function. Consider the transformation $z = x - y(t)$. It follows that

$$z' = x' - y'(t) = f(t, x) + \varphi(t, u(t)) - y'(t),$$

where $u = u(t)$ is a control function defined for $t \in \mathcal{J}$.

Define

$$\left\{ \begin{array}{l} F(t, z) = f(t, z + y(t)) - f(t, y(t)), \\ \psi(t, y(t)) = y'(t) - f(t, y(t)), \\ \xi(t) = \varphi(t, u(t)) - \psi(t, y(t)), \end{array} \right. \tag{2.1}$$

then the control system reduces to

$$z' = F(t, z) + \xi(t). \tag{2.2}$$

Observing that $F(t, 0) = 0$, these considerations imply that it is enough to study the stability properties of the reduced control system (2.2) with respect to the set $z = 0$. We shall therefore, in what follows, concentrate on the control system (2.2).

The function $V = V(t, z) : \tilde{\mathcal{J}} \times R^n \to R^1$ is said to belong to the class Λ if it is continuous in both t and z and satisfies for each $t \in \tilde{\mathcal{J}}$, a local Lipschitz condition in z. Also, the function $w = w(t, r) : \tilde{\mathcal{J}} \times R^1 \to R^1$ is said to belong to the class Γ if it is continuous in both t and r, monotonic increasing in r for each $t \in \mathcal{J}$ and it is smooth enough to ensure the existence of a maximal solution of the differential equation

$$r' = w(t, r + \eta(t)), \quad r(t_0) = r_0, \tag{2.3}$$

where $\eta(t)$ is a continuous function over $\tilde{\mathcal{J}}$.

We shall further use the following notation:

$$B(a) = \{z : z \in R^n, \quad \|z\| < a\}, \quad \bar{B}(a) = \{z : z \in R^n, \quad \|z\| \leqslant a\},$$

$$V_m^{\alpha}(t) = \inf_{\|z\| = \alpha} V(t, z), \quad V_M^{\alpha}(t) = \sup_{\|z\| = \alpha} V(t, z),$$

$$V^{\alpha}(t) = \sup_{\|z\| < \alpha} V(t, z), \quad V_{\delta}^{\alpha}(t) = \sup_{z \in \bar{B}(\alpha) - B(\delta)} V(t, z),$$

with $\delta < \alpha$, and

$$D^+ V(t, z) = \limsup_{h \to 0+} \frac{[V(t+h, z + hF(t, z)) - V(t, z)]}{h} \tag{2.4}$$

where F is the given function in (2.2). Also for every pair of numbers α, β such that, $0 < \alpha < \beta$, we have

$$|V(t, z) - V(t, \tilde{z})| \leqslant M \|z - \tilde{z}\|, \quad M > 0, \tag{2.5}$$

for $t \in \tilde{\mathcal{J}}$ and $z, \tilde{z} \in \bar{B}(\beta) - B(\alpha)$.

Finally, we present the following definitions and a lemma which will be required.

Let $z(t) = z(t, t_0, z_0)$ be any solution of the control system (2.2) through (t_0, z_0).

Definition 2.1. The control system (2.2) is said to be *stable* with respect to $(\alpha, \gamma, t_0, T, \|.\|)$, $0 < \alpha \leqslant \gamma$ if for every trajectory $z(t)$ of (2.2), the condition $\|z(t_0)\| < \alpha$ implies $\|z(t)\| < \gamma$ for all $t \geqslant t_0$, $t \in \mathcal{J}$.

Definition 2.2. The control system (2.2) is said to be *uniformly stable* with respect to $(\alpha, \gamma, t_0\ T, \|.\|)$, $0 < \alpha \leqslant \gamma$, if for trajectory $z(t)$ of (2.2), the condition $\|z(t_1)\| < \alpha$ implies $\|z(t)\| < \gamma$ for all $t \geqslant t_1$, $t, t_1 \in \mathcal{J}$.

Definition 2.3. The control system (2.2) is said to be *quasi-expansively-stable* with respect to $(\alpha, \beta, t_0, T, \|.\|)$, $\alpha \leqslant \beta$, if for every trajectory $z(t)$ of (2.2), the condition $\|z(t_0)\| < \alpha$ implies that there exists a $t_1 \in \mathcal{J}$ such that $\|z(t)\| < \beta$ for $t \in (t_1, t_0 + T)$.

Definition 2.4. The control system (2.2) is said to be *expansively-stable* with respect to $(\alpha, \beta, \gamma, t_0, T, \|.\|)$, $\alpha \leqslant \beta < \gamma$, if it is stable with respect to $(\alpha, \gamma, t_0, T, \|.\|)$ and it is quasi-expansively stable with respect to $(\alpha, \beta, t_0, T, \|.\|)$.

Definition 2.5. The control system (2.2) is said to be *quasi-contractively-stable* with respect to $(\alpha, \beta, t_0, T, \|.\|)$, $\alpha > \beta$, if for every trajectory $z(t)$ of (2.2), the condition $\|z(t_0)\| < \alpha$ implies that there exists a $t_1 \in \mathcal{J}$ such that $\|z(t)\| < \beta$ for $t \in (t_1, t_0 + T)$.

Definition 2.6. The control system (2.2) is said to be *contractively-stable* with respect to $(\alpha, \beta, \gamma, t_0, T, \|.\|)$, $\beta < \alpha \leqslant \gamma$, if it is stable with respect to $(\alpha, \gamma, t_0, T, \|.\|)$ and it is quasi-contractively-stable with respect to $(\alpha, \beta, t_0, T, \|.\|)$.

Lemma 2.1. If

$$u(t) \leqslant \eta(t) + \int_{t_0}^{t} w(s, u(s))\,ds + r(t_0),$$

where $w \in \Gamma$, $u(t)$ and $\eta(t)$ are continuous functions for $t \in \mathcal{J}$, then $u(t) \leqslant \eta(t) + r(t)$, where $r(t)$ is the maximal solution of (2.3) through $(t_0, r(t_0))$. The proof of this lemma can be found in [7].

3. Main results

With respect to the aims of this paper we state the following results.

Lemma 3.1. Let there exist a function $V \in \Lambda$ such that the function $D^+V(t, z)$ defined in (2.4) satisfies the condition

$$D^+V(t, z) \leqslant w(t, V(t, z)) \tag{3.1}$$

for all $t \in \mathcal{J}$, $z \in \bar{B}(\beta) - B(\alpha)$ and $w \in \Gamma$. Further,

$$U(t) = M\int_{t_0}^{t} \| \xi(s) \| \, ds, \quad t \in \tilde{\mathcal{J}} \tag{3.2}$$

where $\xi(t)$ is the same function defined in (2.1) and M a constant greater than zero. Let $z_1 \in B(\beta) - B(\alpha)$ and $z(t, t_1, z_1)$ denote any solution of (2.2). Then

$$r_1 = V_M^{\|z_1\|}(t_1) - U(t_1) \tag{3.3}$$

implies that

$$V(t, z(t, t_1, z_1)) \leqslant r(t, t_1, r_1) + U(t) \tag{3.4}$$

for $t \geqslant t_1$ as long as $z(t, t_1, z_1) \in \bar{B}(\beta) - B(\alpha)$, where $r(t, t_1, r_1)$ denotes the maximal solution of the scalar differential equation

$$r' = w(t, r + U(t)) \tag{3.5}$$

through (t_1, r_1).

Proof. Let $z_1 \in B(\beta) - B(\alpha)$ and $z(t, t_1, z_1) \in B(\beta) - B(\alpha)$, then for sufficiently small $h > 0$ $z(t + h, t_1, z_1) \in \bar{B}(\beta) - B(\alpha)$.

Denote $z(t, t_1, z_1)$ by $z(t)$. For $m(t) = V(t, z(t))$ we have

$$m(t+h) - m(t) = V(t+h, z(t+h)) - V(t, z(t)) = V(t+h, z(t+h)) - V(t+h, z(t) +$$
$$+ hF(t, z(t)) + h\xi(t)) + V(t+h, z(t) + hF(t, z(t)) + h\xi(t)) - V(t+h, z(t)) +$$
$$+ hF(t, z(t))) + V(t+h, z(t) + hF(t, z(t))) - V(t, z(t)).$$

Thus in view of (2.4), (2.5), (3.1), we obtain

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{m(t+h) - m(t)}{h} \leqslant w(t, m(t)) + M \| \xi(t) \|.$$

Integrating both sides with respect to t between t_1 and t and using (3.2), we have

$$m(t) \leqslant m(t_1) - U(t_1) + U(t) + \int_{t_1}^{t} w(s, m(s)) \, ds.$$

Now, by applying lemma 2.1 we obtain the desired result.

Theorem 3.1. *The control system* (2.2) *is stable with respect to* $(\alpha, \gamma, t_0, T, \| \cdot \|)$, $\alpha < \gamma$ *if there exist functions* $V \in \Lambda$ *and* $w \in \Gamma$ *such that*

(i) *for* $t \in \mathcal{J}$, $z \in \bar{B}(\gamma)$, (3.1), (3.2) *hold, and*

(ii) *the maximal solution* $r(t, t_0, r(t_0))$ *of* (3.5) *with* $r(t_0) = V^{\alpha}(t_0) - U(t_0)$ *satisfies the condition*

$$r(t, t_0, r(t_0)) < V_m^{\gamma}(t) - U(t) \tag{3.6}$$

for all $t \geqslant t_0$.

Proof. Let $z(t)$ denote any arbitrary trajectory of (2.2) with $\|z(t_0)\| \leqslant \alpha$. Assume that there exists a $t_1 \in \mathcal{J}$ such that $\|z(t_1)\| = \gamma$. We may also assume that t_1 is the first such time in the interval $\mathcal{J}$. Hence, by hypothesis (i) and lemma (3.1) we have

$$V(t, z(t)) \leqslant r(t, t_0, r(t_0)) + U(t), \quad \text{for all} \quad t \geqslant t_0. \tag{3.7}$$

In view of (3.6) and 3.7 it follows that

$$V_m^{\gamma}(t_1) \leqslant V(t_1, z(t_1)) \leqslant r(t_1, t_0, r(t_0)) + U(t_1) < V_m^{\gamma}(t_1)$$

which contradicts the existence of $t_1 \in \mathcal{J}$ with $\|z(t_1)\| = \gamma$.

This completes the proof of the theorem.

Theorem 3.2. *The control system* (2.2) *is uniformly stable with respect to* $(\alpha, \gamma, t_0, T, \|\cdot\|)$, $\alpha < \gamma$, *if there exist functions* $V \in \Lambda$ *and* $w \in \Gamma$ *such that*

(i) *for all* $t \in \mathcal{J}$ *and* $z \in \bar{B}(\gamma) - B(\alpha)$, (3.1), (3.2) *hold, and*

(ii) *the maximal solution* $r(t, t_1, r(t_1))$ *of* (3.5) *with initial condition* $r(t_1) = V_M^{\alpha}(t_1) - U(t_1)$ *at any* $t_1 \in \mathcal{J}$ *satisfies the condition*

$$r(t, t_1, r(t_1)) < V_m^{\gamma}(t) - U(t) \tag{3.8}$$

for all $t > t_1, t \in \mathcal{J}$.

Proof. Let $z(t)$ be any arbitrary trajectory of (2.2) with $\|z(t_0)\| < \alpha$. Assume that there exists a $t_2 \in \mathcal{J}$ such that $\|z(t_2)\| = \gamma$. As in theorem 3.1, it may be assumed that t_2 is the first such time in the interval $\mathcal{J}$. Then there exists a $t_1 \in \mathcal{J}$, $t_0 < t_1 < t_2$, such that $\|z(t_1)\| = \alpha$ and $\gamma \geqslant \|z(t)\| \geqslant \alpha$ for $t \in [t_1, t_2]$. Hence, by hypothesis (i) and lemma (3.1), we have

$$V(t, z(t)) \leqslant r(t, t_1, r(t_1)) + U(t), \tag{3.9}$$

for all $t \in [t_1, t_2]$.

Therefore, in view of (3.8) and (3.9), it follows that

$$V_m^{\gamma}(t_2) \leqslant V(t_2, z(t_2)) \leqslant r(t_2, t_1, r(t_1)) + U(t_2) < V_m^{\gamma}(t_2)$$

which contradicts the existence of $t_2 \in \mathcal{J}$ with $\|z(t_2)\| = \gamma$. We then conclude that $\|z(t)\| < \gamma$ for all $t \in \mathcal{J}$. Since the above argument is independent of the particular trajectory chosen it holds for all trajectories $z(t)$ with $\|z(t_0)\| < \alpha$. This completes the proof of the theorem.

Theorem 3.3. *The control system* (2.2) *is uniformly stable with respect to* $(\alpha, \alpha, t_0, T, \|\cdot\|)$ *if there exist functions* $V \in \Lambda$, $w \in \Gamma$ *and a positive number* $\delta < \alpha$ *such that*

(i) *for all* $t \in \mathcal{J}$, $z \in \bar{B}(\alpha) - B(\delta)$, (3.1), (3.2) *hold, and*

(ii) *the maximal solution* $r(t, t_1, r(t_1))$ *of* (3.5) *with initial condition* $r(t_1) = V_\delta^\alpha(t_1) - U(t_1)$ *at any* $t_1 \in \mathcal{J}$ *satisfying the condition* $r(t, t_1, r(t_1)) < V_m^\alpha(t) - U(t)$ *for all* $t \in \mathcal{J}$, $t > t_1$.

The proof of this theorem is similar to the proof of theorem 3.2 and hence is omitted.

Theorem 3.4. *The control system* (2.2) *is quasi-expansively stable with respect to* $(\alpha, \beta, t_0, T, \|.\|)$ *if there exist functions* $V \in \Lambda$ *and* $w \in \Gamma$ *such that*

(i) *for all* $t \in \mathcal{J}$, $z \notin B(\beta)$, (3.1) *and* (3.2) *hold;*

(ii) *the maximal solution* $r(t, t_1, r(t_1))$ *oj* (3.5) *with initial condition* $r(t_1) = V_M^\beta(t_1) - U(t_1)$ *at any* $t_1 \in \mathcal{J}$ *satisfying the condition*

$$r(t_0 + T, t_1, r(t_1)) < V_m^\beta(t_0 + T) - U(t_0 + T) \tag{3.10}$$

and

(iii) *for all* $z \notin B(\beta)$

$$V(t_0 + T, z) \geqslant V_m^\beta(t_0 + T). \tag{3.11}$$

Proof. To prove this theorem it is enough to show that every trajectory of (2.2), the condition $\|z(t_0)\| < \alpha$ implies $\|z(t_0 + T)\| < \beta$.

Suppose there exists a trajectory $z(t)$ of (2.2) with $\|z(t_0)\| < \alpha$ such that $\|z(t_1)\| = \beta$ and $\|z(t)\| \geqslant \beta$ for all $t \in [t_1, t_0 + T)$, $t_1 \in \mathcal{J}$. Hence by condition (i) of the theorem and lemma 3.1, we have

$$V(t, z(t)) \leqslant r(t, t_1, r(t_1)) + U(t) \tag{3.12}$$

for all $t \in [t_1, t_0 + T]$. Therefore, from inequalities (3.10), (3.11) and (3.12), we obtain

$$V_m^\beta(t_0 + T) \leqslant V(t_0 + T,\ z(t_0 + T)) \leqslant$$

$$\leqslant r(t_0 + T,\ t_1, r(t_1)) + U(t_0 + T) < V_m^\beta(t_0 + T)$$

a contradiction. Hence, the proof of the theorem.

Theorem 3.5. *The control system* (2.2) *is quasi-contractively stable with respect to* $(\alpha, \beta, t_0, T, \|.\|)$ *if there exist functions* $V \in \Lambda$ *and* $w \in \Gamma$ *such that*

(i) *for all* $t \in \mathcal{J}$ *and* $z \notin B(\beta)$, (3.1), (3.2) *hold;*

(ii) *the maximal solution* $r(t, t_1, r(t_1))$ *of* (3.5) *with initial condition* $r(t_1) = V_m^\beta(t_1) - U(t_1)$ *at any* $t_1 \in \mathcal{J}$ *satisfying the condition*

(a) $r(t_0 + T, t_1, r(t_1)) < V_m^\beta(t_0 + T) - U(t_0 + T)$;

(b) $r(t_0 + T, t_0, V_\beta^\alpha(t_0) - U(t_0)) < V_m^\beta(t_0 + T) - U(t_0 + T)$

and

(iii) *for all* $z \notin B(\beta)$, $V(t_0 + T, z(t_0 + T)) \geqslant V_m^\beta(t_0 + T)$.

Proof. The proof of this theorem may be devided into two parts. First, suppose that there exists a trajectory of (2.2) with $\|z(t_0)\| < \beta$ such that $\|z(t_0+T)\| \geqslant \beta$ then there exists a $t_1 \in \mathcal{J}$ such that $\|z(t_1)\| = \beta$ and $\|z(t)\| \geqslant \beta$ for all $t \in [t_1, t_0+T]$, $t_1 > t_0$. In this case condition (i) of the theorem holds and by applying lemma 3.1, we have

$$V(t, z(t)) \leqslant r(t, t_1, r(t_1)) + U(t).$$

Therefore, by virtue of (ii a) and (iii) we have

$$V_m^\beta(t_0+T) \leqslant V(t_0+T, z(t_0+T)) \leqslant r(t_0+T, t_1, r(t_1)) + U(t_0+T) < V_m^\beta(t_0+T)$$

which is a contradiction and hence $\|z(t_0+T)\| < \beta$.

Secondly, there may exist a trajectory starting in $B(\alpha) - \bar{B}(\beta)$, but never reaches $B(\beta)$ at any time. Let $z(t)$ be such a trajectory, with $z(t_0) \in B(\alpha) - \bar{B}(\beta)$ and $\|z(t_0+T)\| \geqslant \beta$. At $t = t_0+T$, observe that $V_m^\beta(t_0+T) \leqslant V(t_0+T, z(t_0+T))$. Therefore, using conditions (i), (ii b) and lemma 3.1, we obtain

$$V_m^\beta(t_0+T) \leqslant V(t_0+T, z(t_0+T)) \leqslant$$
$$\leqslant r(t_0+T, t_1, r(t_1)) - U(t_0+T) < V_m^\beta(t_0+T),$$

a contradiction. This completes the proof of the theorem.

Remark. By applying the above lemmas and theorems we can very easily formulate theorems for expansive and contractive stabilities.

4. Example

Consider the differential equation

$$x' = (x-0.5)\cos t + \sec^2 t - \sin t \tag{4.1}$$

where $x \in R^1$ and $t \in \mathcal{J}$. Let $y(t) = \tan t$ be given target function, which is continously differentiable for $t \in [0, \pi/2)$. Applying the transformation $z = x - y(t)$ equation (4.1) becomes

$$z' = (z - 0.5)\cos t. \tag{4.2}$$

For $t_0 = 0$, $T = \pi/2$, $\|z\| = |z|$, let $\alpha = 1$, $\gamma = 6$. We shall consider the stability of the equation (4.2) with respect to $(1, 6, 0, \pi/2, \|\cdot\|)$. Take the usual energy function

$$V = z^2.$$

Thus we have $D_*^+ V = 2V \cos t$ and $U(t) = 6 \sin t$.

In this example $w(t, r+U(t)) = 2(r + 6 \sin t)\cos t$, which clearly belongs to Γ for all $t \in \mathcal{J}$. Since $V^1(t_0) = 1$, the maximal solution of (3.5) is

$$r(t, t_0, r_0) = 4 \exp(2 \sin t) - 6 \sin t - 3.$$

Applying condition (3.6) of theorem 3.1 for $(1, 6, 0, \pi/2, \|\cdot\|)$ stability, we have

$$4 \exp(2 \sin t) - 6 \sin t - 3 < V_m^6(t) - 6 \sin t,$$

that is, $4 \exp(2 \sin t) - 3 < V_m^6(t) = 36$, which is readily verified. Further, $V_M^1(t_1) = 1$, $U(t_1) = 6 \sin t_1$, $t_1 > t_0$ and $r(t_1) = 1 - 6 \sin t_1$ then the maximal solution is given by

$$r(t, t_1, r(t_1)) = 4 \exp [2 (\sin t - \sin t_1)] - 6 \sin t - 3.$$

Condition (3.8) of theorem 3.2 for $(1, 6, 0, \pi/2, \| . \|)$ uniform stability, we have

$$4 \exp [2 (\sin t - \sin t_1)] - 6 \sin t - 3 < V_m^6(t) - 6 \sin t,$$

that is,

$$4 \exp [2 (\sin t - \sin t_1)] - 3 < V_m^6(t) = 36,$$

which is readily verified.

Received the 17 VI 1968

University of Rhode Island,
Kingston, USA

REFERENCES

1. Bellman R., *Notes on Control Processes. (I), On minimum and maximum deviations.* Quart. Appl. Math., **14**, 1957, pp. 419–423.
2. — *Some aspects of the mathematical theory of control processes.* Rand-Corporation, 1958, Ch. 4.
3. Barbasin E. A., *On the realization of motion along a given trajectory.* Avtomat. i Telemech., 1961, *22*, pp. 681–687 (Russian); translated as Automat. Remote Control, 1961, *22*, pp. 587–593.
4. Liberman L. H., *On certain problems of the stability of solution of non-linear differential equations in Banach Spaces.* Sibirrh. Math., 1960, *22*, pp. 611–616 (Russian).
5. — *On approximation of solutions of differential operator systems in Hilbert spaces.* Mathematica, 1964, pp. 88—92 (Russian).
6. Tsokos C. P., Lakshmikantham V., *Control systems and differential inequalities.* Camb. Phil. Soc., 1968, **64**, pp. 740—750.
7. Rao M. Rama Mohana, *Upper and lower bounds of the norm of solutions of non-linear Volterra integral equations.* Proc. Nat. Acad. Scs. (India), 1963, **33**, pp. 263–266.
8. Weiss L., Infante E. F., *Finite time stability under perturbing forces and on product spaces.* IEEE Trans. on Autom. Control, 1967, Vol. Ac. **12**, *1*, pp. 54–59.

STABILITATEA ÎN TIMP FINIT A SISTEMELOR DE COMANDĂ ŞI INEGALITĂŢI INTEGRALE

(Rezumat)

Se extind definiţiile a diverse tipuri de stabilitate la un interval finit de timp şi se utilizează conceptul de funcţii Liapunov şi teoria inegalităţilor integrale pentru studiul unitar al problemei. Se construieşte un exemplu cu care se ilustrează rezultatele.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secția I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 519.24

A NOTE ON THE BIRTHDAY PROBLEM

BY

J. HUBERT and T. V. NARAYANA

1. Introduction

The classical Birthday Problem [5] can be found in most modern probability texts [1], [3], [4]. An interesting variant of this problem has been discussed by Gehan [2] and was described by him as follows: each student in a class, in turn, was asked for his birthdate. The instruction was given that as soon as any student heard his birthdate announced by another member of the class, he is to raise his hand. Gehan obtained the probabilities p_r and q_r, that the first match in birthdates is declared when the rth student in a class of N is asked for his birthdate and that no student has raised a hand after r students have been asked for birthdates respectively. Clearly the sequence $\{q_r\}$ is the „tails" of $\{p_r\}$ (see Feller, p. 249). Gehan defines the median number of r as that r for which $q_r = 0.5$ and obtains an approximate formula for the median for $N \geq 23$.

The purpose of this note is to discuss a slight modification of the definition of the median and compare it with Gehan's results. We define as the stooge number or stooge that value of r, say r_0, for which $\sum_{r=1}^{r_0} p_r \geqslant 0.5$ for the first time. With this definition, we find the expected stooge number in a class of N for all N (not merely $N \geqslant 23$) by taking into account the individual cases, i. e., the case of no pair, one pair, etc. and even triplets. This note shows that the expected stooge number in any class is always less than 15.

2. The Probabilities $P_{N;k,l}$

By standard combinatorial methods it can be shown that the probability of exactly k $(0 \leqslant k \leqslant [N/2])$ distinct pairs of birthdates among N persons is

$$P_{N;k} = \binom{365}{k} (365 - k)_{N-2k}\, 365^{-N} \prod_{j=0}^{k-1} \binom{N-2j}{2} . \tag{2.1}$$

When $k = 0$ we have immediately that

$$(2.2) \qquad P_{N;0} = \frac{(365)_N}{365^N}, \qquad \text{where} \qquad (365)_N = \frac{365!}{(365-N)!},$$

where, of course, the empty product over j equals 1 by convention. Equation (2.2) is the probability of N distinct birthdates and is given for instance in [1].

The probability of exactly 1 triplet (that is, three persons with the same birthdate) is

$$(2.3) \qquad P_{N;0,1} = \binom{365}{1}\binom{N}{3}(364)_{N-3}\,365^{-N}.$$

Similarly the probability of exactly 1 pair and 1 triplet among N persons is

$$(2.4) \qquad P_{N;1,1} = \binom{365}{1}\binom{N}{2}\binom{364}{1}\binom{N-2}{3}(363)_{N-5}\,365^{-N},$$

and for 2 pairs and 1 triplet we have

$$(2.5) \qquad P_{N;2,1} = \binom{365}{2}\binom{N}{2}\binom{N-2}{2}\binom{363}{1}\binom{N-4}{3}(362)_{N-7}\,365^{-N}.$$

The probabilities $P_{N;k,l}$ for k pairs and l triplets can also be found; but as will be shown later these probabilities are very small and their effect on the expected stooge number seems unimportant for classes up to size 40.

Some elementary results follow immediately from the above probabilities:

1. $P_{N;0} \cong 1 - \dfrac{N(N-1)}{730}$, for large N.

2. $P_{N+1;1} = \left(1 - \dfrac{N-1}{365}\right)\left(\dfrac{N+1}{N-1}\right)P_{N;1}$, for $N \geqslant 2$.

3. $P_{N;1} > P_{N+1;1}$, when $N > 27$.

4. $P_{N;0,1} = \dfrac{N}{1095}P_{N-1;1}$. 5. $P_{N;0,1} = \dfrac{N-2}{3(367-N)}P_{N;1}$.

Result 3, for example, is of interest since it shows that the sequence of probabilities $\{P_{N;1}\}$ is monotonic decreasing after $N = 27$. Similar inequalities provide a useful check on the calculations that appear later in Table 1

Table 1

The Probabilities $P_{N;k,l}$ (upper row)
and
The Stooge Numbers $r_{N;k,l}$ (lower row)

Cases	Pairs ($l=0$)							Triplets ($l=1$)		
N \ k	0	1	2	3	4	5	6	0	1*)	2*)
5	.9729 4	.0270 2	.0001 1							
10	.8831 9	.1116 3	.0044 2	.0001 1				.0008 2		
15	.7471 14	.2235 5	.0248 3	.0013 2	.0001 1			.0028 3	.0005 2	
20	.5886 19	.3232 6	.0713 3	.0082 2	.0005 2			.0056 4	.0022 3	.0003 2
25	.4313 24	.3794 8	.1404 4	.0286 3	.0036 2	.0003 2		.0085 5	.0057 3	.0016 3
30	.2937 29	.3802 9	.2132 5	.0684 3	.0139 3	.0019 2	.0002 2	.0105 6	.0109 4	.0048 3
35	.1856 34	.3337 11	.2653 6	.1235 4	.0375 3	.0079 3	.0012 2	.0111 8	.0165 5	.0107 4
40	.1088 39	.2602 12	.2797 7	.1791 5	.0764 4	.0230 3	.0050 2	.0101 9	.0205 5	.0185 4

*) These columns refer to 1 triplet and $k=1$ or 2 pairs.

3. The Discovery Probabilities $D_{N;k,l}(r)$

Let $D_{N;k}(r)$ denote the probability of discovering a match in birthdates for the first time on the rth trial given that there are exactly k distinct pairs of birthdates among N persons, where $1 \leqslant k \leqslant [N/2]$. It is not difficult to show that

$$D_{N;k}(r) = \frac{2k}{N-r+1} \prod_{j=0}^{r-2} \left(1 - \frac{2k}{N-j}\right), \quad 1 \leqslant r \leqslant N. \tag{3.1}$$

In particular, if $k=1$ we have

$$D_{N;1}(r) = \frac{N-r}{\binom{N}{2}}, \quad 1 \leqslant r \leqslant N. \tag{3.2}$$

If we have no pairs but only 1 triplet we have

$$D_{N;0,1}(r) = \frac{(N-r)(N-r-1)}{2\binom{N}{3}}, \quad 1 \leqslant r \leqslant N. \tag{3.3}$$

Similarly for 1 pair and 1 triplet

$$D_{N;1,1}(r) = \begin{cases} \dfrac{5}{N}, & \text{for} \quad r = 1 \\ \dfrac{5}{N-r+1} \prod_{j=0}^{r-2} \left(1 - \dfrac{5}{N-j}\right), & 2 \leqslant r \leqslant N-4. \end{cases} \tag{3.4}$$

Likewise,

$$D_{N;2,1}(r) = \begin{cases} \dfrac{7}{N}, & \text{for} \quad r = 1 \\ \dfrac{7}{N-r+1} \prod_{j=0}^{r-2} \left(1 - \dfrac{7}{N-j}\right), & 2 \leqslant r \leqslant N-6. \end{cases} \tag{3.5}$$

It is a simple matter to write $D_{N;k,l}(r)$ in general; as is intuitively evident, we have also, for example,

$$D_{N;5,0}(r) \equiv D_{N;2,2}(r). \tag{3.6}$$

The expected values of r for two particular cases are given here as they suggest an amusing generalization

$$\sum_{r=1}^{N} r D_{N;1}(r) = \frac{N+1}{3}, \tag{3.7}$$

$$\sum_{r=1}^{N} r D_{N;0,1}(r) = \frac{N+1}{4}. \tag{3.8}$$

4. The Stooge Numbers $r_{N;k,l}$

If we denote for the moment the various discovery probabilities of the previous section by $D_N(r|k, l)$ then there is some value of r, say r_0 for which

$$\sum_{r=1}^{r_0} D_N(r|k, l) \geqslant 0.5 \quad \text{and} \quad \sum_{r=1}^{r_0-1} D_N(r|k, l) < 0.5. \tag{4.1}$$

This number r_0 is called the stooge number of N persons given k pairs and l triplets. (It is at the $r_0{}^{\text{th}}$ person that the probability of dis-

covering a match for the first time is greater than 1/2). Table 1 provides the various stooge numbers and associated probabilities for selected values of N.

The (unconditional) stooge for a class is the obvious weighted average of the stooge numbers for $r_{N;k,l}$ with the corresponding probabilities $D_{N;k,l}$. In other words, the expected stooge number $E[r]$ for any given N, is given by

$$E[r] = \sum_{\substack{k\geqslant 0 \\ l\geqslant 0}} r_{N;k,l} P_{N;k,l}. \tag{4.2}$$

Note that for $k = l = 0$, $r_{N;0,0} = N-1$. Table 2 provides the values of $E[r]$ for selected values of N.

Table 2

Expected Stooge Numbers $E[r]$

N	$E[r]$
3	1.99
5	3.95
7	5.77
9	7.52
11	9.14
13	10.41
15	11.66
17	12.44
19	13.23
21	13.56
23	13.94
25	14.11
27	13.88
29	13.71
31	13.10
33	12.92
35	12.42
37	11.49
39	10.81

5. Conclusions

From Table 1 it becomes apparent that the effect of more than 6 pairs is negligible for classes up to size 40. From Table 2 it appears that the expected stooge number in any class is always less than 15. Since

$$\sum_{r=1}^{N} r D_{N;k,l}(r) = \frac{N+1}{2k+3l+1}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

decreases with more matches and the probabilities of more matches also increases rapidly in larger classes we suggest, as is indicated by various arguments, that 15 is the upper bound.

Finally, Gehan considers an amusing example where the 35 U. S. Presidents call out their birthdates in chronological order. His median number for discovering the match is 9. Table 2 suggests the stooge number 12. In actual fact the first match occurs at 11. Indeed, our calculations show that with most random orders of calling the presidents, *not just the chronological order*, the stooge number cannot exceed 13. It is apparent from our calculations (and in particular from equation 4.1) that 12.42 is a reasonable *upper* bound for the median in discovering presidential birthdate matches.

Received the 15 III 1969

University of Alberta,
Edmonton, Canada

REFERENCES

1. Feller W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* Vol. **1** (Second Ed.), John Wiley and Sons, New York, 1957.
2. Gehan E. A., *Note on the Birthday Problem.* The American Statistician, April 1968, p. 28.
3. Mosteller F., *Fifty Challenging Problems in Probability.* Addison-Wesley, Reading, 1965, pp. 47-48.
4. Parzen E., *Modern Probability Theory and its Applications.* John Wiley and Sons, New York, 1960, pp. 46-47.
5. von Mises R., *Ueber Aufteilungs—und Besetzungs—Wahrsheinlichkeiten.* Rev. de la Fac. des Sc. de l'Univ. d'Istanbul, 1938—1939, N. S., **4**, pp. 145-263.

ASUPRA PROBLEMEI NATALITĂŢII

(Rezumat)

Autorii, luînd ca punct de plecare o variantă a problemei natalităţii expusă în [2] de Gehan, discută unele modificări ale definiţiei medianei şi prezintă unele comparaţii cu rezultatele lui Gehan.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secția I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

К. Д. 534.28

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ГРАДИЕНТА ДЛЯ СИНТЕЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НАИЛУЧШИМ ЗАТУХАНИЕМ

Р. Ш. АДАМИЯ и Ф. Ф. МИХАЙЛЕНКО

Повышение производительности и быстроходности современных машин в большинстве случаев обусловливает значительное увеличение динамических нагрузок в их звеньях. Для снижения максимальных значений динамических усилий особо важное значение приобретает обеспечение наилучшего затухания упругих колебаний, возникающих в ответственных узлах машины во время переходных режимов их работы. На затухание переходного процесса в динамических системах (в частности электромеханических системах) влияет ряд факторов: величины различного рода трения в упругих звеньях, демпфирование внесенное в систему за счет диссипативных свойств электропривода, а также значения различных параметров механической системы. В работе [1] показано, каким образом должны быть выбраны параметры динамической системы, чтобы обеспечить в них оптимальное затухание переходного процесса. Однако физическая реализуемость оптимальных параметров по затуханию не всегда представляется возможной вследствие определенных ограничений, наложенных на параметры конкретных машин, исходя из технологических и конструктивных требований, предъявляемых к ним. В данной статье для синтеза динамических систем с наилучшим затуханием, при определенных ограничениях, наложенных на параметры машин, показана целесообразность использования метода градиента.

1. Переходный процесс, возникающий в определенном узле машины, может быть описан дифференциальным уравнением относительно соответствующей обобщенной координаты x:

$$x^{(2n)} + a_1 x^{(2n-1)} + a_2 x^{(2n-2)} + \ldots + a_{2n} x = 0. \tag{1.1}$$

Предполагаем, что коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ являются функциями некоторого числа параметров системы $k_1, k_2, \ldots, k_m$: $a_i = a_i(k_j)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$.

Каждый из параметров может принимать значение только в определенном замкнутом интервале

$$\inf k_j \leqslant k_j \leqslant \sup k_j. \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.1) при малом демпфировании представляет собой суперпозицию частных решений вида

$$x = \sum_{s=1}^{n} e^{-\alpha_s t}(A_s \cos \beta_s t + B_s \sin \beta_s t), \tag{1.3}$$

где α_s — действительная часть корня характеристического уравнения; β_s — мнимая часть; A_s и B_s — постоянные, определяющиеся начальными условиями.

Затухание процесса характеризуется скоростью убывания амплитуд с течением времени. Для наилучшего затухания необходимо добиваться, чтобы наименьшая из величин α_s принимала по возможности наибольшее значение, т. е. необходимо обеспечить $\max(\min \alpha_s)$. Если наинизшая частота β_1 на порядок или больше отличается от остальных β_s (при всех допустимых значениях (1.2) параметров), то на протяжении некоторого конечного интервала времени преобладающее значение будут иметь амплитуды, соответствующие частоте β_1. Для обеспечения наилучшего затухания на этом интервале времени необходимо будет добиваться максимума величины α_1.

В обоих случаях для оценки затухания может быть использован также логарифмический декремент колебаний [2]. При этом в первом случае необходимо будет обеспечивать $\max[\min(\alpha_s/\beta_s)]$, а во втором случае $\max(\alpha_1/\beta_1)$. Следовательно, в общем случае, целесообразно обеспечить максимум некоторой функции f, зависящей от величин α_s, β_s:

$$f(\alpha_s, \beta_s), \tag{1.4}$$

где α_s и β_s таковы, что выражение $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ является корнем характеристического уравнения, соответствующего уравнению (1.1):

$$\lambda^{2n} + a_1\lambda^{2n-1} + a_2\lambda^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1}\lambda + a_{2n} = 0 \tag{1.5}$$

или сокращенно $p_{2n}(\lambda) = 0$.

Следовательно $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ должно обращать (1.5) в тождество

$$\mathcal{R}e\, p_{2n}(\alpha_s, \beta_s) + i\mathcal{I}m\, p_{2n}(\alpha_s, \beta_s) = 0, \tag{1.6}$$

где $\mathcal{R}e$ — обозначает действительную часть выражения, а $\mathcal{I}m$ — мнимую. Известно [6], что (1.6) будет выполняться тогда и только тогда, когда отдельно

$$\mathcal{R}e\, p_{2n}(\alpha_s, \beta_s) = 0, \quad \mathcal{I}m\, p_{2n}(\alpha_s, \beta_s) = 0. \tag{1.7}$$

Если подставим сопряженный корень $\lambda_s = \alpha_s - i\beta_s$ в (1.5), то получим также соотношения вида (1.7).

Итак, в задаче требуется максимизировать (1.4) при условиях (1.7) и (1.3). Так как максимизируемая функция (1.4) и условия (1.7) нелинейны по отношению к переменным k_j, α_s, β_s, то, следовательно приходим к задаче нелинейного математического программирования.

2. Один из основных вычислительных методов нелинейного программирования — градиентный метод (или метод наискорейшего спуска). В большинстве работ по нелинейному программированию [3], [5] показатели качества предполагаются выпуклыми функциями (для задач минимизации) или вогнутыми функциями (для задач максимизации). Область определения оптимизируемой функции во всех случаях предполагается выпуклой. При этих допущениях любой локальный экстремум совпадает с глобальным оптимумом. В нашей задаче эти допущения не выполнены. Кроме того мы разыскиваем оптимум в ограниченной области, внутри которой экстремума может вовсе не быть, и оптимум, следовательно, будет достигаться на границе области. В связи с этим для решения задачи, ниже приводится градиентный метод, отличающийся от известных, в частности тем, что в нём не используются множители Лагранжа.

Сначала продифференцируем (1.4) по одному из параметров

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}k_j} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_s}\frac{\partial \alpha_s}{\partial k_j} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \beta_s}\frac{\partial \beta_s}{\partial k_j}. \tag{2.1}$$

Величины $\partial f/\partial \alpha_s$ и $\partial f/\partial \beta_s$ вполне определяются видом самой функции f, а выражения $\partial \alpha_s/\partial k_j$ и $\partial \beta_s/\partial k_j$ необходимо найти. Дифференцируя (1.7) по k_j и, для упрощения, обозначая $\mathcal{R}ep_{2n}(\alpha_s, \beta_s)$ через $\mathcal{R}ep$ и соответственно $\mathcal{I}mp_{2n}(\alpha_s, \beta_s)$ через $\mathcal{I}mp$, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial \alpha_s}\dfrac{\partial \alpha_s}{\partial k_j} + \dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial \beta_s}\dfrac{\partial \beta_s}{\partial k_j} = -\dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial k_j}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial \alpha_s}\dfrac{\partial \alpha_s}{\partial k_j} + \dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial \beta_s}\dfrac{\partial \beta_s}{\partial k_j} = -\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial k_j}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Следовательно имеем систему двух алгебраических линейных уравнений относительно $\partial \alpha_s/\partial k_j$ и $\partial \beta_s/\partial k_j$. При выполнении соответствующих условий (ранг простой матрицы и расширенной равен 2) решение может быть записано в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_s}{\partial k_j} = \dfrac{\dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial \beta_s}\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial k_j} - \dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial \beta_s}\dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial k_j}}{\dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial \alpha_s}\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial \beta_s} - \dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial \beta_s}\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial \alpha_s}}, \\ \dfrac{\partial \beta_s}{\partial k_j} = \dfrac{\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial \alpha_s}\dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial k_j} - \dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial \alpha_s}\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial k_j}}{\dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial \alpha_s}\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial \beta_s} - \dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial \beta_s}\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial \alpha_s}}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.1), окончательно находим:

$$\frac{df}{dk_j}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial\alpha_s}\frac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial\beta_s}-\frac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial\beta_s}\frac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial\alpha_s}\right)^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial\alpha_s}\left(\frac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial\beta_s}\frac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial k_j}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial\beta_s}\frac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial k_j}\right)+\frac{\partial f}{\partial\beta_s}\left(\frac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial\alpha_s}\frac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial k_j}-\frac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial\alpha_s}\frac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial k_j}\right)\right]. \tag{2.4}$$

Таким образом все компоненты вектора градиента функции в любой точке области параметров k_j даются формулой (2.4).

Если оптимизировать систему не по декременту, а в смысле $\max(\min\alpha_s)$ или $\max\alpha_1$, то показатель качества, т. е. функция f (1.4), будет зависеть только от α_s. В этом случае в выражении (2.1) сохранится только первое слагаемое, т. к. $\partial f/\partial\beta_s=0$, а в (2.3) останется только первое выражение.

Тогда компоненты вектора градиента будут выражаться формулой

$$\frac{df}{dk_j}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\alpha_s}\frac{\dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial\beta_s}\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial k_j}-\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial\beta_s}\dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial k_j}}{\dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial\alpha_s}\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial\beta_s}-\dfrac{\partial \mathcal{R}ep}{\partial\beta_s}\dfrac{\partial \mathcal{I}mp}{\partial\alpha_s}}. \tag{2.5}$$

Для решения задачи методом градиента ЭЦВМ сначала должна в произвольной точке $(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_m)$ области (1.2) определить корни характеристического уравнения (1.5) и вычислить значение функции f, а потом найти градиент этой функции в данной точке по формуле (2.4) или (2.5).

С помощью градиента строится луч [4]

$$k_j=\bar{k}_j+t\frac{\partial f}{\partial k_j} \tag{2.6}$$

и дальше, выбрав заранне некоторое число $\delta>0$, вычисляется значение функции f на луче в точке $t=\delta$. Если

$$f\left(\bar{k}_j+\delta\frac{\partial f}{\partial k_j}\right)>f(\bar{k}_j) \tag{2.7}$$

то точка $\bar{\bar{k}}_j=\bar{k}_j+\delta(\partial f/\partial k_j)$ принимается за исходную, в ней вычисляется градиент и снова делается шаг δ по лучу (2.6). Если условие (2.7) не выполнено на каком либо шаге, число δ заменяется на $\delta/2$ и процесс вычисления продолжается. При этом не должны выходить за пределы области (1.2). Если по одному из параметров будет достигнута граница области, например $k_V=\sup k_V$ то процесс дальше должен продолжаться в соответствующей гиперплоскости, т. е. следует считать $k_V=\sup k_V$, $\partial f/\partial k_V=0$. Если в процессе вычислений получится, что

условие (2.7) в замкнутой области (1.2) не выполняется, и при этом $\delta/2 < \varepsilon$ (где ε заранее заданное число $\varepsilon > 0$, характеризующее требуемую точность), то на этом процесс заканчивается. ЭЦВМ должна выдать на печать наибольшее найденное значение $\max f$ и значения параметров k_j при которых обеспечивается оптимальный процесс по затуханию. Вместо метода градиента можно использовать также метод наибыстрейшего спуска.

Наличие нескольких локальных максимумов в пределах интересующей нас ограниченной области маловероятно. Тем не менее в некоторых случаях может оказаться целесообразным повторить процесс счёта, начиная в различных точках области, чтобы убедиться, что результаты совпадают, или выбрать наилучший вариант, если результаты все же различны.

Поступила 1 V 1969

Институт металлургии АН ГССР
и
Институт гидромеханики АН УССР, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубенцев А. Н., *Интегральные методы в динамике.* Из-во „Техника", Киев, 1967.
2. Бабаков И. М., *Теория колебаний.* Изд. „Наука", Москва, 1965.
3. Жидков Н. П., Щедрин Б. М., *Об одном методе поиска минимума финкции многих переменных.* Вычисл. мет. и программ., Изд. Моск. ун-та, 1968.
4. Зубов В. И., *Теория оптимального управления.* Изд. „Судостроение", Ленинград, 1966.
5. Эрроу К. Дж, Гурвиц Л., Удзава Х., *Исследование по линейному и нелинейному программированию.* ИИЛ, Москва, 1962.
6. Свежников А. Г., Тихонов А. Н., *Теория функций комплексной переменной.* Изд. „Наука", Москва, 1967.

ASUPRA FOLOSIRII METODEI GRADIENTULUI PENTRU SINTEZA SISTEMELOR MECANICE CU AMORTIZARE OPTIMĂ

(Rezumat)

Autorii reduc problema de sinteză a sistemelor cu amortizare optimă la o problemă de programare neliniară. Se expune o metodă de determinare a vectorului gradient a funcţiei de maximizat, care permite rezolvarea problemei cu ajutorul MEC folosind metoda gradientului, metoda scoborîrii celei mai rapide ş. a.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secția I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 531.553

THE HODOGRAPH OF ALMOST VERTICAL BALLISTIC TRAJECTORIES

BY

REINHARD MÜLLER

To the University of Otago in his Jubilee Year

Denoting by v the speed of the projectile (considered as a particle) and by ϑ the inclination of its path towards the horizontal, we have the well known equations

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{v} = -cf(v) - g\sin\vartheta, \\ v\dot{\vartheta} = -g\cos\vartheta, \end{cases} \quad \text{at} \quad t = 0, \quad v = v_0, \quad \vartheta = \vartheta_0.$$

Here $cf(v)$ is the air resistance force per unit mass. We shall treat c and g as constants.

Many approximate solutions of the ballistic problem are relatively easy, when ϑ_0 is small and become difficult when ϑ_0 is nearly equal to $\pi/2$.

We now consider the equation of the hodograph

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}(v\cos\vartheta) = \frac{c}{g}vf(v); \quad \vartheta = \vartheta_0, \; v = v_0.$$

Let be

$$(3) \qquad \left|\frac{\pi}{2} - \vartheta_0\right| \ll 1.$$

We introduce the notation:

$$\frac{c}{g}f(v) = h(v), \qquad \frac{c}{g}\int_0^v f(v)\,\mathrm{d}v = H(v), \quad u = H(v) - v\sin\vartheta.$$

Eq. (2) transforms into

$$\frac{du}{dv} = \frac{v(1-h^2)}{u - vh - H}. \tag{4}$$

Changing notation $v \to x, u \to y$, (4) becomes

$$f(x, y, y') \equiv y' - \frac{x(1-h^2)}{y - xh - H} = 0. \tag{5}$$

We know two particular solutions of (5), namely $y = H - x$ (vertical shot upwards); $y = H + x$ (vertical shot downwards).

We use the following approximation for the solution of (5)

$$y(x, C) = y(x, 0) + C y_C(x, 0), \tag{6}$$

where C is the constant of integration. $|C|$ must be sufficiently small so that second and higher powers of C are negligible. For $y(x, 0)$ we take $H \mp x$; to obtain $y_C(x, 0)$, we form the partial derivative of (5) with respect to C, giving

$$f_{y'} y_{Cx} + f_y y_C = 0. \tag{7}$$

Writing $y(x, 0) = H - x = \eta(x)$, we get from (7), setting $C = 0$, and observing that $f_{y'} = 1$, $y_{Cx}(x, 0) + f_y(x, \eta)\, y_C(x, 0) = 0$,

$$y_C(x, 0) = \text{const. } e^{-\int f_y(x, \eta(x))\,dx} = \text{const. } e^{-\int \frac{1-h}{1+h}\frac{dx}{x}}. \tag{8}$$

Since this constant of integration is arbitrary, we may choose

$$y_C(x, 0) = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{1-h}{1+h}\frac{dx}{x}}. \tag{9}$$

From Eq. (6)

$$y(x, C) = H - x + C\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{1-h}{1+h}\frac{dx}{x}}. \tag{10}$$

Returning to the original notation, we determine $C = C_1$ from the eq.

$$\frac{c}{g}\int_0^{v_0} f(v)\,dv - v_0 \sin\vartheta_0 = \frac{c}{g}\int_0^{v_0} f(v)\,dv - v_0 + C_1$$

and obtain $C_1 = v_0(1 - \sin\vartheta_0)$.

We require $C_1 \ll 1$ unit length per unit time. Eq. (10) now becomes

$$\frac{c}{g}\int_0^{v} f(v)\,dv - v\sin\vartheta = \frac{c}{g}\int_0^{v} f(v)\,dv - v + v_0(1 - \sin\vartheta_0)\, e^{-\int_{v_0}^{v} \frac{1-h}{1+h}\frac{dv}{v}}.$$

This reduces to

$$1 - \sin\vartheta = (1 - \sin\vartheta_0)\frac{v_0}{v}\, e^{\int_v^{v_0} \frac{1-h}{1+h}\frac{dv}{v}}. \tag{11}$$

Eq. (11) gives the approximate solution of (2) for what we call the first part of the trajectory. From the first Eq. (1) we see that from the start v decreases monotonously until $\dot{v}$ vanishes. This occurs when

$$\dot{v} = 0, \text{ i.e } h = -\sin\vartheta, \text{ or } 1 + h = 1 - \sin\vartheta. \tag{12}$$

(12) is valid for the minimum value of v which we denote by v^*. In eq. (11) v decreases from v_0 to v^*. If during the integration in (11) the point is reached for which $1 + h = 1 - \sin\vartheta$, then $v = v^*$, and ϑ^* is found from the eq.

$$1 + h(v^*) = 1 - \sin\vartheta^*; \tag{13}$$

$v = v^*$ is the endpoint of the first part of the trajectory, and we have also

$$1 - \sin\vartheta^* = 1 + h(v^*) = (1 - \sin\vartheta_0)\frac{v_0}{v^*}\, e^{\int_{v^*}^{v_0} \frac{1-h}{1+h}\frac{dv}{v}}.$$

To determine the hodograph for the second part of the trajectory, where v is monotonously increasing until it reaches a certain limiting value, we take in (6) $y(x, 0) = H + x$, and obtain in a similar fashion as above

$$y(x, C) = H + x + C\, e^{-\int_{x^*}^{x} \frac{1+h}{1-h}\frac{dx}{x}}. \tag{14}$$

We determine $C = C_2$ from the Eq.

$$\frac{c}{g}\int_0^{v^*} f(v)\, dv - v^* \sin\vartheta^* = \frac{c}{g}\int_0^{v^*} f(v)\, dv + v^* + C_2,$$

so that $C_2 = -v^*(1 + \sin\vartheta^*)$.

We require $|C_2| \ll 1$ unit length per unit time. This can always be accomplished by making C_1 sufficiently small (for $C_1 \to 0$, we have also $C_2 \to 0$).

From (14)

$$\frac{c}{g}\int_0^{v} f(v)\, dv - v\sin\vartheta = \frac{c}{g}\int_0^{v} f(v)\, dv + v - v^*(1 + \sin\vartheta^*)\, e^{\int_{v^*}^{v} \frac{h+1}{h-1}\frac{dv}{v}},$$

which reduces to

$$1 + \sin\vartheta = (1 + \sin\vartheta^{\star}) \frac{v^{\star}}{v} e^{\int_{v^{\star}}^{v} \frac{h+1}{h-1} \frac{dv}{v}}. \tag{15}$$

(15) gives approximately the second part of the hodograph. Here v increases monotonously from $v^{\star}$ until it reaches a limiting value v_0 which is defined by the equation

$$\frac{c}{g} f(v^0) = h(v^0) = 1, \quad \vartheta^0 = -\frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Finally, we note that the one-parametric family of curves representing the orthogonal trajectories of the hodograph curves—without any restriction as in (3)—can be found by solving a simple linear differential equation of first order which follows from (4), namely

$$\frac{du}{dv} + \frac{u - vh - H}{v(1 - h^2)} = 0. \tag{17}$$

Received the 24 XII 1968

University of Otago,
Dunedin, New Zealand

HODOGRAFUL TRAIECTORIILOR BALISTICE APROAPE VERTICALE

(Rezumat)

Utilizînd o soluţie aproximativă a ecuaţiei hodografului (2) se obţine pentru prima porţiune a traiectoriei ecuaţia (11), iar pentru cea de a doua, ecuaţia (15).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. C. 512.98

A SYMBOLIC CALCULUS USING ALGEBRAS ON THE REAL FIELD

BY

ALFRED BRAIER

1. The author has introduced and studied a symbolic representation of real functions of a single variable by the elements of some algebras on the real field, which has various applications in the technique of linear systems (see, for instance, [1]...[5]).

The purpose of this paper is to emphasise a symbolic representation for functions of many independent variables.

2. Let $\mathcal{C}_{(n)}$ be a class of real functions $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, of m real independent arguments x_s, $(s = 1, 2, ..., m)$, so that

$$f \in \mathcal{C}_{(n)} \quad \text{and} \quad \frac{\partial f}{\partial x_s} \in \mathcal{C}_{(n)}, \quad (s = 1, 2, ..., m). \tag{1}$$

Let also A_n be an algebra of order n on the real field R, with the multiplication table

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} \varepsilon_k, \quad (i, j = 1, 2, ..., n), \tag{2}$$

where $\varepsilon_i \in A_n$, $(i = 1, 2, ..., n)$ are the elements of an arbitrary basis, and $\gamma_{ijk} \in R$, $(i, j, k = 1, 2, ..., n)$, the structure constants which characterize A_n. Now, let be

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \quad \text{and} \quad w^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)} \varepsilon_i, \quad (s = 1, 2, ..., n), \tag{3}$$

with a_i, $a_i^{(s)} \in R$, $(i = 1, 2, ..., n)$, the elements of A_n which correspond respectively to the function (1_1) and hers m partial derivatives (1_2).

We will say that the element w (3_1) of A_n represents symbolicaly the function f (1_1), if the elements (3_2) which correspond to hers partial derivatives (1_2) are obtained each by multiplying one by one w with n distinct and fixed elements $d^{(s)} \in A_n$,

$$d^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{(s)} \varepsilon_i, \quad (s = 1, 2, ..., m), \tag{4}$$

the same for the entire class $\mathcal{C}_{(n)}$[1]. The m elements (4) play the rôle of derivation operators with respect to x_s, $(s = 1, 2, ..., m)$, for the functions $\mathcal{C}_{(n)}$, in the algebra A_n. Then

$$w^{(s)} = d^{(s)} w, \quad (s = 1, 2, ..., m). \tag{5}$$

If we use (3), (4) and take into account (2), the relation (5) becomes

$$w^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_i^{(s)} a_j \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}^{(s)} a_j \varepsilon_k \left(= \sum_{k=1}^{n} a_k^{(s)} \varepsilon_k \right),$$

where

$$\alpha_{jk}^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{(s)} \gamma_{ijk}, \quad (j, k = 1, 2, ..., n; \quad s = 1, 2, ..., m). \tag{6}$$

Therefore, the n components $a_j^{(s)}$ of (3_2), which correspond to the partial derivatives (1_2), can be expressed through the components of w (3_1):

$$a_j^{(s)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}^{(s)} a_k, \quad (j = 1, 2, ..., n; \quad s = 1, 2, ..., m). \tag{7}$$

In order to obtain the functions (1_1) which can be represented symbolicaly, let be $f_j(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathcal{C}_n$, $(j = 1, 2, ..., n)$, the functions which correspond to $\varepsilon_j \in A_n$, $(j = 1, 2, ..., n)$ (i. e. to the elements of the basis). Their partial derivatives $\partial f_j / \partial x_s$ are represented symbolicaly by $w_j^{(s)} = d^{(s)} \varepsilon_j$; in view of (4), (5) and (2), $w_j^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{(s)} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^{(s)} \varepsilon_k$, $(j = 1, 2, ..., n;$ $s = 1, 2, ..., m)$, where (6) was also taken into account. In virtue of the introduced correspondence, it follows

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^{(s)} f_k, \quad (j = 1, 2, ..., n; \; s = 1, 2, ..., m). \tag{8}$$

Then, the functions $\mathcal{C}_{(n)}$ which correspond to the elements of a basis are solutions of a system of mn equations with partial derivatives, linear, homogeneous and with constant coefficients, having n unknown functions of m variables. The mn^2 coefficients $\alpha_{jk}^{(s)}$ are essentialy determined (see (6)) by the n^3 structure constants of A_n, as well as by the mn quantities chosen as components of the derivation operators.

The problem of the compatibility of system (8) and therefore the possibility to obtain the functions which are symbolicaly representable, arises great difficulties in the general case of a given arbitrary algebra A_n. It should be observed that for the carrying out of the introduced

1) If the algebra A_n is not commutative, we can choose, for instance, the multiplication at left.

here correspondence, such properties of the algebra A_n as commutativity, associativity or existence of an unit, have not been involved.

After obtaining the solutions of (8), when they exist, the function (1_1) represented symbolicaly by the element (3_1) is

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i. \tag{9}$$

It is important to make the remark that for a fixed s, for instance $s = 1$, (8) becomes a system of ordinary linear differential equations, with constant coefficients, and x_1 as variable. Then the functions f_j can be expressed linearly through n constants in respect to x_1, namely $C_j^{(1)}(x_2, x_3, ..., x_m)$, $(j = 1, 2, ..., n)$, which correspond to n linear independent particular solutions. For an other fixed s, for example $s = 2$, the system (8) provides n distinct relations between $C_j^{(1)}$ and their partial derivatives $\partial C_j^{(1)}/\partial x_2$. By identifying with respect to the before mentioned linear independent particular solutions it results n times a system of ordinary linear differential equations, with constant coefficients, for the $C_j^{(1)}$, $(j = 1, 2, ..., n)$, with x_2 as independent variable.

Obviously, if these systems are not all identicaly, (8) is not compatible and the symbolic representation, impossible. If, however, all the obtained systems are identicaly, one can proceed later on in the same manner, until emptying the last variable. Without new restrictions for the components of the derivation operators (4), $\delta_i^{(s)}$, $(i = 1, 2, ..., n;\ s = 3, 4, ..., m)$), the feature of the following systems remains unchanged and (8) is compatible.

3. As a first example let be the algebra of order II, with the multiplication table

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = \lambda\varepsilon_1, \tag{10}$$

which for $\lambda = -1$ becomes the usual complex algebra, and for $\lambda = 0$ — the dual algebra. Taking into account (10), $\gamma_{111} = \gamma_{122} = \gamma_{212} = 1$, $\gamma_{121} = \gamma_{211} = \gamma_{112} = \gamma_{222} = 0$ and $\gamma_{221} = \lambda$. Then (6) provides

$$\alpha_{11}^{(s)} = \delta_1^{(s)}, \quad \alpha_{12}^{(s)} = \delta_2^{(s)}, \quad \alpha_{21}^{(s)} = \lambda\delta_2^{(s)}, \quad \alpha_{22}^{(s)} = \delta_1^{(s)}. \tag{11}$$

For the beginning, let be $s = 2$, with $x_1 = x$, $x_2 = y$ and the partial derivation operators

$$d^{(x)} = \delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2, \qquad d^{(y)} = \mu_1\varepsilon_1 + \mu_2\varepsilon_2. \tag{12}$$

Then the system (8) becomes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \delta_1 f_1 + \delta_2 f_2, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \lambda\delta_2 f_1 + \delta_1 f_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = \lambda\mu_2 f_1 + \mu_1 f_2. \end{cases} \tag{13}$$

a) For the complex algebra ($\lambda = -1$), the solutions of (13_1) are

$$(14)\qquad \begin{cases} f_1 = [C_1(y)\sin\delta_2 x + C_2(y)\cos\delta_2 x]\exp(\delta_1 x), \\ f_2 = [C_1(y)\cos\delta_2 x - C_2(y)\sin\delta_2 x]\exp(\delta_1 x). \end{cases}$$

After their substitution in each of Eqs. (13_2), it results two identical systems for $C_1(y)$ and $C_2(y)$, namely $\partial C_1/\partial y = \mu_1 C_1 - \mu_2 C_2$, $\partial C_2/\partial y = \mu_2 C_1 + \mu_1 C_2$, which lead to

$$(15)\qquad \begin{cases} C_1 = (K_1\cos\mu_2 y - K_2\sin\mu_2 y)\exp(\mu_1 y), \\ C_2 = (K_1\sin\mu_2 y + K_2\cos\mu_2 y)\exp(\mu_1 y), \end{cases}$$

where K_1 and K_2 are arbitrary constants.

Therefore, the system (13) being now compatible, the complex algebra is capable to represent symbolicaly functions of two (and in general many) variables. If (15) is introduced in (14), it follows that the elements of the basis correspond to

$$(16)\qquad \begin{cases} f_1(x,y) = [K_1\sin(\delta_2 x + \mu_2 y) + K_2\cos(\delta_2 x + \mu_2 y)]\exp(\delta_1 x + \mu_1 y), \\ f_2(x,y) = [K_1\cos(\delta_2 x + \mu_2 y) - K_2\sin(\delta_2 x + \mu_2 y)]\exp(\delta_1 x + \mu_1 y). \end{cases}$$

If we choose $K_1 = 1$, $K_2 = 0$, than the function (9) becomes here

$$(17)\qquad f(x,y) = [a_1\sin(\delta_2 x + \mu_2 y) + a_2\cos(\delta_2 x + \mu_2 y)]\exp(\delta_1 x + \mu_1 y).$$

With

$$(18)\qquad a_1 = A\cos\varphi, \qquad a_2 = A\sin\varphi,$$

the following correspondence take place:

$$(19)\qquad w = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 \longleftrightarrow A\exp(\delta_1 x + \mu_1 y)\sin(\delta_2 x + \mu_2 y + \varphi),$$

(in the frame of which to $\partial f/\partial x$ correspond the element $d^{(x)}w = (\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2)(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2) = (\delta_1 a_1 - \delta_2 a_2)\varepsilon_1 + (\delta_1 a_2 + \delta_2 a_1)\varepsilon_2$, and to $\partial f/\partial y$ — the element $d^{(y)}w$).

Following the same way, it is easy to obtain that the element (19_1) can represent symbolicaly the function of m variables

$$(20)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = A\exp\left(\sum_{s=1}^{m}\delta_s x_s\right)\sin\left[\left(\sum_{s=1}^{m}\omega_s x_s\right) + \varphi\right],$$

with the derivation operators (4), where $\delta_1^{(s)} = \delta_s$, $\delta_2^{(s)} = \omega_s$, $(s = 1, 2, \ldots, m)$.

b) For the dual algebra ($\lambda = 0$), the solutions of (13) are

$$(21)\qquad \begin{cases} f_1(x,y) = [K_1 + K_2(\delta_2 x + \mu_2 y)]\exp(\delta_1 x + \mu_1 y), \\ f_2(x,y) = K_2\exp(\delta_1 x + \mu_1 y). \end{cases}$$

By chosing $K_1 = 0$, $K_2 = 1$, the element (19_1), with $\varepsilon_2^2 = 0$, can represent symbolicaly the function

$$(22)\qquad f(x,y) = [a_1(\delta_2 x + \mu_2 y) + a_2]\exp(\delta_1 x + \mu_1 y),$$

with the partial derivation operators (12). In the same way it results also the correspondence between a dual number and

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \left[a_1\left(\sum_{s=1}^{m} \mu_s x_s\right) + a_2\right] \exp\left(\sum_{s=1}^{m} \delta_s x_s\right), \tag{23}$$

with the derivation operators (4), where $\delta_1^{(s)} = \delta_s$, $\delta_2^{(s)} = \mu_s$, $(s = 1, 2, ..., m)$.

4. As an example of a nonassociative algebra, let be the following one, with the multiplication table $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$.

By using (12), it results the system of equations $\partial f_1/\partial x = \delta_1 f_1 - \delta_2 f_2$, $\partial f_2/\partial x = \delta_2 f_1 - \delta_1 f_2$; $\partial f_1/\partial y = \mu_1 f_1 - \mu_2 f_2$, $\partial f_2/\partial y = \mu_2 f_1 - \mu_1 f_2$.

With the assumption $\delta_2 > \delta_1$, the solutions of the fist are

$$\begin{cases} f_1 = C_1 \cos\sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}\, x + C_2 \sin\sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}\, x, \\ f_2 = \dfrac{\delta_1 C_1 - \sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}\, C_2}{\delta_2} \cos\sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}\, x + \dfrac{\delta_1 C_2 + \sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}\, C_1}{\delta_2} \sin\sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}\, x. \end{cases}$$

Using them, the second system results in respectively $\partial C_1/\partial y = \pm MC_1 + NC_2$, $\partial C_2/\partial y = -NC_1 \pm MC_2$, where $M = \mu_1 - \mu_2\delta_1/\delta_2$, $N = \mu_2\sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}/\delta_2$.

The symbolic representation is obviously possible now only if $M = 0$, i. e. $\mu_1\delta_2 = \mu_2\delta_1$. In particular, if $\delta_1 = \mu_1 = 0$, the elements of the considered here nonassociative algebra represent symbolicaly the same functions (16), as the complex algebra (obviously, without exponential factor). The authers situations, $\delta_2 \leqslant \delta_1$, can be disscused in a similar way.

5. Let also be Sobrero's algebra, written in the basis used in [1]

(24)

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_2	ε_2	0	ε_4	0
ε_3	ε_3	ε_4	$-\varepsilon_1$	$-\varepsilon_2$
ε_4	ε_4	0	$-\varepsilon_2$	0

By proceeding in the same manner as in the other examples, we prouve the compatibility of (8) in this particular case, and we obtain

$$\begin{cases} f_1 = [(K_1\omega_2 - K_2\omega_4)\sin\omega_3 + K_3\sin\omega_3 + (K_1\omega_4 + K_2\omega_2)\cos\omega_3 + \\ \quad + K_4\cos\omega_3]\exp\omega_1, \\ f_2 = (K_1\sin\omega_3 + K_2\cos\omega_3)\exp\omega_1, \\ f_3 = [(-K_1\omega_4 + K_2\omega_2)\sin\omega_3 - K_4\sin\omega_3 + (K_1\omega_2 - K_2\omega_4)\cos\omega_3 + \\ \quad + K_3\cos\omega_3]\exp\omega_1, \\ f_4 = (-K_2\sin\omega_3 + K_1\cos\omega_3)\exp\omega_1, \end{cases} \tag{25}$$

where $K_1, ..., K_4$ are arbitrary constants and $\omega_i = \sum_{s=1}^{m} \delta_i^{(s)} x_s$, $(i = 1, ..., 4)$.

If we choose $K_1 = 1$, $K_2 = K_3 = K_4 = 0$ and write $\delta_1^{(s)} = \delta_s$, $\delta_2^{(s)} = \lambda_s$, $\delta_3^{(s)} = \omega_s$ and $\delta_4^{(s)} = 0$, $(s = 1, 2, ..., m)$, it results immediately that the element $w = \sum_{i=1}^{4} a_i \varepsilon_i$ of Sobrero's algebra (24) represents symbolicaly the function

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \left[a_1 \left(\sum_{s=1}^{m} \lambda_s x_s \right) \sin \left(\sum_{s=1}^{m} \omega_s x_s \right) + a_2 \sin \left(\sum_{s=1}^{m} \omega_s x_s \right) + \right.$$

(26)

$$\left. + a_3 \left(\sum_{s=1}^{m} \lambda_s x_s \right) \cos \left(\sum_{s=1}^{m} \omega_s x_s \right) + a_4 \cos \left(\sum_{s=1}^{m} \omega_s x_s \right) \right] \exp \left(\sum_{s=1}^{m} \delta_s \omega_s \right).$$

The partial derivation operators are now $d^{(s)} = \delta_s \varepsilon_1 + \lambda_s \varepsilon_2 + \omega_s \varepsilon_3$, $(s = 1, 2, ..., m)$.

Further developments of the here introduced symbolic representation will be presented in future.

Received the 23 II 1969

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Theoretical Mechanics

REFERENCES

1. Braier A., *La représentation symbolique des fonctions qui vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients constants.* Bul. Inst. polit Iași, 1965, **X** (**XV**), *3—4*, pp. 93—100.
2. — *Représentation symbolique des produits de fonctions.* Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII** (**XVI**), *3—4*, pp. 63—70.
3. — *Exponential Form of the Elements of some Algebras.* Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII** (**XVII**), *1—2*, pp. 115—122.
4. — *Composition of colinear Oscillations with Amplitude Modulation.* Bul. Inst. polit. Iași, 1968, **XIV** (**XVIII**), *1—2*, pp. 149—156.
5. — *The Use of Algebras on the Real Field in the Mechanics of Vibration.* Abstract of Doctoral Disertation, Polytehnic Institute, Jassy, 1968, 92 p. (in Romanian).

UN CALCUL SIMBOLIC CE UTILIZEAZĂ ALGEBRE PE CORPUL REAL

(Rezumat)

Se introduce o reprezentare simbolică a unor funcții reale de mai multe variabile prin elemente ale unor algebre pe corpul real. Un element (3_1) reprezintă simbolic funcția (1_1), dacă elementele (3_2) care corespund derivatelor sale parțiale (1_2) se obțin fiecare prin înmulțirea lui (3_1) cu cîte un element bine determinat și ales în algebră, (4), același pentru întreaga clasă de funcții; elementele (4) joacă rol de operatori de derivare parțială.

Se dau exemple în cadrul cărora se obțin funcțiile de mai multe variabile reprezentabile simbolic prin elemente ale algebrei complexe (20), algebrei duale (23) și ale algebrei lui Sobrero (26).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 530.12

SUR LES LOIS DE CONSERVATION DE LA PHYSIQUE

PAR

J. GOTTLIEB

En utilisant la formule de Gauss, les lois de conservation de la Physique conduisent aux équations qui ne sont pas covariantes aux transformations générales des coordonées. Dans la présente Note nous nous proposons d'établir des lois de conservation covariantes, au moins pour le cas des espaces caractérisées par le déplacement à distance d'Einstein [1].

Soit E_n un espace n-dimensionel qui possède n champs de vecteurs covariants $\overset{\alpha}{a}_i$ $(\alpha, i = 1,..., n)$, pour qui $|\overset{\alpha}{a}_i| = a \neq 0$. Dans ce cas il y aura n vecteurs contrevariants $\overset{\beta}{b}{}^k$ definis par

$$\overset{\alpha}{a}_i \overset{\alpha}{b}{}^k = \delta_i^k \quad \text{et} \quad \overset{\beta}{a}_i \overset{\beta}{b}{}^i = \delta_\alpha^\beta . \tag{1}$$

On peut définir le tenseur métrique g_{ik}, les coefficients de conexion Γ_{kl}^i et le tenseur de torsion $S_{.kl}^i$, comme il suit

$$\begin{cases} g_{ik} = \sum_\alpha \overset{\alpha}{a}_i \overset{\alpha}{a}_k ; \quad \Gamma_{kl}^i = \overset{\alpha}{b}{}^i \overset{\alpha}{a}_{k,l} = - \overset{\alpha}{b}{}^i_{,l} \overset{\alpha}{a}_k ; \\ S_{.kl}^i = \frac{1}{2} (\Gamma_{kl}^i - \Gamma_{lk}^i), \quad \text{où} \quad \overset{\alpha}{a}_{k,l} = \partial \overset{\alpha}{a}_k / \partial x^l . \end{cases} \tag{2}$$

Le tenseur de courbure exprimé à l'aide de ces coefficients de connexion est égal a zéro.

Soit V_i un champ vectoriel covariant et $P, P_0 \in E_n$. Le vecteur $V_i(P)$ peut se déplacer parallèlement en P_0, où ses composantes seront

$$V_k(P, P_0) = \overset{\alpha}{a}_k(P_0) \overset{\alpha}{b}{}^i(P) V_i(P). \tag{3}$$

En manière analogue nous obtenons pour un champ vectoriel contrevariant

$$V^k(P, P_0) = \overset{\alpha}{b}{}^k_{\alpha}(P_0)\, \overset{\alpha}{a}_i(P)\, V^i(P). \tag{4}$$

Dans le cas d'un déplacement parallèle d'un tenseur on applique les relations (3) et (4) pour chaque indice co-, respectivement contrevariant. Par exemple

$$V^{\cdot k}_{i}(P, P_0) = \overset{\alpha}{a}_i(P_0)\, \overset{\beta}{b}{}^k_{\beta}(P_0)\, \overset{\beta}{b}{}^j_{\alpha}(P)\, \overset{\beta}{a}_l(P)\, V^{\cdot l}_{j}(P). \tag{5}$$

Nous definirons [2]...[6] la *tenseur-intégrale* $\mathbf{I}$ de $V^{\cdot k}_{i}$ dans le domain n-dimensionel (D) et, de même, pour $U^{l\cdot k}_{\cdot i}$ sur la hypersurface $(n-1)$-dimensionelle (S), *dans le point* P_0 à l'aide des relations

$$W^{\cdot k}_{i}(P_0) = \mathbf{I}_{P_0}\, V^{\cdot k}_{i}\, \mathrm{d}v = \int_{(D)} V^{\cdot k}_{i}(P, P_0)\, \mathrm{d}v, \tag{6}$$

et

$$Y^{\cdot k}_{i}(P_0) = \mathbf{I}_{P_0}\, U^{l\cdot k}_{\cdot k}\, \mathrm{d}S_1 = \int_{(S)} (U^{l\cdot k}_{\cdot i}\, \mathrm{d}S_1)\, (P, P_0), \tag{7}$$

où $\mathrm{d}v = a\, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$ et $\mathrm{d}S_i = a\, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^{i-1}\, \mathrm{d}x^{i+1} \ldots \mathrm{d}x^n$. Le champ des grandeurs $W^{\cdot k}_{i}$, et $Y^{\cdot k}_{i}$, est un champ tensoriel. En effet, la relation (6) à l'aide de (5) peut s'écrire sous la forme

$$W^{\cdot k}_{i}(P_0) = \overset{\alpha}{a}_i(P_0)\, \overset{\beta}{b}{}^k_{\beta}(P_0) \int_{(D)} \overset{\beta}{b}{}^j_{\alpha}(P)\, \overset{\beta}{a}_l(P)\, V^{\cdot l}_{j}(P)\, \mathrm{d}v \tag{8}$$

et (7) devient

$$Y^{\cdot k}_{i}(P_0) = \overset{\alpha}{a}_i(P_0)\, \overset{\beta}{b}{}^k_{\beta}(P_0) \int_{(S)} \overset{\beta}{b}{}^j_{\alpha}(P)\, \overset{\beta}{a}_p(P)\, U^{l\cdot p}_{\cdot j}(P)\, \mathrm{d}S_1. \tag{9}$$

Dans ces expressions sous le symbole des intégrales habituelles il y a des expressions scalaires et devant celui-ci il y a des produits de composantes vectorielles.

Admettons maintenant que

$$V^{\cdot k}_{i} = \nabla_l T^{l\cdot k}_{\cdot i} = T^{l\cdot k}_{\cdot i,l} + \Gamma^{l}_{jl}\, T^{j\cdot k}_{\cdot i} - \Gamma^{j}_{il}\, T^{l\cdot k}_{\cdot j} + \Gamma^{k}_{jl}\, T^{l\cdot j}_{\cdot i}. \tag{10}$$

À l'aide des relations antérieures et du fait que $a\, \overset{\gamma}{b}{}^p\, \overset{\gamma}{a}_{p,h} = a_{,h}$, un calcul élémentaire nous conduit à

$$\int_{(S)} T^{l.k}_{.i}\, dS_l = \int_{(D)} (\nabla_l - 2S^j_{.lj})\, T^{l.k}_{.i}\, dv, \tag{11}$$

où (S) est la hypersurface qui délimite le domain (D).

Dans le cas d'une lois de conservation, le premier membre de la relation (11) s'annule pour n'importe quelle (S) et par conséquence on peut écrire

$$(\nabla_l - 2S^j_{.lj})\, T^{l.k}_{.i} = 0. \tag{12}$$

Les résultats obtenus jusqu'à présent peuvent être facilement élargis pour des tenseurs d'ordre arbitraire. Ainsi, dans le cas d'un espace E_n et, à l'aide de la tenseur-intégrale définie par (6) et (7), on obtient des lois de conservations covariantes aux transformations générales des coordonnées.

L'espace E_n ne possédant pas de courbure, doit être un espace à torsion ou euclidien. Ainsi, dans un espace euclidien avec coordonnées curvilignes, les lois de conservation auront la forme (12) avec $S^i_{.kl} = 0$, en concordance avec l'affirmation de K. P. Staniukovich et Z. S. Efimov [7].

Reçue le 21 VI 1968

Université „Al. I. Cuza", Jassy

BIBLIOGRAPHIE

1. Einstein A., *Zur einheitlichen Feldtheorie.* S. B. der Preuss. Akad., 1929, S. 1.
2. Fabian W., *Tensor Integrals.* Proc. of the Edinburgh Math. Soc., 1957, Ser. 2, **10**, p. 147.
3. Gottlieb J., *La tenseur-intégrale et quelq'unes de ses conséquences pour la Physique.* Preprint FT2, Universitatea din Timișoara, pp. 1 – 14.
4. Moór A., *Einführung des invarianten Differentials und Integrals in allgemeinen metrischen Räumen.* Acta Math., 1951, *86*, S. 71.
5. — *Über kovariante Ableitung und partielles Tensorintegral.* Monatshefte für Mathematik, 1966, *70*, S. 134.
6. Sasayama H., *On partial tensorial derivation of fractional order and multiple tensorial integration.* J. Spatial Math., Sasayama Rs. Room, 1960, *3*, p. 137.
7. Staniukovich K. P., Efimov Z. S., *Generalization of Variational Method for Curviliniar Coordinates of the Euclidian Space.* The Second Soviet Gravitational Conference, Tbilisi, 1965, p. 19.

ASUPRA LEGILOR DE CONSERVARE ÎN FIZICĂ

(Rezumat)

Pentru cazul spațiilor caracterizate de deplasarea la distanță a lui Einstein [1], autorul definește tensor-integrala I cu ajutorul relațiilor (6) și (7). Tensor-integrala unei mărimi tensoriale este la rîndul ei o mărime tensorială. Utilizînd tensor-integrala, teorema lui Gauss se generalizează sub forma (11) și conduce la legi de conservare covariante de forma (12).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

Д. К. 539.156

НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ЭНЕРГИИ СВЯЗИ ЭКСИТОНА В НЕКОТОРЫХ КРИСТАЛЛАХ

С. Г. РЫЖАНОВ

Здесь мы покажем, что нижний предел для энергии связи экситона в 0,01 эл-в. и ниже, что и имеет место у некоторых кристаллов [1], следует из методов нелинейной квантовой теории поля, а последние уже применялись нами к экситонам в ионных кристаллах [2].

Были попытки [3] объяснить столь малую энергию связи предполагая, что переход в это связанное состояние идёт не непосредственно, а через зону проводимости, из которой электрон сваливается на высокий уровень возбуждения экситона [3]. Однако такое объяснение оказалось неудовлетворительным по целому ряду причин. Верхний предел для энергии связи в 0,1 эл-в. [4] вытекает из формулы Мотта [5] будучи вполне совместимым с допустимыми значениями диэлектрической проницаемости. Объяснение-же нижнего предела её флуктуациями внутрикристаллического поля, каковое и предлагалось автором ранее [6], вряд-ли приемлемо, ввиду необходимости весьма больших флуктуаций поля (3.10^5 в/см.) требуемых для такой интерпретации.

Здесь даётся другое объяснение отталкивающееся от спаривательного взаимодействия электронов куперовской пары [7]. Оно объясняется многофононным взаимодействием электронов в кристаллической решётке и несомненно имеет поляризационный характер сводясь к взаимодействию через номальный фермиевский фон [8] у одноимянно-заряженных частиц, скажем у электронов куперовской пары такое взаимодействие сводится к силам притяжения, а у частиц заряженных разноимянно (электрон и дырка в экситоне) оно должно быть отталкиванием. Это-то отталкивание налагаясь на кулоновское притяжение и создаёт тот мелкий потенциальный колодец, который и должен обусловить тот весьма малый нижний предел энергии связи, о котором ранее шла речь.

Для количественного вычисления его параметров и применяются методы нелинейной квантовой электродинамики [9]. Нелинейное волновое уравнение, полагаемое в основу, вытекает из необходимости учёта поляризационного взаимодействия через нормальный фермиевский фон. Его потенциальная энергия очевидно пропорциональна плотности вероятности $\psi^*\psi$ местонахождения взаимодействующих частиц, например двух электронов с антипараллельными спинами в куперовской паре, или электрона и дырки в экситоне.

Рассматриваемая потенциальная энергия приобретает вид $\lambda\psi^*\psi$ что и даёт требуемый нелинейный член в волновом уравнении. Поскольку рассматриваемое взаимодействие — поляризационное, то оно и должно быть пропорциональным произведению квазизарядов взаимодействующих частиц взятому со знаком „минус", а не со знаком „плюс" как в законе Кулона.

Нелинейный член в волновом уравнении ведёт к многофононному взаимодействию, каковое имеет принципиально общие черты с многомезонным взаимодействием в буквальной нелинейной квантовой теории поля. Значит и в кристаллической решётке многофононное взаимодействие будет короткодействующим, его радиус действия есть радиус экранирования [10], а этот последний имеет тот-же порядок величины, что и минимальная длина дебройлевской волны электрона в нормальном фермиевском распределении. Тем самым радиус действия многофононного взаимодействия будет иметь порядок величины периода кристаллической рещётки. Для определения константы взаимодействия λ нужно обратится к спаривательному взаимодействию электронов в куперовской паре, выразив предварительно её через квазизаряды взаимодействующих частиц. Среднеквадратичный радиус этой пары имеет тот-же порядок величины, что и радиус действия рассматривавшегося взаимодействия, а это спаривательное взаимодействие должно не только скомпенсировать кулоновское отталкивание но в добавок и дать мелкий потенциальный колодец, обуславливающий весьма малую энергию связи куперовской пары.

Для разноимянно заряженных частиц, электрон и дырка в куперовской паре-экситоне получается вполне правильный порядок величины энергии связи на нижней границы.

Большой разброс этой последней в различных кристаллах можно объяснить наличием или отсутствием локальных уровней, прилегающих к нижнему краю запрещённой полосы находящихся в этой полосе.

Поступила 20 I 1968

Кишиневский Университет,
Кишинёв, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Броудэ В. Л., Прихотько А. Ф., Рашба Э. И., *Люминесценция света в кристаллах.* УФН, 1959, *67*, стр. 99.
2. Рыжанов С. Г., Оптика и спектроскопия, 1964, *17*, стр. 294.

3. Гросс Е. Ф., *Экситон и его движение в кристаллически решётке.* УФН., 1962, *76*, стр. 433.
4. Рыжанов С. Г., Журн. эксперим. и теорет. физики. 1945, *15* стр. 108.
5. Мотт Н., Герни Р., *Электронные процессы в ионных кристаллах.* 1950, стр. 107.
6. Рыжанов С. Г., Журн. научн. и прикл. фотографии и кинематограф., 1958, *3*, стр. 3.
7. Займан Дж., *Принципы теории твердого тела.* МИР, 1966.
8. Мигдал А. Б., *Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер.* Изд-во „Наука", 1965, стр. 304.
9. Гейзенберг В., *Модель Ли и квантование нелинейных уравнений поля.* Сб. ст. „Нелинейная кантовая теория поля", 1959, ИЛ, Москва, стр. 175—220.
10. Займан Дж., *Принципы теории твердого тела.* МИР, 1966, стр. 162.

LIMITA INFERIOARĂ A ENERGIEI DE LEGĂTURĂ A EXCITONULUI ÎN UNELE CRISTALE

(Rezumat)

Se arată că limita inferioară pentru energia de legătură a excitonului, sub 0,01 eV, care se întîlnește la unele cristale, rezultă prin metodele teoriei cuantice neliniare a cîmpului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. D. 538.4:512

LE COUPLAGE DES ONDES MONOCHROMATIQUES DANS LE MODÈLE ÉLASTOHYDRODYNAMIQUE

PAR

D. ZOLER et R. V. DEUTSCH

Introduction

L'étude de certains problèmes de magnétohydrodynamique impose la construction de modèles qui permettent de poursuivre plus facilement les phénomènes du plasma. Un tel modèle est proposé dans [1]. Dans un récipient rectangulaire il y a un liquide dans lequel on a disposé des bandes très minces de caoutchouc pour lui conférer des propriétés élastiques. C'est l'élastohydrodynamique qui étudie ce système. La manière de propagation d'une perturbation dans un tel liquide modelle la transmission dans le plasma de l'onde Alfvén et des ondes magnétoacoustiques lentes et rapides. Dans [2] on étudie la propagation des ondes élastohydrodynamiques faibles dans un milieu incompressible, et dans [3], la même question pour le cas des milieux compressibles.

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier le couplage des ondes élastohydrodynamiques monochromatiques.

1. L'exposé de la méthode

Nous utiliserons le procédé de [4] et [5]. Nous allons considérer une onde monochromatique, ayant la forme :

$$f = f^0 \, e^{-i(\omega t - kx)}, \tag{1.1}$$

qui se propage dans un milieu compressible. Les lignes de force du vecteur de champ $\mathbf{B}\,(B_x, B_y, O)$ se trouvent dans des plans parallèles au plan xOy; la variation de la densité se produit seulement dans la direction Ox. L'axe Ox est dirigée en direction de la normale à la discontinuité. Un tel système est décrit par les équations diférentielles déduites en [3]. Pour le cas de la propagation d'une onde monochromatique, le système devient

$$
(1.2)\qquad \begin{cases} -\omega u_x + \dfrac{k}{\rho} p' + \dfrac{ka^2}{B} \sin\theta \cos^2\theta\, b_y = 0, \\ -\omega u_y - \dfrac{ka^2}{B} \cos^3\theta\, b_y = 0, \\ -\omega b_y + kB_y u_x - kB_x u_y = 0, \\ -\omega \rho' + k\rho u_x = 0, \\ -\omega p' + \omega v_0^2 \rho = 0 \end{cases}
$$

où

$$
(1.3)\qquad a = \sqrt{\frac{TB}{\rho}}
$$

est une constante élastohydrodynamique, T est la tension des fils qui modellent les tubes de forces dans le plasma, θ — l'angle de **B** avec l'axe Ox, ρ — la densité du liquide. Avec p', ρ', b_y nous avons noté les portions oscillatoires de la pression, de la densité et du champ dans le liquide et **u** (u_x, u_y, u_z) représente la vitesse d'un élément de liquide. Le milieu n'est pas homogène pour les ondes qui modellent les ondes magnétoacoustiques, se produisant des phénomènes de réflexion et génération. Nous étudierons ces phénomènes en utilisant le procédé exposé dans [3], [4]. L'expression:

$$
(1.4)\qquad E_z = B_y U_x - B_x U_y
$$

correspond à la perturbation du champ éléctrique dans la magnétohydrodynamique. Nous allons assembler les perturbations dans le quadrivecteur

$$
(1.5)\qquad K = \begin{Vmatrix} A \\ p' \\ E_z \\ b_y \end{Vmatrix},
$$

où $A = \rho u_x$ est le flux de masse. Dans [2] on a montré que pour un milieu incompressible l'onde obtenue modelle au moins l'onde Alfvén, avec la distinction que dans l'expression de la vitesse de l'onde intervient le facteur $\cos^2\theta$, qui modifie en quelque sorte le hodografe de la vitesse et d'une manière appréciable les diagrammes Friederichs. Cette modification a lieu aussi dans l'expression des vitesse de phase des ondes qui modellent les ondes magnétoacoustiques lentes et rapides. Parce que dans le système considéré les ondes se propagent aussi bien dans la direction Ox que dans le sens contaire, l'oscillation résultante sera le résultat de la composition de quatre ondes. Pour caractériser l'onde monochromatique, nous pouvons utiliser n'importe quelle des composantes de K. Nous avons choisi la composante A (le flux de masse). La fonction d'onde résultante sera alors:

$$A = A_1^+ + A_2^+ + A_1^- + A_2^- \tag{1.6}$$

où avec l'indice „+" nous avons noté le flux de masse de l'onde qui modelle l'onde magnétoacoustique rapide et avec „−" le flux pour l'onde lente, avec 1 le flux de masse dirigé vers Ox et avec 2 le flux dans la direction $-Ox$. En utilisant ces fonctions d'onde nous écrivons le quadrivecteur

$$\mathcal{L} = \begin{Vmatrix} A_1^+ \\ A_2^+ \\ A_1^- \\ A_2^- \end{Vmatrix} . \tag{1.7}$$

De la même manière nous pouvons écrire pour les autres composantes de K

$$\begin{cases} p' = p_1'^+ + p_2'^+ + p_1'^- + p_2'^- , \\ E_z = E_{z1}^+ + E_{z2}^+ + E_{z1}^- + E_{z2}^- , \\ b_y = b_{y1}^+ + b_{y2}^+ + b_{y1}^- + b_{y2}^- . \end{cases} \tag{1.8}$$

À l'aide du système (1.5) on peut obtenir que

$$K = \hat{Y}\mathcal{L}, \tag{1.9}$$

où par $\hat{Y}$ nous entendons une matrice à quatre lignes et quatre colonnes. Dans [3], [4] on montre que le quadrivecteur K satisfait à une équation diférentielle ayant la forme :

$$\frac{\partial K}{\partial x} = -i\omega \hat{P} F, \tag{1.10}$$

où par $\hat{P}$ nous entendons une matrice à quatre lignes et quatre colonnes. En remplaçant (1.9) en (1.10), nous trouvons l'équation

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + i\omega \hat{Y}^{-1} \hat{P} Y \mathcal{L} = -\hat{Y}^{-1} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x} \mathcal{L}. \tag{1.11}$$

La matrice

$$M = -Y^{-1} \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{1.12}$$

s'appelle „matrice de couplage" et elle caractérise les phénomènes de transformation des ondes qui modellent les ondes magnétoacoustiques les unes dans les autres. Nous allons étudier le problème de la transformation réciproque des ondes dans les trois cas possibles : 1) $U \gg v_0$, 2) $U \ll v_0$, 3) $U \approx v_0$, où avec U nous avons noté la vitesse qui modelle la vittesse Alfvén ($U = a \cos^2 \theta$).

2. La transformation réciproque des ondes dans le cas $U \gg v_0$

Par v_0 nous entendons la vitesse du son dans le milieu élastique. Pour cette aproximation, les vitesses de phase des ondes qui modellent les ondes magnétoacoustique seront :

$$v_+ = a\cos\theta, \quad v_- = v_0\cos\theta. \tag{2.1}$$

a) pour commencer, nous allons considérer que dans le milieu élastique se propage seulement l'onde qui modelle l'onde magnétoacoustique rapide, c'est-à-dire, le quadrivecteur $\mathcal{L}$ aura à $t = 0$ la forme :

$$\mathcal{L} = \begin{Vmatrix} A_1^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}. \tag{2.2}$$

En ce cas, les équations qui décrivent la transformation réciproque des ondes (voir [3] la formule (3) et [2] la formule (4.3.1)) auront la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_1^+}{\partial x} - i\dfrac{\omega}{C}n_+ A_1^+ = A_1^+ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln\dfrac{\sin\theta\cos^{1/2}\theta}{a^{3/2}}\right), & (\alpha) \\ \dfrac{\partial A_2^+}{\partial x} + i\dfrac{\omega}{C}n_+ A_2^+ = \dfrac{1}{2}A_1^+ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln\dfrac{1}{a\cos\theta}\right), & (\beta) \\ \dfrac{\partial A_1^-}{\partial x} - i\dfrac{\omega}{C}n_- A_1^- = \dfrac{1}{2}A_1^+ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln\dfrac{a^2}{\sin\theta}\right), & (\gamma) \\ \dfrac{\partial A_2^-}{\partial x} + i\dfrac{\omega}{C}n_- A_2^- = \dfrac{1}{2}A_1^+ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln\dfrac{a^2}{\sin\theta}\right). & (\delta) \end{cases} \tag{2.3}$$

où n_+ est l'indice de réfraction pour les ondes qui modellent les ondes rapides, n_- pour les ondes lentes. Dans le second membre de ces équations nous avons les éléments de $\hat{M}$ qui caractérise la transformation. L'équation (α) du système (2.3) montre de quelle manière varie l'amplitude de l'onde qui modelle l'onde rapide. L'équation (β) indique que nous obtenons une onde rapide réfléchie, quand

$$a\cos\theta \neq \text{const.}, \tag{2.4}$$

c'est-à-dire, quand la vitesse de phase de l'onde varie avec Ox. Les équations (γ) et (δ) du système (2.3) montrent qu'il y a la possibilité de génération des ondes lentes ; dans ce cas

$$\frac{a^2}{\sin\theta} \neq \text{const.} \tag{2.5}$$

La somme de tous les membres droits des équations (2.3) est égale à zéro, c'est-à-dire la perte d'amplitude relevée par l'équation (α) est égale en valeur absolue à la somme des amplitude des ondes générées et de l'onde réfléchie.

b) Soit maintenent une onde qui modelle l'onde lente qui se propage dans le milieu élastique; alors le quadrivecteur peut être écrit:

$$\mathcal{L} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ A_1^- \\ 0 \end{Vmatrix}. \tag{2.6}$$

Les équations qui décrivent la transformation à l'aide des éléments de la matrice $\hat{M}$, deviennent:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_1^+}{\partial x} - \mathrm{i}\dfrac{\omega}{C} n_+ A_1^+ = 0, & (\alpha') \\ \dfrac{\partial A_2^+}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\omega}{C} n_+ A_2^+ = 0, & (\beta') \\ \dfrac{\partial A_1^-}{\partial x} - \mathrm{i}\dfrac{\omega}{C} n_- A_1^- = -\dfrac{A_1^-}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln\dfrac{v_0}{\cos\theta}\right), & (\gamma') \\ \dfrac{\partial A_2^-}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\omega}{C} n_- A_2^- = \dfrac{A_1^-}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln\dfrac{v_0}{\cos\theta}\right). & (\delta') \end{cases} \tag{2.7}$$

Les éléments de la matrice $\hat{M}$ ont été obtenus en ce cas, comme auparavant, en nègligeant les termes qui contiennent $v_0/(a\cos^2\theta)$, ou les puissances de cette quantité. Dans cette approximation les équations (α'), (β') de (2.7) montrent que nous n'obtiendrons des ondes rapides générées. Par contre, l'équation (δ') montre que, dans le cas où

$$\frac{v_0}{\cos\theta} \neq \text{const.},$$

nous allons obtenir une onde lente réfléchie, dont l'amplitude est égale à la perte d'amplitude de l'onde incidente. Si nous considérons dans le milieu élastique une surface de discontinuité sur laquelle les caractéristiques du milieu varient brusquement, les formules (2.14) de [4] et (3.4) de [3] nous permettent de calculer les amplitudes de l'onde incidente. En outre, nous pouvons apprécier si dans ce cas se produit une transformation de phase dans le proces de réflexion ou de génération. En même temps, on peut calculer les amplitudes des ondes réfléchies et générées et de l'onde incidente.

3. La transformation des ondes dans le cas $U \ll v_0$

Si le champ du vecteur **B** est faible, les vitesse de phase des ondes qui modellent les ondes magnéotacoustiques rapides et lentes seront

$$v_+ = v_0 , \qquad v_- = a \cos^2 \theta . \tag{3.1}$$

a) Nous considérons que l'onde incidente est celle qui modelle l'onde magnétoacoustique rapide. Alors les éléments de la matrice $\hat{M}$, nécessaires pour l'etude du phénomène de transformation réciproque sont: M_{11}, M_{21}, M_{31}, M_{41}. On peut obtenir la matrice $\hat{M}$ à l'aide des matrices $\hat{Y}$ et $\hat{Y}^{-1}$ qui à leur tour peuvent être calculées en utilisant l'expression (3.1) des vitesse de phase et le fait que le rapport $a \cos^2 \theta / v_0$ est du premier ordre. En ce cas les équations qui décrivent les processus de génération et de réflexion sont:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_1^+}{\partial x} - i \dfrac{\omega}{C} n_+ A_1^+ = -\dfrac{A_1^+}{2} \dfrac{\partial}{\partial x} (\ln v_0), & (\alpha) \\ \dfrac{\partial A_2^+}{\partial x} + i \dfrac{\omega}{C} n_+ A_2^+ = \dfrac{A_1^+}{2} \dfrac{\partial}{\partial x} (\ln v_0), & (\beta) \\ \dfrac{\partial A_1^-}{\partial x} - i \dfrac{\omega}{C} n_- A_1^- = 0, & (\gamma) \\ \dfrac{\partial A_2^-}{\partial x} + i \dfrac{\omega}{C} n_- A_2^- = 0. & (\delta) \end{cases} \tag{3.2}$$

Des équations (α), (β) du système (3.2) on peut voir que l'amplitude de l'onde incidente va subir des changements si la vitesse du son v_0 dans le milieu élastique est fonction de la coordonnée. La perte d'amplitude a lieu en faveur de l'onde réfléchie. Si la vitesse du son est constante, l'amplitude de l'onde ne subira aucun changement. Les équations (γ), (δ) du système (3.2) nous montrent l'absence des ondes lentes générées.

b) Considérons maintenant le cas ou dans le milieu élastique a pénétrée une onde lente qui se propage dans le fluide. Alors, après avoir calculé les coéficients M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{34} nous trouvons le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_1^+}{\partial x} - i \dfrac{\omega}{C} n_+ A_1^+ = \dfrac{A_1^-}{2} \left[\dfrac{\partial}{\partial x} \left(\ln \dfrac{v_0^2}{\sin \theta \cos^2 \theta} \right) + \dfrac{v_0}{a \cos^2 \theta} \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\ln \dfrac{1}{a \sin \theta \cos^2 \theta} \right) \right] (\alpha') \\ \dfrac{\partial A_2^+}{\partial x} + i \dfrac{\omega}{C} n_+ A_2^+ = \dfrac{A_1^-}{2} \left[\dfrac{\partial}{\partial x} \left(\ln \dfrac{v_0^2}{\sin \theta \cos^2 \theta} \right) + \dfrac{v_0}{a \cos^2 \theta} \dfrac{\partial}{\partial x} (\ln a \sin \theta \cos^2 \theta) \right] (\beta') \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_1^-}{\partial x} - i\,\dfrac{\omega}{C} n_- A_1^- = -\dfrac{A_1^-}{2}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln \dfrac{v_0^4}{a \sin^2\theta \cos^6\theta}\right)\right], & (\gamma') \\ \dfrac{\partial A_2^-}{\partial x} + i\,\dfrac{\omega}{C} n_- A_2^- = -\dfrac{A_2^-}{2}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(\ln a \cos^2\theta)\right]. & (\delta') \end{cases}$$

Les équations (α'), (β') de (3.3) indiquent la posibilité de génération d'ondes rapides pendant la propagation de l'onde lente dans le milieu élastique compressible. Pourtant, les ondes rapides n'apparaîtront plus si

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{v_0^2}{\sin\theta \cos^2\theta} = \text{const.}, \\ \dfrac{1}{a \sin\theta \cos^2\theta} = \text{const.} \end{cases}$$

L'équation (δ') montre que des ondes lentes réfléchie peuvent apparaître si la vitesse des ondes modellant les ondes Alfvén n'est pas constante.

En additionnant les membres droits des équations (α'), (β'), (δ') on peut constater que l'amplitude totale des ondes réfléchies et générées est égale à la perte d'amplitude, relevée par l'equation (γ') du système (3.3). En ce cas, nous pouvons considérer aussi le comportement des ondes sur des surfaces de discontinuité, les résultats étant en concordance avec ceux obtenues en [4]. En outre, comme dans le paragraphe antérieur, on ne peut pas remarquer des changements de phase dans le processus de génération et de réflexion.

4. Le cas $v_0 \approx U$

Les vitesse qui modellent les vitesse de phase des ondes magnétoacoustique auront en ce cas les expressions:

$$(4.1) \quad v_+ = \frac{a\cos\theta}{2}(\sqrt{1 + 3\cos^2\theta} + \sin\theta), \quad v_- = \frac{a\cos\theta}{2}(\sqrt{1 + 3\cos^2\theta} - \sin\theta).$$

En utilisant ces expressions nous pouvons calculer les composantes du tenseur $\hat{M}$, qui permet le couplage des ondes. Le calcul est simple, mais laborieux. On peut observer que toutes les composantes du tenseur ont le même ordre de grandeur. Par conséquant, la transformation des ondes dans un sens ou dans l'autre, en ce qui concerne l'amplitude, ne présente aucune différence. Donc, passant par un milieu compressible qui peut avoir aussi des surfaces de discontinuité, les amplitudes tendront vers une valeur constante, c'est-à-dire

$$(4.2) \qquad \hat{M}\mathcal{L} = 0.$$

L'equation (4.2) aura des solutions nontriviales si le déterminant $|M|$ de la matrice $\hat{M}$ s'annule. Des calculs simples nous montrent que le déter-

minant $|M|$ s'annule identiquement. En résolvant le système, nous obtiendrons aussi :

$$A_1^+ = A_2^+ = A_1^- = A_2^- , \tag{4.3}$$

c'est-à-dire, quand la vitesse qui modelle la vitesse Alfvén dans des milieu compressibles est égale à la vitesse du son dans ce milieu, les ondes magnétoacoustiques auront des amplitude à peu près égales. Dans le premier cas étudié, quand la vitesse du son dans le milieu $v_0 \ll a \cos^2 \theta$, on peut observer une plus grande s'abilité des ondes lentes, la génération des ondes rapides se produisant très lentement. Dans le cas contraire, quand $a \cos^2 \theta \ll v_0$, a lieu un phénomène inverse, l'onde rapide etant plus stabile, sur la nonhomogénéité se produisant une génération d'ondes rapides. On peut observer que l'onde dont les propriétes sont plus proches de celles de l'onde sonore a une plus grande stabilité.

Reçue le 14 I 69

Académie de la République Socialiste de Roumanie, Filiale de Jassy
et
Institut Polytechnique, Jassy, Chaire de Physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Iwan L. S., AIAA Journal, 1965, *3*, p. 860.
2. Deutsch R. V., *Teoria magnetohidrodinamică în fizica plasmei*. Ed. Acad. R. S. R., Buc., 1966.
3. — Rev. roum. de physique, 1966, **8**, p. 711.
4. Poverlein H., Phys. Rev., 1964, **136**, *6A*, p. 1605.
5. Deutsch R. V., Zoler D., *Transformations réciproques des ondes magnétoacoustiques dans des millieux nonhomogènes plans*. Plasma Physics (sous presse).

CUPLAJUL UNDELOR MONOCROMATICE ÎN MODELUL ELASTOHIDRODINAMIC

(Rezumat)

Propagarea unei perturbaţii într-un lichid în care se află fişii foarte subţiri de cauciuc modelează transmisia în plasmă a undelor Alfvén şi a undelor magnetoacustice lente şi rapide. În articol se studiază amănunţit cuplajul undelor elastohidrodinamice monocromatice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

C. Z. 536.63

CERCETAREA CĂLDURILOR SPECIFICE LA FERITE PE INTERVALE MARI DE TEMPERATURĂ (INCLUZÎND PUNCTUL CURIE) PRIN COMPARAREA CURBELOR DE RĂCIRE

DE
V. PETRESCU, P. POGÎNGEANU şi M. CREŢU

1. Introducere

Studierea parametrilor termici şi în particular a căldurilor specifice pe intervale largi de temperatură [5], [6] în afara cunoaşterii valorilor acestor parametri, urmăreşte uneori explicarea unor particularităţi locale ca mărturie a unor transformări structurale ale substanţei. În particular acesta este cazul punctului Curie la corpurile magnetice.

Metodele calorimetrice de determinare punct cu punct a variaţiei căldurilor specifice cu temperatura sînt foarte laborioase şi de durată. Mult mai simplă şi mai expeditivă este metoda comparării curbelor de răcire, folosită de noi şi adaptată pentru trasarea automată prin fotografiere a curbelor de răcire.

2. Principiul metodei

Notaţii şi simboluri principale folosite: α — coeficientul de schimb de căldură (cal/cm^2. s.°C); T_s — temperatura de suprafaţă a corpului (°C); S — suprafaţa corpului (cm^2); C — căldura specifică instantanee a corpului (cal/g. °C); ρ — densitatea corpului (g/cm^3); $\frac{\partial T}{\partial t}$ — viteza de răcire a corpului (°C/s); V — volumul corpului (cm^3).

Viteza de răcire a unui corp depinzînd de căldura specifică a materialului, prin compararea curbelor de răcire a două corpuri (probă şi etalon) se poate determina şi căldura specifică necunoscută, pentru temperaturi cuprinse în domeniul temperaturilor de răcire.

Bilanțul termic la răcirea unui corp se poate exprima prin relația

$$\int_0^S \alpha T_s \, dS = -\int_0^V C \rho \frac{\partial T}{\partial t} \, dV, \tag{1}$$

care se mai poate scrie

$$\alpha S \frac{1}{S} \int_0^S T_s \, dS = - C \rho V \frac{1}{V} \int_0^V \frac{\partial T}{\partial t} \, dV, \tag{2}$$

în care mărimile

$$\overline{T}_s = \frac{1}{S} \int_0^S T_s \, dS \quad \text{și} \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \frac{1}{V} \int_0^V \frac{\partial T}{\partial t} \, dV$$

sînt temperatura medie la suprafața corpului respectiv viteza de răcire medie în volum a corpului. Astfel ecuația (2) devine

$$\alpha S \overline{T}_s = - C \rho V \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}. \tag{3}$$

Vom scrie în continuare ecuația (3) pentru corpul probă (indice 1) și pentru corpul considerat etalon (indice 2)

$$\begin{cases} \alpha_1 S_1 \overline{T}_{s1} = - C_1 \rho_1 V_1 \left(\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t} \right)_1, \\ \alpha_2 S_2 \overline{T}_{s2} = - C_2 \rho_2 V_2 \left(\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t} \right)_2. \end{cases} \tag{4}$$

Dacă corpurile probă și etalon care se compară sînt de aceleași dimensiuni $V_1 = V_2$, $S_1 = S_2$ și prin raportarea ecuațiilor (4) se obține

$$C_1 = C_2 \frac{\rho_2 \alpha_1 \overline{T}_{s1} \left(\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t} \right)_2}{\rho_1 \alpha_2 \overline{T}_{s2} \left(\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial t} \right)_1}. \tag{5}$$

Relația de calcul (5) se simplifică mult dacă se au în vedere următoarele ipoteze: a) — temperatura medie la suprafața corpului, cît și cea din volumul său se pot înlocui cu temperaturi singulare, ușor măsurabile, fără ca eroarea relativă a măsurării să depășească 0,3 % [1]; b) — egalitatea tem-

peraturilor medii de suprafaţă $T_{s1} = T_{s2}$ şi a coeficienţilor de schimb de căldură $\alpha_1 = \alpha_2$, se poate realiza experimental prin acoperirea suprafeţelor celor două corpuri cu aceiaşi substanţă.

Cu simplificările de mai sus relaţia finală de calcul devine

$$C_1 = C_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}\right)_2}{\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}\right)_1}, \tag{6}$$

în care vitezele de răcire ale celor două corpuri se vor determina prin derivarea grafică a curbelor de răcire obţinute experimental.

3. Instalaţia şi procedeul experimental

Instalaţia de măsurare folosită de noi constă din trei părţi distincte: cuptorul de încălzire a feritei *C*, dispozitivul de înregistrare fotografică *D*. In. şi sistemul optic de iluminare, conectate într-o schemă electrică de alimentare. Cuptoraşul *C* (fig. 1) este alcătuit din doi cilindri refractari de pirolan (*4*) pe care se află două înfăşurări (*5*) din conductor rezistiv CrNi cu diametrul de 0,4 mm. Capătul inferior al cuptoraşului este închis prin coroana (*10*) din asbociment, iar cel superior se închide complet prin ansamblul de plăci (*14*) din acelaşi material. În plus în partea superioară este prevăzut mînerul (*15*) din ebonită pentru ridicare de pe vatra de ardezie (*12*). Mişcarea de ridicare strict axială este asigurată de tijele metalice de ghidaj (*9*) fixate de vatră şi de inelul de ghidaj (*6*). Pentru limitarea pierderilor de căldură, spaţiile libere sînt umplute cu termoizolant — şnur de asbest.

Proba (*2*) este susţinută în interiorul cuptoraşului de către tubul capilar de sticlă (*3*) introdus prin orificiul axial al probei. În interiorul capilarului este introdus şi termocuplul (*1*) pentru măsurarea temperaturii probei. Capetele termocuplului (*1*) sînt legate în serie cu microampermetrul μA, iar ansamblul lor, prin intermediul inversorului *I*, închide circuitul galvanometrului cu oglindă G tip *M*21/2, şuntat puternic de rezistenţa de precizie R_3.

Microampermetrul μA cu rezistenţa internă de 36 Ω serveşte la etalonarea ordonatei — axa timpului — la care se raportează curba de răcire înregistrată fotografic, întrucît indicaţiile sale au fost în prealabil comparate cu o serie de temperaturi de referinţă strict constante (punctul de fierbere al apei, punctele de topire ale Sn şi Pb, luate ca repere naturale). Termocuplul Fe-Const. folosit de noi are o rezistenţă internă de 45 Ω.

Dispozitivul de înregistrare D. In. se compune dintr-un tambur cilindric pe lagăre cu rulmenţi, unde se înfăşoară hîrtia sau pelicula fotosensibilă, introdus într-o cutie obscură prevăzută cu o fantă paralelă cu generatoarea tamburului. Rotirea strict sincronă a tamburului cu hîrtia fotogra-

fică, este efectuată de către un mecanism de ceasornic. Fascicolul luminos convergent produs de către sistemul optic de iluminare S.O. reflectat de oglinda galvanometrului pătrunde prin fanta cutiei obscure impresionînd hîrtia fotografică înfășurată pe tambur.

Temperatura din cuptor poate fi reglată prin intermediul reostatului Rh, iar curentul absorbit de încălzitor este indicat de către ampermetrul A.

Întrucît curbele de răcire cuprind plaja de temperaturi ce trec dincolo de punctul Curie, acesta s-a determinat experimental cu dispozitivul din fig. 2.

În ansamblu acesta constituie un transformator cu miez magnetic deschis (proba de ferită) (*2*), înfășurarea de încălzire (*5*) din Cr Ni fiind primarul iar înfășurarea de Cu (*6*) de circa 310 spire, secundarul. Cum valoarea permeabilității miezului de ferită scade cu creșterea temperaturii (măsurată de către termocuplul *1* și microampermetrul μA) se va micșora și t.e.m. indusă în secundar și deci și curentul redresat de dioda D. După punctul Curie ferita devine paramagnetică și μ este constant, rămînînd astfel constant și curentul indicat de miliampermetrul mA (fig. 3). Tensiunea de alimentare a primarului s-a menținut constantă prin intermediul unui stabilizator ferorezonant nefigurat în desen.

Prin acest procedeu experimental s-a trasat diagrama din fig. 3, găsindu-se pentru eșantionul de ferită studiat valoarea de circa 268°C ca punct Curie.

Cele două probe din Cu și ferită s-au acoperit cu crom, prin depunere în vid, pentru a egaliza astfel coeficienții de schimb de căldură. Inițial s-au făcut măsurători pentru proba de cupru tehnic pur pentru care curba căldurilor specifice este cunoscută (fig. 4). Pe hîrtia fotosensibilă înfășurată pe tambur s-au trasat axele de coordonate astfel: cu spotul galvanometrului reglat la mijlocul fantei, s-a efectuat o rotație completă a tamburului creind astfel prin impresionare axa timpului (abscisa) apoi cu ceasornicul oprit, prin încălzirea cuptorului spotul galvanometrului a efectuat o cursă spre unul din capetele fantei și prin comutarea inversorului *I* (fig. 1) se efectua aceiași cursă spre capătul celălalt impresionînd hîrtia fotografică pe întreaga lungime a fantei (axa ordonatelor sau a temperaturilor).

Pe o jumătate a filmului s-au înregistrat curbele de încălzire răcire a cuprului după care schimbînd proba cu cea de ferită și comutînd inversorul *I* s-au înregistrat pe cealaltă jumătate curbele de încălzile răcire a feritei. Rezultatul acestor înregistrări este prezentat în fotografia din text.

Prin derivarea grafică a curbelor de răcire pentru cupru și ferită, înregistrate prin fotografiere s-au determinat vitezele de răcire în volum pentru intervale de temperaturi de 16°C. Sau calculat apoi temperaturile medii iar din curba căldurilor specifice ale cuprului (fig. 4) cunoscută anterior s-au dedus căldurile specifice ale eșantionului de cupru tehnic pur (tabelul 1). Cunoscînd raportul densităților cuprului și feritei precum și valorile vitezelor de răcire, s-au calculat cu formula (6) căldurile specifice pentru eșantionul de ferită (tabelul 1).

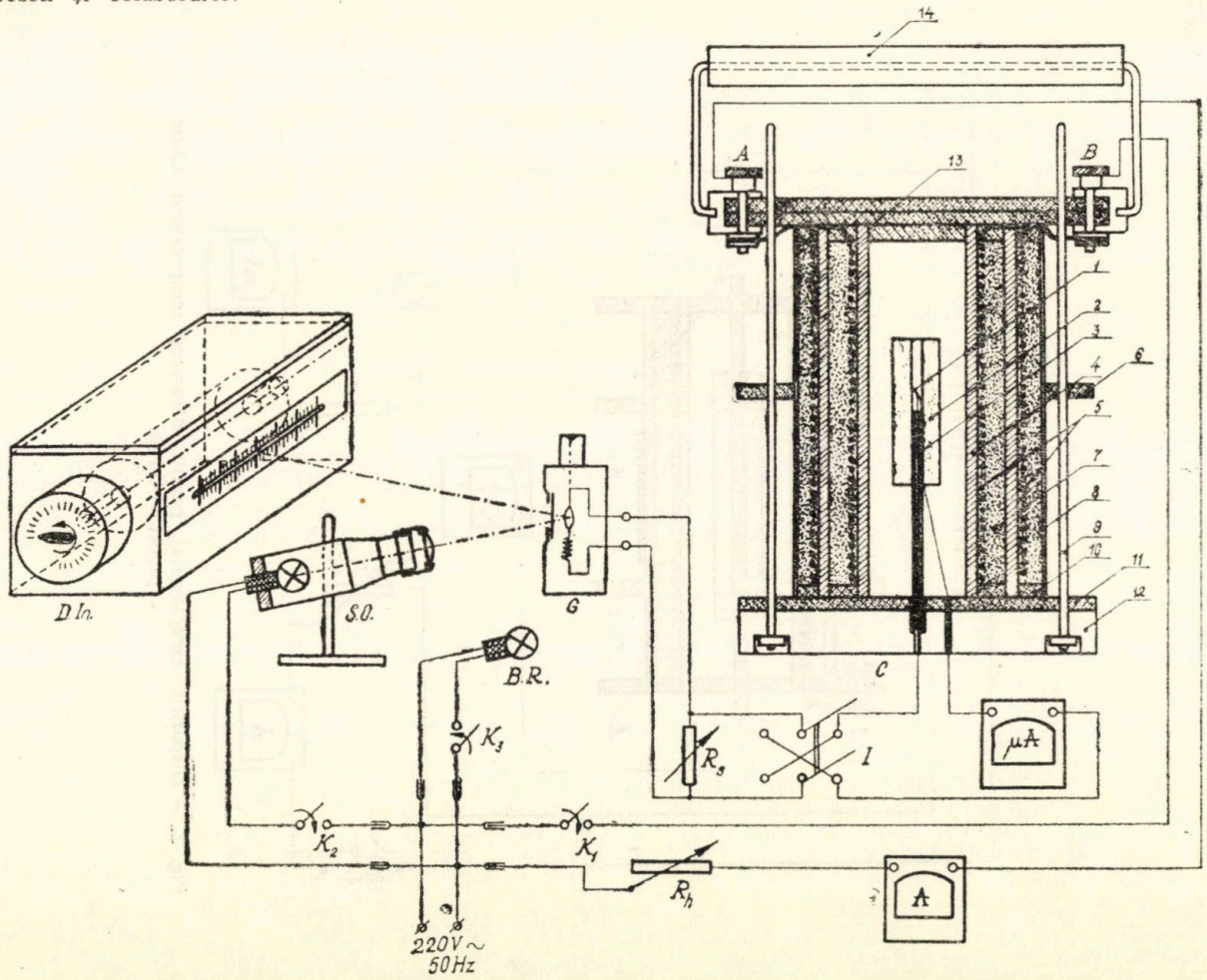


Fig. 1. — Instalație pentru trasarea curbelor de răcire ale corpului etalon și probei de ferită.

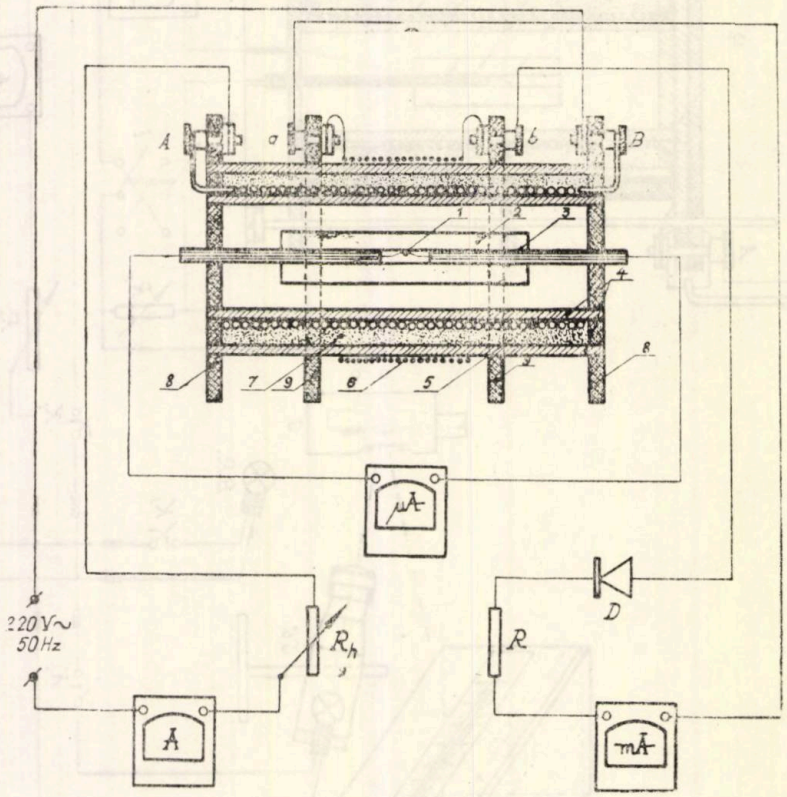


Fig. 2. — Dispozitiv experimental pentru măsurarea temperaturii Curie a probei de ferită.

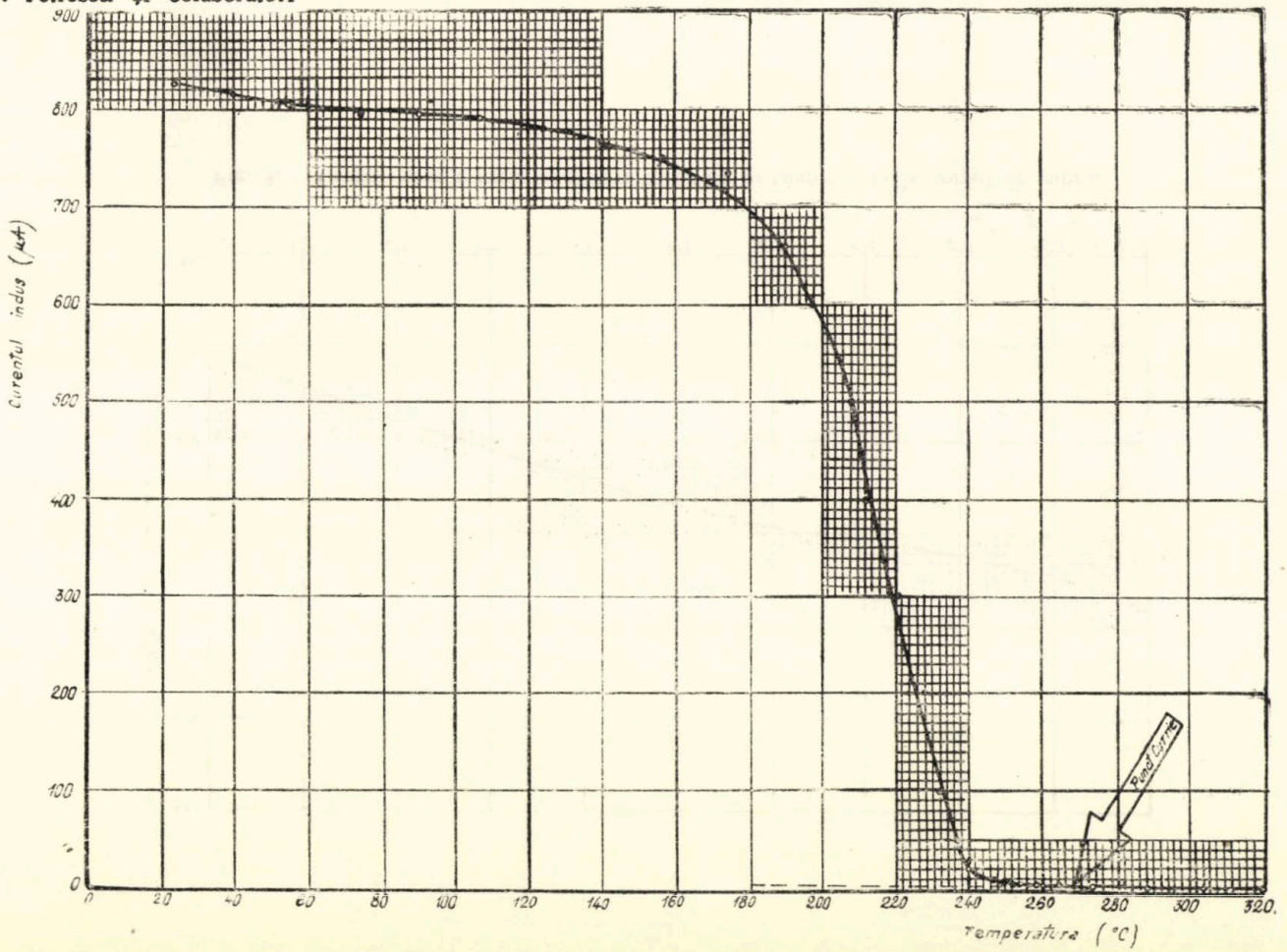


Fig. 3. — Curbă experimentală $i_{mB} = F(T°C)$ pentru decelarea temperaturii Curie.

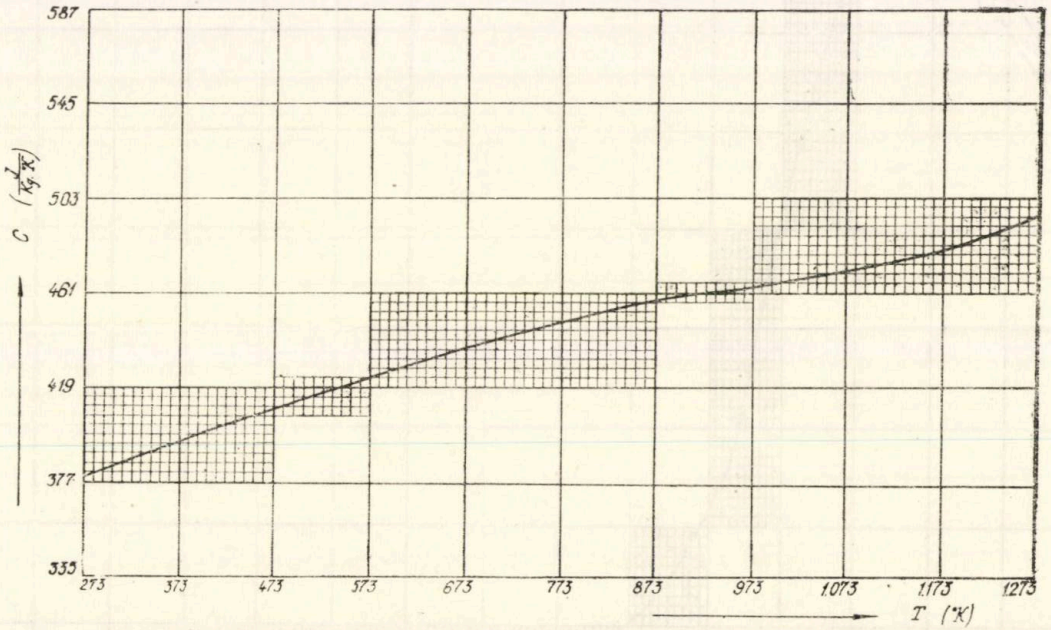


Fig. 4. – Curba etalon a variației căldurii specifice cu temperatura la corpul de cupru.

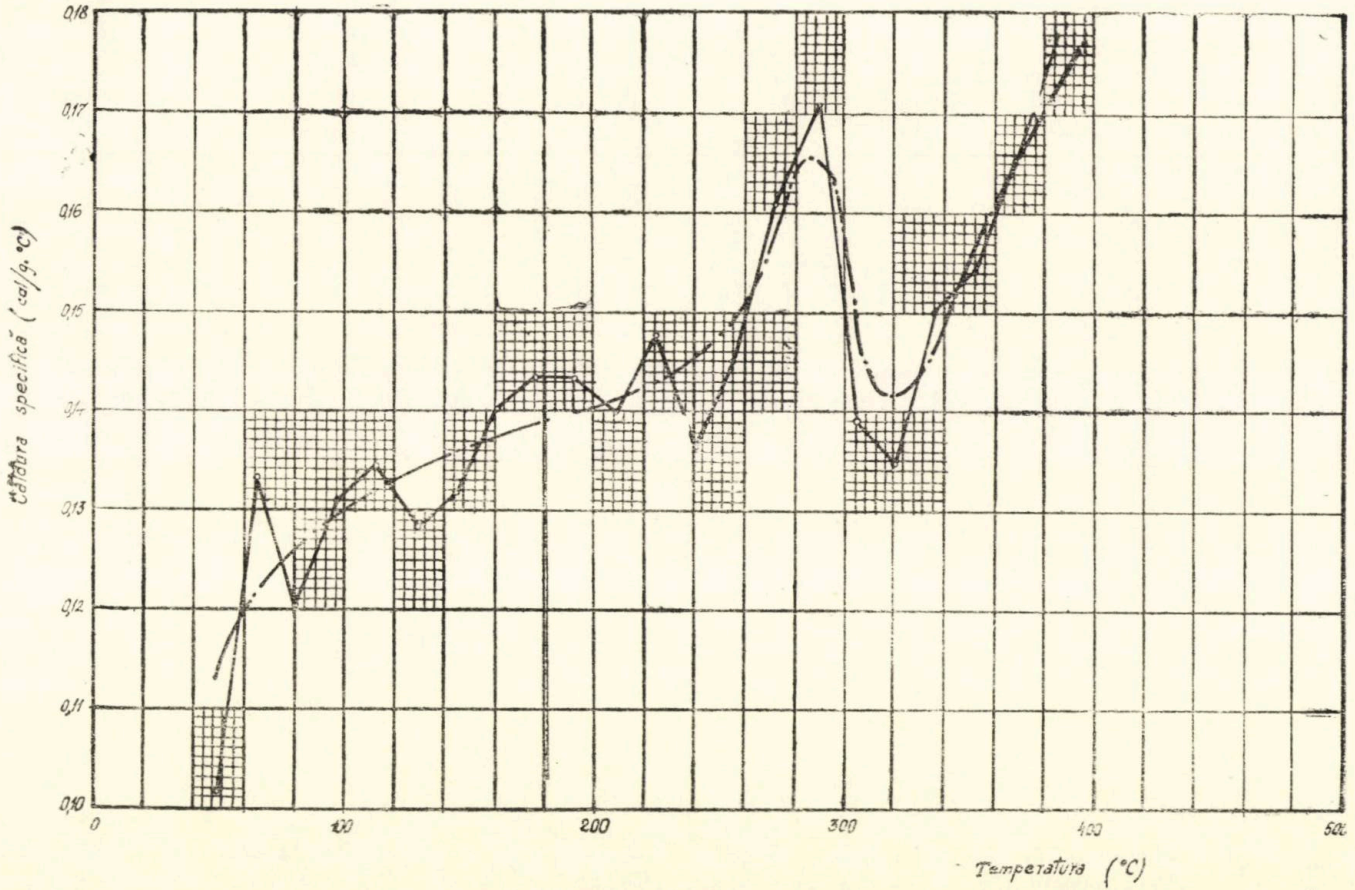


Fig. 5. — Variația căldurii specifice a eșantionului de ferită cu temperatura (20...40°C).

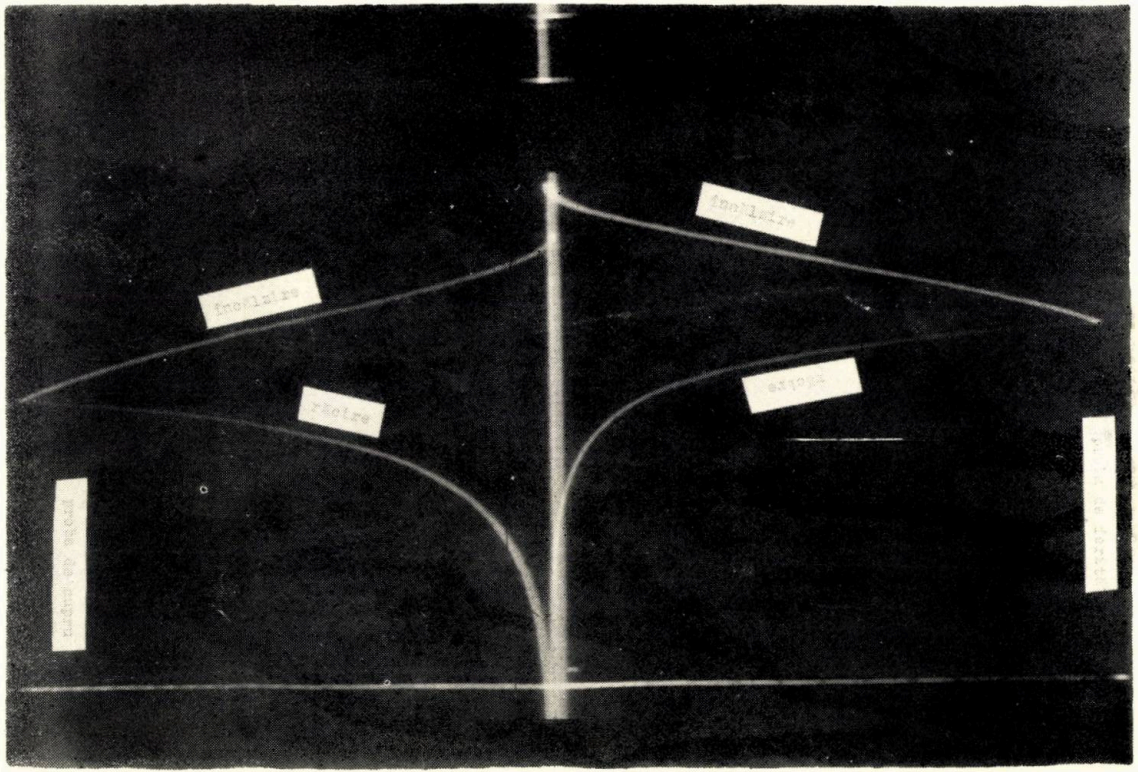


Fig. 6. — Curbele de încălzire-răcire pentru ferită respectiv pentru proba de cupru obținute prin fotografiere.

În fig. 5 s-a reprezentat grafic variația căldurii specifice a feritei cercetate în domeniul temperaturilor 20 ... 400°C după valorile indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

T °C	ΔT °C	$\left(\frac{\Delta t}{\Delta T}\right)_{Cu}\Delta T$ mm	$\left(\frac{\Delta t}{\Delta T}\right)_{F}\Delta T$ mm	T_{med} °C	$(C_{Tmed})_{Cu}$ cal/g.°C	ρ_{Cu}/ρ_E	$(C_{Tmed})_F$ cal/g°C
41							
57	16	16,8	9	49	0,0921	2,063	0,1018
73	16	8,2	5,7	65	0,0929	2,063	0,1332
89	16	5,6	3,5	81	0,0936	2,063	0,1205
105	16	4	2,7	97	0,0942	2,063	0,1310
121	16	3,2	2,2	113	0,09475	2,063	0,1344
137	16	2,6	1,7	129	0,09525	2,063	0,1284
153	16	2,4	1,6	145	0,0958	2,063	0,1318
169	16	1,7	1,2	161	0,0964	2,063	0,1403
185	16	1,6	1,15	177	0,0969	2,063	0,1435
201	16	1,4	1,0	193	0,0974	2,063	0,1435
217	16	1,3	0,9	209	0,09805	2,063	0,1400
233	16	1,1	0,8	225	0,0986	2,063	0,1478
249	16	1,05	0,7	241	0,0992	2,063	0,1364
265	16	1,0	0,7	257	0,0997	2,063	0,1450
281	16	0,9	0,7	273	0,10015	2,063	0,1610
297	16	0,85	0,7	289	0,10065	2,063	0,1710
313	16	0,75	0,5	305	0,10120	2,063	0,1390
329	16	0,7	0,45	321	0,10170	2,063	0,1350
345	16	0,7	0,5	337	0,1022	2,063	0,1500
361	16	0,55	0,4	353	0,1027	2,063	0,1543
377	16	0,45	0,35	369	0,1032	2,063	0,1655
393	16	0,3	0,25	385	0,1037	2,063	0,1780
409	16	—	—	401	0,1042	2,063	—
425	16	—	—	417	0,10465	2,063	—

F = ferită, Cu = cupru; în locurile goale nu s-a putut aprecia lungimea segmentelor

4. Concluzii

1. Metoda utilizată de noi are marele avantaj al expeditivității, durata înregistrării totale a planfilmului fiind de 4 ore la care se adaugă un timp aproximativ egal pentru efectuarea calculelor. Astfel într-un timp relativ scurt s-a ridicat diagrama căldurilor specifice pe o plajă foarte întinsă de temperaturi. Ca precizie metoda comparării curbelor de răcire se situează, desigur, în urma metodei punct cu punct calorimetrice, dar avînd în vedere dificultățile mari pe care aceasta din urmă le ridică la temperaturi ridicate [1], metoda folosită în prezenta lucrare se impune aproape în exclusivitate.

2. Curba căldurilor specifice pune în evidență un salt calitativ în vecinătatea punctului Curie, aceasta vădind o cantitate de energie eliberată în urma interacțiunilor mutuale dintre domeniile magnetice ale substanței, conform cu cerințele teoretice [3].

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de măsuri electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Туровский И. А., Бартенев Г. М., *Определение теплоёмкости методом охлаждения.* Ж. Т. Ф., 1940, **10**, *6*, стр. 514.
2. Smit J., Wijn H. P., *Ferrites (Phisical properties of ferrimagnetic oxides in relation to the technical applications).* Phillips Technical Library, 1959.
3. Kneller Eckart, *Ferromagnetismus.* Springer Verlag, Berlin, 1962.
4. Иоффе А. Ф., *Физика полупроводников.* Изд. А. Н. СССР, 1957.
5. Aharoni A., *Curie temperature of somme garnetes by the differential thermal analysis technique.* J. Appl. Phisics (SUA), 1961, **32**, *2*, pp. 439—41.
6. Garn P. D., *Sensitive detection of Curie temperatures by the thermal analysis.* Am. Chem. Soc., 1962, *141*, pp. 268—273.

FERRITES'S SPECIFIC HEAT INVESTIGATION CORRESPONDING TO LARGE INTERVALS OF TEMPERATURE BY COMPARISON WITH COOLING CURVES

(Summary)

The authors study experimentally by comparison with cooling curves the ferrites's variation of specific heat with temperature.

Explanation of the figures

Fig. 1. Device registering the cooling curves concerning the standard and ferrite's samples.
Fig. 2. Device registering the Curie point of a ferrite's sample.
Fig. 3. Experimental curve concerning the Curie point test.
Fig. 4. The specific heat variation with temperature standard curve concerning copper.
Fig. 5. The specific heat variation with temperature concerning ferrite sample (20...400°C).
Fig. 6. Photographies taked out concerning ferrite and copper samples heating and cooling curves.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1–2, 1969
Secţia I
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică

D. K. 535.331 ; 546.683

SPECTRALANALYSE EINIGER THALLIUMERZE

VON

MARCEL MOISE und GH. TACU

1. Einleitung

Thallium ist ein selten vorkommendes Element; sein Gehalt in der Erdrinde beträgt $3.10^{-5}\%$. Es gibt nur wenige eigentliche Thalliumminerale. So sind bekannt: Das Lorandith, $TlAsS_2$, das Krookesith $(Cu,Tl,Ag)_2Se$ – eine isomorphe Mischung von Kupfer—Thallium und Silberselenid – und das Berzelianith, ähnlich dem Krookesith, doch thalliumärmer als dieses. Thallium begleitet oft die Schwefelerze (Schwefelkies, Zinkblende) wo es das Zink, das Blei und das Silber isomorphisch ersetzt. Schliesslich ist Thallium auch in Begleitung von Alkalimetallen (besonders von Rubidium) in Silikaten öfters anzutreffen.

Zur Bestimmung von Thallium in Erzen wurden mehrere Methoden ausgearbeitet: Borovik-Romanova [1] bedient sich des elektrischen Bogens zwischen Kohleelektroden. Zur Aktivierung der analitischen Linie wurde der Probe Kochsalz hinzugefügt. A. K. Rusanov [2] benutzt die Acetylensauerstoffflamme um die Cyanbanden, die Tl—3775,7 Å – Linie uberdecken, zu unterdrücken. Bloch [3] gebraucht dazu den elektrischen Bogen zwischen Messingelektroden.

In den genannten Arbeiten wurden folgende analytischen Linien des Thalliums verwendet: 2767,9; 2918,3 und 3775,7 Å. Die ersten zwei besitzen eine geringe Spektralintensität während die dritte sich unvorteilhaft erweist indem sie durch die Cyanbanden maskiert wird, wen man die Bogenentlandung zwischen Kohleelektroden benutzt. Ausserdem befinden sich diese drei Linien im U. V. und folglich bedarf man einer Quarzoptik.

Wir haben uns vorgenommen einige Thalliumerze, unter Verwendung der analytischen Linie Tl—5350,5 Å, zu analysieren. Diese besonders scharfe Thalliumlinie ist der Ca-5349,5 Å—Linie sehr nahe gelegen. Darum ist grosse Vorsicht geboten wenn man Kalziumerze analysiert. Wenn man sich eines Kohlebogens bedient so liegt diese Linie im Gebiete der C_2 – Banden. Um diesen Nachteil zu vermeiden, kann man Messingelektroden verwenden. Dieser Bogen besitzt aber eine kleinere Temperatur als der zwischen Kohleelektroden und die Empfindlichkeit der Metode wird herabgesetzt. Das von uns ausgearbeitete Verfahren besteht darin, dass wir eine Bogenentlandung zwischen Kohleelektroden in einer Stickstoffatmosphäre benutzten. Unter diesen Umständen kann man eine Verminderung der C_2 – Bandenintensität bemerken und in dem untersuchtem Gebiete wird in das Spektrum schärfer.

Zur Bestimmung des Thalliums wurde bisher ein solches Verfahren noch nicht angewendet. Die verschiedenen spektrochemischen Metoden zur Bestimmung des Thalliums in Erzen sind in den Abhandungen [4].....[7] besprochen.

2. Apparatur und Arbeitsverfahren

Als Spektralgerät wurde der FD—S—Dreiprismenglassspektrograph (Row—Rathenow D.D.R.) verwendet. Dieser liefert das zwischen 3850 Å und 6000 Å gelegenen Spektrum auf eine 9×24 cm² Photoplatte, mit einer Dispersion von 3,5 Å/mm für $\lambda = 3870$ Å und 20,4 Å/mm für $\lambda = 5700$ Å. Die Elektrodenfassungen befinden sich innerhalb eines Gehäuses; dank einer einfachen Vorrichtung ist es möglich im inneren des Gehäuses in einer fliessenden Stickstoffatmosphäre zu arbeiten. Das Gas wurde einer Stickstoffflasche mit einer Durchflussmenge von 5 l/min. entnommen. Als Elektroden wurden die T_1 (D.D.R.) Spektralkohlen verwendet. Die Anregung des Lichtbogens erfolgte durch Gleichstrom (6 A). Die Spektren wurden auf ORWO—Rot Rapid—Platten aufgenommen.

Die Identifizierung der in dem Erzen enthaltenen Elementen wurde mit dem Zeiss-schen Spektrenprojektor durchgeführt. Für die Identifizierung der Linien wurden der Spektrallinienatlas von Kalinin [8] und die Spektraltafeln Harrisson [9] gebraucht. Die Photometrierung der Platten wurde mit dem Mikrophotometer MF_2 ausgeführt.

Unser Arbeitsverfahren war folgendes: Die trägeranode mit einem Durchmesser von 5 mm wurde mit einer 2 mm tiefen und 3 mm breiten Bohrung versehn. Substanzmenge: 25 mg ; Elektrodenabstand: 4 mm.

Vorversuche, die unternommen wurden um die Verdampfungsgeschwindigkeit des Thalliums in unseren thalliumenthaltenden Proben festzustellen, zeigten, dass die Verdampfungszeit des Thalliums in 1 Minute, mit einem Maximum der verdampften Menge während den ersten 10 Sekunden nach der Zündung des Bogens, erfolgt.

Zur Bestimmung der Konzentration wurden Eichproben benutzt, die den Untersuchungsproben weitgehend ähnlich waren. Die Eichproben wurden aus einem thalliumfreien, aus denselben Gruben entnommenem Mineral, durch Hinzufügung bekannter Thalliumacetatmengen, vorbereitet. Die Dauer des Abbrandes der Proben war 10 Sekunden.

3. Versuchsergebnisse

Die qualitative spektrochemische Bestimmung lieferte die in der Tabelle 1 angeführte Zusammensetzung der Analysen—und Eichproben.

Tabelle 1

Probe	Vorkommende Elemente
Analysenprobe	Al; Cd; Co; Cu; Fe; Mn; Na; Pb; Si; Tl; Zn; V
Eichprobe	Al; Cd; Co; Cu; Fe; Mn; Na; Pb; Si; Zn

Aus dieser Tabelle ist zu entnehmen dass sich die Analysenprobe von der Eichprobe nur durch die Anwesenheit von Vanadium unterscheidet, das in dem Spektrum nur durch seine letzten Linien angezeigt ist. Dieses Element vermag aber keinen bedeutenden Einfluss auf die Intensität der analytischen Linie des Thalliums zu haben, da seine Konzentration umbedeutend ist.

Als innerer Standard wurde die Cr—5345,8 Å—Linie benutzt. Sie hat den Vorteil der Tl—5350,5 Å—Linie nahe gelegen zu sein und besitzt ein Erregugspotential von 3,32 eV gegenüber dem von 3,28 eV des Thalliums. Als innerer Standard diente eine 0,25 % $K_2Cr_2O_7$ Konzentration in der Probe.

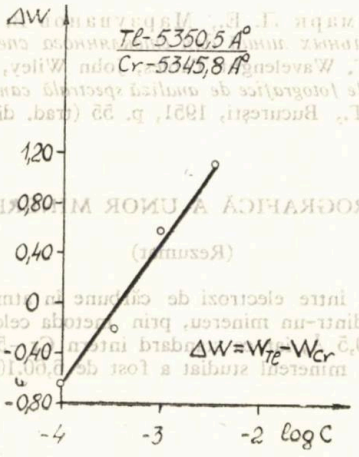


Abb. 1

Die vier Eichproben hatten volgenden Thalliumgehalt: $3{,}3.10^{-3}$ % ; 1.10^{-3} % ; $3{,}3.10^{-4}$ % und 1.10^{-4} %.

Mit Hilfe der Eichproben, konnten wir die in der Abb. 1 dargestellte Kurve auftragen. Auf der Abszisse wurde der gewöhnliche Logarithmus des Thalliumgehaltes und auf der Ordinate die W—werte aufgezeichnet. Da die Konzentration des Thalliums im Bereiche der Unterbelichtungen liegt, haben wir die Schwärzungen S durch die W—Transformation ersetzt, die gewöhnlich, bei Unterbelichtungen in der Spektrochemischen Analyse zur Angewendung kommt. Prokofiev [10] beweist dass bei Ausnützung der transformierten Schwärzungsmessungen W, die im Bereiche der Unterbelichtung liegende Kurve, teilweise, in eine Gerade überführt. Zur Aufzeichnung der Kurve haben wir uns des Linienpaares Tl—5350,5 Å und Cr—5345,5 Å bedient. Die ermittelte Thalliumkonzentration unter verwendung des Chroms als innerer Standard, betrug $6{,}60.10^{-4}$ %.

Eingegangen am 28 X 1967

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl der Physik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Боровик-Романова Т. Ф., Соседко А. Ф., Геохимия, 1960, *1*, стр. 31.
2. Русанов А, К., Алексеева В. М., Зав. Лаб., 1940, *9*, стр. 66.
3. Блох И. М., Матерялы X Всесоюзного Совещания по спектроскопии, Львов, Изд. Льв. Ун-та, 1958, **11**, стр. 343.
4. Зильберштейн Х. И., ЖТФ, 1955, *25*, стр. 1491.
5. Ahrens L. H., Taylor S. R., *Spectrochemical Analysis*. Addison-Wesley Publ., Comp., London, 1961, p. 237.
6. Боровик-Романова Т. Ф., Беляев Ю. И., Куценко Ю. И., Павленко Л. И., Савинова Е. Н., Фарафонов М. М., *Спектральное определение редких и рассеянных элементов*. Изд. АН СССР, М., 1962, стр. 107.
7. Moenke H., *Spektralanalyse von Mineralien und Gesteinen*. Geest & Portig, Leipzig, 1962, S. 80.
8. Калинин С. К., Наймарк Л. Е., Марзуванов В. Л., Измагулова К. И., *Атлас спектральных линий для стеклянного спектрографа*. М., 1956.
9. Harrison G. R., M.I.T. Wavelenght Tables, John Wiley, N. Y.
10. Prokofiev V. K., *Metode fotografice de analiză spectrală cantitativă a metalelor şi aliajelor*. Vol. **II**, I. D. T., Bucureşti, 1951, p. 55 (trad. din l. rusă).

ANALIZA SPECTROGRAFICĂ A UNOR MINEREURI CU TALIU

(Rezumat)

Folosind arcul electric între electrozi de cărbune în atmosferă de azot, s-a efectuat analiza cantitativă a taliului dintr-un minereu, prin metoda celor trei etaloane. Drept linie analitică s-a utilizat Tl—5350,5 Å, iar ca standard intern Cr—5345,8 Å.

Concentraţia taliului în minereul studiat a fost de $6{,}60.10^{-4}\%$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECȚIA II

CHIMIE INDUSTRIALĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 1—2, 1969

СЕКЦИЯ II

ИНЖЕНЕРНАЯ ХИМИЯ

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECTION II

CHEMICAL ENGINEERING

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 545.15 ; 545.33

DETERMINAREA INDIRECTĂ A CANTITĂŢILOR SUBMICROGRAME DE FOSFAT ŞI ARSENIAT, ALĂTURI DE SILICAT, PRIN METODA POLAROGRAFICĂ

DE

AL. DUCA, GH. MOROI şi MARIA CARAMLĂU

Comunicare prezentată la consfătuirea pe ţară a chimiştilor analişti, Piatra-Neamţ, 24—25 mai 1968

1. Introducere

Pentru determinarea cantităţilor mici de fosfat, silicat, arseniat etc., din diferite materiale, sînt cunoscute posibilităţile bazate pe formarea şi proprietăţile heteropolimolibdaţilor (HPMo), determinarea formelor reduse sau nereduse, în soluţii apoase sau după extracţia lor în solvenţi sau amestecuri de solvenţi organici.

În literatură sînt citate numeroase lucrări şi studii asupra aplicabilităţii HPMo în chimia analitică. Majoritatea acestor lucrări sînt menţionate în articolele de sinteză ale lui M. Jean [1]...[3] şi în cel al lui F. Umland şi G. Wünsch [4]. Cu toate acestea, apar în continuare noi lucrări şi studii de precizări, completări, cu variante noi, analitice.

În funcţie de cantităţile de determinat, metodele analitice cu aplicabilitate practică (în special, colorimetrice şi polarografice) se împart în : metode directe şi metode indirecte.

Principiul metodelor directe se bazează pe corelaţia dintre culoare (structură), proprietăţile redox etc. şi concentraţia HPMo.

Principiul metodelor indirecte se bazează pe posibilitatea determinării Mo din HPMo, după extracţia şi descompunerea HPMO. Avînd în vedere raportul Mo : P (As) = 12 (10) şi sensibilitatea metodelor analitice pentru determinarea molibdatului, rezultă imediat superioritatea acestor metode, în special din punct de vedere al sensibilităţii, faţă de metodele directe.

Condiţiile principale pentru metodele indirecte sînt : a) selectivitatea extracţiei HPMo dorit, b) extracţia practic nulă a Mo (molibdatului) sau posibilitatea de îndepărtare a acestuia prin spălare, c) eliminarea ionilor jenanţi.

Colectivul nostru s-a orientat asupra unui studiu sistematic de extracţie a Mo (molibdatului) şi HPMo în diferiţi solvenţi sau amestecuri de solvenţi organici, în funcţie de principalii factori (natura acidului

şi pH-ul, concentraţia Mo, cinetica formării, a extracţiei şi a descompunerii HPMo, tehnica şi tipul de agitare, efectul salifierii şi al temperaturii etc.).

În timpul prelucrării rezultatelor noastre a apărut un studiu sistematic asupra acestei probleme, întreprins de F. Umland şi G. Wünsch *(op. cit.)*.

2. Partea experimentală

Din datele experimentale obţinute (în literatură şi de noi) s-a precizat că molibdatul nu se extrage practic în eter şi acetat de butil.

Dacă extracţia HPMo se efectuează în eter + izobutanol sau cloroform + *n*-butanol, urmele de molibdat se pot îndepărta prin spălare cu o soluţie acidă.

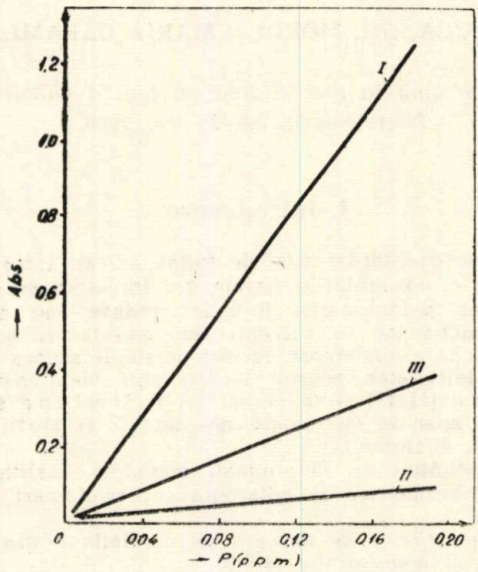


Fig. 1. — *I* — metoda propusă (indirectă), *II* — metoda „albastrului de Mo" (840 mμ), *III* — metoda extractivă (PMo) (245 mμ).

Pentru concentrări şi separări, corespund mai bine următorii solvenţi: butanol + cloroform (pentru P), butanol + cloroform + acetonă (pentru As) [5], [6].

K. Sugawara şi S. Kanamori [5], [6] seuşesc să extragă şi să determine spectrofotometric din ape 0,1...1,0 μg P/250 ml şi 0,2...2,0 μg As/250 ml, cu o eroare pînă la 5%.

Pentru o comparație sugestivă a sensibilității metodei colorimetrice (respectiv spectrofotometrice) directe și indirecte, reproducem curba dată de K. Sugawara și S. Kanamori.

În legătură cu determinările polarografice directe a HPMo (P, As, Si, Ge) sînt de semnalat în literatură cîteva lucrări [7]...[12].

Aceste studii urmăresc posibilitatea determinării polarografice a HPMo (individual, fără separări) în solvenți organici.

Sensibilitatea determinărilor directe polarografice este de 0,05 μg P (Si)/ml soluție de bază.

a) *Posibilitățile determinărilor indirecte polarografice* (extracția HPMo, descompunerea și determinarea polarografică a Mo) au fost semnalate încă din anul 1956 (Al. Duca și D. Stănescu) cu ocazia studiilor cromatografice a HPMo și HPW [13], [14].

Determinarea indirectă a fosfatului, pe cale polarografică, după extracția HPMo în acetat de butil, a fost comunicată în 1967 la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași și este în curs de redactare (Al. Duca și M. Bezdadea).

Lucrarea prezentă urmărește să evidențieze avantajele metodei indirecte polarografice, față de cele directe, o comparație cu metodele colorimetrice (directe și indirecte) și posibilitatea determinărilor chiar cînd extracția unui component nu este cantitativă.

b) *Determinările polarografice ale molibdatului* s-au efectuat cu un polarograf LP-60, cu înregistrare, în intervalul 0,0...1,0 V, $s = 1/100...1/200$ (28 cm = 10^{-7} A), $t = 23°C$, $m^{2/3}t^{1/6} = 2{,}610$. Ca soluție de bază s-a folosit HNO_3 $4M + NH_4NO_3$ $4M + H_2O$ (1 + 2 + 3 vol.). În această soluție de bază se pot determina 0,02 μg Mo/ml soluție de bază, ceea ce ar corespunde la 0,0005 μg P/ml soluție de bază. Îndepărtarea oxigenului din soluție s-a efectuat prin barbotare cu azot, timp de 10 min.

Prezența cantităților de fosfat, arseniat, silicat, corespunzătoare raportului Mo : P (As, Si) = 4 nu jenează.

Soluția de bază corespunde și pentru determinarea urmelor de molibden în concentratele de reniu [15].

Extracțiile fosfatului și arseniatului, alături de silicat, s-au făcut după varianta japoneză [5], [6].

2.1. Extracția PMo alături de arseniat și silicat și determinarea polarografică a cantităților corespunzătoare de molibdat

a) *Reactivi.* Toți reactivii folosiți au fost „pentru analiză". S-a utilizat apă bidistilată.

Solvenții pentru extracție, soluțiile de spălare și soluția de NaOH, au fost cele indicate de Sugawara și Kanamori *(op. cit.)* cu următoarele modificări: a) acid clorhidric, soluție 1,2 *N*, b) molibdat de amoniu, soluție 2% în apă bidistilată.

b) *Separarea şi determinarea fosforului.* Într-o pîlnie de separare se introduc 15 ml soluţie de analizat, 3,75 ml soluţie 1,2*N* de HCl, 1 ml butanol şi 4 ml solvent *A* (*n*-butanol + cloroform, 4 + 6 vol.). Faza organică se înlocuieşte cu 10 ml solvent *A*, se introduc 1,2 ml soluţie 2% molibdat de amoniu şi imediat pîlnia de separare se agită 3 min.

Extractul organic se trece printr-o pîlnie de separare de 100 ml în care se introduc 50 ml soluţie de spălare *A* (60 ml *n*-butanol + 40 ml HNO_3 conc., aduse la 1 l cu apă bidistilată) şi se agită 3 min pentru a extrage în faza apoasă tot molibdatul necombinat şi alţi heteropoliacizi decît HPMo, care rămîne în faza organică.

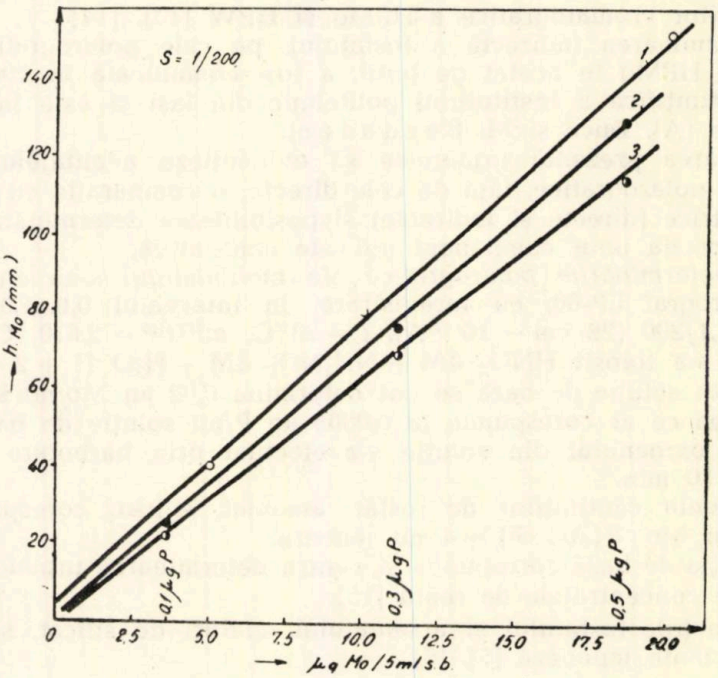


Fig. 2. — *1* — curba etalon pentru Mo, 2 — extracţia PMo şi determinarea Mo corespunzător (2 extracţii — 1 spălare), 3 — extracţia PMo şi determinarea Mo corespunzător (1 extracţie — 1 spălare).

Aceasta se trece (extractul organic cu HPMo) într-o pîlnie de separare de 50 ml, se introduc 10 ml soluţie 1*N* de NaOH şi se agită 1 min pentru a extrage complet HPMo în faza apoasă. Din faza apoasă se ia 1 ml într-un vas polarografic şi se adaugă 4 ml soluţie de bază, se îndepărtează oxigenul, barbotînd azot prin soluţie timp de 10 min

şi se polarografiază între 0,0...1,0 V cu o sensibilitate de 1/100 (1/200).

Curba etalon pentru 0,0...20,0 μg Mo/5 ml soluţie de bază este redată în fig. 2 şi tabelul 1. Valorile date reprezintă media a 6...8 determinări.

Corespondenţa dintre P şi Mo, pentru PMo, extras, este indicată în tabelul 1.

Tabelul 1

Corespondenţa dintre P *şi* Mo *pentru* PMo *extra*

Mo : P = 12	P μg	Mo μg	*h* Mo mm	Erori %
1 P:37 Mo	0,05	1,75	12	4...5
	0,10	3,70	25	
	0,30	11,10	76	
	0,50	18,50	125	

Se poate preciza că reproductibilitatea determinărilor polarografice, în condiţiile noastre practice, pentru aceleaşi probe, este de 1...2%. Reproductibilitatea extracţiilor, controlate polarografic, este de 2...3%. Suma erorilor se poate menţine mai mică de 5%.

Extracţia procentuală a P (PO_4^{3-}), prin două extracţii şi două spălări, este de 92...95% (fig. 2, curba 2), iar prin o extracţie şi o spălare este de 84...86% (fig. 2, curba 3).

Din rezultatele practice obţinute se poate trage concluzia că este posibilă determinarea P, respectiv PMo, prin o extracţie şi o spălare (respectiv extracţii necantitative), după o curbă de etalonare.

2.2. Extracţia AsMo alături de silicat şi determinarea polarografică a cantităţilor corespunzătoare de molibdat

Soluţia apoasă, rămasă după extracţia HPMo, se extrage de două ori cu cîte 5 ml solvent *A* timp de 3 min, pentru îndepărtarea completă a HPMo eventual neextras. Apoi, se adaugă 3,5 ml soluţie 2% molibdat de amoniu, 2,8 ml acetonă şi se extrage AsMo prin agitare timp de 3 min cu 10 ml solvent *B* (*n*-butanol + cloroform + acetonă, 3+7+3 vol.).

Extractul organic se trece într-o pîlnie de separare de 100 ml şi se spală de două ori cu cîte 50 ml soluţie de spălare *B* (60 ml butanol + 140 ml acetonă + 10 ml HNO_3 conc., aduse la 1 l cu apă bidistilată), agitînd de fiecare dată timp de 3 min. Prin aceasta, molibdatul şi alţi compuşi ai acestuia sînt trecuţi în soluţia de spălare,

în timp ce întreaga cantitate de AsMo, rămîne în faza organică. Stratul organic se trece apoi printr-o pîlnie de separare de 50 ml, în care se introduc 10 ml soluţie 1*N* de NaOH şi se lucrează în continuare ca la determinarea fosforului.

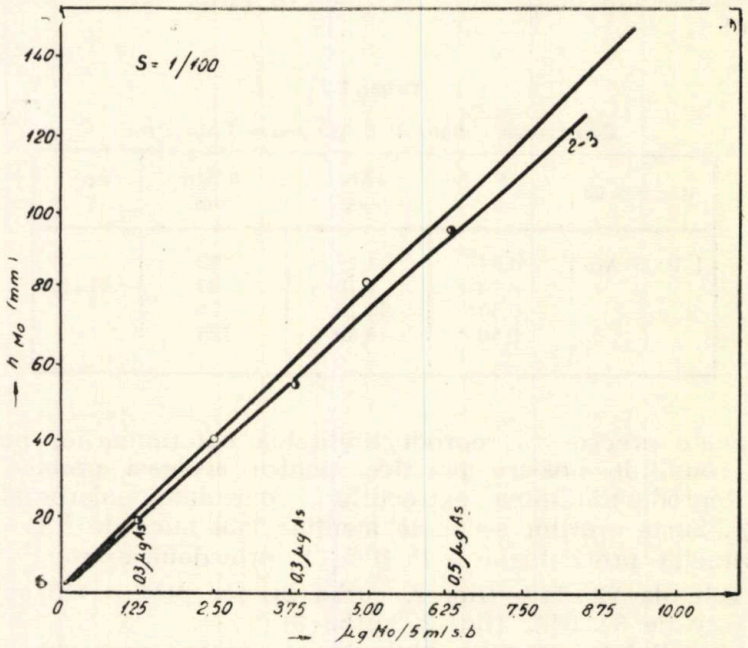


Fig. 3. — *1* — curba etalon pentru Mo, 2, 3 — extracţia AsMo şi determinarea Mo corespunzător.

În fig. 3 este dată curba etalon pentru Mo (curba *1*) şi extracţia AsMo prin două extracţii şi două spălări (curba 2) şi o extracţie şi două spălări (curba 3).

Corespondenţa dintre As şi Mo pentru AsMo extras este redată în tabelul 2.

Tabelul 2

Corespondenţa dintre As *şi* Mo *pentru* AsMo *extras*

Mo:AS = 10	As µg	Mo µg	*h* Mo mm	Erori %
1 As : 12,8 Mo	0,05	0,64	9	3...4
	0,10	1,28	19	
	0,30	3,84	57	
	0,50	6,40	95	

Din studiile mai recente [16] şi prin studiile prezente de extracţie s-a ajuns la concluzia că forma extractibilă a AsMo este corespunzătoare raportului Mo : As = 10 şi nu Mo : As = 12.

Din rezultatele extracţiei se evidenţiază că prin două extracţii şi două spălări, cît şi printr-o extracţie şi două spălări se extrag 92...95% As. Aceste rezultate reflectă de asemenea stabilitatea superioară a AsMo de acest tip, faţă de PMo.

3. Influenţa unor ioni însoţitori

În lucrările citate [1]...[6] se menţionează influenţa unor ioni la extracţie şi determinări colorimetrice.

Noi am urmărit în special influenţa următorilor ioni, în extracţie şi la determinări polarografice : Fe^{3+}, VO_3^-, WO_4^{2-}, ZrO^{2+}, Ce^{4+}. Marea majoritate a ionilor nu influenţează determinările de fosfat şi arseniat. Rezultatele obţinute sînt prezentate în tabelul 3.

Tabelul 3

Influenţa unor ioni asupra extracţiei PMo *şi* AsMo *şi a determinărilor polarografice de molibdat*

Ionul	Cantitatea µg	Adăugat sub formă de Ca	PO_4^{3-} adăugat µg P/ml extract	AsO_4^{3-} adăugat µg As/ml extract	*h* Mo mm	Obs.
—	—	—	0,30	—	76	S=1/200
—	—	—	—	0,30	57	S=1/100
Fe^{3+}	500	$FeCl_3$	—	—	—	
Fe^{3+}	500	$FeCl_3$	0,30	—	76	
Fe^{3+}	500	$FeCl_3$	—	0,30	57	
VO_3^-	0,50	NH_4VO_3	—	—	—	
VO_3^-	0,50	NH_4VO_3	0,30	—	76	
VO_3^-	0,50	NH_4VO_3	—	0,30	57	
WO_4^{2-}	1,00	Na_2WO_4	—	—	—	
WO_4^{2-}	1,00	Na_2WO_4	0,30	—	66	
WO_4^{2-}	1,00	Na_2WO_4	—	0,30	60	
ZrO^{2+}	1,0	$ZrOCl_2$	—	—	—	
ZrO^{2+}	1,0	$ZrOCl_2$	0,30	—	60	
ZrO^{2+}	1,0	$ZrOCl_2$	—	0,30	53	
Ce^{4+}	1,0	$Ce(SO_4)_2$	—	—	—(6)	Proba martor pentru P dă o dreaptă urcătoare
Ce^{4+}	1,0	$Ce(SO_4)_2$	0,30	—	70	
Ce^{4+}	1,0	$Ce(SO_4)_2$	—	0,30	68	

Din compararea rezultatelor obținute se poate deduce că prezența Fe^{3+} ($c \leqslant 500$ μg/ml) și VO_3^- ($c \leqslant 1$ μg/ml) nu jenează determinarea P și As prin extracția PMo și AsMo și determinarea Mo corespunzător.

WO_4^{2-}, ZrO^{2+} și Ce^{4+}, chiar în concentrații mai mici de 1 μg/ml jenează, introducînd erori. În acest caz este necesară separarea lor.

4. Concluzii

Se evidențiază avantajele metodei indirecte polarografice față de metodele directe, se face o comparație cu metodele colorimetrice (directe și indirecte) și se pune în evidență posibilitatea determinărilor, chiar cînd extracția unui component nu este cantitativă.

Metoda propusă se bazează pe extracția PMo în butanol + cloroform, a AsMo în butanol + cloroform + acetonă, descompunerea HPMo și determinarea polarografică a Mo corespunzător.

Sensibilitatea metodei este de 0,02 μg P (As)/ml extract organic, respectiv 0,004 μg P (As)/ml soluție de bază, fiind de zece ori mai sensibilă decît metoda polarografică directă.

Cu precauțiuni speciale, sensibilitatea se poate mări pînă la 0,001 μg P(As)/ml soluție de bază.

Suma erorilor se poate menține mai mică de $\pm 5\%$.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de chimie analitică

BIBLIOGRAFIE

1. Jean M., Chim. analyt., 1955, **37**, *125*, p. 163.
2. — Chim. analyt., 1962, **44**, *195*, p. 243.
3. — Anal. Chim. Acta, Amsterdam, 1964, **31**, p. 24.
4. Umland F., Wünsch G., Z. analyt. Chem., 1967, **225**, S. 362.
5. Sugawara K., Vanamori S., Bull. Chem. Soc. Japan, 1961, **34**, p. 258.
6. — Bull. Chem. Soc. Japan, 1964, **37**, p. 1358.
7. Novák I. V., Sbornik I mezinárodniho polarografického sjezdu v Praze, **III**, Praha, 1951, p. 439.
8. Grasshoff K. I., Hahn H., Z. analyt. Chem., 1959, **168**, S. 247.
9. — Z. analyt. Chem., 1961, **180**, S. 18.
10. — Z. analyt. Chem., 1962, **187**, S. 328.
11. Kemula W., Rosolowski Sz., Roczniki Chemii, Ann. Soc. Chim. (Pol.), 1962, **36**, p. 1417.
12. — Roczniki Chemii, Ann. Soc. Chim. (Pol.), 1963, **37**, p. 941.
13. Ripan R., Duca A., Paladi R., Stănescu D., Mager A., Bull. Soc. Chim. France, 1958, *1507*, p. 1515.
14. Duca Al., Marcu Gh., *Omagiu Acad. Prof. R. Ripan*, Ed. Acad. R. S. România, 1964, p. 235.
15. Duca Al., Stănescu D., Puşcaşu M., Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Academiei R.S.R., filiala Cluj, **7**—9 dec. 1962.
16. Mánok Fr., *Studiul arseno (V)-molibdaților în soluție*. Teză de doctorat, 1967.

INDIREKTE POLAROGRAPHISCHE BESTIMMUNG VON PHOSPHAT UND ARSENIAT ($c < \mu g$)

(Zusammenfassung)

Die vorliegende Arbeit hebt die Vorteile der indirekten polarographischen Bestimmungsmethode in Vergleich mit folgenden andern Methoden hervor: a) der direkten polarographischen Methode, b) der direkten kolorimetrischen Methode, c) der indirekten kolorimetrischen Methode.

Ausserdem bietet sie Bestimmungmöglichkeiten auch wenn die Extraktion eines Komponenten nicht quantitativ ist.

Die Summe der Abweichungen können kleiner als $\pm 5\%$ gehalten werden. nol + Chloroform, von AsMo mit Butanol + Chloroform + Azeton, der Zersetzung von HPMo und die polarographische Bestimmung des entsprechenden Mo.

Die Genauigkeit der Methode beträgt 0,02 µg P(As)/ml organisches Extrakt, beziehungsweise 0,004 µg P(As)/ml Grundlösung. Somit ist diese Methode zehnmal genauer als die direkte polarographische Methode. Durch gesteigerte Vorsicht kann die Genauigkeit bis zu 0,001 µg P(As)/ml Grundlösung erhöht werden.

Die Summe der Abweichungen können kleiner als $\pm 5\%$ gehalten werden.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. — *I* — Vorgeschlagene (indirekte) Methode, *II* — „Mo-blau" Methode (840 mµ), *III* — Extraktive Methode (PMo) (245 mµ).

Abb. 2. — *1* — Eichkurve für Mo, 2 — Extraktion PMo und Bestimmung des entsprechenden Mo (zwei Extraktionen — ein Waschen), 3 — Extraktion PMo und Bestimmung des entsprechenden Mo (ein Extraktion — ein Waschen).

Abb. 3. — *1* — Eichkurve für Mo, *2, 3* — Extraktion AsMo und Bestimmung des entsprechenden Mo

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 661,8..702 ; 661.51 8

STUDIUL REACŢIEI ACETATULUI DE ZINC CU AMONIACUL ÎN MEDIU APOS

DE

TIBERIU GOLGOŢIU, I. ROŞCA, VALERIU PETRACOVSCHI
şi SOFIA APOSTOL

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Interacţiunea amoniacului cu ionii metalelor în mediu apos sau neapos a fost cunoscută şi studiată de numeroşi cercetători încă din secolul trecut. Această interacţiune continuă şi astăzi să fie studiată sub multe aspecte, datorită importanţei şi interesului deosebit ce o prezintă pentru chimişti şi pentru aplicaţiile sale practice [1]...[7].

Lucrări deosebit de importante au arătat că ionii metalelor se comportă diferit în interacţiunea lor cu amoniacul în mediu apos [8]...[12]. Astfel, ionii Fe^{3+}, Al^{3+}, Mn^{2+} etc. precipită cu amoniacul, în mediu apos, hidroxizi greu solubili [10]...[12], iar ionii Cd^{2+}, Zn^{2+}, Cu^{2+} etc. reacţionează cu soluţiile apoase amoniacale în două stadii : la concentraţii reduse de amoniac se formează săruri bazice insolubile care la concentraţii mai ridicate de amoniac se dizolvă formînd cationi complecşi de forma $[Me(NH_3)_n]^{2+}$ [1]...[7], [13], [14]. Ionii de sodiu, potasiu etc. nu formează compuşi cu amoniacul în soluţiile apoase.

Interacţiunea caracteristică ionilor metalelor cu amoniacul în soluţiile apoase a devenit explicabilă datorită structurii lor electronice diferite. Se utilizează în acest scop o împărţire a cationilor în două categorii : cationi cu o tendinţă pronunţată de a forma complecşi cu amoniacul şi cationi cu o tendinţă pronunţată de a forma complecşi cu apa ; această diferenţiere între cationi este justificată de stabilitatea relativ mare, în soluţiile apoase, ale amoniacaţilor majorităţii ionilor metalelor grele şi de instabilitatea amoniacaţilor ionilor metalelor alcaline şi alcalino-pămîntoase în soluţiile apoase.

La interacţiunea apei cu ionii metalelor alcaline şi alcalino-pămîntoase de tipul gazelor rare rolul principal îl joacă dipolul permanent al apei ($1{,}7 \cdot 10^{18}$) care este mai mare decît cel al amoniacului ($1{,}44 \cdot 10^{18}$), iar fenomenele de polarizare joacă aici un rol relativ mic [14]. În schimb, la interacţiunea de tipul gazelor „neinerte" cu moleculele dipolare, rolul principal îl au dipolii induşi şi deoarece polarizabili-

tatea amoniacului, exprimată prin refracția sa moleculară, este mult mai mare decît cea a apei, relațiile observate experimental sînt cu totul firești.

Formarea hidroxo- și oxo-complecșilor stabili împiedică formarea amoniacaților. În cazul zincului care formează ioni cu 18 electroni exteriori, cu proprietăți de polarizare mult mai pronunțate decît la ionii metalelor alcalino-pămîntoase de tipul gazelor rare, sînt caracteristice acvo-sărurile, hidroxo-derivații și complecșii cu adenzi care conțin azot (în special amoniacații) relativ stabili în soluție apoasă.

Bjerrum [13] a studiat în mod deosebit formarea și stabilitatea ionilor complecși de forma $[Zn(NH_3)_n]^{2+}$ în soluție apoasă. În prezent se cunosc numeroși amoniacați de zinc. Un mic bilanț al lucrărilor în care se studiază amoniacații de zinc se poate urmări în [8]...[18]. În ultimul timp au fost întreprinse studii privind precipitarea și apoi dizolvarea sărurilor de zinc în soluții amoniacale apoase [1]...[7].

Formarea sărurilor bazice de zinc a fost semnalată din interacțiunea sărurilor de zinc cu amoniacul, în mediu apos, și ca produse de reacție între diferiți hidroxizi și sărurile de zinc [19]...[42].

Dintre studiile cunoscute pînă în prezent rezultă că la interacțiunea sărurilor de zinc cu amoniacul, în mediu apos, un rol deosebit de important îl joacă concentrația inițială a componenților, raportul lor molecular și într-o anumită măsură natura anionului. Sînt puține lucrări în care s-a studiat dependența compoziției sărurilor bazice de zinc, a cantității zincului precipitat de concentrațiile substanțelor reactante și raportul lor inițial. În acest sens au fost întreprinse studii [4], [6], [7], [49] privind sistemele:

$$ZnCl_2—NH_3—H_2O,\quad ZnBr_2—NH_3—H_2O,\quad ZnSO_4—NH_3—H_2O,\quad Zn(NO_3)_2—NH_3—H_2O.$$

Reacțiile ce au loc în aceste sisteme se desfășoară în două stadii: în primul stadiu se formează săruri bazice iar în al doilea stadiu se dizolvă precipitatele:

$$(1)\qquad ZnA_2+nNH_4OH\rightleftarrows ZnA_{2-n}(OH)_n+nNH_4A,$$

$$(2)\qquad ZnA_{2-n}(OH)_n+nNH_4A+xNH_4OH\rightleftarrows ZnA_2(n+x)NH_3+(n+x)H_2O,$$

(A — anion monovalent).

În domeniul depunerii sărurilor bazice se formează două categorii de compuși:

$$(I)\qquad ZnA_2.nZn(OH)_2.xH_2O,\qquad (II)\qquad ZnA_2.nZn(OH)_2.xH_2O.sNH_3.$$

Sărurile de ultimul tip se depun din soluții concentrate la un anumit raport $N=[NH_3]_0/[ZnA_2]_0$; cu creșterea concentrației soluției sării de cercetat valoarea acestui raport scade: a) $Zn(OH)_{1,6}\ Cl_{0,6}.\ 0{,}2\ H_2O$ se depune pînă la $N=1$ și b) $Zn(OH)_{1,6}\ Cl_{0,6}.\ 0{,}4\ H_2O.\ 0{,}4\ NH_3$ se depune la $N>2$.

În intervalul $1\leqslant N\leqslant 2$ se depun săruri bazice de compoziție variabilă.

Scopul acestei lucrări este de a continua studiul interacțiunii sărurilor cationilor metalelor cu amoniacul, în mediu apos, cu sistemul $ZnAc_2—NH_3—H_2O$. Se determină compoziția acetaților bazici și cantitatea de zinc precipitat funcție de concentrațiile inițiale și la echilibru ale acetatului de zinc și amoniacului. De asemenea se determină concentrațiile și compoziția ionilor complecși din soluție la echilibru.

2. Partea experimentală

Reacția de precipitare a acetatului de zinc cu amoniacul s-a studiat după metoda descrisă în [43]...[48]. Pentru studiul interacțiunii amoniacului cu acetatul de zinc, în mediu apos, s-au efectuat 6 serii

de experienţe. La fiecare serie concentraţia acetatului de zinc în amestecul iniţial a fost constantă (0,025 ; 0,1 ; 0,25 ; 0,5 ; 0,75 ; 1 *M*/l) iar raportul iniţial $N = [NH_3]/[ZnAc_2]$, a variat de la 0,25 la 8. Echilibrul între faza solidă şi lichidă la 22°C se stabileşte de la 5 la 35 zile în funcţie de $[ZnAc_2]$ şi raportul $[NH_3]/[ZnAc_2]$ în amestecul iniţial. Separarea precipitatului de soluţie şi prelucrarea lui pentru analiză s-a realizat după metoda descrisă în [4]...[7]. Precipitatul s-a separat de soluţie prin filtrare şi apoi s-a spălat cu alcool etilic sau tetraclorură de carbon pentru îndepărtarea soluţiei iniţiale, s-a uscat în aer la temperatura camerei pînă la pondere constantă. Unele probe au fost ţinute în exsicator cu $CaCl_2$ pînă la pondere constantă. Conţinutul în zinc din precipitat şi soluţie a fost determinat prin titrare cu complexon III, iar ionii OH^- (din $Zn(OH)_2$ şi NH_4OH) au fost determinaţi prin titrare cu acid sulfuric. Amoniacul din precipitat s-a determinat prin încălzire cu NaOH şi apoi prin titrare cu H_2SO_4. Apa se determină prin diferenţă. Amoniacul liber din soluţie s-a determinat prin două metode : prin titrare directă cu acid sulfuric şi prin determinarea pH-ului. Pentru determinarea amoniacului liber şi complexat din soluţiile de cercetat s-a folosit metoda potenţiometrică a lui Bjerrum [13]. Fiecărei soluţii i s-a adăugat azotat de amoniu pînă la concentraţia 5 *M*/l, determinîndu-se apoi pH-ul cu un pH-metru M. V. 11.

În prealabil au fost determinate pH-urile soluţiilor avînd aceeaşi concentraţie de azotat de amoniu şi concentraţii diferite de amoniac ceea ce a permis calcularea constantei de echilibru la tărie ionică dată :

$$K = \frac{[NH_4^+]\,[OH^-]}{[NH_3]} = 3{,}58.10^{-5}...3{,}70.10^{-5}. \tag{3}$$

Se construieşte apoi graficul — log $[NH_3]$ în funcţie de pH. Valoarea concentraţiei amoniacului liber din soluţie se determină din grafic sau din relaţia (3) cu ajutorul mărimilor cunoscute ale pH-urilor echilibrelor care se stabilesc în sistemele studiate.

Cunoaşterea concentraţiilor totale ale amoniacului adăugat (c_{NH_3}) şi ale ionilor de zinc din soluţii (c_{Zn}) permite determinarea numărului moleculelor de amoniac ($\bar{n}$) care revin în medie fiecărui ion de zinc. Acest număr este dat de expresia

$$\bar{n} = \frac{c_{NH_3} - [NH_3]}{c_{Zn}}. \tag{4}$$

3. Discutarea rezultatelor

Din prelucrarea datelor obţinute după metodele arătate mai sus se constată că reacţia în mediu apos între acetatul de zinc şi amoniac decurge în domeniul depunerii de precipitat în două stadii : în primul

stadiu, pînă la $N \leqslant 2$, se obţine precipitarea zincului sub forma de acetaţi bazici iar în al doilea stadiu, la $N \geqslant 2$, are loc dizolvarea precipitatului. Odată cu dizolvarea precipitatului se formează în soluţie ioni complecşi de tipul $[Zn(NH_3)_n]^{2+}$.

Din sistemul studiat se depun două tipuri de săruri bazice: $ZnAc_2 . nZn(OH)_2 . xH_2O$ şi $ZnAc_2 . nZn(OH)_2 . xH_2O . sNH_3$ (s-a notat CH_3COO^- cu Ac^-), de compoziţie variabilă în funcţie de $[ZnAc_2]$ şi valoarea lui N.

Primul stadiu al reacţiei decurge cu depunerea acetaţilor bazici:

$$ZnAc_2 + nNH_4OH \rightleftarrows ZnAc_{2-n}(OH)_n + nNH_4Ac. \quad (5)$$

În această etapă precipitarea zincului ca acetat bazic decurge pe măsura creşterii valorii raportului N.

Teoretic ar trebui ca precipitarea să fie totală pentru valoarea $N = 2$. În realitate se observă că la $N = 2$ mai rămîn în soluţie ioni de zinc neprecipitaţi care raportaţi la cantitatea totală de zinc luată în studiu pentru fiecare serie de soluţie, conduc la valorile de 14% pentru seria 0,5 şi 6,8% pentru seria 0,1 $ZnAc_2$ M/l.

Stadiul al doilea al interacţiunii acetatului de zinc cu amoniacul în mediu apos începe la valori $N \geqslant 2$. În acest stadiu dizolvarea precipitatului are loc ca rezultat al formării complecşilor solubili după relaţia:

$$ZnAc_{2-n}(OH)_n + n\,NH_4Ac + x\,NH_4OH \rightleftarrows ZnAc_2(n+x)NH_3 + (n+x)H_2O. \quad (6)$$

Dizolvarea precipitatului de acetat bazic de zinc în exces de amoniac este proporţională cu concentraţia iniţială a amoniacului (fig. 1).

Pe măsura micşorării concentraţiei iniţiale a acetatului de zinc, dizolvarea acetaţilor bazici se produce la valori mai mari ale raportului N. De exemplu la concentraţii iniţiale în acetatul de zinc de 0,5; 0,75 şi 1 mol/l precipitatul se dizolvă pentru $N = 4,5$; la concentraţii iniţiale mai mici în acetat de zinc este necesară o concentraţie mai mare în amoniac pentru a se dizolva precipitatul (fig. 1).

Pe măsura formării acetaţilor bazici de zinc se obţine în soluţie acetat de amoniu a cărui concentraţie creşte cu mărirea cantităţii de precipitat şi scade în timpul dizolvării acetaţilor bazici, consumîndu-se în reacţia de formare a ionilor complecşi de $[Zn(NH_3)_n]^{2+}$ (fig. 1).

Deosebit de importantă este determinarea cantităţii de amoniac din precipitatele care se depun şi din soluţii la echilibru, în deosebi delimitarea valorilor concentraţiilor de amoniac pentru care acetaţii bazici se dizolvă complet.

Amoniacul apare în compoziţia precipitatului pentru valorile $[ZnAc_2] = 0,1$ şi $N = 0,75$ (fig. 3).

În soluţie, la echilibru, amoniacul apare liber în cantitate mai mare pentru valori ale lui $N > 2$ şi îşi măreşte concentraţia proporţional cu creşterea raportului N (fig. 1).

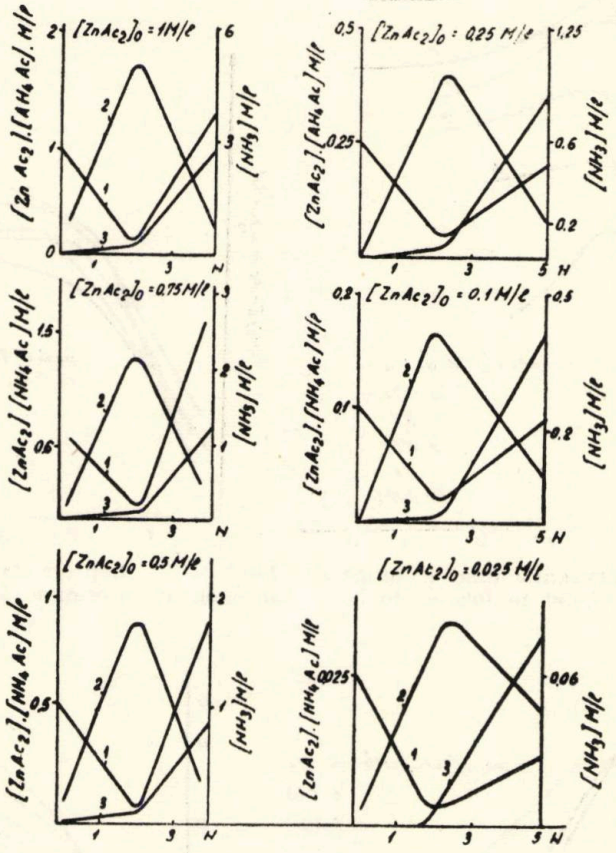


Fig. 1. — Dependenţa concentraţiei la echilibru a componenţilor în sistemul $ZnAc_2$—NH_3—H_2O în funcţie de N.

Din fig. 2 se observă că în acetaţii bazici raportul $Zn(OH)_2$: $ZnAc_2$ este variabil în funcţie de valoarea N şi concentraţia iniţială a acetatului de zinc.

La pH $\geqslant$ 10 toate procesele de schimb între faza solidă şi soluţie se termină obţinîndu-se numai faza lichidă (fig. 5).

În momentul începerii dizolvării precipitatului, zincul trece în soluţie sub formă de ioni complecşi $[Zn(NH_3)_n]^{2+}$ cu $n = 1...6$. S-a

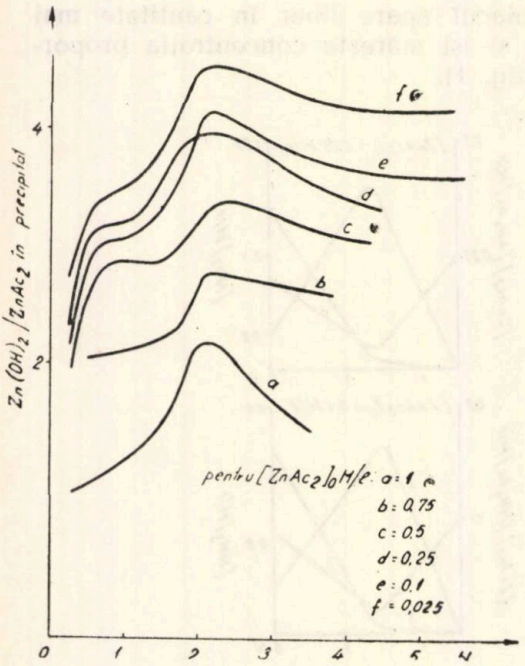


Fig. 2. — Dependenţa conţinutului de grupeOH în precipitat în funcţie de *N*.

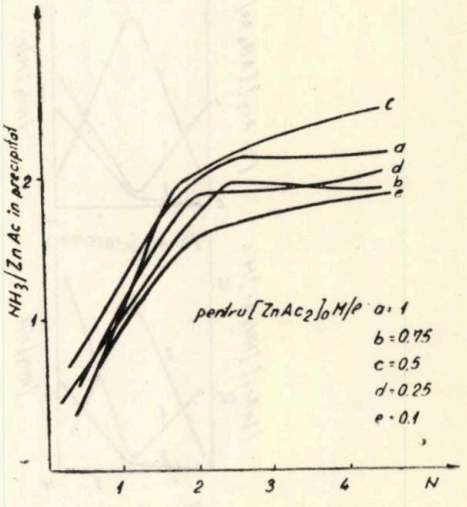


Fig. 3. — Dependenţa conţinutului de amoniac în precipitat în funcţie de *N*.

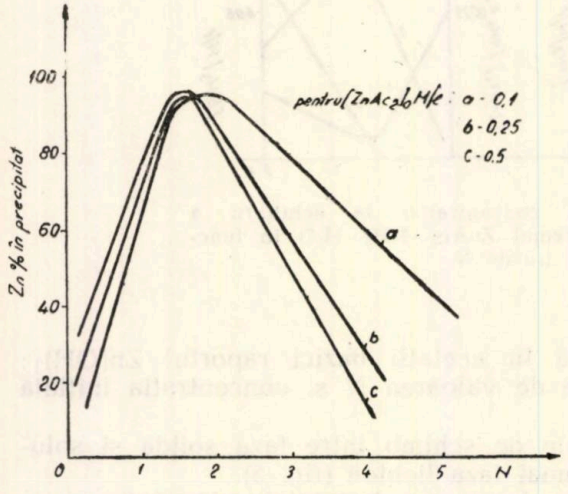


Fig. 4. — Cantitatea de Zn precipitat în funcţie de *N*.

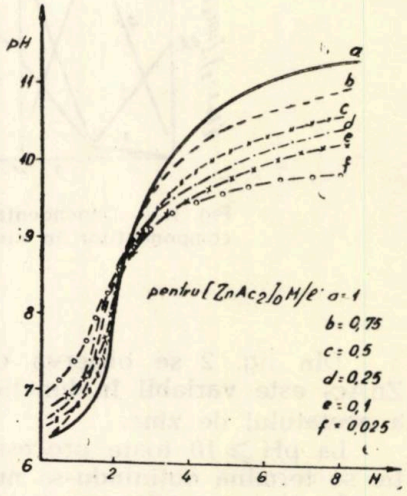


Fig. 5. — pH-ul soluţiilor la echilibru în funcţie de *N*.

determinat faptul că apare în soluţie sub formă mai stabilă ionul $[Zn(NH_3)_4]^{2+}$ pentru valori ale lui N cuprinse între 4,5 şi 8. Abia la valori $N \geqslant 8$ apar în soluţie în proporţie însemnată ionii de $[Zn(NH_3)_6]^{2+}$.

4. Concluzii

În concluzie se poate arăta că acetatul de zinc se comportă în mod asemănător ca şi celelalte săruri de zinc studiate pînă în prezent în soluţiile apoase amoniacale, formînd mai întîi săruri bazice, care la concentraţii mai mari de amoniac se dizolvă trecînd în ioni complecşi de $[Zn(NH_3)_n]^{2+}$, unde $n = 1...6$.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Уразов Г. Г., Киракосян К. А., Мхитарян С. Р., ЖНХ, 1958, **3**, стр. 464.
2. — ЖНХ, 1958, **3**, стр. 475.
3. Киракосян К. А., ЖНХ, 1960, **5**, стр. 953.
4. — ЖНХ, 1961, **6**, стр. 1718.
5. — ЖНХ, 1961, **6**, стр. 1801.
6. Киракосян К. А., Родостина В. Л., ЖНХ, 1965, **10**, стр. 160.
7. Маргулис В. Е., Молетина Д. Е., Бейсекеева И. Л., ЖНХ, 1965, **10**, стр. 906.
8. Вернер А., *Новые воззрения в области неорганической химии.* Ленинград, 1936.
9. Pascal P., *Traité de Chimie minérale.* T. **VII**, Masson, Paris, 1932.
10. — *Nouveau Traité de Chimie Minérale.* T. **XVIII**, Masson, Paris, 1959.
11. Okáč A., *Qualitative analytische Chemie.* Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1960.
12. Treadwell D. W., *Manuel de chimie analytique.* T. **1**, Dunod, Paris, 1947.
13. Bjerrum I., *Metal Ammine Formation in Aqueous Solution.* Copenhague, 1941.
14. Grinberg A. A., *Introducere în chimia combinaţiilor complexe.* Ed. Tehn., Buc., 1957, (trad. din l. rusă).
15. Gmelins, *Handb. anorgan. Chem.* Sistem. nummer 32, Zink Aufl., 1959, **8**, S. 1158.
16. Melor M. J., *A Comprehensive Treatise on Inorganic and Theoretical Chemistry.* 1929, **IV**, p. 633.
17. Евдокимова К. А., Малина И. А., Цейдлер А. А., Цветные металлы, 1956, **3**, стр. 26.
18. Евдокимова К. А., Милина И. А., *Сборник аннотаций научно-исследовательских работы.* Металлургиздат, М., 1957, стр. 155.
19. Pickering A. M., J. Chem. Soc., 1907, **91**, p. 1891.
20. Henbel J., Z. anorg. chem., 1945, **220**, S. 280.
21. Тананаев В. И., Мзареулишвили В. Н., ЖНХ, 1956, **1**, стр. 2216.
22. Werner A., Ber., 1907, **40**, S. 4441.
23. Громов В. Б., ЖПХ, 1948, **21**, стр. 260.
24. Никурашин И. А., Уч. Зам. Ленинградск. Ун-та, сер. Хим., 1949, *8*, стр. 39.
25. Доброхотов Г. Н., ЖПХ, 1954, **27**, стр. 1056.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

26. Britton S. T. H., Robinson R. A., Trans. Faraday Soc., 1932, **23**, p. 531.
27. Venkateswarlu S. K., J. Ind. Chem. Soc., 1955, **30**, p. 30.
28. Хейфец Л. В., Рошинян Л. А., ЖОХ, 1954, **24**, стр. 930.
29. Капустинский Ф. А., ЖПХ, 1943, **16**, стр. 50.
30. Грамов В. Б., Цветные металлы, 1948, **3**, стр. 28.
31. Фиалков А. Я., Аксельруд В. Н., Укр. Хим. Ж., 1950, **16**, стр. 75.
32. Ротинян Л. А., Зельдес Я. В., ЖПХ, 1950, **23**, стр. 717.
33. — ЖПХ, 1950, **23**, стр. 936.
34. Аксельруд В. Н., Фиалков А. Я., Укр. Хим. Ж., 1950, **16**, стр. 283.
35. — Укр. Хим. Ж., 1950, **16**, стр. 296.
36. Ротинян Л. А., Зельдес Л. А., ЖПХ, 1951, **24**, стр. 604.
37. Аксельруд В. И., Колонова И. Л., Укр. Хим. Ж., 1951, **17**, стр. 837.
38. Аксельруд В. И., Паценко Г. В., Укр. Хим. Ж., 1951, **17**, стр. 847.
39. Апельцин Э. И., ЖПХ, 1951, **23**, стр. 51.
40. Корейман Л. И., ЖОХ, 1951, **21**, стр. 10.
41. Коволенко Н. П., Нестерович Н. В., Укр. Хим. Ж., 1952, **18**, стр. 635.
42. Коволенко Н. П., ЖПХ, 1953, **26**, стр. 814.
43. Киракосян К. А., ЖНХ, 1962, **7**, стр. 2557.
44. — ЖНХ, 1963, **8**, стр. 622.
45. — ЖНХ, 1963, **8**, стр. 905.
46. — ЖНХ, 1964, **9**, стр. 2719.
47. — ЖНХ, 1959, **4**, стр. 2779.
48. Киракосян К. А., Столова В. А., ЖНХ, 1960, **5**, стр. 2588.
49. Киракосян К. А., Левина Р. В., ЖНХ, 1967, **4**, стр. 893.

ИЗУЧЕНИЕ РЕАКЦИИ УКСУЧНОКИСЛОГО ЦИНКА С АММИАКОМ В ВОДНОЙ СРЕДЕ

(Резюме)

Методом дробного осаждения изучено взаймодействие в системе $ZnAc_2-NH_3-H_2O$ при 22°Ц. Показано, что реакция осаждения основных ацетатов идет в две стадии. На первой стадии до значения $|NH_3|/|ZnAc_2| < 2$ происходит осаждение цинка в виде основных ацетатов, а на второй стадии, при значении $|NH_3|/|ZnAc_2| > 2$ идет растворение выпавших осадков. Из системы выделяются два вида солей:

$$ZnAc_2.nZn(OH)_2.xH_2O \text{ и } ZnAc_2.nZn(OH)_2.xH_2O.sNH_3.$$

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Взаймодействия в системе $ZnAc_2-NH_3-H_2O$ при 22°Ц. Концентрация $ZnAc_2$ в исходной смеси мол/л: *a* — 1, *b* — 0,75, *c* — 0,5, *d* — 0,25, *e* — 0,1, *f* — 0,025.

Рис. 2. — Зависимость значения $Zn(OH)_2/ZnAc_2$ в осадке от $|NH_3|/|ZnAc_2|$ в исходной смеси. Концентрация $ZnAc_2$ в исходной смеси мол/л: *a* — 1, *b* — 0,75, *c* — 0,5, *d* — 0,25, *e* — 0,1, *f* — 0,025.

Рис. 3. — Зависимость значения $NH_3/ZnAc_2$ в осадке от $|NH_3|/|ZnAc_2|$ в исходной смеси. Концентрация $ZnAc_2$ в исходной смеси мол/л: *a* — 1, *b* — 0,75, *c* — 0,5, *d* — 0,25, *e* — 0,1, *f* — 0,025.

Рис. 4. — Зависимость количества цинка в осадке от $|NH_3|/|ZnAc_2|$ исходной смеси. Концентрация $ZnAc_2$ в исходной смеси мол/л: *a* — 1, *b* — 0,75, *c* — 0,5, *d* — 0,25, *e* — 0,1, *f* — 0,025.

Рис. 5. — pH в равновесных растворах. Концентрация $ZnAc_2$ в исходной смеси мол/л: *a* — 1, *b* — 0,75, *c* — 0,5, *d* — 0,25, *e* — 0,1, *f* — 0,025.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 541.1382.

VITEZA DE REACŢIE A OXIDĂRII ARGINTULUI ÎN SOLUŢIE DE HIDROXID DE POTASIU

DE

IOSIF BURLACU şi STANCU LICĂ

1. Introducere

Folosirea argintului ca electrod în acumulatorul Zn/KOH/AgO, care a fost perfecţionat de către André [1], a determinat o serie de cercetători să studieze îndeaproape comportarea argintului în soluţie alcalină.

Astfel T. P. Dirkse [2] a efectuat studii asupra comportării zincului în soluţie alcalină şi reacţiile care se desfăşoară pe electrodul de argint şi stabilitatea oxizilor de argint.

R. Amlie [9] a studiat solubilizarea oxizilor de argint în soluţii alcaline arătînd că numai oxidul monovalent al argintului (Ag_2O) este solubil în KOH. Această solubilitate este maximă în soluţii de concentraţie 30% KOH.

Acest fenomen joacă un mare rol în funcţionarea acumulatorului Zn/KOH/AgO, deoarece odată trecut în soluţie oxidul de argint ajunge la electrodul de zinc şi în timpul procesului de încărcare al acumulatorului se depune pe electrod ca argint metalic, unde formează pilă locală cu zincul şi reduce capacitatea electrodului negativ. Ar fi deci de dorit ca acumulatorul Zn/KOH/AgO să se păstreze numai în stare încărcată cînd electrodul pozitiv se găseşte sub forma oxidului bivalent al argintului (AgO) deoarece acesta nu este solubil în hidroxid de potasiu.

In realitate însă oxidul argintului bivalent (AgO) trece la oxidul argintului monovalent (Ag_2O) dizolvîndu-se în electrolit; în timpul procesului de încărcare-descărcare se depune pe separatori, proces care în ultimă instanţă duce la scurtcircuitarea acumulatorului.

Dirkse [2] a studiat separatorii necesari care ar putea să ducă la reducerea simţitoare a transportului argintului în soluţie şi a ajuns la concluzia că unele membrane animale ar reduce acest transport, dar nu complet.

Într-o lucrare anterioară [3] s-au arătat unele îmbunătăţiri aduse electrodului negativ prin introducerea în masa activă a unei pulberi de amalgam de cadmiu.

S-au întreprins, de asemenea, cercetări asupra masei active a electrodului pozitiv prin acoperirea argintului sinterizat cu paladiu [4] însă nici acestea n-au adus îmbunătăţiri substanţiale.

Întrucît acumulatorul Zn/KOH/AgO prezintă încă unele neajunsuri cum ar fi : două paliere pe curba de descărcare (unul la 1,88 V şi altul la 1,55 V), dizolvarea oxizilor de argint în KOH şi chiar dizol-

varea chimică a zincului cu formare de zincat şi degajare de hidrogen, în prezenta lucrare ne propunem să determinăm viteza de reacţie a formării şi reducerii oxizilor de argint, conform principiilor cineticii electrochimice.

2. Partea experimentală şi discuţii

În prima parte s-au folosit principiile care se aplică la sistemul polielectrod, trasîndu-se liniile Tafel pe un electrod de argint în sol. 1,7 *N* KOH. Curbele de oxidare anodică a argintului şi reducere catodică a oxidului de argint format s-au ridicat în aceeaşi celulă ca cea folosită în lucrarea noastră anterioară [10].

Electrodul de argint s-a confecţionat în mod similar electrodului de platină şi a constat dintr-un fir de argint cu lungimea de 0,5 cm şi diametrul de 0,5 mm.

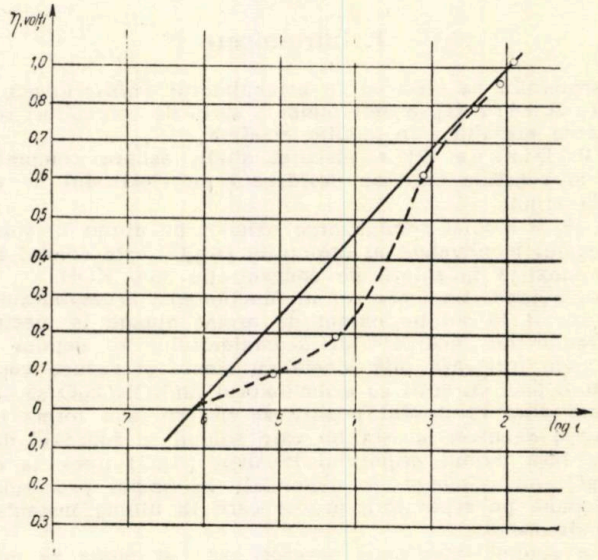


Fig. 1. — Dependenţa lui μ funcţie de logaritmul densităţii de curent

Diagrama Tafel obţinută pe firul de argint este prezentată în fig. 1, unde rezultă $i_0 = 0{,}78.10^{-6}$ A/cm². Utilizînd ecuaţia cunoscută

$$\eta_a = -\frac{2{,}3\,RT}{n(1-\alpha)F}\log i_0 + \frac{2{,}3\,RT}{n(1-\alpha)F}\log i_a, \tag{1}$$

care rezultă din cinetica electrochimică, se obține constanta b din ecuația Tafel, egală cu 0,125 V. Această constantă a rezultat presupunînd coeficientul de transfer $\alpha = 0,5$ și n (numărul electronilor cuprinși în proces) = 1. Această valoare a constantei b este apropiată de valoarea teoretică, egală cu 0,116 V. Aceste constante corespund valorilor obținute de alți autori [8] care au găsit $i_0 = 10^{-6,8\pm1}$ A/cm² și $b = 0,124 \pm 0,001$ V la degajarea hidrogenului pe argint în soluție alcalină.

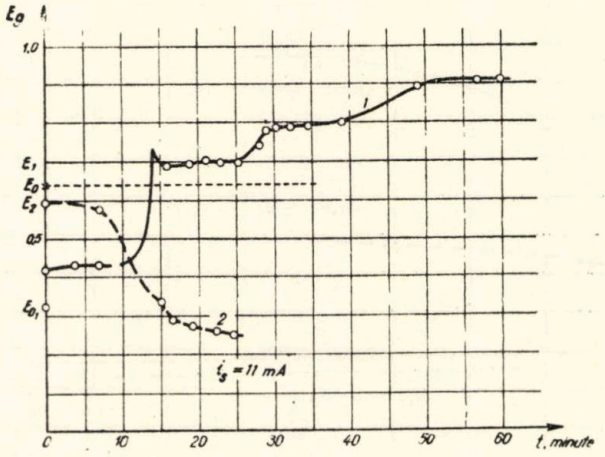


Fig. 2. — Reprezentarea lui $E = f(t)$ la i = const. = = 100 μA.

În fig. 2 este reprezentată încărcarea culostatică a electrodului de argint; se observă palierul reacției de oxidare a argintului la Ag_2O la un potențial de 0,422 V și alt palier la un potențial de 0,689 V, corespunzător reacției de oxidare a Ag_2O la AgO. Timpul corespunzător acoperirii unei suprafețe de argint de 15 mm², pentru cele două reacții, cu o viteză de reacție de 100 μA, este aproximativ egal cu 10 min.

Pe a doua curbă este reprezentată descărcarea electrodului oxidat față de un electrod de zinc. Se observă că și această curbă prezintă două paliere, unul la 0,599 V, corespunzător reducerii AgO la Ag_2O și altul la 0,288 V, corespunzător reducerii Ag_2O la Ag.

La descărcarea electrodului de argint s-a măsurat curentul de scurtcircuit și s-a găsit a fi egal cu 11.10^3 μA, de 22 de ori mai mare decît curenții de polarizare obținuți la degajarea hidrogenului de pe un electrod de grafit de suprafață similară, ceea ce pune în evidență existența unei combinații stabile.

În continuare s-a trecut la confecţionarea de electrozi poroşi din argint sinterizat, similari celor experimentaţi în lucrările noastre anterioare [3], [11] şi s-au întreprins experienţe asemănătoare. Suprafaţa electrodului poros s-a calculat din raportul cantităţii de electricitate folosită pentru încărcarea electrodului poros şi cea a electrodului compact. S-a găsit că un electrod care posedă o suprafaţă aparentă de 5 cm^2, are o suprafaţă de 0,3806 m^2.

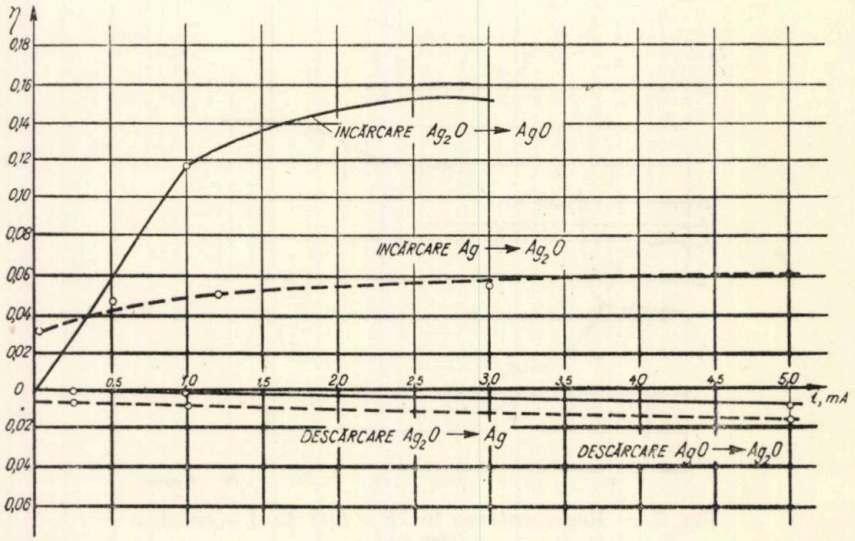


Fig. 3. — Dreptele $\eta = f(i)$ raportate la suprafaţa aparentă a electrodului rece.

În fig. 3 sînt prezentate curbele de polarizare obţinute atît din datele încărcării electrodului, cît şi din datele descărcării. Supratensiunea η a fost calculată pentru reacţia de formare a oxizilor de argint după relaţia $\eta = E - E_0$, unde E_0 reprezintă potenţialul de repaus al electrodului de argint în KOH pentru reacţia $Ag \rightarrow Ag_2O$, egal cu 0,3422 V, iar E reprezintă potenţialul electrodului sub curent. Potenţialul E_0 pentru reacţia de oxidare a Ag_2O la AgO este de 0,6032 V, considerat de asemenea la circuit deschis. Pentru reacţiile inverse s-au obţinut supratensiuni negative din relaţia $\eta = E - E_0$, unde E_0 are valorile arătate mai sus şi E reprezintă potenţialul electrodului sub curent.

Datele supratensiunii la încărcarea electrodului poros atît la încărcare cît şi la descărcare sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Pentru electrodul Ag/Ag_2O		Pentru electrodul Ag_2O/AgO	
i mA/cm²	η V	i mA/cm²	η V
		Încărcare	
0,01	0,0318	0,01	0,0001
1,2	0,0502	0,5	0,0046
3	0,0554	1	0,1183
5	0,0622	3	0,1507
		Descărcare	
0,01	— 0,0001		
0,25	— 0,0004	0,22	— 0,0085
1,0	— 0,0017	1,0	— 0,0110
5	— 0,0100	5,0	— 0,0182
10	— 0,0204	10	— 0,0219

Așa cum rezultă și din diagrame saltul de potențial la încărcare față de potențialul de repaus al fiecărei reacții considerată individual, nu depășește 0,2 V. Densitatea de curent s-a raportat la suprafața aparentă a electrodului poros.

Saltul de potențial față de potențialul de repaus pentru reacția de descărcare nu este mai mare de 0,018 V la o viteză a reacției de 5 mA/cm². În acest domeniu curba satisface relația liniară Tafel.

Densitatea curentului de schimb i_0 se calculează după punctele de pe curbele de polarizare folosind formula :

$$i_0 = \frac{RT}{F}\left(\frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\partial i_a}{\partial \eta}\right)_{\eta \to 0}, \tag{2}$$

unde n este numărul electronilor cuprinși în procesul de electrod luat în mod arbitar și ν este numărul stoechiometric.

Presupunînd că $\nu = n$, rezultă :

$$i_0 = 0{,}0257\left(\frac{\partial i_a}{\partial \eta}\right)_{\eta \to 0}, \tag{3}$$

care furnizează o valoare de 16,06 mA/cm² față de suprafața geometrică a electrodului poros.

Această valoare coincide satisfăcător cu cea găsită din curba de polarizare a electrodului de zinc și de brom de către alți cercetători [7].

3. Viteza de reacţie a procesului $AgO \rightarrow Ag_2O$

Este cunoscut din cinetica electrochimică [4]...[6], [12], faptul că atunci cînd un curent străbate un electrod care este în contact cu o soluţie, acesta poate fi considerat ca rezultînd din doi curenţi parţiali

$$|i_c| = \vec{i} - \overleftarrow{i}, \tag{4}$$

cînd electrodul funcţionează drept catod şi

$$|i_a| = \overleftarrow{i} - \vec{i} \tag{4'}$$

cînd electrodul funcţionează drept anod ; $\vec{i}$ reprezintă curentul de reducere şi $\overleftarrow{i}$ curentul de oxidare. Atunci cînd electrodul nu este străbătut de curent, $|i| = \vec{i} = \overleftarrow{i} = i_0$, reprezentînd curentul de schimb, o constantă deosebit de importantă în ceea ce priveşte cinetica reacţiei de electrod.

De exemplu, pentru un proces redox obişnuit

$$Fe^{3+} + e \rightleftarrows Fe^{2+},$$

viteza netă a reacţiei (v) în care are loc transferul de sarcină poate să fie scrisă sub forma

$$v = \frac{i}{nF} = k_a \exp\left[\frac{(1-\alpha)\, nF\Delta E}{RT}\right] C_{Fe^{3+}} - k_c \exp\left(\frac{-\alpha nF\Delta E}{RT}\right) C_{Fe^{3+}}, \tag{5}$$

unde i reprezintă densitatea de curent pe unitatea de suprafaţă şi este luat pozitiv pentru o reacţie anodică, iar $C_{Fe^{2+}}$ şi $C_{Fe^{3+}}$ sînt concentraţiile reactanţilor la suprafaţa electrodului.

Constantele k_a şi k_c depind de un potenţial arbitrar faţă de care este măsurată ΔE.

Pentru înlăturarea arbitrarului se foloseşte potenţialul de echilibru al sistemului respectiv. În acest caz $i = 0$ şi $\Delta E = \Delta E_r$, iar concentraţiile reactanţilor la suprafaţa electrodului sînt egale cu cele din masa soluţiei, care se notează cu $C^m_{Fe^{2+}}$ şi $C^m_{Fe^{3+}}$.

Deşi nu există o reacţie netă, echilibrul este dinamic şi vitezele reacţiei anodice şi catodice sînt egale cu curentul de schimb :

$$\frac{i_0}{nF} = k_c \exp\left(\frac{-\alpha nF\Delta E_r}{RT}\right) C^m_{Fe^{3+}} - k_a \exp\left[\frac{(1-\alpha)\, nF\Delta E_r}{RT}\right] C^m_{Fe^{2+}}, \tag{6}$$

deci :

$$\exp\left(\frac{nF\Delta E_r}{RT}\right) = \frac{k_c C^m_{Fe^{3+}}}{k_a C^m_{Fe^{2+}}} \tag{7}$$

şi curentul de schimb poate fi exprimat sub forma :

$$(8) \qquad \frac{i_0}{nF} = k_c^{1-\alpha} k_a^{\alpha} (C^m_{Fe^{3+}})^{(1-\alpha)} (C^m_{Fe^{2+}})^{\alpha} = k_s (C^m_{Fe^{3+}})^{(1-\alpha)} (C^m_{Fe^{2+}})^{\alpha}$$

sau

$$(9) \qquad i_0 = nFk_s (C^m_{Fe^{3+}})^{(1-\alpha)} (C^m_{Fe^{2+}})^{\alpha},$$

relație cu ajutorul căreia se poate determina constanta standard a vitezei de reacție.

De această relație ne-am folosit pentru a determina constanta de viteză a reacției de reducere a AgO la Ag_2O, reacție care are loc la un potențial standard de + 0,604 V.

În baza ipotezei făcute mai sus și anume că $n = 1$ și $\alpha = 0,5$, admițînd $i_0 = 16$ mA/cm², se obține o constantă de viteză $k = {}_s188.10^{-6}$ cm sec^{-1}. Valoarea lui i_0 poate servi ea însăși drept constantă de viteză și introdusă în relația (6) furnizează, înlocuind cu η pe ΔE, relația (1).

4. Concluzii

În aceleași condiții pentru procesul $Ag_2O \rightleftarrows 2Ag$ curentul de schimb i_0 s-a determinat din diagrama din fig. 1 fiind egal cu 0,725 μA.

Folosind procedeele cineticii proceselor de electrod s-au calculat pantele Tafel, după formulele :

$$(10) \qquad \eta = \beta_a \log \frac{\overleftarrow{i_x} + \overrightarrow{i}_{Ag^+}}{i_0}, \quad \eta = \beta_c \log \frac{\overrightarrow{i_x} + \overleftarrow{i}_{Ag^0}}{i_0}$$

pentru procesul $Ag_2O \rightleftarrows 2Ag$, care la curenți anodici și catodici intensi se reduc la

$$(11) \qquad \eta = \beta_a \log \frac{\overleftarrow{i_x}}{i_0}, \quad \eta = \beta_c \log \frac{\overrightarrow{i_x}}{i_0},$$

deoarece reacția inversă devine neglijabilă în comparație cu reacția directă.

Rezultă pantele Tafel $\beta_a = 0,275$ V și $\beta_c = 0,456$ V, calculate referitor la descompunerea hidrogenului pe electrodul compact.

Numărul stoechiometric ν s-a calculat din relația cunoscută din literatură [6] :

$$\nu = \frac{nF}{6RT} \cdot \frac{\beta_a \beta_c}{\beta_a + \beta_c}.$$

Rezultă un număr stoechiometric $\nu = 2{,}86$ ceea ce arată că stoechiometria reacţiei de oxidare $Ag \rightarrow Ag_2O$ are un număr stoechiometric apropiat de 3.

Numărul stoechiometric mai potrivit ar fi 2, care ar corespunde mecanismului propus de Dirkse [2]:

$$Ag \rightarrow Ag^+ + e, \quad Ag^+ + 2OH^- \rightarrow Ag(OH)_2^-,$$
$$2Ag(OH)^- \rightarrow Ag_2O + 2OH^- + H_2O$$

sau

$$Ag(OH)_2^- \rightarrow AgO + H_2O + e.$$

Primită la 6 V 1967

Academia generală militară, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. André H., Bull. Soc. Franc. Electr., 1941, **1**, p. 132.
2. Dirkse T. P., J. Electrochem. Soc., 1959, **106**, p. 920.
3. Lică S., Ştefănescu M., Electronica, 1963, *3*, p. 98.
4. Rhyne J., Y. R. Wadd Report-Tech., Ad *61—36*, 1961, Pr. 3145.
5. Green S. B., Green N. D., Scientific Report A. F. *19 (604)*, 8377, 1962.
6. Stern M., Geary A. L., J. Electrochem. Soc. 1957, **104**, *1*, p. 56.
7. Barnardt S.. Forjt D. A., J. Electrochem. Soc., 1964, **111**, *11*, p. 1201.
8. Devanathan M. A., O'M. Bockris J., Mehl W., J. Electroanal. Chem., 1959, **12**, p. 143.
9. Amlie R., Rüetschi P., J. Electrochem. Soc., 1961, **108**, *9*, p. 813.
10. Ganea I., Lică S., Comunicare prezentată la conferinţa A.M.G., dec. 1966.
11. Burlacu I., Lică S., Bul. Acad. Mil. Gen., 1965, 2, p. 55.
12. Hampel — Clifford, *The Enciclopedia of Electrochemistry*. 1964, p. 434.

VITESSE DE RÉACTION D'OXYDATION DE L'ARGENT DANS UNE SOLUTION DE HIDROXYDE DE POTASSIUM

(Résumé)

On présente les données concernant la détermination des paramètres des réactions d'oxydation de l'argent en AgO et Ag_2O et on détermine les pantes Tafel β_a et β_c pour la réaction d'oxidation $Ag \rightarrow Ag_2O$.

Explications des figures

Fig. 1. — Dépendence de η en fonction du logarithme de la densité du courant.
Fig. 2. — Représentation de la fonction $E = f(t)$ pour $i = \text{const} = 100\ \mu A$.
Fig. 3. — Les droites $\eta = f(i)$ rapportées à la surface apparente de l'électrode poreux.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 535.243 ; 661.8

STUDIUL SPECTROFOTOMETRIC AL COMBINAŢIEI COMPLEXE A Fe III CU VANILINA

DE

JULIETA LINDE şi MARIA APOSTOLESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Reacţiile ionului feric cu derivaţii aromatici cu grupări funcţionale capabile de a forma combinaţii complexe, au fost studiate în ultima vreme [1]...[17]. Complecşii obţinuţi fiind coloraţi, a fost posibilă studierea lor prin metode fotocolorimetrice şi spectrofotometrice.

Weinland şi colaboratorii [18], indică formarea unui compus complex solid, de culoare roşie, între acetatul bazic de fier III şi vanilină în mediu alcalin, soluţiile de reactivi fiind preparate în alcool absolut. Ei ajung la concluzia că compusul care se formează are următoarea compoziţie : 1 Fe : 5 vanilină : 2 K şi 1 Fe : 10 vanilină : 2,5 NaOH. Compoziţia lor s-a stabilit prin analiză elementară.

Vanilina (3.metoxi-4. hidroxi-benzaldehida) s-a întrebuinţat în ultima vreme ca reactiv analitic pentru determinarea unor cationi [19], în urma formării unor combinaţii complexe.

Deoarece în literatura consultată nu s-au găsit studii referitoare la sistemul Fe III-vanilină în soluţie apoasă, în lucrarea de faţă ne-am propus să cercetăm interacţiunea dintre aceşti componenţi în condiţiile semnalate mai sus. În studiul prezent s-a folosit metoda spectrofotometrică precum şi pH-metrică.

2. Partea experimentală

a) *Soluţii.* S-a folosit soluţie de $FeCl_3$, a cărei concentraţie s-a determinat prin metoda gravimetrică, şi soluţie de vanilină, de marcă Merck. Soluţiile s-au realizat în apă bidistilată, ambele avînd o concentraţie de $4{,}23 \cdot 10^{-2}$ mol/l.

b) *Aparatura.* Determinările spectrofotometrice s-au efectuat cu un spectrofotometru universal Zeiss Jena VSU 1, folosind o cuvă de sticlă de grosime 0,499 cm. pH-ul soluțiilor s-a măsurat cu pH-metrul MV 11, cu electrod de sticlă.

3. Rezultate și discuții

a) *Natura complexului* s-a pus în evidență prin culoarea sa albastru închis, în soluția care conține Fe III-vanilină, și care s-a studiat prin metoda Vosburgh și Cooper [20]. Rezultatele obținute sînt redate în fig. 1. Din graficul variației extincției cu lungimea de undă, pentru amestecurile dintre componenți avînd proporțiile 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, 1 : 5, 1 : 6, se constată că pentru toate aceste proporții, se obține un maxim al extincției, în jurul lungimii de undă $\lambda = 570$ nm, ceea ce indică formarea unui singur complex în soluție. Trebuie de specificat că la această lungime de

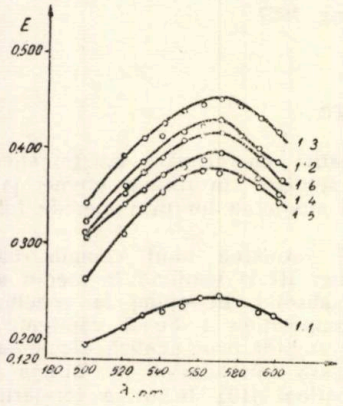


Fig. 1

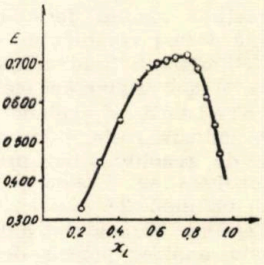


Fig. 2

undă, extincția, atît a soluției de $FeCl_3$ cît și a celei de vanilină, este practic neglijabilă și deci, existența unui maxim apreciabil al extincției se datorește formării unei combinații complexe. Toate determinările experimentale s-au efectuat imediat după prepararea amestecurilor, întrucît compusul obținut după 30...40 min se tulbură datorită separării unui precipitat.

b) *Influența pH-ului.* Stabilitatea culorii complexului este influențată de pH-ul soluției. Experimental s-a constatat că domeniul optim de existență a complexului este cuprins între 2,0 și 3,0 unități pH.

c) *Compoziția complexului* s-a stabilit prin mai multe metode [21]. Toate determinările spectrofotometrice s-au efectuat la $\lambda = 570$ nm.

1° *Metoda variaţiilor continue* (J o b) [22]). Se folosesc soluţii echimolare de concentraţie $4{,}23.10^{-2}$ mol/l. Volumul total al amestecurilor s-a menţinut constant (20 cm^3). Rezultatele obţinute sînt redate în fig. 2. Din grafic se constată că maximul extincţiei este realizat aproximativ la fracţia molară a Fe III de 0,25, ceea ce indică formarea unui complex cu compoziţia Fe : vanilină în proporţie 1 : 3.

2° *Metoda raportului molar* [23]. Principiul acestei metode constă în menţinerea constantă a concentraţiei Fe III şi variaţia treptată a ligandului; volumul amestecurilor s-a menţinut constant (25 cm^3) prin adăugarea de apă. pH-ul soluţiilor a fost cuprins între 2,0 şi 2,6; în acest domeniu extincţia nu variază cu pH-ul, de aceea nu a fost necesară adăugarea unui tampon. Rezultatele obţinute sînt redate în graficul din fig. 3. Din studiul graficului se observă o schimbare a pantei la raportul molar de 1 : 3.

3° *Metoda dreptelor* (E. A s m u s [24]). Modul de lucru este acelaşi ca şi în cazul metodei raportului molar, cu deosebirea că datele experimentale sînt reprezentate în sistemul de coordonate $1/m$, exprimat în cm, şi $1/v^n.10^{-2n}$, exprimat în l^{-n}. Rezultatele experimentale sînt redate în tabelul 1 şi reprezentarea grafică a lor în fig. 4.

Tabelul 1

Nr. crt.	v cm^3	E	$\frac{1}{m} = \frac{d}{E}$ cm	$\frac{1}{v}10^{-2}$ l^{-1}	$\frac{1}{v^2}10^{-4}$ l^{-2}	$\frac{1}{v^3}10^{-6}$ l^{-3}	$\frac{1}{v^4}10^{-8}$ l^{-4}
1	2	0,072	6,93	5	25	125	625
2	4	0,133	3,75	2,5	6,25	15,31	39,0
3	6	0,192	2,598	1,66	2,77	4,63	7,716
4	7	0,214	2,33	1,42	2,04	2,91	4,16
5	8	0,230	2,17	1,250	1,562	1,953	2,441
6	8,5	0,245	2,036	1,176	1,384	1,638	1,915
7	9	0,258	1,93	1,11	1,234	1,373	1,524
8	9,5	0,270	1,848	1,053	1,107	1,166	1,228
9	10	0,282	1,770	1,000	1,000	1,000	1,000
10	10,5	0,293	1,705	0,952	0,9070	0,8638	0,823
11	11	0,304	1,641	0,909	0,826	0,751	0,680
12	11,5	0,308	1,620	0,869	0,756	0,657	0,572
13	12	0,318	1,579	0,833	0,696	0,576	0,482
14	13	0,345	1,446	0,769	0,590	0,455	0,356

v_0 = 2 cm^3 $FeCl_3$ de concentraţie $4{,}23.10^{-2}$ M + v cm^3 vanilină, de concentraţie $4{,}23.10^{-2}$ M. Volumul total 25 cm^3, λ = 570 nm, d=0,499 cm, referinţă apa bidistilată.

Din fig. 4 se observă că pentru $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ valorile obţinute se distribuie pe curbe care prezintă inflexiuni, iar pentru $n = 3$ datele corespund unei drepte, ceea ce indică, conform ipotezelor lui

E. Asmus, formarea unui complex cu proporţia între componenţi de 1 : 3.

4° *Determinarea compoziţiei prin metoda pH-metrică.* S-a folosit metoda titrării pH-metrice ; datele experimentale sînt prezentate în graficul din fig. 5, în coordonatele cm^3 ligand — $\Delta pH/\Delta V$. Din studierea graficului se observă un maxim pronunţat pentru proporţia 1 : 3 (Fe : vanilină).

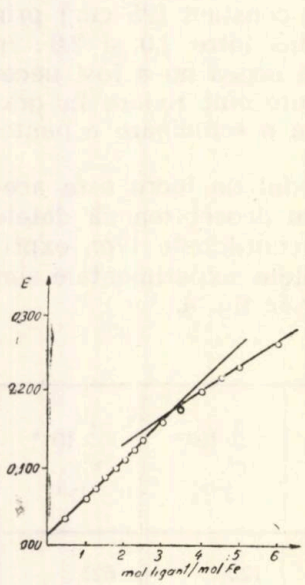


Fig. 3

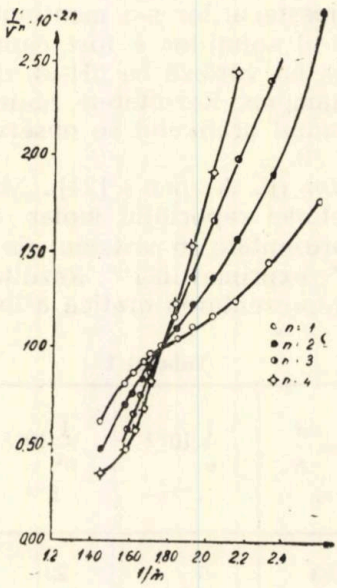


Fig. 4

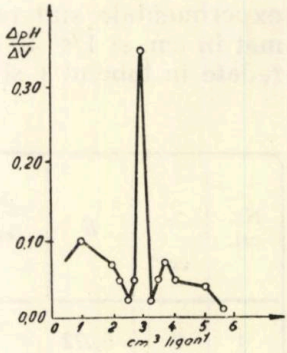


Fig. 5

Din metodele folosite pentru determinarea compoziţiei se ajunge la concluzia că are loc formarea unui compus complex cu proporţia între componenţi de 1 : 3 (Fe : vanilină).

Calculul constantei de instabilitate s-a efectuat prin două metode şi anume :

a) Pornind de la datele obţinute prin metoda variaţiei continue se consideră că complexul disociază după ecuaţia :

$$AB_n \rightleftarrows A + nB,$$

(1)	C	0	0	concentraţia iniţială
	$C(1-\alpha)$	αC	$n\alpha C$	concentraţia la echilibru

în care : C — concentraţia iniţială, α — gradul de disociere.

Din metoda variaţiei continue rezultă

$$\alpha = \frac{E_{mt} - E_{mexp}}{E_{mt}},$$

unde: E_{mt} reprezintă extincţia maximă teoretică determinată din intersecţia tangentelor duse la cele două ramuri ale curbei din fig. 2, iar E_{mexp} — extincţia maximă determinată experimental.

Se obţine $\alpha = 0{,}1676$.

Constanta de instabilitate din ecuaţia (1) are expresia:

$$K = \frac{(\alpha c)\,(n\alpha c)^n}{c\,(1-\alpha)}. \tag{2}$$

Introducînd datele numerice în ecuaţia (2) se obţine valoarea $K = 1{,}937 \cdot 10^{-6}$.

b) Folosind metoda dreptelor [24] constanta de instabilitate s-a determinat din ecuaţia dedusă din relaţia propusă de E. Asmus:

$$\frac{1}{v^n} = \frac{a_0 v_0 b_0^n \varepsilon}{v^{n+1} K_c} \cdot \frac{1}{m} - \left(\frac{b_0}{V}\right) \frac{1}{K_c}; \tag{3}$$

din această expresie, care reprezintă ecuaţia unei drepte, dreapta $\frac{1}{v^n} = f\left(\frac{1}{m}\right)$ intersectează axa odronatelor la $-\left(\frac{b_0}{V}\right)^n \frac{1}{K_c}$, de unde rezultă

$$K_c = -\left(\frac{b_0}{V}\right)^n v^n. \tag{4}$$

Valoarea lui $-1/v^n$ se poate obţine grafic prin ordonata la origine; valoarea astfel găsită este de $-3{,}15 \cdot 10^{-6}\, l^{-3}\, cm^{-1}$, obţinută într-un alt grafic la o scară mai mare decît cea din fig. 4. Din graficul din fig. 4 valoarea lui $-1/v^n$ se obţine din produsul dintre panta dreptei şi valoarea lui $1/m$ cînd $1/v^n = 0$.

Panta dreptei este

$$M = \frac{2{,}03.10^6}{2{,}20 - 1{,}34} = 2{,}3604.10^6\ l^{-3}\ cm^{-1}$$

iar

$$\frac{1}{m} = 1{,}34\ cm.$$

Rezultă

$$-\frac{1}{v^3} = 1{,}34.\ 2{,}3604.10^6 = 3{,}1629.10^6\ l^{-3}.$$

Deci

$$K_c = -\left(\frac{4{,}23.10^{-2}}{25.10^{-3}}\right)^3 \frac{1}{3{,}1629.10^6} = 1{,}531.10^{-6}\ mol^3\, l^3.$$

4. Concluzii

1. S-a studiat atît prin metoda spectrofotometrică cît şi prin metoda pH-metrică compusul complex care se formează în soluţie apoasă între Fe III şi vanilină.

2. Compoziţia complexului dedusă prin toate metodele folosite este de 1 : 3 (Fe : vanilină).

3. S-a calculat valoarea constantei de instabilitate prin două metode iar valorile obţinute sînt destul de apropiate : $K = 1{,}531 \cdot 10^{-6}$ $K = 1{,}937 \cdot 10^{-6}$.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Divekar K. G., J. Sci. Ind. Res. B. Indian, 1962, **21**, 7, p. 309.
2. Katiyar S. S., Chauban V. B. S., J. Inorg. Nucl. Chem., 1963, **25**, *11*, p. 1375.
3. — Bul. Soc. Chem., 1963, **323**, *1—2*, S. 28.
4. Vareille L., Bull. Soc. Chim. Fr., 1955, *6*, p. 870.
5. — Bull. Soc. Chim. Fr., 1955, *6*, p. 872.
6. Laniri S. C., Aditya S., Z. phys. Chem., 1962, **41**, *3—4*, S. 173.
7. Ripan R., Kiss-Imreh G., Szekely Z., St. cerc. chim., 1965, **13**, *10*, p. 1001.
8. Spacu P., Popescu S., St. cerc. chim. 1961, **9**, 2, p. 367.
9. Dick I., Murgu N., Rev. Chimie, 1964, **15**, p. 757.
10. Folley R. T., Anderson R. C., J. Amer. Chem. Soc., 1948, **70**, p. 1195.
11. Seth R. L., Dey K., J. Indian Chem. Soc., 1962, **39**, *11*, p. 773.
12. Bhardwaj S. D., Bakore G. V., J. Indian Chem. Soc., 1961, **38**, *12*, p. 967.
13. Desai N., Indian J. Chem., 1966, **4**, 5, p. 218.
14. Jatkar S. K. K., Divekar K. G., Indian. J. Chem., 1963, **1**, *9*, p. 372.
15. Jain B. D., Singh H. B., J. Indian. Chem. Soc., 1963, **40**, *4*, p. 263.
16. Cammersan H., Poris M., Merlin J. C., C. R., Ac. Sci., Paris, 1963, **255**, *21*, p. 2772.
17. Banerji S. K., Z. anorg. allg. Chem., 1962, **315**, *3—4*, S. 229.
18. Weindland R. F., Neff H., Archiv der Pharmazie, 1914, **252**, S. 606.
19. Jaid B. D., Singh J. J., Proced. Indian. Acad. Sci. 1966, **A 64**, *3*, p. 182.
20. Vosburgh W. C., Cooper G. R., J. Amer. Chem. Soc., 1941, **63**, 2, p. 437.
21. Horvey A. E., Manning D. L., J. Amer. Chem. Soc., 1950, **72**, p. 4488.
22. Job P., Ann. Chim., (10), 1928, **9**, p. 113.
23. Joe I. H., Jones A. L., Ind. Engr. Chem. Analyt., 1944, **16**, p. 111.
24. Asmus E., Hinz U., Ohes K., Z. Analyt. Chemie, 1960, **178**, S. 104.

ÉTUDE SPECTROPHOTOMÉTRIQUE DU COMPLEXE Fe (III)-VANILLINE

(Résumé)

Or a étudié par les méthodes spectrophotométrique et pH-métrique le complexe obtenu à partir de Fe (III) et 3.méthoxy-4.hydroxy-benzaldéhyde (vanilline) en solutions aqueuses.

La composition du complexe établie par ces méthodes est de 1 : 3 (Fe : vanilline).

On a calculé la constante d'instabilité par deux méthodes différentes au moyen des données d'absorption ; les valeurs obtenus sont voisines : $K = 1{,}531 \cdot 10^{-6}$ $K = 1{,}937 \cdot 10^{-6}$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ.

C. Z. 552.52 ; 541.183.2

CERCETĂRI ASUPRA PROPRIETĂŢILOR ADSORBANTE ALE UNOR ARGILE DIN ÎMPREJURIMILE ORAŞULUI SIRET

DE

CORNELIA BOTEZ, RODICA SMOCOT, V. ERHAN
şi BICA IONESI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1] s-a precizat chimismul sedimentelor ce formează complexul argilo-nisipos dezvoltat în regiunea Vicşani—oraşul Siret—Grămeşti, judeţul Suceava.

În componenţa argilelor din complexul menţionat s-a semnalat, cu această ocazie, alături de o serie de alte minerale argiloase şi prezenţa montmorilonitului. După cum este cunoscut montmorilonitul este componentul principal al argilelor de tip bentonitic şi subbentonitic. Dat fiind întrebuinţările multiple ale acestor argile, cu intenţia de a aprecia tipul de argilă şi de a procura date pentru alegerea celor mai indicate utilizări, ne-am propus să studiem, din punct de vedere mineralogic şi fizico-chimic, argilele ce formează complexul menţionat.

2. Date experimentale şi discuţii

2.1. Caracteristicile mineralogice şi fizico-chimice ale argilelor

Cercetările efectuate prin spectroscopie în IR şi microscopie electronică nu ne-au permis să ne pronunţăm cu certitudine asupra prezenţei montmorilonitului [1]. Deoarece analiza termică diferenţială dă posibilitatea determinării compoziţiei produselor poliminerale fin disperse chiar atunci cînd rezolvarea acestei probleme este dificilă prin alte

metode, am apelat, pentru elucidarea compoziţiei mineralogice a argilelor, la această metodă.

Pentru analiză granulometrică — metoda Atteberg — s-a separat din fiecare probă de argilă, fracţiunea fină cu diametrul particulelor sub 0,002 mm. Aceste fracţiuni, conţinînd mineralele argiloase, au fost cercetate prin DTA. În fig. 1 sînt reprezentate curbele obţinute în intervalul de temperatură 20°...1 000°C. După cum rezultă din grafic (fig. 1), toate curbele scot în evidenţă trei procese principale.

Primul efect endoterm, foarte intens, cu maximul în jurul temperaturii de 180°C, este legat de pierderea apei adsorbite. Al doilea efect endoterm, mai puţin intens de cît primul, se datoreşte pierderii grupelor OH din reţea şi modificării parţiale a acesteia. Reacţia începe la 450°C şi are maximul de dezvoltare în intervalul 600°...700°C. În unele cazuri (probele *225, 209, 184, 182, 174*) apare un pic endoterm dublu, datorită prezenţei în cantitate mai însemnată a mineralelor din grupa hidromicelor. Cel de al treilea efect endoterm se observă în intervalul de temperatură 800°...900°C, nu are intensitate prea mare şi se poate datora unei distrugeri complete a reţelei mineralului argilos. Aceste date corelate cu cele din literatură [2] indică prezenţa montmorilonitului asociat cu minerale argiloase din seria hidromicelor.

Cercetînd în aceleaşi condiţii prin DTA un bentonit folosit pentru decolorare la rafinăria Brazi, în compoziţia căruia trebuie să existe în principal montmorilonitul, cît şi un pămînt decolorant indigen folosit la fabrica de ulei „Unirea", Iaşi, se constată că acestea prezintă curbe analoage celor obţinute pentru argilele studiate (fig. 2).

Analogiile obţinute prin DTA ne-au determinat să preconizăm utilizarea ca pămînturi adsorbante şi a argilelor din zona oraşului Siret. Conţinutul în fracţiune fină argiloasă, compoziţia mineralogică, mai exact preponderenţa unui anumit mineral argilos, gradul de carbonatare al rocii, valoarea pH-ului, determină cu precizie tipul de argilă şi deci posibilităţile de valorificare.

Analizînd datele din tabelul 1, în care sînt consemnaţi o serie de indici caracteristici ai argilelor, se constată că marea majoritate a probelor analizate sînt argile carbonatate, conţinutul în $CaCO_3$ variind între 9,31...17,39%, că au un caracter neutru pînă la slab bazic, iar raportul molar SiO_2/Al_2O_3 este cuprins între 4...5. Valorile acestui raport corespund mineralelor argiloase din seria hidromica-montmorilonit, fapt verificat prin spectroscopie în IR, microscopie electronică şi DTA. Conţinutul în fracţiune fină argiloasă, cu diametrul particulelor sub 0,002 mm. raportat la proba uscată fără $CaCO_3$, variază între 32,57... 47,84% şi corespunde caracterului de argilă pură sau argilă slab nisipoasă [3]. În baza acestor criterii argilele studiate pot fi considerate de tip subbentonitic.

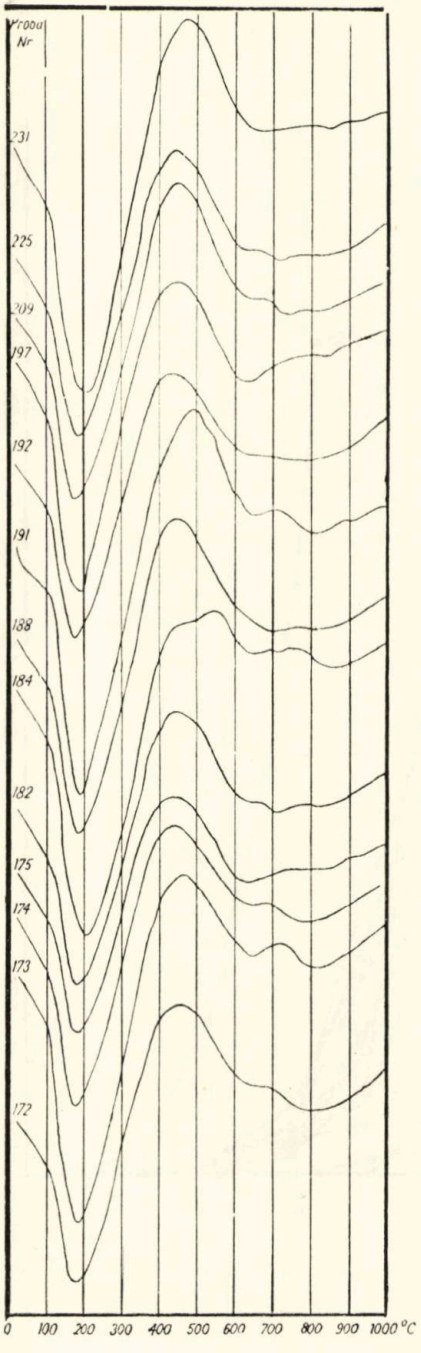


Fig. 1. — Curbele DTA pentru argilele din complexul argilo-nisipos, dezvoltat în regiunea Vicşani—Siret—Grămeşti.

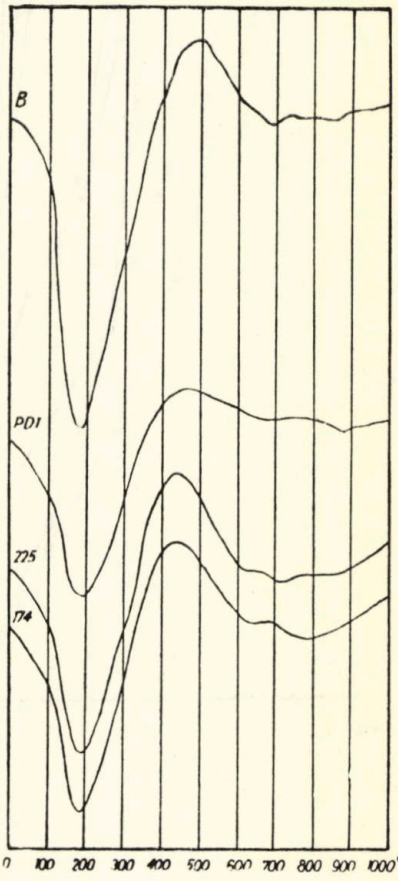


Fig. 2. — Curbe DTA — bentonit (B); pământ decolorant indigen PDI; argile *(174)*, *(225)*.

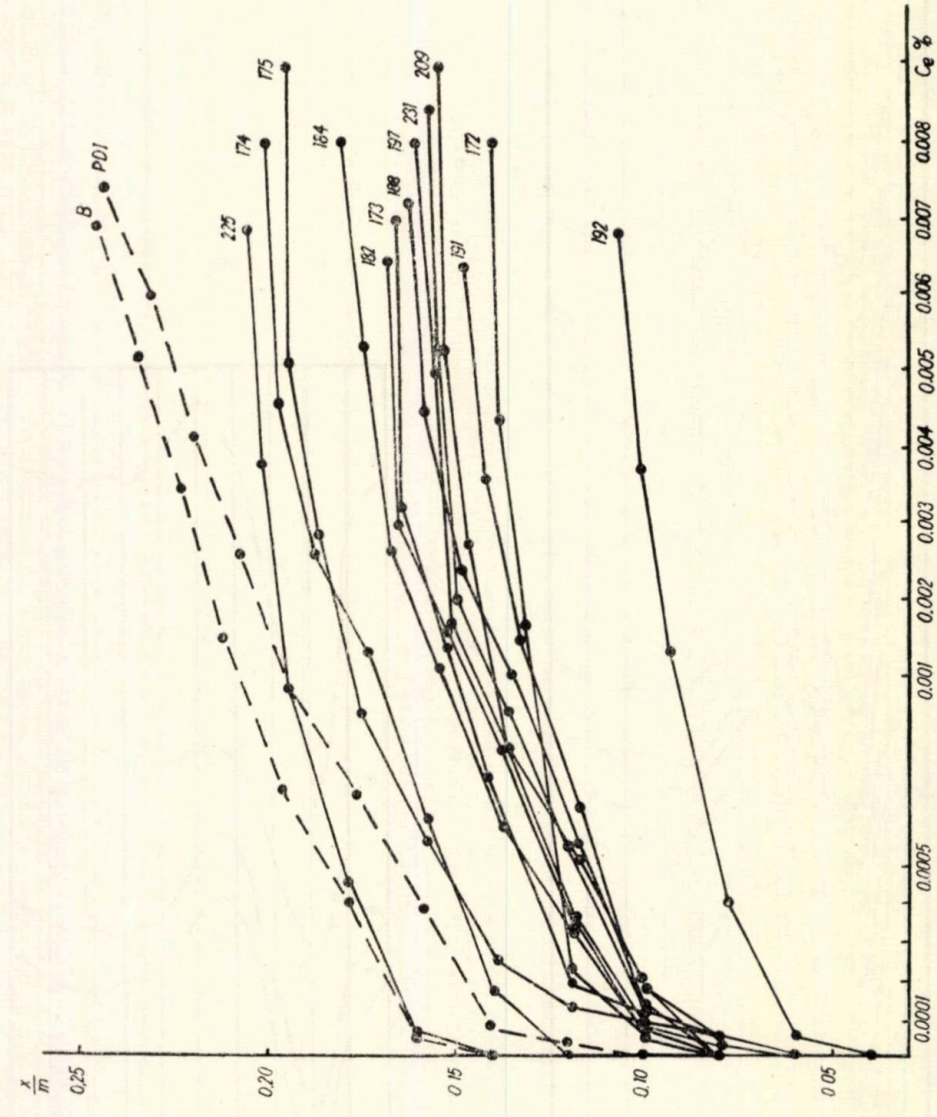


Fig. 3. — Izotermele de adsorbţie ale AM pe argile neactivate.

Tabelul 1

Indici caracteristici ai argilelor

Nr. probei	Denumirea rocii	Fracţiunea argiloasă >0,002 mm la proba uscată fără $CaCO_3$ %	Raport molar SiO_2/Al_2O_3	$CaCO_3$ %	pH
231	argilă	43,17	5,22	12,64	8,20
225	argilă	47,21	4,56	12,53	8,20
209	argilă slab nisipoasă	42,18	5,97	17,39	8,35
197	argilă	45,89	4,89	12,46	7,80
192	argilă slab nisipoasă	32,57	6,80	14,28	7,90
191	argilă slab nisipoasă	43,69	5,95	12,42	7,80
188	argilă slab nisipoasă	42,62	6,31	10,20	7,72
184	argilă	46,70	4,71	9,56	7,80
182	argilă	45,31	4,56	14,16	7,80
175	argilă	47,84	4,95	9,31	7,65
174	argilă	47,15	4,60	9,64	7,70
173	argilă	45,73	4,47	13,92	7,88
172	argilă	41,75	4,96	17,05	7,92

2.2. Capacitatea de adsorbţie

Argilele cercetate fiind de tip subbentonitic, am considerat ca fiind cel mai indicat să analizăm proprietăţile adsorbante, adică cele mai importante proprietăţi ale acestui tip de argilă. În acest scop se cercetează capacitatea lor de schimb cationic faţă de albastru de metilen (AM) în soluţie apoasă şi desorbţia cationilor de schimb cu soluţie 0,05 *n* HCl.

Determinarea puterii adsorbante pentru albastru de metilen (AM) s-a efectuat conform indicaţiilor din literatură [2], la temperatura de 20°C, în domeniul concentraţiilor cuprinse între 0,056...0,008% AM, concentraţiile de echilibru variind între 0,0107...0,00003% AM. Pentru comparaţie s-au cercetat în aceleaşi condiţii un bentonit (B) şi un pământ indigen (PDI).

Analizînd izotermele de adsorbţie ale AM pe argile neactivate (fig. 3), rezultă că cele mai bune calităţi adsorbante, apropiate de probele luate ca termen de comparaţie, le prezintă probele *225*, *174* şi *175*. La aceste argile proprietăţile adsorbante cresc simţitor prin activare acidă cu HCl, sau activare prin sedimentare. În fig. 4 se reprezintă izotermele de adsorbţie în cele două tipuri de activare.

Argilele cu calităţi adsorbante superioare au, după cum rezultă din tabelul 1, conţinuturile cele mai ridicate în fracţiune argiloasă — în jur de 47% — şi au valorile cele mai reduse ale raportului molar

SiO_2/Al_2O_3, cuprinse între 4...5, ceea ce indică analogii atît cantitative cît şi calitative referitoare la conţinutul de minerale argiloase. Gradul de carbonatare este minim, cu excepţia probei 225, care prezintă, posibil datorită acestui fapt, şi un pH slab bazic.

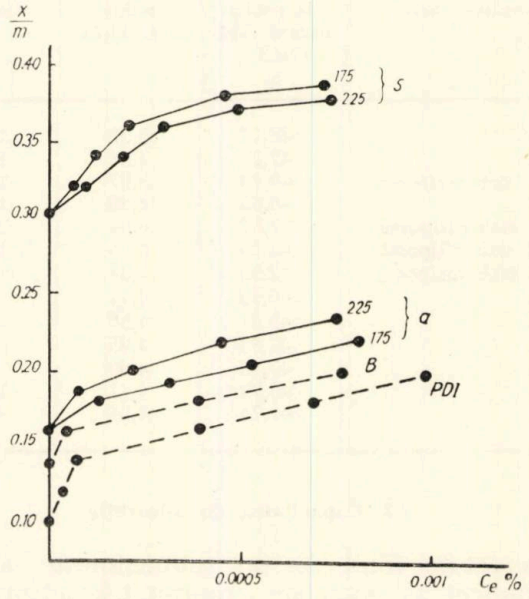


Fig. 4. — Izotermele de adsorbţie ale AM pe argile activate: *a* — activare acidă, *s* — activare prin sedimentare.

Cele mai slabe proprietăţi adsorbante le prezintă proba *192*, cu cel mai redus conţinut de fracţiune argiloasă — 32,57% — şi cu un grad de carbonatare destul de avansat — 14,28% $CaCO_3$.

Proprietăţile adsorbante ale celor trei probe de calitate superioară, 225, *174* şi *175*, s-au apreciat şi prin determinarea grafică a constantelor K şi $1/n$ din relaţia izotermei de adsorbţie a lui Freundlich, valabilă la limita de fază gaz-solid şi lichid-solid:

$$\frac{x}{m} = KC^{1/n},$$

în care x reprezintă cantitatea de substanţă adsorbită, m — cantitatea de adsorbant, C_e — concentraţia la echilibru, iar K şi $1/n$ două constante pentru un acelaşi cuplu adsorbent-fază adsorbită.

În tabelul 2 sînt consemnate datele experimentale şi calculele corespunzătoare încercărilor efectuate, agitînd cantităţi variabile de ar-

gilă, trecută prin sita cu ochiuri de diametrul 0,2 mm, cuprinse între 0,35...0,2 g adsorbent, cu 50 ml soluţie AM de concentraţie 0,04%. Valorile obţinute au servit la trasarea dreptelor logaritmice, necesare determinării constantelor K şi $1/n$.

Tabelul 2*)

Valori necesare determinării constantelor K şi $1/n$

Nr. probei	m	C_e	$\log C_e$	x	$\frac{x}{m}$	$\log \frac{x}{m}$
225	0,35	0,000025	$\bar{5}$,39794	0,019975	0,0570	$\bar{2}$,75587
	0,30	0,000030	5,47712	0,019970	0,0665	$\bar{2}$,82282
	0,25	0,000035	$\bar{5}$,54407	0,019965	0,0798	$\bar{2}$,90200
	0,20	0,000500	$\bar{4}$,69897	0,019500	0,0975	$\bar{2}$,98900
175	0,35	0,000014	$\bar{5}$,14613	0,019986	0,0571	$\bar{2}$,75664
	0,30	0,000075	$\bar{5}$,87506	0,019925	0,0664	$\bar{2}$,82217
	0,25	0,000400	$\bar{4}$,60206	0,019600	0,0784	$\bar{2}$,89209
	0,20	0,000950	$\bar{4}$,97772	0,019050	0,0952	$\bar{2}$,97772
174	0,35	0,000015	$\bar{5}$,17609	0,019980	0,0571	$\bar{2}$,75664
	0,30	0,000095	$\bar{5}$,97772	0,019900	0,0663	$\bar{2}$,82151
	0,25	0,000460	$\bar{4}$,66276	0,019540	0,0780	$\bar{2}$,89209
	0,20	0,001400	$\bar{3}$,14613	0,018600	0,0930	$\bar{2}$,96848
PDI	0,35	0,000030	$\bar{5}$,47712	0,019970	0,0570	$\bar{2}$,75587
	0,30	0,000050	$\bar{5}$,69897	0,019950	0,0665	$\bar{2}$,82282
	0,25	0,000310	$\bar{4}$,49136	0,019700	0,0788	$\bar{2}$,89597
	0,20	0,000700	$\bar{4}$,84510	0,019300	0,0965	$\bar{2}$;98453

*) m — cantitatea de adsorbent, C_e — concentraţia de echilibru, x — cantitatea adsorbită, x/m — masă adsorbită la unitatea de masă adsorbent.

În fig. 5 sînt reprezentate dreptele logaritmice, trasate în coordonate log C_e şi log (x/m) pentru probele 225, *174* şi *175*. Se constată că acestea sînt foarte apropiate de dreapta logaritmică obţinută pentru pămîntul decolorant indigen (PDI).

Comparînd valorile constantelor K şi $1/n$ ale PDI cu cele ale probelor analizate se remarcă, de asemenea, valori apropiate (tabelul 3).

Capacitatea de schimb cationic s-a apreciat şi prin metoda desorbţiei cu soluţie 0,05 n HCl. S-a folosit în acest scop metoda P. V. Zaharciuk [4]. Valorile obţinute sînt consemnate în tabelul 4.

Analizînd comparativ datele din tabelul 4, se constată valori apropiate mai mult de cele ale bentonitului, care se foloseşte în industria petrolieră ca pămînt decolorant. Acest fapt ne-a determinat să întreprin-

Tabelul 3

Valorile constantelor k şi 1/n

Nr. probei	K	$\frac{1}{n}$
PDI	0,316	0,160
225	0,316	0,163
175	0,335	0,146
174	0,354	0,140

Tabelul 4

Capacitatea de schimb cationic

Denumirea probei	Cantitatea de hidrogen adsorbită mval/100 g probă
Pământ decolorant indigen (PDI)	40,95
Bentonit brut (B)	37,10
Argilă *225*	27,30
Argilă *175*	23,80
Argilă *174*	24,90

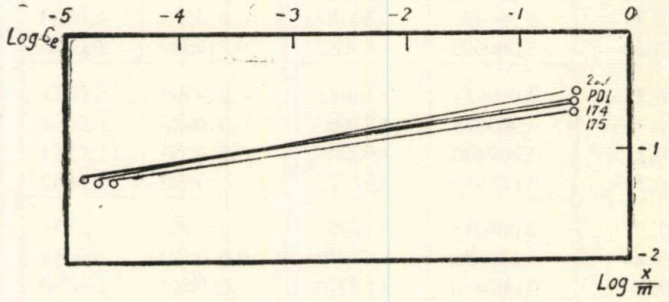


Fig. 5. — Dreptele logaritmice pentru probele 225, *174*, *175* şi PDI.

dem unele încercări asupra puterii decolorante, faţă de produsele petroliere.

2.3. Puterea de decolorare

Puterea de decolorare s-a determinat numai la probele 225 şi *174*, cu cei mai buni indici, folosind un ulei mineral nedecolorat. Ca termen de comparaţie s-a considerat un bentonit brut (B), folosit la rafinăria Brazi pentru purificarea unor produse petroliere.

Decolorarea s-a efectuat după prescripţiile STAS 2411-51, efectul decolorant apreciindu-se pe cale fotocolorimetrică. Se constată că proba 225 în stare neactivată are o putere de decolorare de 30% şi în stare activată o putere de decolorare de 65%. Proba *174* în stare neactivată prezintă valoarea de 38%, iar activată, 41%. Dacă luăm în considerare faptul că bentonita brută luată ca termen de comparare prezintă o putere de decolorare de 50%, se poate aprecia că argila 225 poate fi folosită ca pământ decolorant, de preferinţă în stare activată, iar argila *174* chiar în stare neactivată.

3. Concluzii

Argilele ce formează complexul argilo-nisipos dezvoltat în regiunea Vicşani — oraşul Siret — Grămeşti sînt roci de tip subbentonitic.

Mineralele argiloase ce intră în componenţa acestora s-au determinat prin analiză termică diferenţială şi se apreciază ca fiind din grupa montmorilonitului asociat cu hidromice.

Proprietăţi adsorbante bune prezintă argilele: 225, 175 şi 174. Puterea de decolorare a acestor probe, pe un ulei mineral, este comparabilă cu aceea a unui bentonit brut folosit la Brazi în acelaşi scop.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie generală,
şi
Universitatea „Al. I. Cuza", Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Botez C., Nichita Or., Ionesi B., Smocot R., Olaru D., Tarhon A., *Chimismul complexului argilo-nisipos din partea de nord a Platformei moldoveneşti — Siret, regiunea Suceava.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XI (XV), 3—4, pp. 197—208.
2. * * * *Методическое руководство по петрограф-минералогическому изучению глин.* Тр. ВСЕГЕИ, Госгеолтехиздат, М., 1957, стр. 270—290, 307—325.
3. Рухин Л. Б., *Основы литологии.* Госгеолтехиздат, М., 1953.
4. Петербургский А. В., *Практикум по агрономическом химии.* М., 1963, стр. 266—269.

RECHERCHES CONCERNANT LES PROPRIÉTÉS ADSORBANTES DE CERTAINES ARGILES AUX ENVIRONS DE LA VILLE SIRET

(Résumé)

À la suite des recherches effectuées par DTA, on a établi dans la composition des argiles la présence des minéraux argileux de la série montmorillonite-hydromica.

En raison de cette constitution minéralogique et de toute une série de caractères physico-chimiques, on a apprécié que les argiles constituant le complexe argilo-sablonneux développé dans la région Vicşani—Siret—Grămeşti, sont de type sub-bentonitique.

Étant donné les propriétés adsorbantes de ce type d'argile, on a déterminé la capacité d'échange cationique et le comportement envers les non-électrolytes.

Les argiles 225, 175 et 174 présentent de bonnes propriétés adsorbantes. La puissance décolorante de ces argiles, sur une huile minérale, est comparable à celui d'un bentonite utilisé à la raffinerie de Brazi, dans ce but.

Explication des figures

Fig. 1. — Courbes DTA pour les argiles du complexe argilo-sablonneux, développé dans la région Vicşani—Siret—Grămeşti.

Fig 2. — Courbes DTA — bentonite (B); terre décolorante indigène PDI; argiles *(225, 174)*.

Fig. 3. — Isothermes d'adsorbtion du bleu de méthylène sur des argiles non-activées.

Fig. 4. — Isothermes d'adsorbtion du bleu de méthylène sur des argiles activées; *a* — activation acide, *s* — activation par sédimentation.

Fig. 5. — Droites logarithmiques pour les argiles 225, *175*, *174* et terre décolorante indigène (PDI).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 661.183.28

SCHIMBĂTORI DE CATIONI DIN TURBA DE LA DERSCA-DOROHOI

DE

ELEONORA DIACONESCU şi FLORENTINA CHIRIAC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Într-o notă anterioară [1] s-au studiat pe cale chimică şi prin spectroscopia în infraroşu proprietăţile de schimb de ioni ale turbei din zăcămîntul Dersca-Dorohoi şi a acizilor humici obţinuţi din această turbă.

În lucrarea de faţă se continuă studiul asupra aceleaşi turbe : se cercetează condiţiile de obţinere de schimbători de cationi cu ajutorul acidului sulfuric şi se determină capacităţile de schimb de ioni a sulfocarbonilor obţinuţi.

2. Partea experimentală

Încercările s-au efectuat asupra turbei provenită din zăcămîntul Dersca-Dorohoi în prealabil sfărîmată şi sortată la dimensiunile 1,0... 1,2 mm, cu un conţinut de umiditate de 7...9%.

Introducerea şi crearea de grupe funcţionale capabile de schimb de ioni, s-a realizat prin tratarea turbei cu acid sulfuric concentrat $d=1{,}84$ şi cu acid sulfuric oleum (20% SO_3 liber), în proporţie de 1 : 10 în greutate, la temperaturi şi durate de reacţii diferite.

După terminarea operaţiei de sulfonare şi răcire a conţinutului reactorului, masa de reacţie era adusă în tranşe mici în apă distilată răcită cu gheaţă, după care urma spălarea pînă la completa îndepărtare a urmelor de acid sulfuric.

Schimbătorul de cationi obţinut era uscat în aer şi apoi eliberat prin cernere de particulele cu diametrul sub 0,5 mm. Capacităţile de schimb diferenţiate, corespunzătoare grupelor sulfonice şi carboxilice, determinate complexometric prin metoda statică, precum şi conţinutul procentual de sulf total a acestor schimbători sînt prezentate în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

Capacitatea de schimb a sulfocarbonilor obţinuţi din turba de la Dersca-Dorohoi, prin tratare cu acid sulfuric concentrat d=1,84, la temperaturi şi durate diferite de reacţie

Sulfocarboni obţinuţi la:		Capacitatea de schimb (mech/g)			Sulf activ % Sa	Carbon activ % Ca
Temperatura °C	Durata de reacţie ore	K_{SO_3H}	K_{COOH}	K_T		
100	1	0,25	1,15	1,40	0,80	1,38
100	3	0,40	1,30	1,70	1,28	1,56
100	5	0,48	1,39	1,87	1,54	1,67
150	1	0,27	1,58	1,85	0,86	1,89
150	3	0,30	1,66	1,96	0,96	1,99
150	5	0,41	1,72	2,13	1,31	2,06
200	1	0,23	1,82	2,05	0,736	2,18
200	3	0,25	2,17	2,42	0,80	2,60
200	5	0,33	2,38	2,71	1,05	2,85
250	1	0,27	1,24	1,51	0,86	1,49

Tabelul 2

Capacitatea de schimb a sulfocarbonilor obţinuţi din turba de la Dersca-Dorohoi, prin tratare cu acid sulfuric oleum (20% SO_3 liber), *la temperaturi şi durate diferite de reacţie*

Sulfocarboni obţinuţi la:		Capacitatea de schimb (mech/g)			Sulf activ % Sa	Carbon activ % Ca
Temperatura °C	Durata de reacţie ore	K_{SO_3H}	K_{COOH}	K_T		
100	1	0,25	1,46	1,71	0,80	1,75
100	3	0,32	1,81	2,13	1,02	2,17
100	5	0,42	1,79	2,21	1,34	2,15
150	1	0,20	1,89	2,09	0,64	2,27
150	3	0,22	1,98	2,20	0,70	2,38
150	5	0,30	2,14	2,44	0,96	2,57
200	1	0,18	2,48	2,66	0,58	2,97
200	3	0,21	2,69	2,90	0,67	3,22
200	5	0,26	2,78	3,04	0,83	3,34
250	1	0,16	1,38	1,54	0,51	1,66

Din analiza datelor cuprinse în aceste tabele reies o serie de concluzii, care pot fi astfel rezumate :

a) Schimbătorii de cationi obţinuţi prin tratarea turbei de Dersca-Dorohoi cu acid sulfuric concentrat, sau acid sulfuric oleum, prezintă o apreciabilă capacitate de schimb, datorită prezenţei atît a grupelor sulfonice cît şi a grupelor carboxilice. La aceeaşi temperatură de sulfonare dar la durate creascînde de tratare, capacitatea de schimb sulfonică creşte cu durata de sulfonare.

b) La temperaturi mai înalte de sulfonare, capacitatea de schimb sulfonică creşte de asemenea cu durata de sulfonare, dar valoarea ei rămîne inferioară celei de la temperaturi mai joase, ca urmare a unei hidrolize parţiale a grupelor sulfonice sub acţiunea acidului sulfuric şi a temperaturii.

În ambele cazuri capacitatea de schimb sulfonică are valori mici comparativ cu capacitatea de schimb carboxilică, care creşte atît cu durata cît şi cu temperatura de sulfonare în limitele de la 100°...200°C, ca urmare a creşterii acţiunii oxidante a acidului sulfuric în aceste condiţii, care conduce la crearea de noi grupe carboxilice, în afară de cele existente în turba iniţială [2].

La temperaturi de peste 200°C se constată o scădere a capacităţii de schimb carboxilică, ca urmare a descompunerii sau a anhidrizării grupelor carboxilice.

În continuare s-a cercetat modul de comportare a schimbătorilor de cationi obţinuţi din turba sulfonată în funcţie de pH-ul mediului în care se efectuează schimbul de cationi.

Tabelul 3

Dependenţa capacităţii de schimb totale a turbei sulfonate cu acid sulfuric oleum (20% SO_3 liber) *la temperaturile de* 100°C, 150°C *şi* 200°C, *timp de sulfonare* 3 *ore, funcţie de valoarea pH-ului*

Temperatura de sulfonare (°C)					
100		150		200	
pH	mechiv/g	pH	mechiv/g	pH	mechiv/g
3,5	0,32	3,2	0,40	3,0	0,51
5,0	0,51	5,3	0,95	5,3	1,35
7,2	1,25	7,0	1,51	7,1	2,10
9	2,0	8,65	2,35	8,5	2,80
11,1	3,1	10,5	3,4	10,6	3,65

Rezultatele determinărilor sînt date în tabelul 3 şi fig. 1, de unde se constată dependenţa ce există între capacitatea de schimb totală şi pH-ului mediului de schimb, ceea ce indică existenţa în turba sulfonată

a grupelor slab acide, capabile de schimb de ioni. Valorile mari ale capacităţii de schimb totale la pH-uri mai mari ca 7 sînt consecinţa grupelor fenolice existente în nucleele aromatice ale substanţei turbei şi care la pH-uri ridicate pot participa la schimbul de cationi

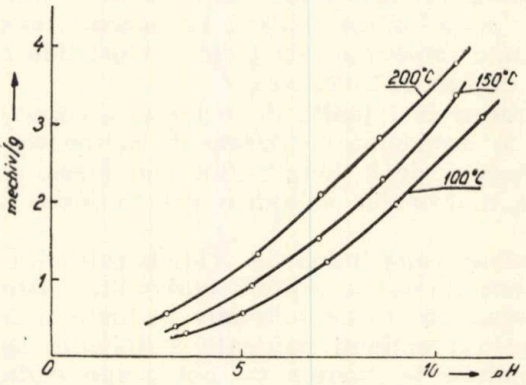


Fig. 1. — Dependenţa capacităţii de schimb totale a turbei sulfonate cu acid sulfuric oleum (20% SO_3 liber) la temperaturile de 100°C, 150°C şi 200°C, timp de sulfonare 3 ore, funcţie de valoarea pH-ului.

Analiza curbelor dependenţei capacităţii de schimb de valoarea pH-ului permite să se constate că în mediu neutru cea mai mare parte a capacităţii de schimb a turbei sulfonate se datoreşte grupelor sulfonice şi carboxilice ; menţinerea unei valori determinate a capacităţii de schimb în mediu acid, indică în compoziţia turbei sulfonate prezenţa grupelor sulfonice, grupe puternic acide, capabile de schimb de ioni. Curbele capacităţii de schimb (fig. 1) sînt aproape drepte, mai apropiate în mediu acid şi divergente în mediu neutru sau alcalin.

La cationiţii obţinuţi din turba sulfonată în ciclul de hidrogen prin tratare cu soluţie *N* de HCl sau în ciclul de sodiu prin tratare cu soluţie *N* de NaCl, s-a determinat capacitatea de schimb pentru diverşi cationi [3].

În acest scop s-a tratat schimbătorul de cationi provenit din turbă, cu soluţii 0,01, 0,02, 0,05 şi 0,1 *N* de azotaţi de Co, Ni, Sr, Cd şi Pb.

Capacitatea de schimb pentru aceşti cationi s-a determinat complexometric prin metoda statică, funcţie de concentraţia soluţiei întrebuinţate şi pentru un timp de contact al soluţiei cu schimbătorul de 24 ore. Rezultatele obţinute sînt date în tabelele 4 şi 5 şi în fig. 2 şi 3.

Din cercetarea acestor date rezultă că schimbul de ioni creşte odată cu concentraţia soluţiilor întrebuinţate şi cu creşterea greutăţii atomice a cationilor din seria : Co, Ni, Sr, Cd şi Pb.

Pentru ambele consideraţiuni, pentru plumb s-au obţinut valorile cele mai mari de schimb.

Capacitatea de schimb a cationiţilor în ciclul de sodiu este mai ridicată ca în ciclul de hidrogen.

Aceeaşi dependenţă a capacităţii de schimb faţă de aceşti cationi s-a observat şi la turba naturală [1].

Tabelul 4

Capacitatea de schimb pentru diverşi cationi a sulfocarbonului in ciclul de hidrogen, obţinut din turba de Dersca-Dorohoi, prn tratare cu acid sulfuric oleum (20% SO_3 liber) *la temperatura de* 150°C, *timp de sulfonare* 5 *ore*

Cationi schimbaţi	Concentraţiile soluţiilor utilizate			
	0,01 *N*	0,02 *N*	0,05 *N*	0,1 *N*
	Cantitatea de cationi schimbaţi mechiv/g			
Co	0,61	0,64	0,70	0,90
Ni	0,72	0,80	0,86	1,10
Sr	0,82	0,89	1,00	1,26
Cd	0,94	0,96	1,13	1,39
Pd	1,21	1,28	1,46	2,39

Tabelul 5

Capacitatea de schimb pentru diverşi cationi a sulfocarbonului in ciclul de sodiu, obţinut din turba de Dersca-Dorohoi, prin tratare cu acid sulfuric oleum (20% SO_3 liber) *la temperatura de* 150°C, *timp de sulfonare* 5 *ore*

Cationi schimbaţi	Concentraţiile soluţiilor întrebuinţate			
	0,01 *N*	0,02 *N*	0,05 *N*	0,1 *N*
	Cantitatea de cationi schimbaţi mechiv/g			
Co	0,84	0,90	1,04	1,30
Ni	0,97	1,0	1,10	1,42
Sr	1,12	1,18	1,29	1,62
Cd	1,32	1,40	1,52	1,91
Pb	1,49	1,60	1,92	2,94

De aesmenea s-au obţinut spectrele de absorbţie în domeniul infraroş, atît a turbei naturale, cît şi a cationiţilor obţinuţi din ea (fig. 4 şi 5).

Curba *1* reprezintă spectrul de absorbţie pentru turba naturală tratată cu soluţie de HCl 3%. Se remarcă 4 benzi de absorbţie : la

$\lambda = 9{,}6\ \mu$ (1 040 cm^{-1}), atribuită vibraţiei nucleului aromatic bisubstituit 1,4, la $\lambda = 6{,}85\ \mu$ (1 460 cm^{-1}) atribuită vibraţiei grupei CH_2 de deformaţie, $\lambda = 6{,}14\ \mu$ (1 600 cm^{-1}) şi $\lambda = 5{,}82\ \mu$ (1 700 cm^{-1}) datorită vibraţiei legăturii C = O şi COOH din grupele carboxilice.

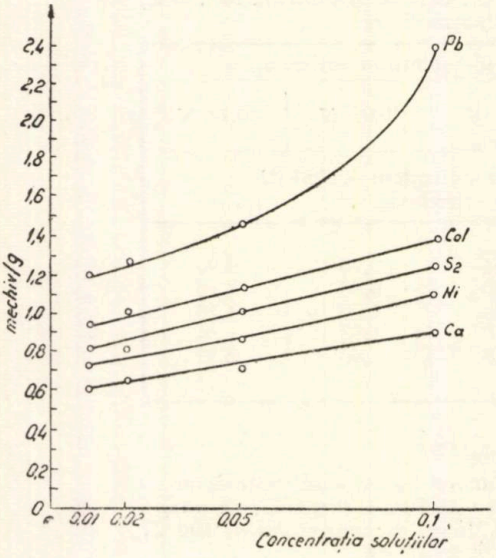


Fig. 2. — Capacitatea de schimb pentru diverşi cationi ai sulfocarbonului în ciclul hidrogen, obţinut din turba de Dersca-Dorohoi, prin tratare cu acid sulfuric oleum (20% SO_3 liber) la temperatura de 150°C, timp de sulfonare 5 ore.

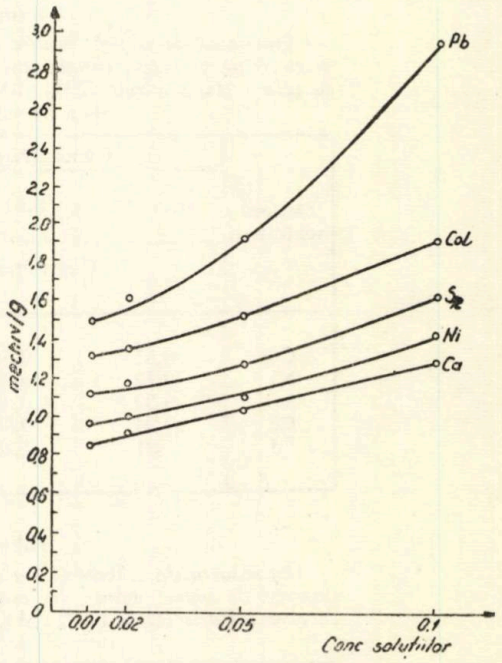


Fig. 3. — Capacitatea de schimb pentru diverşi cationi ai sulfocarbonului în ciclul de sodiu, obţinut din turba de Dersca-Dorohoi, prin tratare cu acid sulfuric oleum (20% SO_3 liber) la temperatura de 150°C timp de sulfonare 5 ore.

Curbele 2, 3, 4 şi 5 reprezintă spectrele de absorbţie pentru turba sulfonată la diferite temperaturi: 100°C, 150°C, 200°C şi respectiv 250°C, timpul de sulfonare fiind acelaşi (3 ore). La aceste curbe se constată benzi de absorbţie comune la: $\lambda = 12...11{,}6\ \mu$ (830...860 cm^{-1}) care corespund oscilaţiilor exterioare ale atomilor datorită vibraţiei de deformaţie a legăturii C=C aromatică; absorbde hidrogen în nucleele aromatice condensate; la $\lambda = 6{,}60\ \mu$ (1 510 cm^{-1}) ţiile de la $\lambda = 6{,}02...5{,}91\mu$ (1 660 ... 1 690 cm^{-1}) care corespund vibraţiei legăturii C = O şi COOH din grupele carboxilice legate de nucleul aromatic sînt mult mai intense ca acelea care corespund turbei originale (nesulfonată) şi cresc în intensitate odată cu creşterea

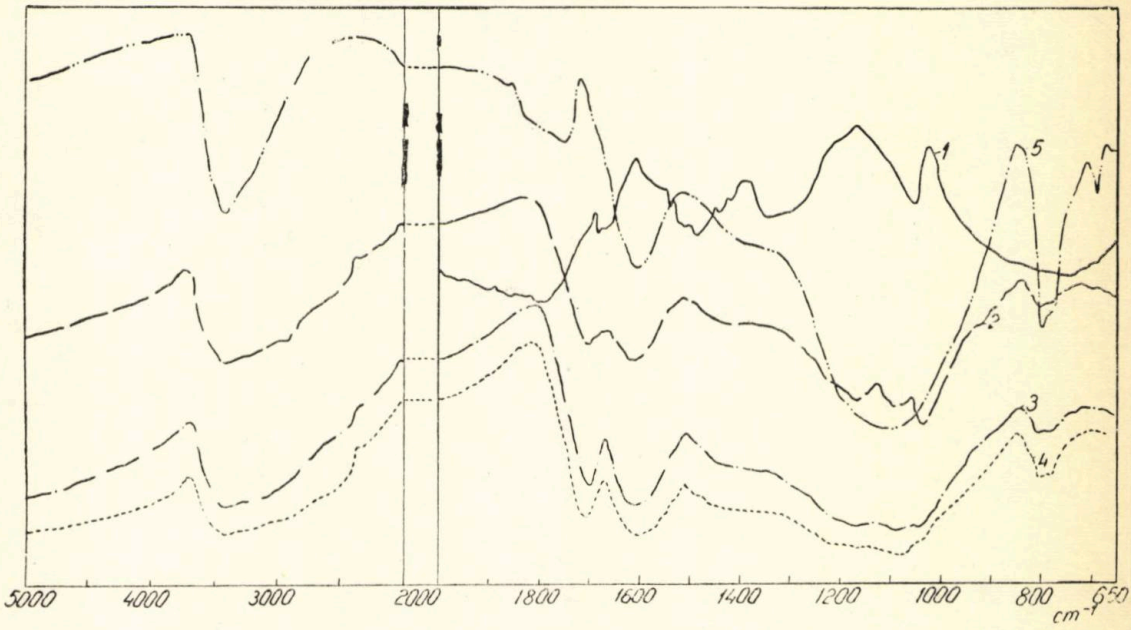


Fig. 4. — Spectre în infraroşu: *1* — spectrul de absorbţie pentru turba naturală tratată cu soluţie de HCl 3%; *2*, *3*, *4* şi *5* — spectrele de absorbţie pentru turba sulfonată la temperaturile de 100°C, 150°C, 200°C şi respectiv 250°C, timpul de sulfonare fiind acelaşi (3 ore).

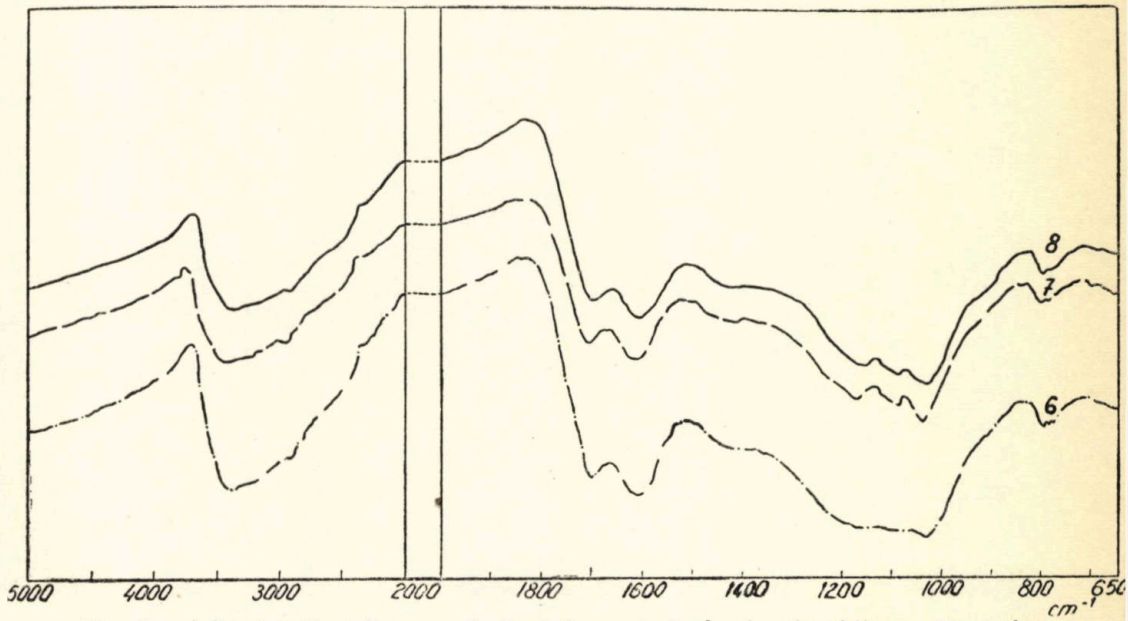
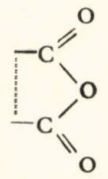


Fig. 5. — Spectre în infraroşu: *6*, *7* şi *8* — spectrele de absorbţie pentru turba sulfonată la temperatura constantă de 100°C, timpul de sulfonare fiind, respectiv, de 1, 3 şi 5 ore.

temperaturii de sulfonare, ceea ce arată că la temperaturi mai înalte de sulfonare, au loc procese puternice de oxidare a turbei cu formare de noi grupe carboxilice; la $\lambda = 5{,}49 \ldots 5{,}43\ \mu$ (1 820 ... 1 840 cm^{-1}) datorită anhidridei acidlului carbonic cu structura ciclică



şi vibraţiei grupei OH libere.

Numai la curba 2, care reprezintă spectrul de absorbţie al turbei sulfonate la temperaturi joase (100°C) timp de 3 ore, apar slabe benzi de absorbţie datorită grupelor sulfonice la $\lambda = 9{,}25\ \mu$ (1 080 cm^{-1}) şi la $\lambda = 8{,}77\ \mu$ (1 140 cm^{-1}).

Aceste benzi dispar la sulfonarea turbei la temperatură mai ridicată, lipsind la curbele *3*, *4* şi 5, aici avînd loc reacţii intense de oxidare cu crearea de grupe carboxilice în cantitate mai mare.

Curbele *6*, *7* şi *8* reprezintă spectrele de absorbţie pentru turba sulfonată la temperatură constantă de 100°C, variind timpul de sulfonare la 1, 3 şi 5 ore.

Şi aceste curbe conţin aceleaşi benzi de absorbţie comune ca şi la curbele 2, *3*, *4* şi 5: la $\lambda = 12 \ldots 11{,}6\ \mu$ (830 ... 860 cm^{-1}), la $\lambda = 6{,}60\ \mu$ (1 510 cm^{-1}), la $\lambda = 6{,}02 \ldots 5{,}91\ \mu$ (1 660 ... 1 690 cm^{-1}), la $\lambda = 5{,}49 \ldots 5{,}43\ \mu$ (1 820 ... 1 840 cm^{-1}) şi $\lambda = 2{,}70\ \mu$ (3 700 cm^{1}). Se remarcă benzile de absorbţie caracteristice grupei sulfonice de la $\lambda = 9{,}25\ \mu$ (1 080 cm^{-1}) şi $\lambda = 8{,}77\ \mu$ (1 140 cm^{-1}) numai la curbele *7* şi *8*, lipsind la curba *6*. Aceasta arată că grupele sulfonice apar la cationiţii obţinuţi la temperatura de 100°C odată cu creşterea duratei de sulfonare la 3 şi respectiv 5 ore. La aceste curbe se remarcă puternice benzi de absorbţie la $\lambda = 6{,}02\ \mu$ (1 660 cm^{-1}) datorită vibraţiei grupei carboxilice.

Pentru toate probele cercetate este caracteristic un maximum de absorbţie la $\lambda = 2{,}70\ \mu$ (3 700 cm^{-1}), care aparţine probabil grupelor hidroxilice libere ale alcoolilor alifatici superiori.

3. Concluzii

1. Prelucrarea turbei drept materie primă pentru obţinerea de schimbări de cationi folosind acidul sulfuric sau acidul sulfuric oleum (20% SO_3 liber) permite obţinerea de schimbători de ioni cu bune capacităţi de schimb.

2. Capacitatea de schimb a produşilor de sulfonare obţinuţi din turbă se datoreşte în primul rînd grupelor carboxilice formate sub acţiunea oxidantă a acidului sulfuric în procesul de sulfonare, al căror conţinut predomină faţă de grupele sulfonice.

3. Schimbătorii de cationi obţinuţi manifestă o capacitate de schimb ridicată în raport cu o serie de cationi.

4. Prin spectrele în infraroşu se pun în evidenţă grupele capabile de schimb de ioni din turba sulfonată.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie generală

BIBLIOGRAFIE

1. Diaconescu El., Chiriac Fl., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, XI (XV), 3—4, pp. 127—134.
2. Белькевич П. И., Тр. Инст. Торфа, АН Белорусск. ССР, 1957, 6, стр. 130—141, 150—158.
3. Schmid E., Stipanitis P., Hecht F., Österr. Chemiker Ztg., 1964, 65, 3, S. 69—72.

KATIONEN-AUSTAUSCHER AUS DERSCA-DOROHOI TORF

(Zusammenfassung)

1. Durch die Verarbeitung von Torf mit konzentrierter Schwefelsäure oder mit Oleum-Schwefelsäure wurden Kationen-Austauscher mit einer gesammten Austauschkapazität zwischen 1,40 ... 3,04 mval/g.

2. Die Austauschkapazität der Kationiten ist vor allem den Carboxyl-Gruppen zuzuschweiben, welche unter dem Oxydationeffekt der Schwefelsäure während der Sulfonierungsvorgänge gebildet wurden und davon Gehalt den der Sulfongruppen übertrifft.

3. Die erhaltenen Ionenaustauscher weisen eine höhe Austauschfähigkeit in Bezug auf eine Reihe von Kationen auf.

4. Durch die Infrarot-Spektren weist man die des Ionen-Austauschesfähigen Gruppen aus dem sulfonierten Torf nach.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. — Die Abhängigkeit der gesammten Austauschkapazität des mit Oleum-Schwefelsäure (20% freies SO_3) bei der Temperatur von 100°C, 150°C und 200°C und einer Sulfonierungsdauer von 3 Stunden sulfonierten Torfes, in Bezug auf den pH-Wert.

Abb. 2. — Austauschkapazität für verschiedene Kationen des Sulfokohlenstoffs im Wasserstoffzykels, welcher aus dem Dersca-Dorohoi Torf durch Behandlung mit Oleum-Schwefelsäure (20% freiem SO_3) bei einer Temperatur von 150°C und einer Sulfonierungsdauer von 5 Stunden erhalten wurde.

Abb. 3. — Austauschkapazität für verschiedene Kationen des Sulfo-Kohlenstoffs im Natriumzykels, welcher aus Dersca-Dorohoi Torf durch Behandlung mit Oleum-Schwefelsäure (20% freiem SO_3) bei einer Temperatur von 150°C und einer Sulfonierungsdauer von 5 Stunden erhalten wurde.

Abb. 4. — Infrarot-Spektren: *1* — Absorptionsspektrum für natürlichen, mit einer 3%-igen HCl Lösung behandelten Torf; *2*, *3*, *4* und 5 — Absorptionsspektren für bei dem Temperaturem von 100°C, 150°C, 200°C und bzw. 250°C und der gleichen Sulfonierungsdauer von 3 Stunden sulfoniertem Torf

Abb. 5. — Infrarot-Spektren: *6*, *7* und *8* — Absorptionsspektren für bei der konstanten Temperatur von 100°C, sulfoniertem Torf, wobei die Sulfonierungsdauer 1, 3 und 5 Stunden betrug.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 621,357.2

ASUPRA CINETICII DESCOMPUNERII AMALGAMULUI DE SODIU

DE

C. CALISTRU, RADU VASILIU şi CORNELIA LEONTE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Reacţia de descompunere a amalgamului de sodiu a fost studiată de numeroşi cercetători; astfel A. N. Frumkin, primul, tratează acest proces ca fiind de tip electrochimic [1] şi deduce ecuaţia cinetică a descompunerii amalgamului. Z. A. Iofa, O. L. Kaptan şi colaboratorii [2] verifică experimental procesul de descompunere pe amalgame de sodiu, potasiu, litiu şi calciu. Într-o lucrare anterioară [3] s-au verificat domeniile de aplicabilitate a ecuaţiei cinetice şi s-a stabilit faptul că procesul are loc în domeniul cinetic şi în domeniul difuziei. Ecuaţia lui A. N. Frumkin s-a verificat în domeniul cinetic.

Procesul descompunerii amalgamului de sodiu scurtcircuitat este mai puţin cercetat. G. I. Volkov şi colaboratorii [4] precum şi N. V. Cereminina şi colaboratorii [5] întreprind o cercetare experimentală referitoare la descompunerea amalgamului scurtcircuitat în vederea obţinerii de date necesare prioectării descompunătorului industrial şi a intensificării procesului în acest aparat.

Pînă în prezent, procesul descompunerii amalgamului este mai puţin studiat din punct de vedere al domeniilor în care se desfăşoară. În lucrarea menţionată s-a stabilit că descompunerea simplă a amalgamului are loc în două domenii.

În lucrarea de faţă se cercetează condiţiile desfăşurării procesului de descompunere a amalgamului scurtcircuitat cu grafit şi se stabilesc domeniile în care se desfăşoară procesul. Pe baza ecuaţiei cinetice, se propune o ecuaţie utilă calculelor tehnice.

2. Cinetica descompunerii amalgamului în soluţii alcaline

Pe amalgam se desfăşoară simultan şi independent reacţiile :

(1) $$Na \rightleftarrows Na^{+} + e^{-},$$

(2) $$H_2O + e^- \rightleftarrows OH^+ + H.$$

Viteza reacţiei (1) este mult mai mare decît aceea a reacţiei (2) şi datorită acestui fapt, în domeniul cinetic, viteza procesului descompunerii amalgamului va fi dată de viteza reacţiei (2). Se admite de asemenea că potenţialul amalgamului de sodiu coincide cu potenţialul amalgamului de sodiu la echilibru.

Pentru stabilirea ecuaţiei cinetice a reacţiei (2) se mai presupune posibilitatea neglijării vitezei procesului invers — ionizarea hidrogenului pe amalgam. În aceste condiţii, ecuaţia cinetică a reacţiei (2) se poate scrie sub forma :

(3) $$i_d^H = k_d^H C_{H^+} e^{-\frac{\alpha F}{RT}(e-\psi)},$$

în care :

(4) $$e = e^0_{Hg(Na)} + \frac{RT}{F} \ln \frac{C_{Na^+} \gamma_{Na^+}}{C_{Na} \gamma_{Na}},$$

iar

(5) $$\psi = \psi^0 + \frac{RT}{F} \ln C_{NaOH}.$$

Logaritmînd relaţia (3) şi substituind (4) şi (5) în (3), rezultă :

(6) $$i_d = \frac{C^\alpha_{Na} \gamma^\alpha_{Na}}{\gamma^\alpha_{Na^+}} e^{\frac{\alpha F}{RT}(A_{alc} - e^0_{Hg(Na)})}.$$

În cazul hidrogenului $\alpha = 0{,}5$ şi deci

(7) $$i_d = \frac{C^{1/2}_{Na} \gamma^{1/2}_{Na}}{\gamma^{1/2}_{Na^+}} e^{\frac{F}{2RT}(A_{alc} - e^0_{Hg(Na)})}.$$

Densitatea de curent la descompunerea amalgamului de sodiu, presupunînd că procesul are loc în domeniul cinetic, este exprimată prin relaţia :

(8) $$i = k \frac{\gamma^{1/2}_{Na}}{\gamma^{1/2}_{Na^+}} C^{1/2}_{Na}.$$

Deoarece $dn_{Na}/VSd\tau = i/FV$, ecuaţia (8) poate fi pusă sub forma :

$$FV \frac{dC_{Na}}{Sd\tau} = k \frac{\gamma^{1/2}_{Na} C^{1/2}_{Na}}{\gamma^{1/2}_{Na^+}},$$

de unde, prin integrare, rezultă :

$$k\tau = \frac{2FV}{S} \cdot \frac{\gamma_{Na}^{1/2}}{\gamma_{Na^+}^{1/2}} [(C_{Na}^{f})^{1/2} - (C_{Na}^{0})^{1/2}], \tag{9}$$

în care: V — volumul amalgamului, S — suprafaţa, C_{Na}^{f} — concentraţia finală, C_{Na}^{0} — concentraţia iniţială.

3. Descompunerea amalgamului scurtcircuitat în soluţie alcalină

Şi în acest caz sînt valabile reacţiile (1) şi (2), cu deosebirea că reacţia (1) are loc numai pe suprafaţa amalgamului, iar reacţia (2) la suprafaţa cărbune — soluţie. Reacţia (2) se dezvoltă cu o viteză mai mică decît reacţia (1).

Sistemul format din cărbune în contact direct cu amalgamul (scurtcircuitat), constituie un electrod unic al cărui potenţial este potenţialul de echilibru al amalgamului. Acest potenţial nu corespunde unei stări riguroase de echilibru deoarece viteza de descompunere este predominantă, fiind indicată deci folosirea denumirii de potenţial staţionar.

Deoarece descompunerea amalgamului scurtcircuitat nu diferă, în esenţă, de descompunerea amalgamului simplu, cinetica procesului se poate caracteriza printr-o ecuaţie similară, cu deosebirea că factorul α poate avea valori diferite de 0,5; această presupunere a fost verificată experimental.

Din ecuaţia (6) rezultă prin logaritmare:

$$\ln i_d = \ln k_1 + \alpha \ln \frac{\gamma_{Na}}{\gamma_{Na^+}} + \alpha \ln C_{Na}, \tag{10}$$

în care:

$$k_1 = e^{\frac{\alpha F}{RT}(A_{alc} - \epsilon^{0}_{Hg(Na)})}.$$

Se consideră

$$\ln i_d = \ln k + \alpha \ln C_{Na}, \tag{11}$$

în care:

$$k = \ln k_1 + \alpha \ln \frac{\gamma_{Na}}{\gamma_{Na^+}}. \tag{12}$$

Dar

$$\frac{dC_{Na}}{d\tau} = \frac{kS}{FV} \cdot \frac{\gamma_{Na}}{\gamma_{Na^+}^{\alpha}} C_{Na}^{\alpha},$$

de unde, prin logaritmare şi integrare, rezultă:

$$k\tau = \frac{(C^0_{Na})^{1-\alpha} - (C^f_{Na})^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \tag{12}$$

4. Partea experimentală

Viteza de descompunere a amalgamului a fost determinată măsurîndu-se concentraţia hidroxidului de sodiu format în timpul descompunerii. Concentraţia hidroxidului de sodiu format a fost determinată conductometric cu ajutorul unei punţi dezechilibrate.

S-a măsurat, de asemenea, variaţia t.e.m. a pilei :

amalgam de sodiu | soluţie de NaOH | Pt.

Ambele măsuri au fost înregistrate cu ajutorul unui înregistrator prin puncte.

Dispozitivul pentru descompunerea amalgamului, indicat în fig 1, este compus din vasul *A* termostatat în baia de apă *B*.

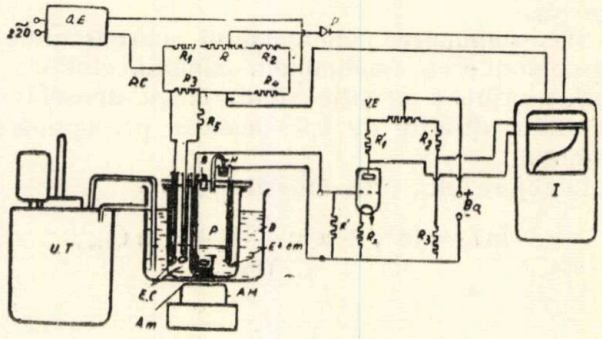


Fig. 1. — Dispozitivul experimental pentru descompunerea amalgamului.

Prin capacul vasului *A* sînt introduşi în soluţie electrozii pentru măsurarea conductibilităţii (*EC*) şi electrozii pentru măsurarea t.e.m. (*E* t.e.m.). Unul din aceşti electrozi este terminat cu un mic vas *P* în care se introduce amalgamul (*Am*) pus în legătură cu circuitul de măsură printr-un fir de platină. Atît amalgamul cît şi apa în care se realizează descompunerea, sînt agitate cu ajutorul a două piese magnetice puse în mişcare de agitatorul magnetic *AM*.

Electrozii pentru măsurarea conductibilităţii *(EC)*, din platină, sînt puşi în legătură cu puntea dezechilibrată (*PC*) alimentată de oscilatorul electronic (*OE*). Puntea este pusă în legătură cu înregistratorul *I* care înregistrează prin puncte conductibilitatea soluţiei din vasul *A*.

T.e.m. este măsurată cu ajutorul unui voltmetru electronic ale cărui rezultate sînt înregistrate de asemenea cu înregistratorul mecanic *I*.

S-a urmărit descompunerea unei cantităţi de 2 ml de amalgam într-un volum de 500 ml apă bidistilată măsurîndu-se conductibilitatea soluţiei de hidroxid de sodiu formată şi t.e.m. a pilei cu amalgam.

Curbele obţinute prin înregistrarea conductibilităţii fiind trasate în unităţi arbitrare, au fost prelucrate pe baza unor curbe de etalonare obţinute cu hidroxid de sodiu preparat în afara contactului cu bioxidul de carbon din aer.

Amalgamul a fost preparat electrolitic utilizînd NaCl chimic pur şi mercur distilat.

S-a urmărit descompunerea simplă şi descompunerea în scurtcircuit prin aşezarea unui electrod de grafit deasupra amalgamului.

5. Rezultate şi discuţii

Rezultatele experimentale obţinute la descompunerea amalgamului scurtcircuitat sînt indicate în fig. 2. Pentru comparaţie, sînt redate în aceeaşi diagramă şi rezultatele pentru descompunerea simplă. Determinările se referă numai la intervalul de concentraţii ale amalgamului folosit în procesul industrial de fabricare a hidroxidului de sodiu.

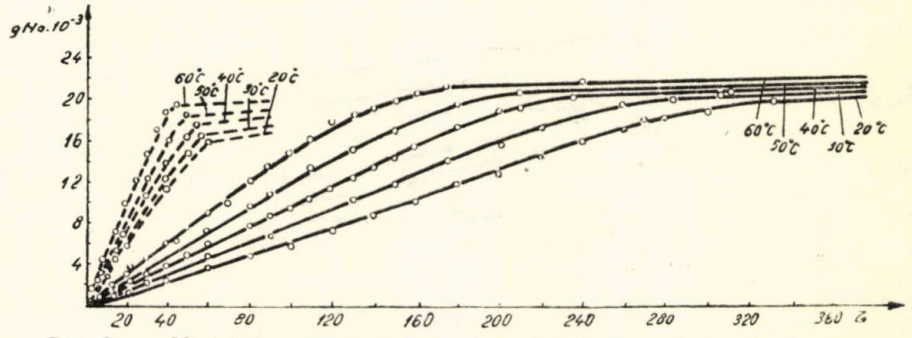


Fig. 2. — Variaţia concentraţiei amalgamului în timpul descompunerii: —— descompunere simplă, - - - descompunere în scurtcircuit.

Cu acelaşi dispozitiv experimental s-a înregistrat variaţia potenţialului amalgamului în timpul descompunerii (fig. 3, curba *II*). Curba *I* a fost construită pe baza datelor lui G. Trümpler şi D. Schuler [6].

Domeniile în care se desfăşoară procesul de descompunere al amalgamului s-au studiat prin metoda secţiunilor orizontale pe dia-

grama g Na descompus — timp, constituind pe această bază diagrama log $1/\tau$ — $1/T$, indicată în fig. 4.

S-au trasat secţiuni orizontale pentru concentraţiile amalgamului de: 0,313 moli Na/l (dreptele *1'* şi 2') şi de 0,2210 moli Na/l (dreptele *1* şi 2), pentru descompunerea simplă şi în scurtcircuit. Aceste drepte corespund domeniului cinetic de descompunere. Dreptele *1''* şi 2'' corespund domeniului difuziei, respectiv la descompunerea simplă şi în scurtcircuit.

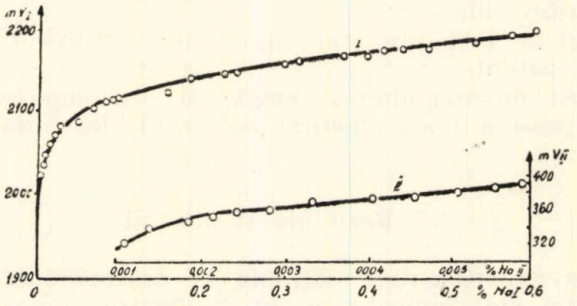


Fig. 3. — Variaţia potenţialului amalgamului în timpul descompunerii: *I* — descompunere simplă, *II* — descompunere în scurtcircuit.

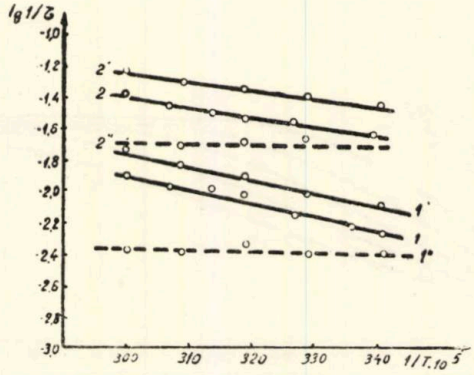


Fig. 4. — Variaţia log $1/\tau$ funcţie de $1/T$: *1, 1', 1''* — descompunere simplă, *2, 2', 2''* — descompunere în scurtcircuit.

Energia aparentă de activare calculată pe baza acestei diagrame este de 4 000 cal/mol în cazul descompunerii simple a amalgamului şi de 3 000 cal/mol în cazul amalgamului scurtcircuitat. Aceste valori permit să se aprecieze că în intervalul dat, reacţia se desfăşoară în do-

meniul cinetic, respectiv în domeniul de polarizare electrochimică. Pentru concentraţii scăzute ale amalgamului, procesul este influenţat de difuzia sodiului în amalgam. Pentru acest domeniu se obţin energiile de activare de 600 cal/mol la descompunerea simplă şi 300 cal/mol la descompunerea în scurtcircuit.

Trecerea de la domeniul cinetic la domeniul difuziei corespunde cu variaţia bruscă a potenţialului (fig. 3), care scade brusc spre sfîrşitul descompunerii atît pentru descompunerea simplă cît şi pentru descompunerea în scurtcircuit.

Prin compararea curbelor de descompunere la amalgamul simplu şi la amalgamul scurtcircuitat, se poate conchide că dependenţa dintre potenţial şi concentraţie este de aceeaşi natură. Potenţialului amalgamului la descompunerea simplă îi corespunde potenţialul staţionar la descompunerea în scurtcircuit. Variaţia potenţialului în funcţie de timp este, în mare, asemănătoare în ambele cazuri, diferă însă ca valoare.

Construind pentru un domeniu mai larg de concentraţii diagramele $\log(dC/d\tau)$—$\log C$ se constată că ele sînt reprezentate prin drepte numai pe anumite intervale de concentraţie. Deoarece intervalul de concentraţii care verifică relaţia (11) coincide cu cel întîlnit în industrie, se poate deduce pe baza curbei $\log(dC/d\tau)$—$\log C$ ecuaţia semiempirică pentru calculul descompunătorului industrial.

Forma generală a ecuaţiei semiempirice obţinute este:

$$\frac{dC}{d\tau} = kC^{\alpha}_{amalg}. \tag{13}$$

Pentru intervalul de concentraţii 0,1...0,001 % Na, la temperatura de 20°C, ecuaţia are forma:

$$\frac{dC}{d\tau} = 0{,}95\,C^{0{,}2}_{amalg}. \tag{14}$$

6. Concluzii

1. S-au studiat domeniile de desfăşurare a procesului de descompunere a amalgamului scurtcircuitat şi s-a stabilit că acesta are loc în domeniul cinetic şi în domeniul difuziei.

2. Se indică relaţia pentru calculul potenţialului staţionar al amalgamului scurtcircuitat în domeniul cinetic.

3. Se propun ecuaţii semiempirice pentru calculul descompunătorului industrial.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologia substanţelor anorganice

BIBLIOGRAFIE

1. Frumkin A. N., Z. Phys. Chem., 1932, **160**, S. 116.
2. Капцан О. Л., Иофа З. А., ЖФХ, 1952, **26**, стр. 193.
3. Calistru C., Vasiliu R., Leonte C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1*—2, p. 187.
4. Волков Г. И., Клица З. Л., ЖПХ, 1952, **XXX**, стр. 154.
5. Череминина Н. В., Волков Г. И., Хомяков В. Г., ЖПХ, 1961, **XXXIV**, стр. 2268.
6. Trümpler G., Schuler D., Helvetica Chimica Acta, 1949, XXXII, S. 1940.

LA CINÉTIQUE DE LA DÉCOMPOSITION DE DE L'AMALGAME DE SODIUM

(Résumé)

On a étudié la cinétique de la décomposition de l'amalgame de sodium en court-circuit avec électrode de graphite. En étudiant les domaines du développement du processus les auteurs ont déduit que ceux-ci correspondent aux domaines cinétiques et de la diffusion.

On indique la relation pour la détermination du potentiel stationnaire de l'amalgame court-circuité dans le domaine cinétique.

On propose des équations semiempiriques pour le calcul de l'appareil industriel.

Explication des figures

Fig. 1. — Schéma de l'installation expérimentale.

Fig. 2. — Variation de la concentration de l'amalgame au cours de la décomposition ; —— décomposition simple, – – – décomposition en court-circuit.

Fig. 3. — Variation du potentiel au cours de la décomposition : *1* — décomposition simple, *II* — décomposition en court-circuit.

Fig. 4. — Variation de log $1/\tau$ en fonction de $1/T$: *1, 1', 1''* — décomposition simple, *2, 2', 2''* — décomposition en court-circuit.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

D. C. 547.678.2 ; 547.415.1

CONDENSATION OF ACENAPHTHENEQUINONE WITH AROMATIC DIAMINES

METALLIC COMPOUNDS

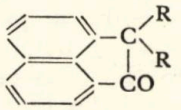
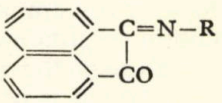
BY

ILIE MATEI and TATIANA LIXANDRU

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, the 28—30 September 1967

1. Introduction

In previous researches [1] we showed that in the condensation of acenaphthenequinone with aromatic diamines are formed compounds with general state :

(I)  or (II) 

The formation of the products of the I-st or of the II-nd type is favoured by the presence of certain substitutes from the rest of amine.

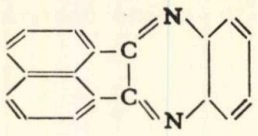
Products of the I-st type were obtained in the reaction with *p*-amino-phenol, *p*-toluidine and *p*-anisidine.

Products of the II-nd type were obtained in the reaction of acenaphthenequinone with *m*- and *p*-nitro-aniline, α- and β-naphthylamine, *p*-aminobenzoic acid and benzidine.

In the present work we proposed the extension of this series of reactions, effecting the condensation reaction of acenaphthenequinone with mono- and bi-nuclear aromatic diamines.

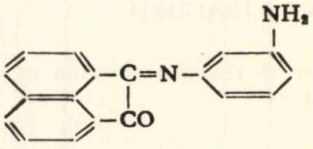
2. Theoretical Part

The reaction of acenaphthenequinone with *o*-phenylene-diamine and its derivatives was much studied [2]. Generally, the reaction happens in medium of glacial acetic acid and are formed quinoxalines of the state :

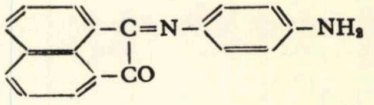


The products with nitric groups in the benzene ring [3], or in acenaphthenic nucleus [4],have properties of dyestuff.

We effected the *reaction of acenaphthenequinone with m- and p-phenylene-diamine.* The reaction was made in medium of ethyl alcohol in the case of *m*-phenylene-diamine and in benzene, in the case of the reaction with *p*-phenylene-diamine. In the case of the reaction with *p*-phenylene-diamine a red coloured product begins to separate from even at warm. There are obtained Schiff bases corresponding only to one carbonyl group of acenaphthenequinone namely:

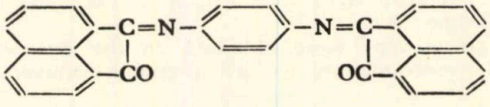


acenaphthenequinon-*m*-(amino-phenyl)-imine



acenaphthenequinon-*p*-(amino-phenyl)-imine

The products are obtained if we work with a molar ratio of 1/1 acenaphthenequinone/amine. If we work with a molar ratio of 2/1 acenaphthenequinone/amine, in the case of using *m*-phenylendiamine is obtained the same product, and in the case of *p*-phenylenediamine is obtained a product in which reacted the two amino groups of *p*-phenylene-diamine:

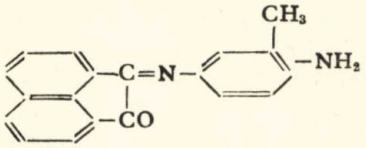


diacenaphthenequinon-*p*-phenylene-diamine

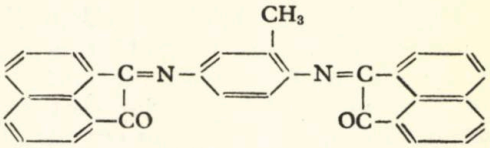
In the case of *m*-phenylene-diamine, the second amino group probably doesn't react because of the steric hinderings.

1,2,5-Toluylene-diamine reacts with acenaphthenequinone with the formation of two products as for as we work with a molar ratio of 1/1 or 2/1 acenaphthenequinone/amine.

The reaction is made using benzene as a solvent; the products for condensation are separated from the medium of the reaction only by means of cooling:



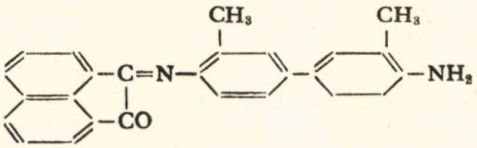
acenaphthenequinon-(3-methyl-4-aminophenyl)-imine



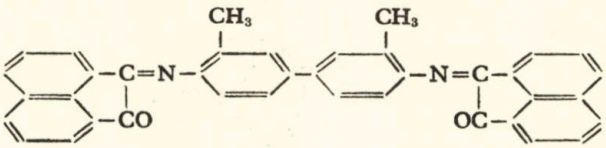
diacenaphthenequinon-3-methyl-1, 4-toluylene diimine

The condensation reaction with *tolidine* was made using toluene as a solvent. Like in the previous case two products are formed, as we work with a molar ratio 1/1 or 2/1 acenaphthenequinone/amine.

The obtained products would be :



acenaphthenquinon-(3-3-dimethyl-4-amino-biphenyl)-imine



diacenaphthenquinon-*o*-tolidine-imine

The literature indicates the reaction of benzyl with benzidine [5] with the formation of a product complete similar with that obtained by us from acenaphthenequinone and benzidine in previous researches [1].

The synthesized products on this occasion by the condensation reaction of acenaphthenequinone with mono- and binuclear aromatics diamines are similarly to those obtained with benzidine.

In all cases studied by us, acenaphthenequinone reacts with a single molecule of primary amine, leading to the formation of azomethine corresponding only to one carbonyl group, even we work with an excess of amino component or even we prolong the duration of the reaction. The second carbonyl oxigen does not react and this is in accord with the indications given by the literature [6].

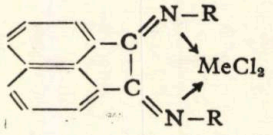
All products are coloured, amorphous. The purification was made by the corresponding solvents and the structure was determined by the spectral and chemical analyses. The products hydrolyses in diluted acid medium. It is known that the formation of azomethines is a reversible process [7] ; in the weak acid medium or in the basic medium these hydrolyses easily.

In a series of trials of condensation of acenaphthenequinone with amines we used anhydrous chloride of zinc in order to facilitate the elimination of water during the condensation reaction. But chloride of zinc does not play only the part of a catalyser for dehydration, it also goes in reaction forming complex combinations. This fact suggested us the ideea of the extension of this series of reactions.

In a previous article [8] we have presented the condensation reaction of acenaphthenequinone with *m*- and *p*-nitro-aniline, *m*- and *p*-amino-benzoic acid, anesthesine, *o*- and *p*-toluidine, *m*-xylidine, *p*-chloraniline, *p*-anisidine and benzidine in glacial acetic acid medium, in the presence of the different metallic salts.

In this article we have effected the condensation reaction of acenaphthenequinone with *m*-phenylene-diamine and 1,2,5-toluylene-diamine in the presence of $ZnCl_2$ and $CoCl_2$.

The analytical dates indicate now the reaction between a molecule of acenaphthenequinone, two molecules of amine and a molecule of metallic salt, with the elimination of two water molecules. Therefore was formed a double base Schiff, which by chelate links fix metallic salt forming of general state :



The literature indicates numerous cases of complexities of Schiff's bases of salicylic aldehyde or of β-oxi-naphth-aldehyde and their derivatives [9], [10] with amine or diamine and metallic salts.

Phenanthrenequinone complexes with $ZnCl_2$, form a redviolet combination [11].

In our working conditions, acenaphthenequinone does not form coloured compounds with metallic salts.

In literature are also met numerous cases of combination of amines with metallic salts.

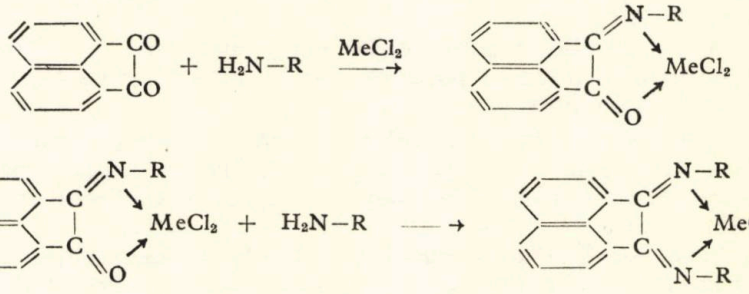
In our working conditions, *m*-phenylene-diamine reacts with $ZnCl_2$, forming a brown product in a small quantity. Toluylene-diamine with $ZnCl_2$ gives a white pecipitate, and with $CoCl_2$ gives a violet precipitate.

In the reaction of acenaphthenequinone with *m*-phenylene-diamine and 1,2,5-toluylene-diamine in the presence of metallic salts a black complex is formed abundantly in the case of the reaction with *m*-phenylene-diamine and $ZnCl_2$, and brown complexes in the case of reaction with 1,2,5-toluylene-diamine and $ZnCl_2$ or $CoCl_2$.

The fact that, in the absence of metallic salt Schiff's double base of acenaphthenequinone is not formed, but only the corresponding azomethine of a single carbonyl group, makes us to attribute a well-defined

part to metallic salt in the formation of Schiff's double base of acenaphthenequinone, of respective metallic complex.

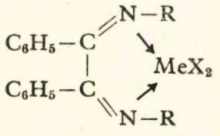
It can be supposed that the formation reaction of complex develops in two stages, as it was shown in a previous paper [8]. A coordinated complex of metallic salt at azote and oxygen of Schiff's simple base of acenaphthenequinone would form first and this reacts then with the second molecule of amine, forming thus the final complex:



Reaction of the second molecule of amine is make easy due to the positive of carbonyl carbon, by the combination of metallic salt at azote and oxygen in the intermediar stage.

In some examined cases on another occasion [8], were obtained complexes of Schiff's double bases with metallic salts by the reaction of Schiff's simple bases with metallic salts in an excess of amine.

In order to support our formulation given to the obtained complexes, we mention again similar complexes of benzyl [12] and of diacetyl [13] of the general state:



But in the case of benzyl, metallic salt does not play a determined part in the formation of Schiff's double base, because this can be formed by simple action of respective amine upon benzyl [14], [15].

The obtained complexes are amorphous substances, with different colours by the kind of the used metallic salt. These are sensitive to the action of water even at ordinary temperature. In the diluted acid medium, complexes are decomposing producing liberation of the initial products.

The properties of the complexes depend on the structure of Schiff's bases, on the nature of central atom and on the interaction of Schiff's base with the central atom [16], [17].

The complexity reactions can be extented to another aromatics amines, using another metallic salts too. These could be used for analytical determinations.

Spectral determinations in infra-red (IR) with a Perkin-Elmer 337 spectrophotometer were made in order to confirme the structure of synthesized products (Fig. 1...4).

Analyzing the presented spectra, we can observe that all the products have bands for 3 H, respectively for 2 H adjacent between 775 and 830 cm^{-1} [18].

The bands in the interval 1 030 cm^{-1} and 1 240 cm^{-1} mark the subtitution in *orto, meta* or *para,* or can be attributed to the vibration CH deformation in plan.

The vibrations in the interval 1 420 cm^{-1} and 1 480 cm^{-1} are due to valence vibration C—C. The band 1 580 cm^{-1} is the vibration of deformation NH in plan. The band for the link C=O appears at 1 710...1 720 cm^{-1}.

The band for the new-formed link C=N in azomethine is situated in the interval 1 620...1 650 cm^{-1}, and for the complexes at 1 600 cm^{-1}.

Comparing the absorption for the link C = N of azomethine acenaphthenequinone with 1,2,5-toluylene-diamine with the absorption for the link C = N of the complex of Schiff's double base corresponding to $ZnCl_2$, a diminution of vibration frequence from 1 630...1 650 cm^{-1} for azomethine to 1 600 cm^{-1} for complex is observed.

This corresponds to indications of the literature [19] which show for chelates a diminution of vibration frequence of link C = N with a quantity depending on the kind of the metal.

This diminution of vibration frequence can be explained by the resonance between the metal and chelate cycle [19].

For all the studied cases, spectra confirme the formulation attributed to new synthesized products.

3. Experimental Part

a) *Acenaphthenequinone-m-aminophenyl-imine*

2 g acenaphthenequinone and 1,2 g *m*-phenylene-diamine dissolve at warm in 50 ml ethyl alcohol and warm under ebbing for an hour. After cooling and filtration 2 g of raw product are got. This product is of a brown colour, partially soluble in ethyl alcohol, glacial acetic acid. Purification was made by repeated washings at warm with toluol. It does not melt, it decomposes at burns at a high temperature.

Analysis

$C_{18}H_{12}N_2O$ (M=272)		C%	H%	N%
	Calculated	79,41	4,41	10,29
	Found	79,26	4,89	10,09

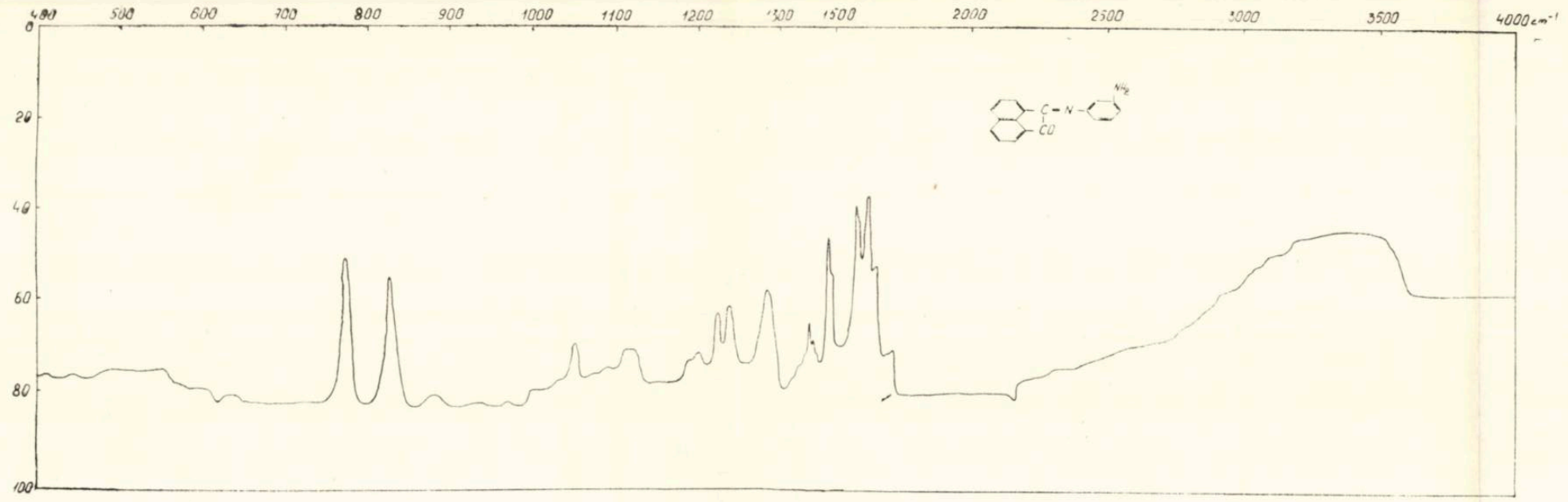


Fig. 1. — IR spectrum of acenaphthenequinon-*m*-amino-phenyl-imine.

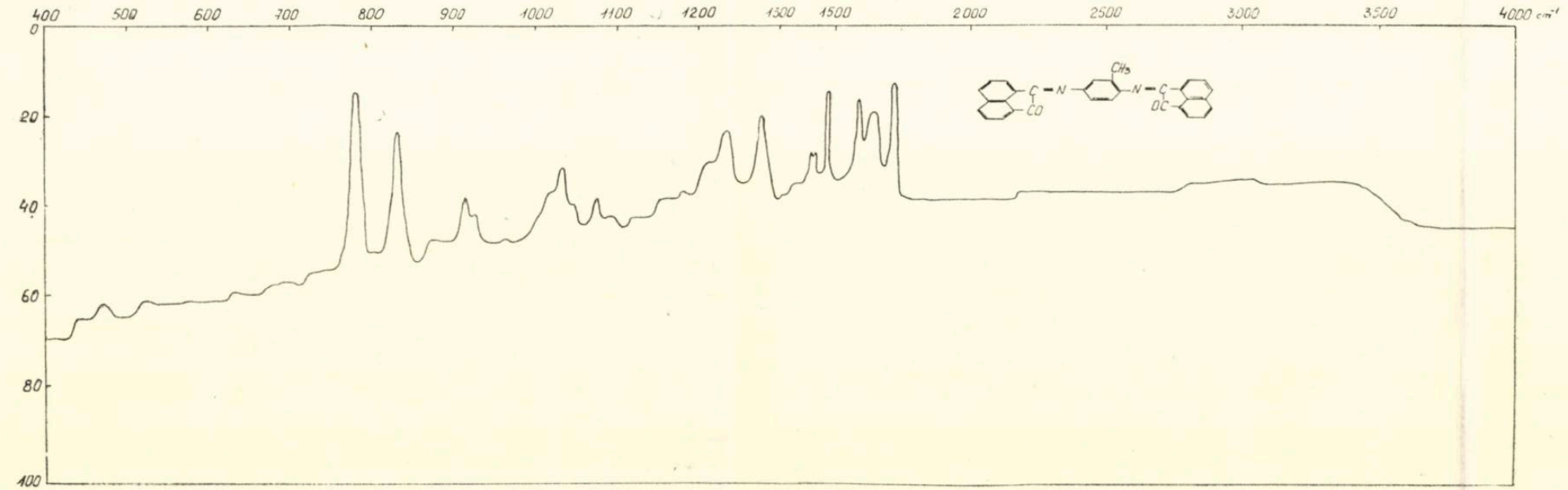


Fig. 2. — IR spectrum of diacenaphthenequinon-(3-methyl-1,4-toluylene)-diimine.

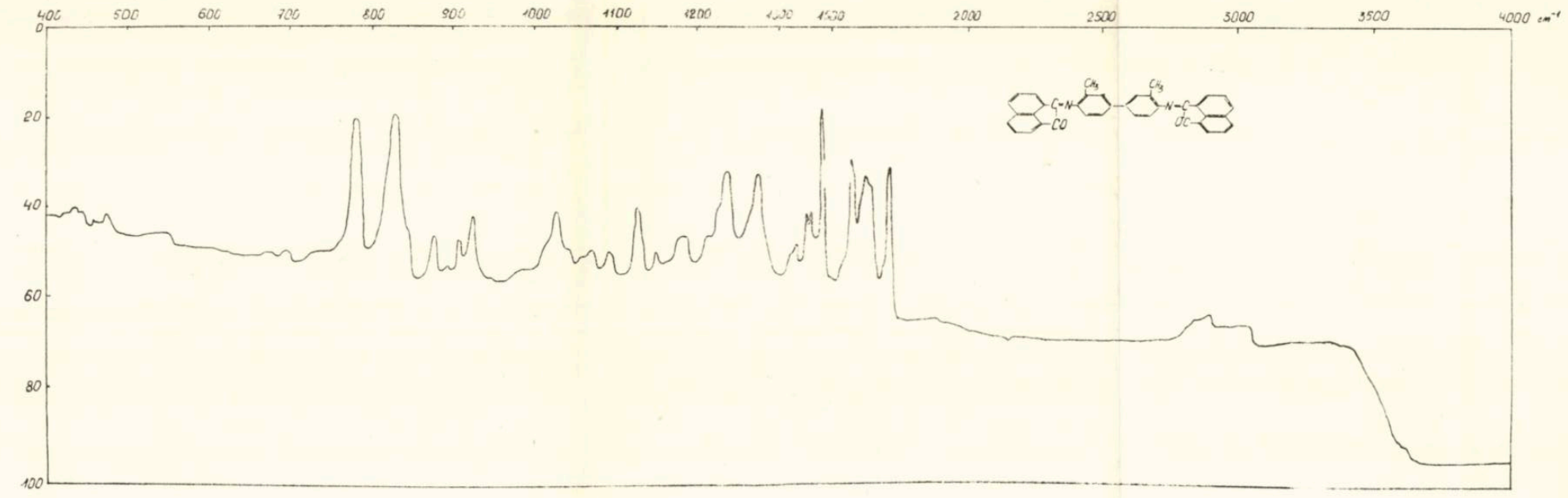


Fig. 3. — IR spectrum of diacenaphthenequinon-*o*-tolidine-diimine.

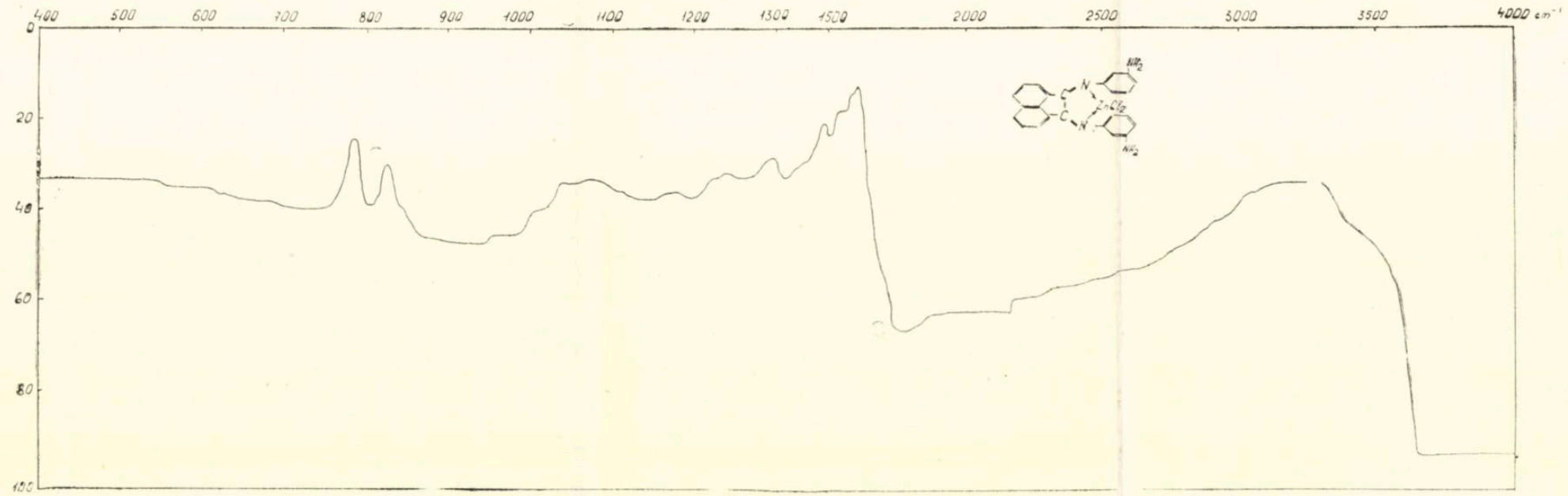


Fig. 4. — IR spectrum of acenaphthenequinon-di(*m*-aminophenyl-imine).$ZnCl_2$.

b) *Acenaphthenequionne-p-aminophenyl-imine*

2 g acenaphthenequinone and 1,2 g *p*-phenylene-diamine dissolve at warm in 20 ml benzene by a red colouring of the solution. After 10 minutes of warming a red coloured product is separed. Then an under ebbing warming is made for an hour. 2 g of raw-product of light brown are obtained. The product is partially soluble in ethyl alcohol, toluol, xylene, chloroform, tetraline, dioxan. It is purificated by washing at warm with ethyl alcohol; m.p. 300°C.

Analysis

$C_{18}H_{12}N_2O$ ($M = 272$)		C%	H%	N%
	Calculated	79,41	4,41	10,29
	Found	79,98	4,97	9,77

c) *Diacenaphthenequinone-p-phenylene-diimine*

2 g acenaphthenequinone and 0,6 g *p*-phenylene-diamine dissolve at warm in 20 ml benzene by a dark red colouring of the solution. It is warmed under ebbing for an hour. 2 g of raw product of a red-orange colour is got. The product is partially soluble in benzene, toluol, xylene, tetraline, chloroform, dioxan; insoluble in ethyl alcohol; m.p. $>$ 290°C.

Analysis

$C_{30}H_{16}N_2O_2$ ($M=436$)		C%	H%	N%
	Calculated	82,56	3,66	6,42
	Found	82,83	4,19	6,58
		81,84	4,70	

d) *Acenaphthenequinone-(3-methyl-4-aminophenyl)-imine*

2 g acenaphthenequinone and 1,4 g toluylene-diamine dissolve at warm in 20 ml benzene, by a dark red colouring of the solution. It is warmed under ebbing for 2 hours. At cold a gluey product is separated; the solvent is evaporated and a brown glassy product is obtained. This product is soluble in alcohol, benzene, toluol, xylene, chloroform, tetraline, dioxan, acetone, carbon sulphide; insoluble in oil-ether; soluble in dimethyl formamide. It is purificated by washing with ethyl alcohol at warm; m.p. $>$ 320°C.

Analysis

$C_{19}H_{14}N_2O$ ($M=286$)		C%	H%	N%
	Calculated	79,72	4,89	9,78
	Found	80,16	5,26	9,48
		79,79	5,12	

e) *Diacenaphthenequinone-3-methyl-1,4-toluylene-diimine*

2 g acenaphthenequinone and 0,7 g 1,2,5-toluylene-diamine dissolve at warm in 20 ml benzene, by a dark red colouring of the solution. It is warmed under ebbing for $1^1/_2$ hour. 2,5 g dark redbrown raw product is obtained. The product is partially soluble in ethyl alcohol, toluol, xylene; soluble in chloroform, dioxan, glacial acetic acid. It is purificated by washing with benzene at warm; m.p. $>$320°C.

Analysis

$C_{81}H_{18}N_2O_2$ ($M=450$)		C%	H%	N%
	Calculated	82,66	4,00	6,22
	Found	82,41	4,20	6,00

f) *Acenaphthenequinone-3,3'-dimethyl-4'-aminobiphenyl-imine*

2 g acenaphthenequinone and 2 g o-tolidine dissolve in 20 ml toluol at warm and is warmed under ebbing for an hour. After 5 minutes of warming a dark red product begins to be separated. This product becomes more abundant as the warming goes on 1,6 g row product of brick colour is obtained. The product is insoluble in water, toluol, ethyl alcohol, benzene, carbon tetrachloride, glacial acetic acid. It is purificated by repeated washings with ethyl alcohol at warm; m.p. > 300°C.

Analysis

$C_{26}H_{20}N_2O$ ($M=376$)		C%	H%	N%
	Calculated	82,97	5,31	7,44
	Found	83,12	5,79	7,43

g) *Diacenaphthenequinone-o-tolidine-diimine*

2 g acenaphthenequinone and 1,2 g o-tolidine dissolve in 20 ml toluol at warm and is warmed under ebbing for an hour. After 20 minutes of warming a brick coloured product is separated, the product becomes more abundant as the warming goes on 1,6 g raw product is obtained. This product is partially soluble in benzene, toluol, ethyl alcohol. It is purificated by repeated washings with ethyl alcohol at warm; m.p. > 300°C.

Analysis

$C_{38}H_{24}N_2O_2$ ($M=540$)		C%	H%	N%
	Calculated	84,44	4,44	5,18
	Found	84,80	5,02	5,46

h) *Acenaphthenequinone-di-(m-aminophenyl-imino) . $ZnCl_2$*

2 g acenaphthenequinone and 2,4 g phenylene-diamine dissolves at warm in 40 ml glacial acetic acid by a brown colouring of the solution. 4 g $ZnCl_2$ are added. At addition of metallic salt there forms the complex which is absorbed in mass. More 20 ml glacial acetic acid are added and are warmed for 15 minutes. 3 g of black coloured raw product is obtained. The product is insoluble in ordinary organic solvents. It is purificated by repeated washings with glacial acetic acid at warm; m.p. > 300°C.

Analysis

$C_{24}H_{18}N_4 . ZnCl_2$ ($M = 498{,}37$)		C%	H%	N%
	Calculated	57,78	3,61	11,23
	Found	57,51	4,04	11,71

i) *Acenaphthenequinone-di-(3-methyl-4-aminophenyl-imino) . $ZnCl_2$*

2 g acenaphthenequinone and 2,8 g toluylene-diamine dissolves at warm in 20 ml glacial acetic acid by a brown-cherry colouring of the solution. 4 g of $ZnCl_2$ are added. A little later after adding the metallic salt a brown product is separated. It is warmed under ebbing for 15 minutes; 5 g of raw product are obtained. The product is insoluble in ordinary organic solvents. It is purificated by repeated washings with glacial acetic acid at warm; m.p. > 300°C.

Analysis

$C_{26}H_{22}N_4 . ZnCl_2$ (M = 526,37)		C%	H%	N%
	Calculated	59,27	4,17	10,63
	Found	58,86	4,54	10,49

j) *Acenaphthenequinone-di-(3-methyl-4-aminophenyl-imino) . $CoCl_2$*

2 g acenaphthenequinone and 2,8 g toluylene-diamine dissolve at warm in 30 ml glacial acetic acid by a brown-cherry colouring of the solution. 4 g of finely pulverized $CoCl_2$ are added. At the addition of the metallic salt, the brown complex which is absorbed in mass is separated. More 10 ml glacial acetic acid are added and it is warmed for 15 minutes. 3 g of black raw product are obtained. The product is insoluble in ordinary organic solvents. It is purificated by warm washing with glacial acetic acid; m.p.$>$300°C.

Analysis

$C_{26}H_{22}N_4 . CoCl_2$ (M=519,94)		C%	H%	N%
	Calculated	60,00	4,23	10,77
	Found	59,72	4,56	10,50

4. Conclusions

1. The condensation reaction of acenaphthenequinone with *m*- and *p*-phenylene-diamine, 1,2,5-toluylene-diamine and tolidine lead to the formation of azomethyne corresponding to one carbonyl group of acenaphthenequinone even if we work with an excess of amine or in more energetic conditions.

2. *p*-Phenylene-diamine, 1,2,5-toluylene-diamine and tolidine react with one or two molecules of acenaphthenequinone, as we work in 1/1 or 2/1 molar ratio. *m*-Phenylene-diamine doesn't react with two acenaphthenequinone molecules, because of steric impediments probably.

3. In the condensation of acenaphthenequinone with the same diamines in glacial acetic acid medium, in the presence of metallic salts, complexes corresponding to Schiff's double base of acenaphthenequinone are formed.

4. The spectral characteristics of the products are given, which confirms the structure of the synthetized products proposed by us.

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Organic Chemistry

REFERENCES

1. Matei I., Lixandru T., Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, p. 171.
2. Ampola G., Recchi V., Atti R. Accad. Lincei Roma, (5), 1899, **8**, p. 210; Chem. Zentr., 1899, **II**, S. 338.
3. Guha S. K., J. Indian Chem. Soc., 1932, **9**, p. 423.

4. Prasad D., Dutta P. C., Ber. dtsch. chem. Ges., 1937, **70**, S. 2365.
5. Ferries C. V., Turner E. E., J. Chem. Soc., 1920, **117**, p. 1140.
6. Zsuffa M., Ber. dtsch. chem. Ges., 1910, **43**, S. 2915.
7. Порай-Кошиц Б. А., Ремизов А. И., ЖОХ, 1954, **24**, стр. 372; Chem. Abstr., 1955, **49**, p. 4572.
8. Matei I., Lixandru T., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, XIII (XVII), *1*—2, p. 245.
9. Pfeiffer P., Breith E., Lübbe E., Tsumaki T., Liebigs Ann. Chem., 1933, **503**, S. 84.
10. Pfeiffer P., Glaser H., J. prakt. Chem., 1939, **153**, S. 265.
11. Hein F., *Chemische Koordinations Lehre*. S. Hirzel Verlag, Leipzig, 1954, S. 532, 464.
12. Böhr G., Z. anorg. Chem., 1951, **267**, S. 137; Chem. Zentr., 1953, S. 1611.
13. Böhr G., Kretzer A., Z. anorg. Chem., 1951, **267**, S. 161; Chem. Zentr., 1953, S. 1613.
14. Knoevenagel E., J. prakt. Chem., 1914, **89**, S. **41**.
15. Bandrowski F. X., Monatsh., 1889, **9**, S. 690.
16. Кудрявцев А. С., Савич И. А., Вест. Моск. Унив., Химия, 1963, *4*, стр. 61.
17. — ЖОХ, 1963, **33**, стр. 3763.
18. Avram M., Mateescu Gh. D., *Spectroscopia în infraroşu. Aplicaţii în chimia organică*. Ed. Tehn., Buc., 1966.
19. Teyssie P., Charette J. J., Spectrochim. Acta, 1963, **19**, p. 1407.

CONDENSAREA ACENAFTENCHINONEI CU DIAMINE AROMATICE. Complecşi metalici

(Rezumat)

Reacţia de condensare a acenaftenchinonei cu *m*- şi *p*-fenilen-diamina, 1,2,5-toluilen-diamina şi tolidina duce la formare de azometine corespunzătoare unei singure grupe carbonilice a acenaftenchinonei, chiar dacă se lucrează în exces de amină sau în condiţii mai energice.

p-Fenilen-diamina, 1,2,5-toluilen-diamina şi tolidina reacţionează cu una sau două molecule de acenaftenchinonă, după cum se lucrează în raport molar de 1/1 sau 2/1. *m*-Fenilen-diamina nu reacţionează cu două molecule de acenaftenchinona, probabil din cauza împiedicărilor sterice.

La condensarea acenaftenchinonei cu aceleaşi diamine în mediu de acid acetic glacial, în prezenţa sărurilor metalice, se formează complecşi corespunzători dublei baze Schiff a acenaftenchinonei.

Se prezintă caracteristicile spectrale ale produselor, care confirmă structura propusă de noi compuşilor sintetizaţi.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Spectrul IR al acenaftenchinon-*m*-amino-fenil-iminei.
Fig. 2. — Spectrul IR al diacenaftenchinon-(3-metil-1,4-toluilen)-diiminei.
Fig. 3. — Spectrul IR al diacenaftenchinon-o-tolidin-diiminei.
Fig. 4. — Spectrul IR al acenaftenchinon-di (*m*-aminofenil-imină). $ZnCl_2$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 547.541.521

SULFAMIDELE ACIZILOR FENOXIPROPIONICI

NOTA II

DERIVAŢI SULFAMIDAŢI AI ACIZILOR α-CREZOXIPROPIONICI ŞI α-XILENOXIPROPIONICI

DE

GH. BOTEZ, CAMELIA GOREA, ECATERINA MERICĂ
şi CORNELIU ONISCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

În ultimul timp o serie de derivaţi ai acizilor fenoxipropionici şi-au găsit aplicaţii practice fie ca medicamente cu acţiuni specifice în terapeutică, fie ca stimulatori de creştere şi ierbicide în agricultură.

Astfel, s-a constatat recent că acidul α-(4-clorfenoxi)-propionic are acţiune hipoglicemiantă şi poate fi folosit în chimioterapia prediabetului [1], pe cînd α-(*p*-ciorfenoxi)-izobutiratul de etil are proprietatea de a scădea conţinutul de colesterol şi trigliceride din sînge şi pare a fi indicat în tratamentul sclerozei coronariene [2].

Acidul α-(*p*-clorfenoxi)-2-metil-propionic şi esterul său etilic au acţiune colesterolemiantă [3], iar acidul 2,4,5-triclorfenoxipropionic are proprietăţi citostatice [4].

Studiile noastre s-au îndreptat asupra derivaţilor sulfonamidaţi ai acizilor α-crezoxipropionici şi α-xilenoxipropionici cu scopul de a găsi noi substanţe stimulatoare de creştere şi alte medicamente cu acţiuni specifice.

Pentru sinteza acestor compuşi am aplicat reacţia de clorosulfonare a esterilor etilici ai acizilor α-crezoxi- şi α-xilenoxipropionici, reacţie care a fost descoperită pentru prima dată de noi cu ocazia unor cercetări referitoare la sulfamidele acizilor fenoxiacetici [5]. Esterii sulfoclorurаţi ai acizilor respectivi sînt substanţe foarte reactive, fiind pasibili de diverse transformări, atît la grupa clorosulfonil cît şi la gruparea esterică.

Astfel prin amidarea lor cu amoniac sau cu diferite amine se obţin esterii sulfonamidaţi corespunzători. Aceştia pot fi transformaţi prin reacţii cunoscute în amide, hidrazide, imidazoline şi alţi compuşi substituiţi la gruparea sulfonamidică.

2. Rezultatele cercetării

Folosind această metodă de sinteză s-au preparat următorii compuşi :

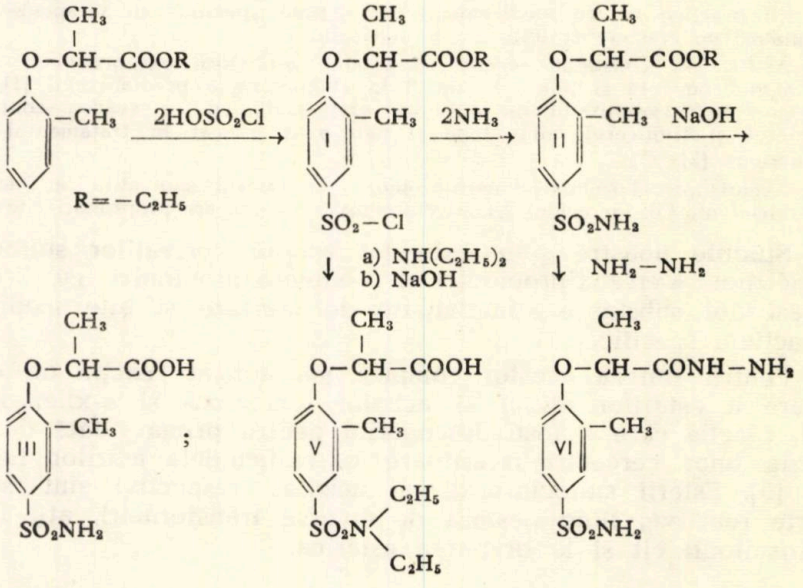
2.1. Compuşi sulfamidaţi ai acizilor α-crezoxipropionici

a) *Derivaţi sulfamidaţi proveniţi din acidul α-(2-metil-fenoxi)-propionic.* Plecînd de la esterul etilic al acidului α-(2-metil-fenoxi)-propionic prin clorosulfonare, se obţine α-(2-metil-4-clorosulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (I). Acesta prin tratare cu amoniac (2 mol) în soluţie acetonică formează α-(2-metil-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (II), care prin hidroliză conduce la acidul α-(2-metil-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic (III).

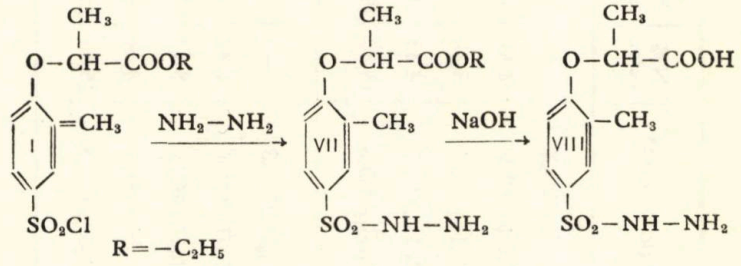
Pe de altă parte, prin reacţia dintre esterul sulfoclorurat (I) cu dietilamina rezultă α-(2-metil-4-dietilamidosulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (IV), din care prin hidroliză se obţine acidul α-(2-metil-4-dietilamidosulfonil-fenoxi)-propionic (V).

Plecînd de la esterul sulfonamidat (II) prin condensare cu hidratul de hidrazină rezultă hidrazida acidului α-(2-metil-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic (VI).

Reacţiile au loc după schema :



Prin tratarea esterului sulfoclorurat (I) cu hidrat de hidrazină în mediu benzenic se obţine α-(2-metil-4-hidrazido-sulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (VII), din care prin hidroliză alcalină rezultă acidul α-(2-metil-4-hidrazidosulfonil-fenoxi)-propionic (VIII) :



Pentru sinteza acestor derivaţi reacţia de clorosulfonare prezintă o importanţă deosebită. Deoarece reacţia se aplică asupra unui ester care este hidrolizabil, este necesar să se folosească exces mare de acid clorsulfonic pentru legarea apei formate, evitînd astfel hidroliza. Din încercările efectuate am constatat că se obţin randamente mari (circa 95%) prin folosirea unui raport molar de 1 : 7 şi conducînd reacţia la temperatura de 35°...40°C, sub bună agitare.

În aceste condiţii se obţine derivatul monosubstituit cu gruparea clorosulfonil în poziţia *para* (p.t. = 57°C).

b) *Derivaţi sulfamidaţi ai acizilor α-(3-metil-fenoxi)-propionic şi α-(4-metil-fenoxi)-propionic.* Derivaţii sulfamidaţi proveniţi din acidul α-(3-metil-fenoxi)-propionic s-au sintetizat după aceeaşi schemă de reacţie ca şi compuşii precedenţi. Reacţia de clorosulfonare începe la temperatura de 4°...5°C şi se perfectează prin ridicarea temperaturii la 20°C, rezultînd esterul sulfoclorurat respectiv, cu un randament de 80%.

Prin clorosulfonarea acestui ester se obţine esterul sulfoclorurat în poziţia *para* faţă de oxigenul eteric deoarece şi metilul din poziţia *meta* orientează noii substituienţi în aceeaşi poziţie.

Clorosulfonarea esterului etilic al acidului *p*-crezoxipropionic conduce la esterul sulfoclorurat respectiv (randament 96%).

Din esterii sulfocloruraţi ai acizilor α-(3-metil-fenoxi)-propionic şi α-(4-metil-fenoxi)-propionic s-au preparat compuşii indicaţi în tabelul 1.

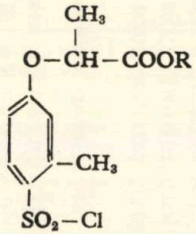
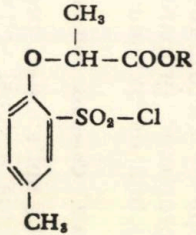
În reacţia de clorosulfonare a esterului etilic al acidului α-(4-metil-fenoxi)-propionic gruparea clorosulfonil substituie hidrogenul din poziţia *orto* faţă de oxigenul eteric, poziţia *para* fiind ocupată.

2.2. Compuşi sulfamidaţi ai acizilor α-xilenoxipropionici

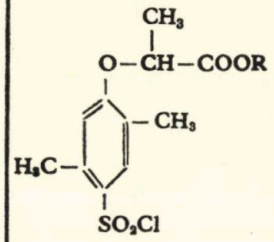
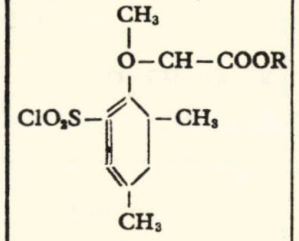
Derivaţii sulfamidaţi proveniţi din acizii α-xilenoxipropionici s-au sintetizat după aceeaşi schemă de reacţie ca şi compuşii precedenţi.

Tabelele 2 şi 3 cuprind compuşii obţinuţi, arătîndu-se structura esterilor sulfocloruraţi şi analizele derivaţilor de transformare.

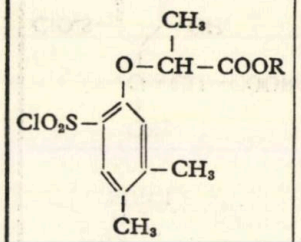
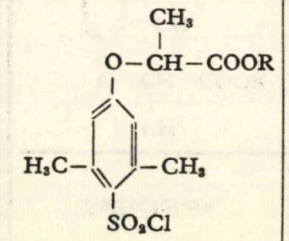
Tabelul 1

Sulfoclorura	Nr.	Derivaţi	Formula brută	N% calc.	N% găsit	p. t. °C
	IX	Sulfoclorura	$C_{12}H_{15}ClO_5S$	—	—	lichid
	X	Ester sulfamidat	$C_{12}H_{17}NO_5S$	4,89	4,96	85
	XI	Acid sulfamidat	$C_{10}H_{13}NO_5S$	5,40	5,53	129
	XII	Acid dietilsulfamidat	$C_{14}H_{21}NO_5S$	4,44	4,36	56
	XIII	Hidrazida acidului sulfamidat	$C_{10}H_{15}N_3O_4S$	15,36	15,45	156
	XIV	Sulfoclorura	$C_{12}H_{15}ClO_5S$	—	—	76
	XV	Ester sulfamidat	$C_{12}H_{17}NO_5S$	4,89	4,93	112
	XVI	Acid sulfamidat	$C_{10}H_{13}NO_5S$	5,40	5,48	89
	XVII	Acid dietilsulfamidat	$C_{14}H_{21}NO_5S$	4,44	4,41	74
	XVIII	Hidrazida acidului sulfamidat	$C_{10}H_{15}N_3O_4S$	15,36	15,54	186

Tabelul 2

Sulfoclorura	Nr.	Derivați	Formula brută	N% calc.	N% găsit	p. t. °C
	XIX	Sulfoclorura	$C_{13}H_{17}ClO_5S$	—	—	58
	XX	Ester sulfamidat	$C_{13}H_{19}NO_5S$	4,64	4,73	88
	XXI	Acid sulfamidat	$C_{11}H_{15}NO_5S$	5,12	5,01	177
	XXII	Acid dietilsulfamidat	$C_{15}H_{23}NO_5S$	4,25	4,11	84
	XXIII	Hidrazida acidului sulfamidat	$C_{11}H_{17}N_3O_4S$	14,61	14,77	183
	XXIV	Sulfoclorura	$C_{13}H_{17}ClO_5S$	—	—	58
	XXV	Ester sufamidat	$C_{13}H_{19}NO_5S$	4,64	4,55	130
	XXVI	Acid sulfamidat	$C_{11}H_{15}NO_5S$	5,12	5,23	70
	XXVII	Acid dietilsulfamidat	$C_{15}H_{23}NO_5S$	4,25	4,30	63
	XXVIII	Hidrazida acidului sulfamidat	$C_{11}H_{17}N_3O_4S$	14,61	14,85	139

Tabelul 3

Sulfoclorura	Nr.	Derivaţi	Formula brută	N% calc.	N% găsit	p. t. °C
	XXIX	Sulfoclorura	$C_{13}H_{17}ClO_5S$	—	—	64
	XXX	Ester sulfamidat	$C_{13}H_{19}NO_5S$	4,64	4,80	105
	XXXI	Acid sulfamidat	$C_{11}H_{15}NO_5S$	5,12	5,33	169
	XXXII	Acid dietilsulfamidat	$C_{15}H_{23}NO_5S$	4,25	4,38	135
	XXXIII	Hidrazida acidului sulfamidat	$C_{11}H_{17}N_3O_4S$	14,61	14,80	187
	XXXIV	Sulfoclorura	$C_{13}H_{17}ClO_5S$	—	—	62
	XXXV	Ester sulfamidat	$C_{13}H_{19}NO_5S$	4,64	4,72	87
	XXXVI	Acid sulfamidat	$C_{11}H_{15}NO_5S$	5,12	5,27	106
	XXXVII	Acid dietilsulfamidat	$C_{15}H_{23}NO_5S$	4,25	—	lichid
	XXXVIII	Hidrazida acidului sulfamidat	$C_{11}H_{17}N_3O_4S$	14,61	14,90	153

Derivații sulfamidați ai acizilor α-crezoxi- și α-xilenoxi-propionici sînt substanțe cristalizate, albe, cu puncte de topire caracteristice; sînt insolubili în solvenți organici și în apă la rece. Se dizolvă la cald în apă și în alcooli. Cu hidroxizii și carbonații alcalini formează sărurile corespunzătoare, ușor solubile în apă.

3. Spectrele în infraroșu ale derivaților sulfamidați proveniți din acizi α-crezoxipropionici și α-xilenoxipropionici

Pentru a preciza structura chimică s-au studiat spectrele în infraroșu (IR) ale unora dintre compușii sintetizați. Aparatul folosit pentru înregistrarea spectrelor a fost un spectrofotometru Unicam S.P. 200, substanțele fiind examinate în emulsie de nujol și în pastile de KBr.

În fig. 1 este reprezentat spectrul IR al acidului α-(3-metil-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic și numerele de undă ale benzilor caracteristice vibrațiilor în domeniul 4 000...650 cm^{-1}.

În acest compus apar benzile caracteristice pentru substituția în pozițiile *1, 2, 4* din nucleul aromatic la 810, 820 și 840 cm^{-1}.

Se poate preciza astfel că gruparea etoxil-carboxilică esterificată orientează grupa clorosulfonil în poziția *para* față de oxigenul eteric. În continuarea spectrului se observă benzile corespunzătoare vibrațiilor următoarelor grupări: SO_2—N= la 1 150 și 1 345 cm^{-1} —O— eteric la 1 269 cm^{-1} și C=O (carbonilul acid) la 1 730 cm^{-1}; din analiza acestor benzi rezultă că structura acestui compus este cea prevăzută.

În cazul derivaților sulfonamidați ai acizilor α-xilenoxipropionici se pune problema stabilirii poziției grupării sulfonamidice față de cei trei substituienți preexistenți în nucleu.

Principalul criteriu care indică poziția substituienților în nucleul aromatic îl constituie vibrațiile de deformație, în afara planului, a legăturilor C—H [6]. Frecvența acestor vibrații depinde de numărul și poziția substituienților din nucleu și este independentă de natura lor [7].

La compușii tetrasubstituiți se poate face o diferențiere prin compararea spectrelor de absorbție ale izomerilor substituiți în pozițiile *1, 2, 3, 4*; *1, 2, 4, 5* și *1, 2, 3, 5* (singurii posibili).

Vibrațiile de deformație caracteristice tetrasubstituției apar în domeniul spectral 750...900 cm^{-1}.

În fig. 2 se redau spectrele IR ale acidului α-(2,5-dimetil-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic.

În spectrul acestui derivat apar benzile caracteristice vibrațiilor de deformație în afara planului a legăturilor C—H la 840 și 890 cm^{-1}, fapt ce indică tetrasubstituția în pozițiile *1, 2, 4, 5*. În acest mod se poate preciza că gruparea sulfonamidică ocupă poziția *para* față de

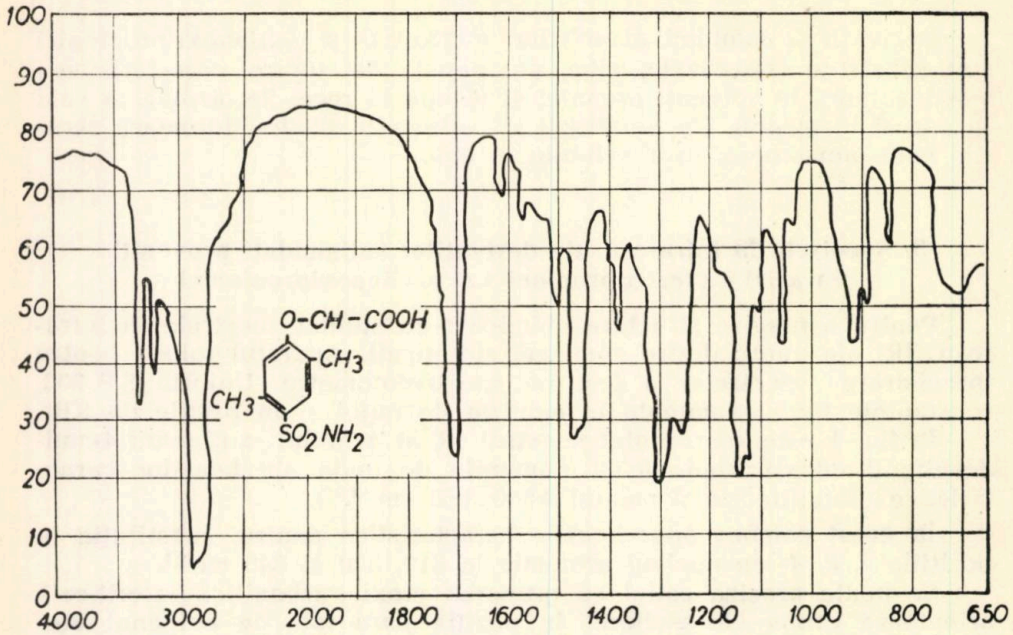


Fig. 1. — Spectrul IR al acidului α-(3-metil-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic.

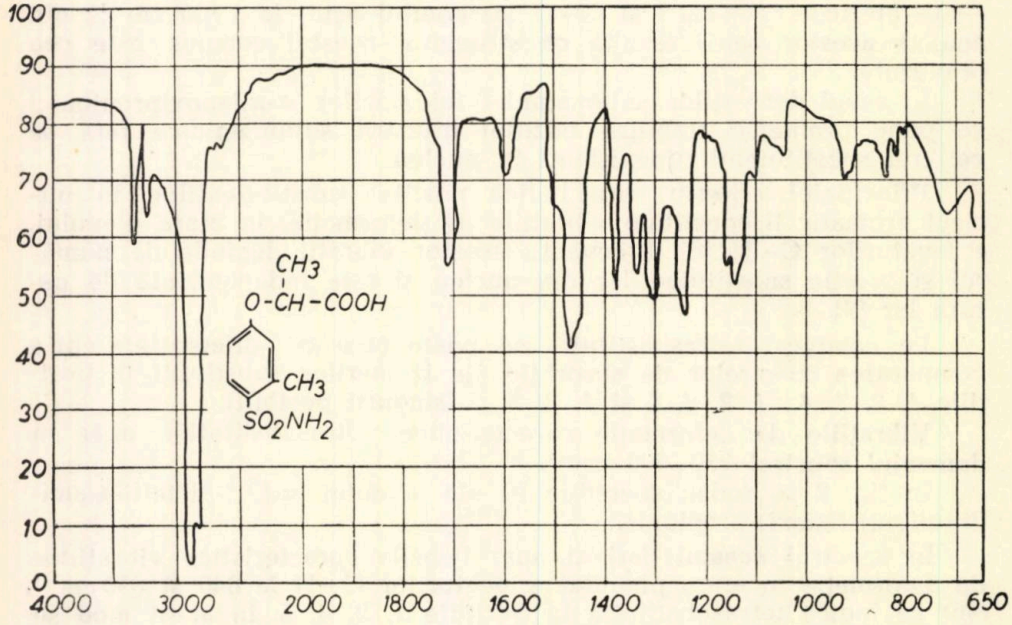


Fig. 2. — Spectrul IR al acidului α-(2,5-dimetil-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic.

oxigenul eteric şi *orto* faţă de metilul din poziţia 5 şi deci în reacţia de clorosulfonare gruparea clorosulfonil este orientată în poziţia *4*.

4. Partea experimentală

a) *α-(2-metil-4-clorosulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (I)*

Peste 80 g acid clorsulfonic, răcit la 10°C, se adaugă sub bună agitare 21 g α-(2-metil-fenoxi)-propionat de etil. Se ridică apoi temperatura la 35°C şi se mai agită 30 min pentru perfectarea reacţiei. Excesul de acid clorsulfonic este distrus prin aruncarea pe gheaţă a masei de reacţie. Sulfoclorura precipitată se filtrează şi se spală cu apă rece pînă la reacţie neutră. Rezultă 28 g produs (randament 95%) care se purifică prin recristalizare din etanol. Se obţine sulfoclorura pură sub forma unor cristale albe, prismatice, cu p.t=57°C.

Analize		Cl%
$C_{12}H_{15}ClO_5S$ (M=306,75)	Calculat	11,58
	Găsit	11,50

b) *α-(2-metil-4-aminosulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (II)*

9 g ester sulfoclorurat se solvă în 10 ml acetonă şi se tratează cu cantitatea necesară de amoniac (25%) răcind sub 20°C pentru a evita hidroliza. Amestecul de reacţie se diluează cu 100 ml apă iar produsul precipitat se filtrează. Este solubil în acetonă şi etanol la rece; precipită prin diluare cu apă sub forma unor cristale albe cu p.t.=101°C.

Analize

$C_{12}H_{17}NO_5S$ (M=287,32)		N%
	Calculat	4,86
	Găsit	4,93

Esterul dimetilsulfonamidat (p.t.=84°C) se obţine prin amidare cu dimetilamină în condiţii similare.

c) *Acidul α-(2-metil-4-aminosulfonil-fenoxi)-propionic (III)*

5,8 g ester sulfamidat (II) se supun hidrolizei prin încălzire sub reflux cu o soluţie hidroalcoolică (60%) care conţine 2 g NaOH. După 30 min se evaporă alcoolul, soluţia sării de sodiu se purifică cu cărbune activ, apoi se acidulează cu HCl, la pH=2. La răcire produsul cristalizează, se filtrează şi se repurifică din apă. Se prezintă sub forma unor cristale prismatice cu p.t.=162°C.

Analize

$C_{10}H_{13}NO_5S$ (M=259,26)		N%
	Calculat	5,40
	Găsit	5,53

Din esterul dimetilsulfonamidat prin hidroliză se obţine acidul dimetilsulfonamidat cu p.t.=110°C.

d) *Hidrazida acidului α-(2-metil-4-aminosulfonil-fenoxi)-propionic (VI)*

2,5 g ester sulfonamidat şi 1 ml hidrat de hidrazină se dizolvă în 20 ml etanol şi se fierb sub reflux timp de 1 oră. Se evaporă alcoolul pe baie de apă, reziduul se tratează cu 10 ml etanol absolut şi se filtrează produsul cristalizat. Se purifică din apă obţinînd produsul pur, p.t.=200°C. Cu acid clorhidric formează clorhidratul.

Analize

$C_{10}H_{15}N_3O_4S$ (M=273,28)	N%
Calculat	15,36
Găsit	15,66; 15,46

e) *Acidul α-(2-metil-4-hidrazinosulfonil-fenoxi)-propionic (VIII)*

10 g ester sulfoclorurat se solvă în 30 ml benzen şi se adaugă peste 4,2 ml hidrat de hidrazină agitînd energic la 40°...45°C, timp de 30 min. Se separă pătura benzenică iar stratul apos se mai extrage cu 10 ml benzen. La evaporarea benzenului rămîne un produs foarte vîscos care se supune hidrolizei cu hidroxid de potasiu alcoolic. Se evaporă etanolul iar reziduul se purifică cu cărbune activ şi se acidulează cu HCl pînă la pH=4. Produsul cristalizat la răcire se filtrează şi se purifică din apă; p.t.=169°C.

Analize

$C_{10}H_{14}N_2O_5S$ (M=247,27)	N%
Calculat	10,20
Găsit	10,25; 9,86

După cum s-a amintit reacţia principală care stă la baza sintezei derivaţilor sulfamidaţi ai acizilor α-crezoxi- şi α-xilenoxipropionici o constituie clorosulfonarea.

Factorii care influenţează această reacţie sînt: raportul molar dintre ester şi acidul clorsulfonic (1 : 7), temperatura de reacţie, durata reacţiei şi modul de precipitare a sulfoclorurii.

Din încercările efectuate am constatat că temperatura la care are loc clorosulfonarea depinde de poziţia ocupată de grupele metil în nucleul aromatic precum şi de numărul lor.

Efectuînd reacţia de clorosulfonare la diferite temperaturi, cuprinse între 5°...70°C, şi determnînd randamentele în sulfocloruri s-au trasat graficele din fig. 3 şi 4. Timpul de reacţie s-a menţinut constant (1 oră pentru 0,1 mol ester), raportul molar dintre reactanţi fiind 1 : 7.

Din aceste grafice se constată că pentru fiecare ester corespunde o anumită temperatură de reacţie la care randamentele sînt optime. Această temperatură depinde de poziţia grupărilor metil în nucleul aromatic precum şi de numărul lor. Esterii substituiţi în poziţia *meta* sînt cei mai reactivi, pe cînd cei substituiţi în poziţia *para* sînt mai puţin reactivi.

Astfel din fig. 3 se observă că esterul *m*-crezoxipropionic se clorosulfonează la temperatura de 15°C, randamentul în sulfoclorură fiind de circa 80%, iar esterii *o*- şi *p*-crezoxipropionici se clorosulfonează

la temperaturi cuprinse între 35°...40°C, cu randamente bune. Acest fapt se datoreşte efectului $+I$ exercitat de grupările metil din moleculă.

Dacă se ridică temperatura peste limitele indicate şi se prelungeşte durata reacţiei, randamentul scade datorită esterului sulfoclorurat care hidrolizează.

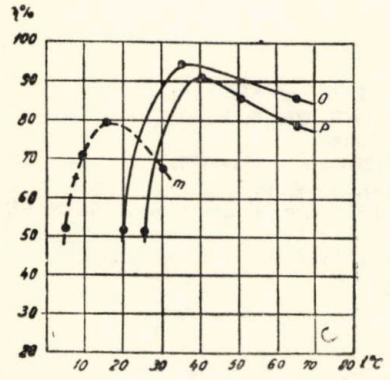


Fig. 3. — Variaţia randamentului în sulfoclorură pentru esterii *o*-, *m*- şi *p*-crezoxipropionici.

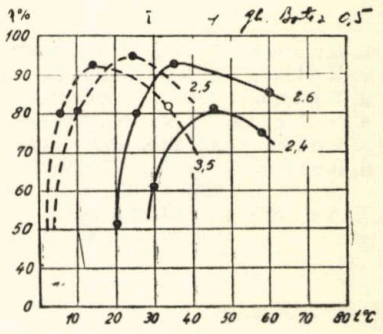


Fig. 4. — Variaţia randamentului în sulfoclorură pentru esterii 3,5-, 2,5-, 2,4-, şi 2,6-xilenoxipropionici.

4. Concluzii

Din cercetările efectuate asupra sintezei unor noi derivaţi ai acizilor α-crezoxi- şi α-xilenoxipropionici se desprind următoarele concluzii :

1. Esterii etilici şi metilici ai acizilor α-crezoxi- şi α-xilenoxipropionici se pot clorosulfona cu un exces de 7 mol acid clorsulfonic la temperaturi cuprinse între 15°...40°C, rezultînd derivaţii sulfoclorurati ai esterilor respectivi, cu randamente bune.

2. Randamentele în sulfocloruri depind de raportul molar dintre reactanţi, de temperatura de reacţie şi de durata procesului de clorosulfonare.

3. Fiecare ester are o temperatură optimă de reacţie care depinde de poziţia grupelor metil în nucleul aromatic precum şi de numărul lor.

4. Esterii sulfoclorurati se pot amida cu amoniac sau cu amine primare şi secundare, obţinîndu-se esterii amidosulfonil-fenoxipropionici corespunzători ; de asemenea ei reacţionează cu hidratul de hidrazină, obţinîndu-se esterii hidrazidosulfonil-fenoxipropionici.

5. Din studiul spectrelor în IR ale acestor compuşi s-a constatat că structura chimică este cea propusă.

6. S-au sintetizat 38 compuşi noi care pot găsi utilizări practice ca stimulatori de creştere ai plantelor şi ca produse intermediare pentru obţinerea penicilinelor de semisinteză.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de industrii organice

BIBLIOGRAFIE

1. Buu-Hoi N. P., Med. Pharmacol. Exptl., 1966, **14**, *6*, pp. 576—584.
2. Keller L., Retsagi G., Z. Ges. Inn. Med., 1966, **21**, *6*, S. 169—172.
3. Cergallo C. J., Chem. Abstr., 1966, **65**, *4*, p. 5308.
4. Schultz D. R., Norman D., Nature, 1965, **206**, pp. 375—378.
5. Botez Gh., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4*, p. 183.
6. Bellamy J. L., *Ultraviolet Spektrum und Chemische Konstitution.* Darmstadt, 1955, S. 63.
7. Avram M., Mateescu Gh. D., *Spectroscopia în infraroşu. Aplicaţii în chimia organică.* Ed. Tehn., Buc., 1966, p. 271.

SULFAMIDES OF THE PHENOXYPROPYONIC ACIDS

Note II

Sulfamidated Derivatives of the α-crezoxy- and α-xilenoxypropyonic Acids

(Summary)

In order to discover new compounds with plant-growth stimulating capacity the authors synthetized a row of sulfamidated derivatives resulting from α-crezoxy- and α-xilenoxypropyonic acids.

For the preparation of these compounds the authors started from ethylic esthers of the α-crezoxy- and α-xilenoxypropyonic acids which were submited to the sulfochlorination with an excess of chlorsulfonic acid (7 : 1 by wt) at a moderate temperature (20°...40°C) obtaining in this way esthers of the respective chlorosulfonyl acids with good outputs.

These are reactive substances and can be easily changed by known reactions into amides, hydrazides and sulfamoyl acids.

By studying the infrared spectra it was established that the structure of these compounds is that proposed by us.

The authors synthetized 38 new compounds which can be used as plant-growth stimulating substances or as intermediate products in order to obtain semisynthetic penicillines.

Explanation of the Figures

Fig. 1. — The infrared spectrum of the α-(3-methyl-4-amidosulfonyl-phenoxy)-propyonic acid.

Fig. 2. — The infrared spectrum of the α-(2,5-dimethyl-4-amidosulfonyl-phenoxy)-propyonic acid.

Fig. 3. — Relationship between output and temperature.

Fig. 4. — Relationship between output and temperature.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ.

D. K. 667.212

AUS DIANISIDIN N (4-NITROPHENYL-2-SULFON)SÄURE MIT VERSCHIEDENEN KUPPLUNGSKOMPONENTEN HERGESTELLTE AZOFARBSTOFFE

VON

GH. LUPUŞOR, EUGENIA COMANIŢĂ und VALERIA GORDUZA

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

1. Vorwort

In einigen vorausgehenden Arbeiten unternahmen wir :

a) die Kondensation von *o*-Dianisidin und *o*-Tolidin mit 2,4-Dichlorbenzol, aus der 4 Produkte [1] die zur Vorbereitung einiger Schwefelfarbstoffe [2] dienten, erhalten wurden ;

b) die Kondensation von Diaminostilbensulfonsäure mit 2,4-Dinitrochlorbenzol, aus der gelbe Nitrofarbstoffe [3] erhalten wurden ;

c) die Herstellung mehrerer Azofarbstoffe mit substantiven Eigenschaften [4], [5] ;

d) die Kondensation der 2-Nitrochlorbenzol-4-Sulfonsäure mit *o*-Dianisidin und *o*-Tolidin [6] ;

e) die Herstellung von Azofarbstoffen aus Dianisidin-N(2-Nitrophenyl-4-Sulfon)säure mit verschiedenen Kupplungskomponenten [7].

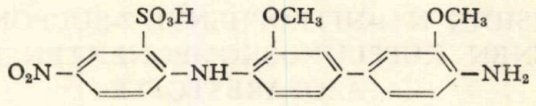
In einer Mitteilung die sich unter Druck befindet, haben wir die Kondensation von *o*-Dianisidin und *o*-Tolidin mit 4-Nitrochlorbenzol-2-Sulfonsäure vorgenommen, aus der u.a. Produkten auch die Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon)säure erhalten wurde.

In der vorliegenden Mitteilung, unter Verwendung der Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon)säure als diazotierbare Komponente in den Kupplungsreaktionen mit verschiedenen Komponenten, erhielten wir einige Azofarbstoffe die durch ihre Färbeigenschaften merkwürdig sind und gleichzeitig einige theoretische Schlussfolgerungen bezüglich

des Zusammenhanges zwischen Farbe und Struktur einerseits und anderseits zwischen Struktur und Verhalten der Färbeigenschaften gegenüber verschiedenen Fasern (Zellstoff, Wolle und Polyamydfaser) zu ziehen, gestatten.

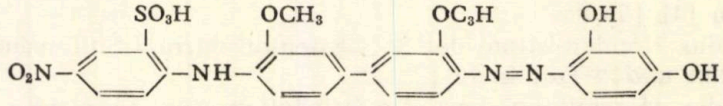
2. Theoretischer Teil

Da die Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon)säure (I) eine Aminogruppe besitzt, deren Basizität durch die Anwesenheit der

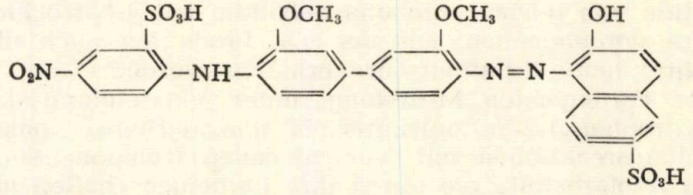
(I) 

Elektronenabsaugungsgruppe (NO_2, SO_3H) veringert ist kann sie mit den Mineralsäuren keine löslichen Salze bilden, da diese im Wässerigen Medium hydrolysieren.

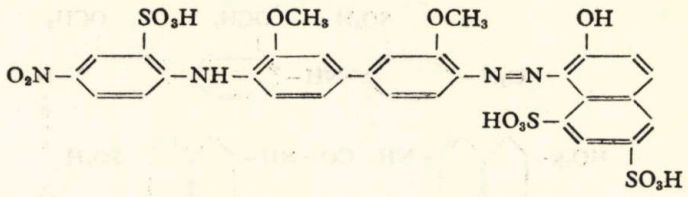
Für die Diazotierung wird das Produkt (I) in Gegenwart von Natriumkarbonat warm gelöst. Nach Abkühlung wird der wässerigen Lösung mit kolloider Beschaffenheit, eine Lösung von Natriumnitrit zugegeben und mit Salzsäure angesäuert. Das Diazoderivat *(D)* erscheint als eine feine Suspension. Die Kupplungen wurden im alkalischen Medium mit folgenden Kupplungskomponenten: Resorzin, *G*-Salz, Schaeffer-Säure, Gama-Säure, Neville-Winther-Säure, *H*-Säure, Chicago, SS-Säure, Carbonyl *I*-Säure, Phenyl-Methyl-Pirazolon und im säurehaltigen Medium, mit Phenyl-Peri-Säure, durchgeführt, und es wurden die unten dargestellten Farbstoffe (II)...(XII) hergestellt:

(II) 

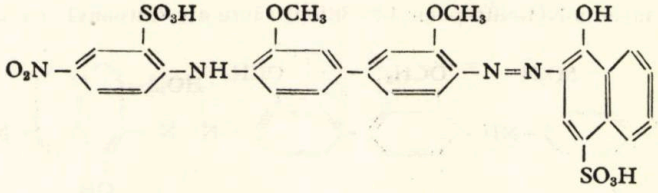
Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon)säure-azo-Rezorzin

(III) 

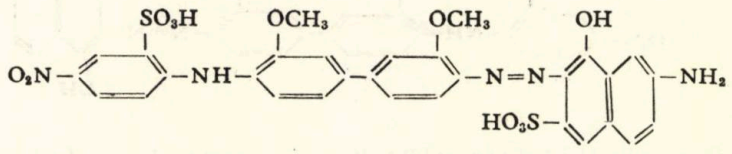
Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon) säure-azo-Schaeffer-säure

(IV) 

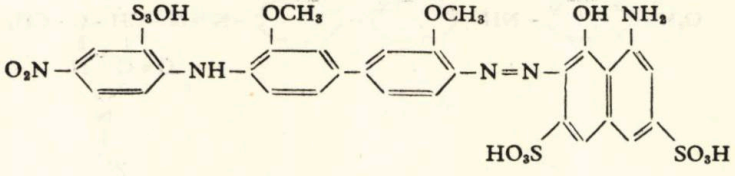
Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon) säure-azo-*G*-säure

(V) 

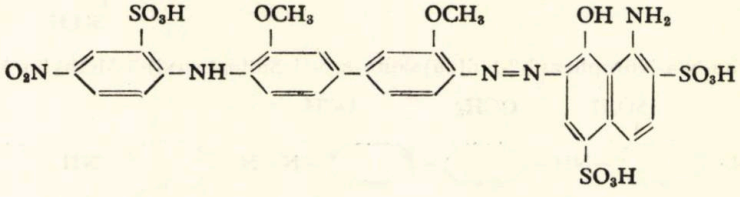
Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon) säure-azo-Neville-Winther-Säure

(VI) 

Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon) säure-azo-Gama-Säure

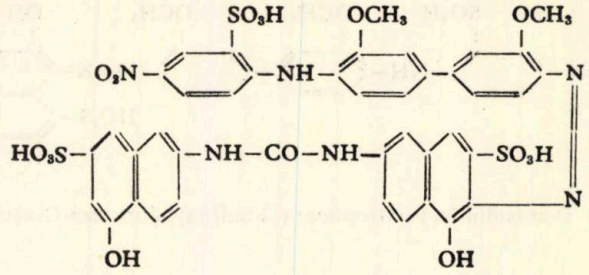
(VII) 

Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon)säure-azo-*H*-säure

(VIII) 

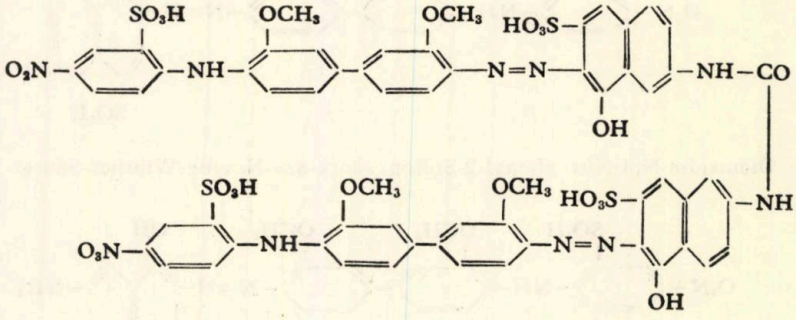
Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon)säure-azo-Chicago *SS*-Säure

(IX)



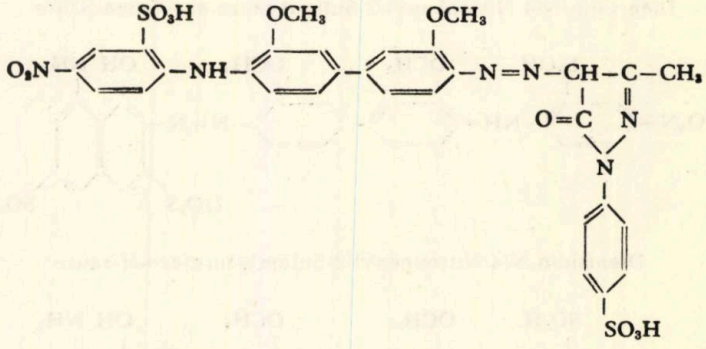
Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon) säure-azo-Carbonyl *I*-säure

(X)



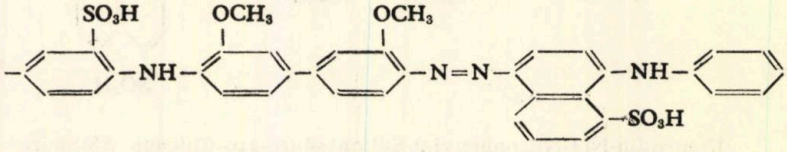
[Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon) säure-azo]-Carbonyl *I-Säure*

(XI)



Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon) säure-azo-(1-Sulfophenyl)-3-Methylpirazolon-5

(XII)



Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon) säure-azo-Phenyl-Peri-Säure

Die hergestellten Farbstoffe haben grosse Molgewichte, sind amorphe Substanzen und angewärmt zersetzen sie sich ohne zu schmelzen. Die Reinigung der Farbstoffe erfolgte mittels mehrmaligen Wiederaufnahmen mit heissem Wasser und Niederschlagen mit Salzsäure.

Um die Eigenschaften der Farbstoffe zu studieren, wurden Färbungen auf Zellstoff-Fasern, Wolle und Polyamidfasern (Relon) durchgeführt und die Höchstwerte der Absortion ermittelt.

Da die Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon)säure (I) in dem Molekül die chromophore Gruppe NO_2 enthält, besitzt sie selbst bestimmte Färbeigenschaften. Sie färbt die Wolle zwar nicht, färbt aber gelb die Polyamidfasern. Das Produkt (I) hat $\lambda = 428\,m\,\mu$.

Obwohl das Produkt (I) die Sulfon- und Aminogruppen als Substituenten, die eine Salzbrücke mit den aktiven Gruppen der Wolle ermöglichen, besitzt, scheint es, dass die Stellungen 2 für die Sulfongruppe und 4 für die Nitrogruppe des Produktes (I) sich als unvertragbar mit den Stellungen der aktiven Gruppen der Wolle erweisen.

Wir vermerken dass das Isomere des Produktes (I) in dem sich die Nitrogruppe in Stellung 4 und die Sulfongruppe in Stellung 2 befindet, die Wolle färbt so dass man in diesem zweiten Fall behaupten kann, dass die oben erwähnte Verträglichkeit besteht.

An den in dieser Mitteilung hergestellten Farbstoffen wurde versucht die Farbänderung je nach Änderung der Kupplungskomponente unter konstanter Beibehaltung der diazotierbaren Komponente (I) zu verfolgen. Besonders überzeugend erscheint die Rolle der Koplanarität der aromatischen Kerne die zur Bildung der Moleküle beitragen. Es ist bekannt dass die Zerstörung der Koplanarität gleichbedeutend mit der Zerteilung der Elektronenwolke der Moleküle in getrennte Ebenen mit kleinerer Flächen ist, was gleichbeteutend mit der Distanzierung der Energiestufen ist. In diesem Fall benötigen die Elektronen für die Erregung, Strahlungen des sichtbaren Spektrums kleiner Wellenlänge, deren Komplementärstrahlungen helle Farben besitzen. Das wird als hypsochrome Wirkung definiert.

Im Gegenteil, durch die Bildung der Systemkoplanarität in dem Molekül, rücken die Energiestufen zusammen, entsprechend den Langwellenstrahlungen deren Komplementierung die tiefen dunkleren Farben sind. Das Stellt die batochrome Wirkung dar.

Der Farbstoff (II) wurde unter Verwendung von Resorzin als Kupplungskomponente hergestellt, das in das Molekül nur einen einzigen aromatischen Benzolring mit relativ kleiner Konjugationsenergie ($\lambda_{max} = 496\,m\,\mu$) mitbringt. Die Komplementierung dieser Strahlung ist die rote Farbe, die mittels den Färbeproben bewiesen wurde.

Die nächst verwendeten Kupplungskomponenten besitzen den Naphtalin ring. Mit der Schaeffer-Säure und der G-Säure wurden die Kupplungen in der α-Stellung vorgenommen. Der doppelringförmige Naphtalinkern mit grösserer Konjugationsenergie als der Benzolkern, nimmt

kleinere Energiestrahlungen bzw. grössere Wellenlängen auf, deren Komplementäre tiefe Farben besitzen.

Der Farbstoff (III), hergestellt mittels Schaeffer-Säure, hat $\lambda_{max} = 533$ mμ und die gefärbten Proben sind violett.

Der mit G-Salz erzeugte Farbstoff (IV), obwohl er den Naphtalinring besitzt, weisst eine purpurrote Farbe auf ($\lambda_{max} = 510$ mμ). Diese Anomalie ist auf den starken Stereoeffekt der Sulfongruppe der Stellung *8*, der die Koplanarität zwischen den Diphenyl- und Naphtalinringen verhindert, zurückzuführen.

An den nächsten drei Farbstoffen erscheint in der Naphtalinkup-β-Stellung des Naphtalinringes vorgenommen.

Der Farbstoff (V), der mit Neville-Winthersäure erzeugt wurde, bezitzt in der Nähe der Azogruppe keine Sulfongruppe, so dass die Koplanarität sich über die gesamte Fläche des Moleküls erweitert, was als Ergebnis zu einer Starken Batochromischen Wirkung führt ($\lambda_{max} = 550$ mμ). Die gefärbten Muster haben eine violette Farbe und eine ausgeprägte Reinheit.

An den nächsten drei Farbstoffen erscheint in der Naphtalinkupplungskomponente eine Aminogruppe die sich an der Konjugation beteiligt. Die mit γ- und *H*-Säure hergestellten Farbstoffe besitzen eine Sulfongruppe in der β-Stellung die sich mit der Azogruppe benachbart. Obwohl der Abstand β-β grösser als der Abstand α-β ist, findet ein Stereoeffekt statt.

Der mit γ-Säure hergestellte Farbstoff (VI) weist in der Absorbtionskurve zwei Höchstwerte auf einer mit nidrieger Extinktion ($\lambda_{max} = 410...470$ mμ) und ein anderer mit hoher Extinktion ($\lambda_{max} = 560$ mμ).

Der mit *H*-Säure hergestellte Farbstoff (VII) weist gleichfalls zwei der Absorbtionshöchstwerte auf die $\lambda_{max} = 420$ mμ und $\lambda_{max} = 570$ mμ betragen.

Auf diese Weise erklären sich die dunklen Farben, mit reinheitslosen Nuancen.

Der mit Chicago *SS*-Säure erzeugte Farbstoff (VIII) in dem die Sulfongruppen sich im zweiten Ring befinden, gestattet die Wiederherstellung der Koplanarität, was zu einer starken batochromischen Wirkung führt ($\lambda_{max} = 580$ mμ). Die gefärbten Muster weisen eine blaue Farbe mit einer bemerkenswerten Reinheit auf.

Die mit Carbonylsäure *I* im Molverhältnis 1 : 1 und 2 : 1 in Lösung hergestellten Farbstoffe (IX) und (X) haben $\lambda_{max} = 428$ mμ bzw. 533 mμ. Sie enthalten in dem Molekül die isolierende Harnstoffgruppe, die die Konjugation der Systeme die sie verbindet verhindert. Es ist noch zu bemerken, dass der Farbstoff (X), obwohl er eine doppelte Molekülläge gegenüber dem Farbstoff (IV) aufweist sind ihre Farben sehr nahe wegen der Unterbrechung des Konjugationssystemes.

Da der mit einer Pirazolonkupplungskomponente hergestellte Farbstoff (XI) keine kondensierte Kerne besitzt, ist seine Farbe hell ; λ_{max} = = 469 mμ.

Der mit Phenyl-Peri-Säure hergestellte Farbstoff (XII), hat in saurem Medium eine grüne Farbe. Die auf Wolle vorgenommenen Färbungen sind in sauren Medium grün, aber je mehr sie gewaschen sind, werden sie braun oder rotbraun.

Beim Vergleichen der auf Baumwolle, Wolle und Polyamidfaser durchgeführten Färbungen, stellt man fest, dass derselbe Farbstoff seine Farbe nach der Art der Faser ändert.

Da die Gestaltung des Farbstoffes länglich ist, befestigt sich dieser an den Zellstoff-Fasern mittels Wasserstoffbrücken und orientiert sich parallel zu der Faser.

Auf diese Weise ändert er seine Koplanarität nicht und behält gleichzeitig die aus der Struktur hervorgehende Farbe.

An der Wolle und Polyamidfasern entstehen zwischen Farbstoff und Faser chemische Bindungen mit Salzbildung zwischen den Sulfongruppen des Farbstoffes und den basischen Gruppen der Faser, so dass eine neue stabile Zusammensetzung aus Farbstoff und Faser entsteht. Die stärksten Farbänderungen finden auf den Wollfasern statt, eine gleichwertige Änderung der Farbstoffstruktur voraussetzend.

Nimmt man die von H. Vasiliu [8], Pauling und Corey [9] vorgeschlagene schraubenförmige Gestaltung der Polypeptydkette der Wolle an, nach der die freien Aminogruppen sich nach einer Schraubenlinie entfalten, dann ist zu verstehen dass die Befestigung des Farbstoffes mittels Festigung der Koplanarität erfolgt, was als Ergebnis zu einem hypsochromen Effekt führt.

Bei den Polyamidfasern haben die fadenförmigen Makromoleküle eine parallele Aufstellung, so dass die chemischen Bindungen zwischen Faser und Farbstoff keine Verdrehungen, die die Koplanarität beträchtlich verändern, verursachen, und die Farbe der Färbungen ist nahe jener die an den Zellstoff-Fasern erhalten wurde.

Es ist anzunehmen dass der mittels chemischen Bindungen an den Polypeptidfasern befestigte Farbstoff, seine Konjugationsrichtung auf andere Achsen als die ursprünglichen ab ändern kann, infolge dessen sich die Farbe ändert.

3. Experimenteller Teil

Die Dianisidin N-(4-nitrophenyl-2-sulfon)säure wird in Wasser unter Erwärmen, in Gegenwart von Natriumkarbonat gelöst und nach Abkühlen mit Natriumnitrit versetzt. Bei +10°C wird, unter Umrühren, tropfenweise konzentrierter Chlorwasserstoffsäure zugefügt und die Mischung wird 1/2 Stunde kalt aufbewahrt.

Für die Kupplung wird das Resorzin mit Natriumkarbonat aufgelöst und zu der erhaltenen Lösung fügt màn, bei 10°...15°C, allmälich das Diazoniumsalz zu.

Nach halbstündigem Umrühren wird das Reaktionsgemisch angesäuert und der Farbstoff durch Filtrieren abgeschieden.

Zur Reinigung wird der Stoff mehrmals aus Wasser, durch starkes Ansäuern, gefällt.

In der gleichen Weise ging man für die Farbstoffe (III)...(XI) vor. Die Ergebnisse der Analysen sind in Tabelle 1 aufgezeichnet.

Tabelle 1

Farbstoff	N berechnet %	N gefunden %
II	9,89	10,12; 10,18
III	8,23	7,96; 8,09
IV	7,36	7,62; 7,47
V	8,23	8,04; 8,51
VI	10,07	9,91; 9,80
VII	9,03	8,86; 8,95
VIII	9,03	9,11; 9,24
IX	8,75	8,66; 8,89
X	9,88	10,11; 10,07
XI	11,83	11,74; 11,89
XII	9,27	9,51; 9,38

4. Schlussfolgerungen

1. Die Dianisidin-N(4-Nitrophenyl-2-Sulfon)säure kann als Diazotierkomponente angewendet werden.

2. Das erhaltene Diazoderivat wurde mit Resorzin, Schaeffer-Säure, *G*-Säure, Neville-Winther-Säure, γ-Säure, *H*-Säure, Chicago *SS*-Säure, Garbonylsäure *I*, 1-Sulfophenyl-3-Methyl-Pirazolon-5, Phenyl-Peri-Säure gekuppelt, mit Erreichung der Farbstoffe (II)...(XII).

3. Aus dem Vergleich der erzeugten Farbstoffe, konnten die Änderungen der Farben mit des möglichen Koplanaritäts Änderungen der aromatischen Kerne hervorgehoben werden.

4. Es wird eine rationelle Erklärung der Farbänderung des Farbstoffes mit der Art des zu färbenden Materials vorgeschlagen.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für organische Industrien

LITERATURVERZEICHNIS

1. Lupuşor Gh., Dumitrescu S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *1—2*, p. 131.
2. Lupuşor Gh., Ifrim S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *1—2*, p. 125.
3. Lupuşor Gh., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*, p. 194.
4. Lupuşor Gh., Lixandru T., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *1—2*, p. 171.
5. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **IX (XIII)**, *3—4*, p. 143.
6. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3—4*, p. 163.
7. Lupuşor Gh., Secure V., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, p. 199.
8. Vasiliu H., Comun. labor. chimie Agr., fac. Agr., Iaşi, 1936/37, 1, 3.
9. Nenițescu C., *Tratat elementar de Chimie Organică*. Vol. **II**, Ed. Tehn., Buc., 1958, p. 432.

COLORANŢI AZOICI OBŢINUŢI DIN ACIDUL DIANISIDIN N(4-NITROFENIL-2-SULFONIC) CU DIVERSE COMPONENTE DE CUPLARE

(Rezumat)

În prezenta lucrare acidul dianisidin-N-(4-nitrofenil-2-sulfonic) a fost supus diazotării, după care sarea de diazoniu s-a cuplat cu rezorcină, acid Schaeffer, acid *G*, acid Neville-Winther, acid *γ*, acid *H*, acid Chicago *SS*, acid Carbonil *I*, 1-Sulfofenil-3-metil-pirazolonă-5, acid Fenil-peri. S-au obţinut coloranţii (II)...(XII).

Prin compararea lor s-a putut scoate în evidenţă modificarea absorbţiei în funcţie de coplanaritatea inelelor aromatice şi de alţi factori sterici.

Se propune o explicare a modificării culorii şi funcţie de natura materialului care se vopseşte.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

D.K. 547.498

ACYL-SEMICARBAZIDE UND THIOSEMICARBAZIDE VON NAPHTHYLACETHYDRAZID

CYCLISIERUNGSPRODUKTE

VON

EUGENIA COMANIŢĂ und MARIA TUTOVEANU

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Jechnischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

1. Vorwort

In einer früheren Arbeit [1] haben wir gezeigt, dass das Hydrazid der Phenylessigsäure mit Isocyanaten und Isothiocyanaten reagiert, wobei am N^1 acylierte Semi- und Thiosemicarbazide entstehen.

Durch die thermische [2] oder alkalische [3] Cyclisierung einiger erhaltenen Stoffe gelangt man zu heterocyclischen Verbindungen, aus der Klasse des 5-Mercapto-1, 2, 4-Triazols, die wegen einiger praktischen Anwendungsmöglichkeiten interessant erscheinen. So erhält man mit 3-Benzyl-4-Allyl-5-Mercapto-1, 2, 4-Triazol besonders gute Ergebnisse, wenn man es bei der Herstellung photographischer Emulsionen als Zusatz verwendet ; das 4-(*p*-Tolyl)-Derivat weist die Eigenschaften eines Vulkanisierungsbeschleunigers für Naturkautschuk auf.

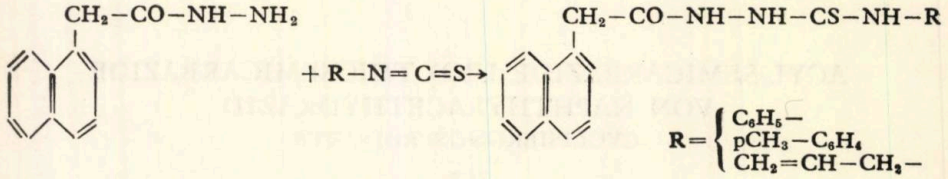
2. Theoretischer Teil

Bei der Fortsetzung der Arbeiten in dieser Richtung, versuchten wir, ähnliche Stoffe zu erhalten, in welchen der Aryl-Methyl-Rest in der Stellung 4 des Triazolringes bewarhrt bleibe, der für das Auftreten der oben erwähnten Eigenschaften günstig scheint.

Zu diesem Zwecke haben wir unsere Aufmerksamkeit auf das Naphthylacethydrazid gerichtet ; dies gestattete die Einführung des Naphthylmethylrestes in die synthetisierten Stoffe. Die Anwendung dieses Hydrazids hat auch andere praktische Verwendungsmöglichkei-

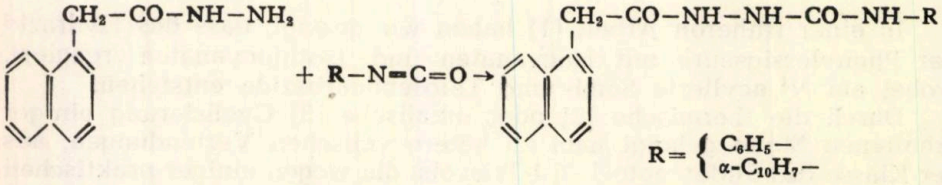
ten der von uns hergestellten Stoffe aufgezeigt : die Zahlreichen Anwendungen des Methyl-Naphthylacetesters in der Landwirtschaft sind bekannt. Diese Voraussetzung wird dadurch befestigt dass einige Verbindungen des 5-Mercapto-Triazols im selben Bereiche Anwendung fanden.

Zur Herstellung von in Stellung *4* substituierten 1-Naphthylacetyl-Thiosemicarbaziden wurde das Naphthylacet-Hydrazid der Einwirkung von Isothiocyanaten nach der folgenden Gleichung unterworfen :



Die Synthese verläuft in einem Medium von Äthylalkohol, unter halbstündiger Erhitzung im Wasserbad. Die Thiosemicarbazide scheiden sich selbst in der Hitze in Form von schön kristallisierten Stoffen ab.

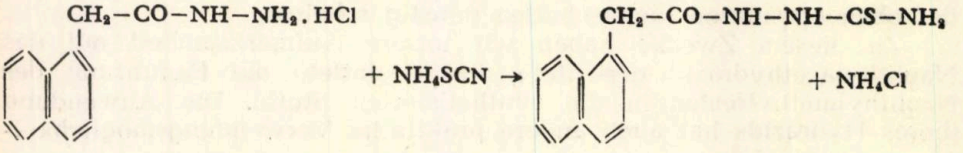
Durch eine ähnliche Umsetzung wurden in Gegenwart von Phenyl- und Naphthyl-Isocyanaten 4-substituierte 1-Naphthylacetyl-Semicarbazide erhalten :



Die Addition der Isocyanate an das Naphthylacet-Hydrazid verläuft in einer kurzen Zeitspanne, wobei als Reaktionsmedium wasserfreies Benzol verwendet wird.

Die Semicarbazide sind gleichfalls weisse Stoffe von kristallinem Bau, die in den üblichen Lösungsmitteln schwer löslich sind und höhere Schmelzpunkte als die analogen Thiosemicarbazide aufweisen.

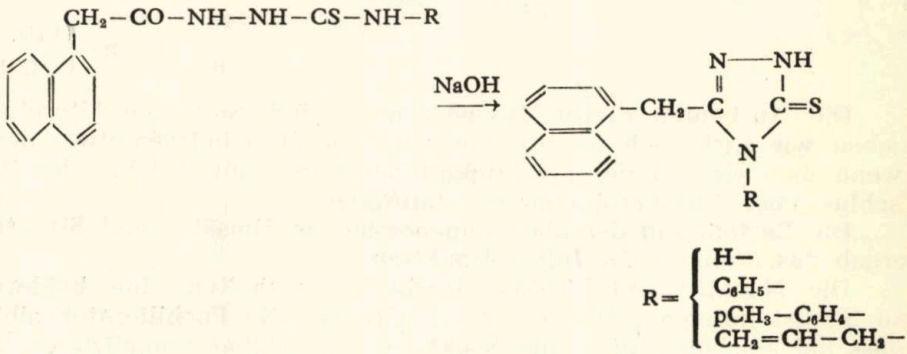
Wir gingen von einer Literaturangabe [6] aus, laut welcher die Herstellung von in Stellung *4* nichtsubstituierten 1-Aroyl-Thiosemicarbaziden möglich ist und stellten 1-Naphthylacetyl-Thiosemicarbazid durch Behandlung von 1-Aroyl-Thiosemicarbazide als Hydrochlorid mit Ammonium-Sulfocyanid gemäss folgender Gleichung her :



Man arbeitet in einem Medium von Äthylalkohol, wobei ein Überschuss von NH_4SCN angewendet wurde.

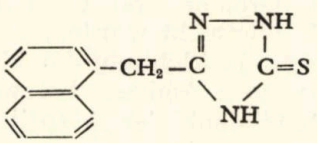
Diese interessante Umsetzung wurde, gemäss der Fachliteratur, an einer sehr begrenzten Anzahl von Substanzen unternommen, welche hergestellt worden waren, um Stoffe mit antituberkuloser Aktivität zu erhalten, welche gleichzeitig eine Hydrazidgruppe neben der Harnstoff- und der Thiosemicarbazidgruppe enthalten.

Die in Stellung *4* substituierten und unsubstituierten 1-Naphthylacetyl-Thiosemicarbazide haben weiter zur Herstellung von 5-Mercapto-1, 2, 4-Triazolen gedient, gemäss der Cyclisierungsreaktion [7], [8], die in Gegenwart von verdünnter Natriumhydroxydlauge stattfindet:



In der Fachliteratur finden sich auch Hinweise auf die Synthese von 3-Naphthylmethyl-4-Methyl-5-Mercapto-1, 2, 4-Triazol, das aus 1-Naphthylacetyl-Thiosemicarbazid durch Kondensation mit Äthylformiat in Gegenwart von Natriummethylat hergestellt wurde [4].

Das 1-Naphthylacetyl-Thiosemicarbazid cyclisiert ebenso leicht wie die 4-substituierten Thiosemicarbazide, wobei man 3-Naphthylmethyl-5-Mercapto-1, 2, 4-Triazol erhält:

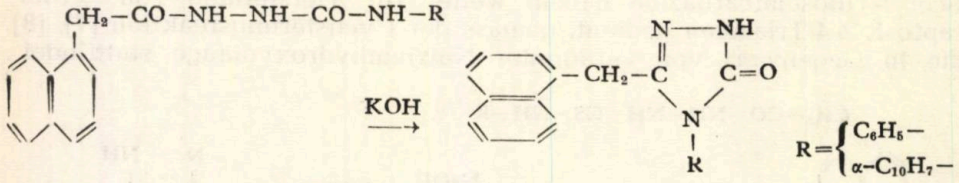


Zur Umwandlung der Acyl-Semicarbazide in Derivate des 5-Hydroxy-Triazols sind energischere Reaktionsbedingungen, als die bei der Cyclisierung der Thiosemicarbazide erwähnten, nötig.

In einer frühern Arbeit [2] haben wir gezeigt, dass das 1-Benzoyl-4-Phenyl-Semicarbazid durch Erhitzen auf 200°C in Anwesenheit von Zinkchlorid zu 3,4-Diphenyl-5-Hydroxy-1, 2, 4-Triazol cyclisiert werden kann.

In der voliegenden Arbeit haben wir ein anderes Cyclisierungsverfahren angewendet, welches erst kürzlich in der Fachliteratur zitiert wurde [9] und die Verwendung von verdünntem KOH als Cyclisierungsagent vorsieht.

Die von uns durch Erhitzen auf Siedetemperatur mit einer 10%-Lösung von KOH während ungefähr zwei Stunden hergestellten Acyl-Semicarbazide führten zu 3-Naphthylmethyl-4-Phenyl- und 4-Naphthyl-Triazol-5-on gemäss folgender Gleichung :



Die Ausbeuten dieser Zyklisierungen sind nach den Literaturangaben, wie auch nach den von uns erhaltenen Ergebnissen etwas gering, wenn man sie mit der Leichtigkeit vergleicht mit welcher der Ringschluss bei Thioverbindungen stattfindet.

Die Bestätigung der oben angenommenen Umsätze und Strukturen ergab das *Studium der Infrarotspektren.*

Die Naphthylacetyl-Thiosemicarbazide enthalten eine beiderseits an Stickstoffatome gebundene C=S Gruppe. Die Fachliteratur gibt an dass bei solchen Stoffen die Spektren sich fühlbar komplizieren dank der mächtigen Vibrationskupplungseffekte ; dies erschwert in den meisten Fällen die genaue Interpretierung der Absorptionen [10].

Die Anwesenheit der gemeinsamen —NH—CO— Gruppe bedingt bei diesen Verbindungen das Auftreten von für sekundäre Amine charakteristischen Schwingungen, welche den C=O, C—N und N—H Bindungen zu verdanken sind.

Das Amidband *I*, welches der Valenzschwingung der C=O— Gruppe zugeschrieben wird, findet sich bei den Spektren der Naphthylacetyl-(Thio) semicarbazide im Bereiche von 1 660...1 695 cm^{-1}. Obwohl die Stoffe im festen Zustand untersucht wurden, ist das C=O Band bei den Thiosemicarbaziden weniger in Richtung der kleineren Frequenzen verlagert, als bei den sekundären Amiden, bei welchen die tieferen Frequenzen in festem Zustand dank der Assoziierungen mittels Wasserstoffbindungen verzeichnet wurden.

Das Amidband *II*, das der NH — Absorbtion zugeteilt wird, erscheint bei den Naphthylacetyl-Semi- und Thiosemicarbaziden ungefähr im Bereiche der Frequenz von 1 580 cm^{-1} mit einer kleineren Intensität als bei dem Amidband *I*. Der Ursprung dieser Absorption wurde in der Literatur vielfach diskutiert und wurde in erster Linie der NH-Deformierungsschwingung zugeschrieben, da sie bei tertiären Amiden nicht auftritt.

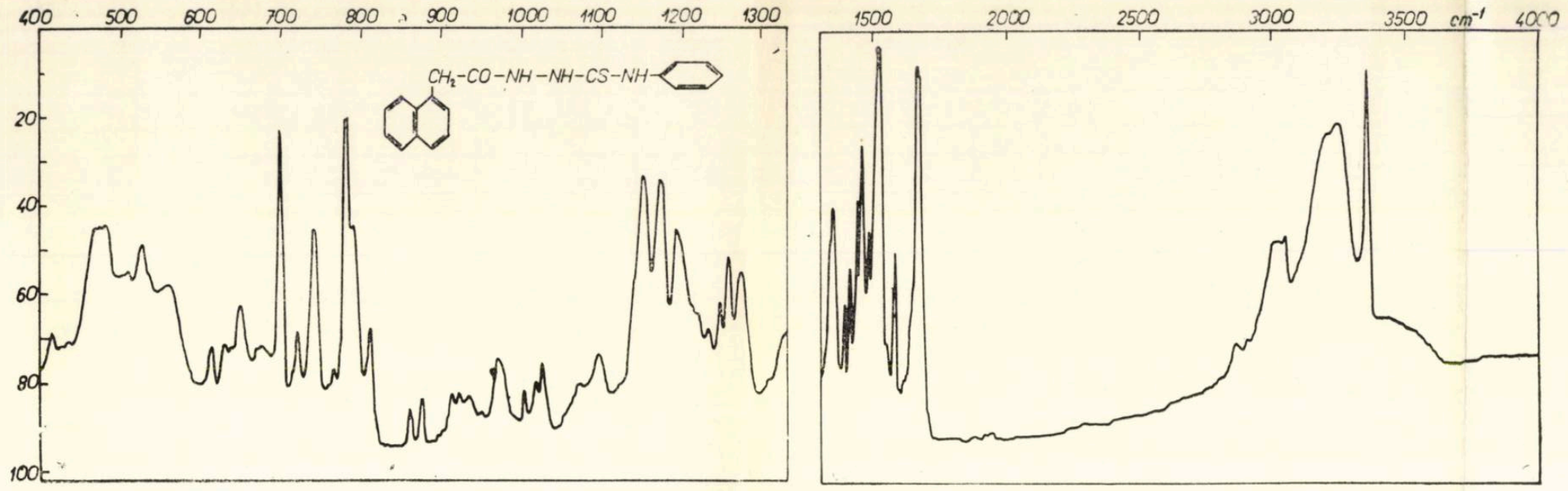


Abb. 1. — Das IR-Spektrum des 1-Naphthylacetyl-4-phenyl-thiosemicarbazid.

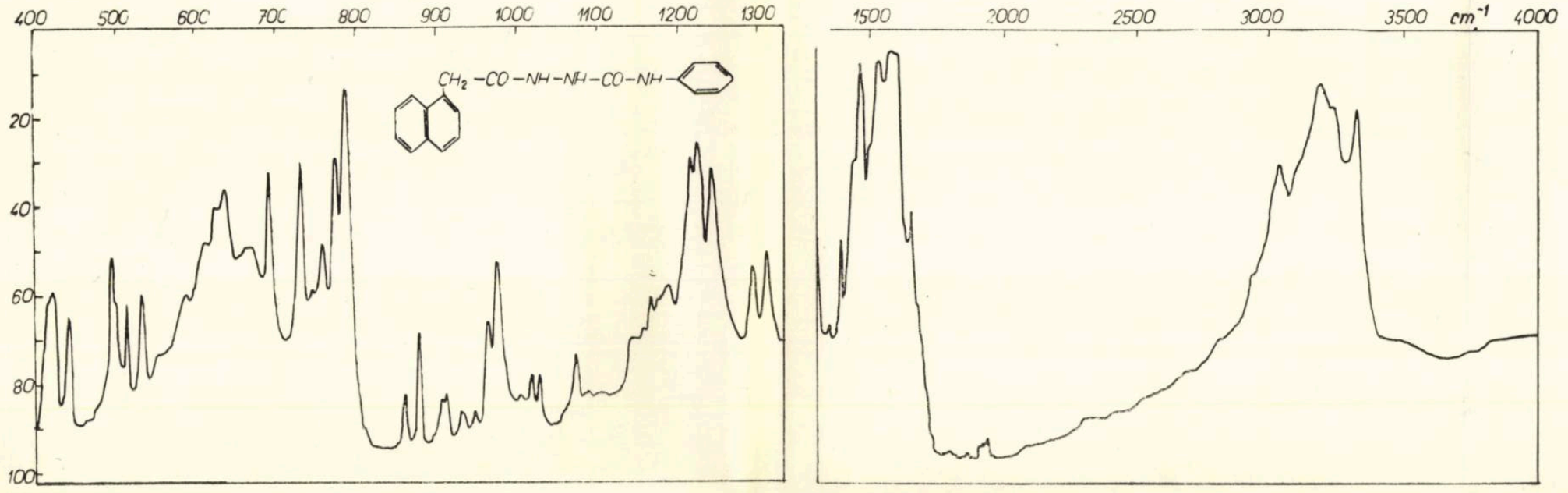


Abb. 2. — Das IR-Spektrum des 1-Naphthylacetyl-4-phenyl-semicarbazid.

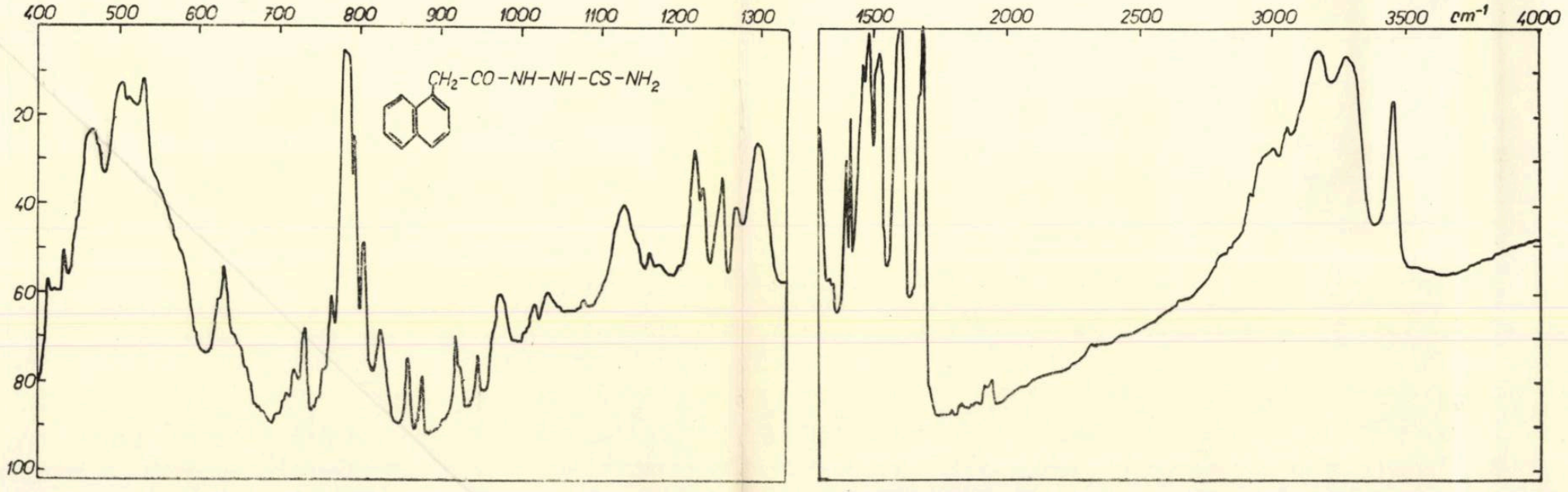


Abb. 3. — Das IR-Spektrum des 1-Naphthylacetyl-thiosemicarbazid.

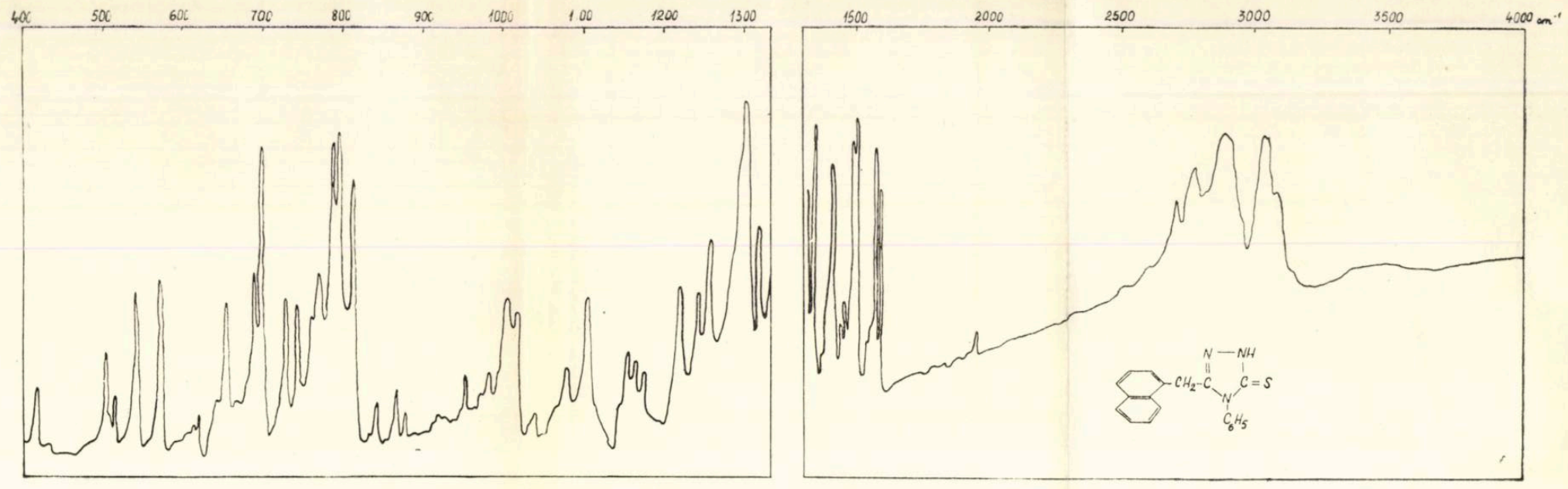


Abb. 4. — Das IR-Spektrum des 3-Naphthylmethyl-4-phenyl-5-mercapto-1,2,4-triazol.

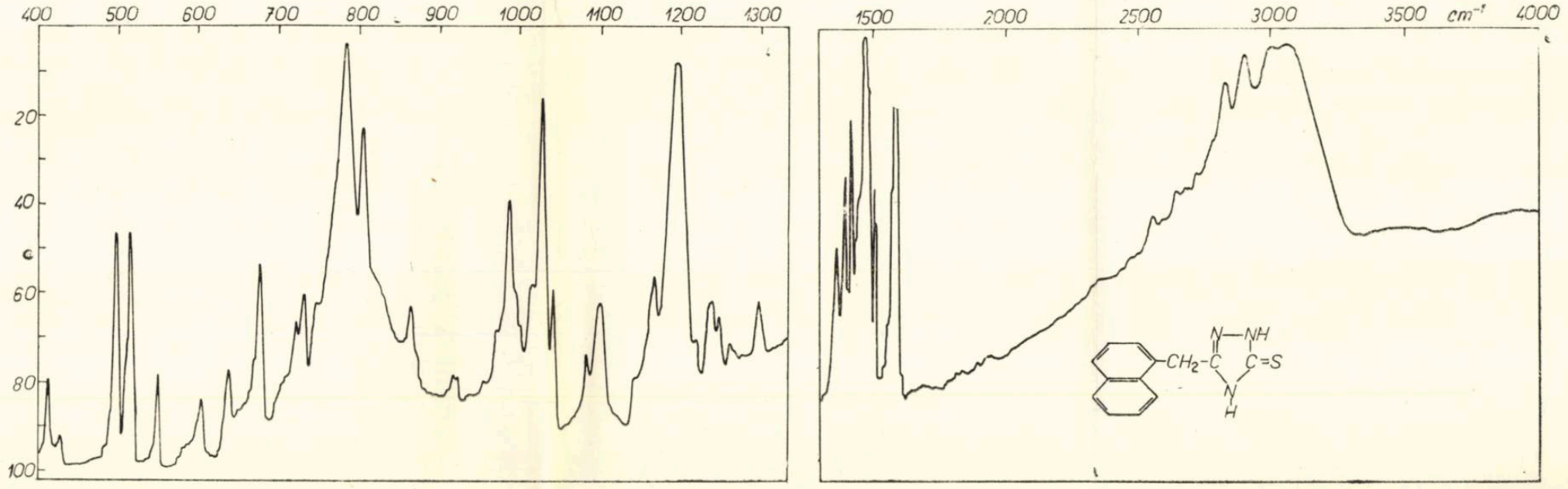


Abb. 5. — Das IR-Spektrum des 3-Naphthylmethyl-5-mercapto-1,2,4-triazol.

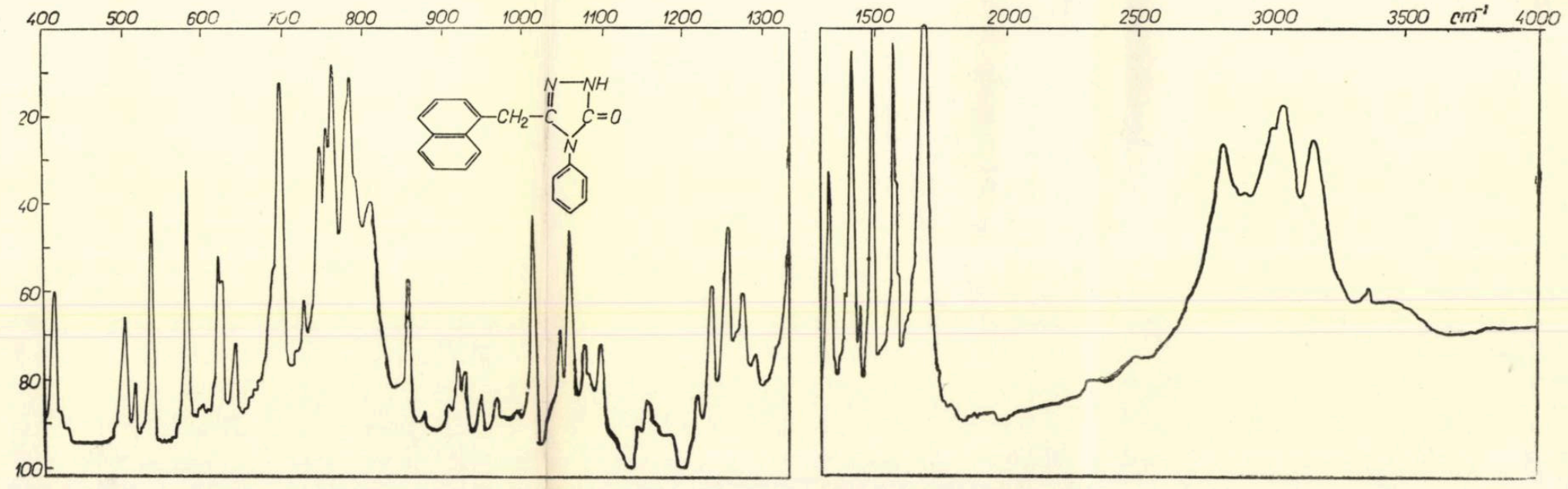
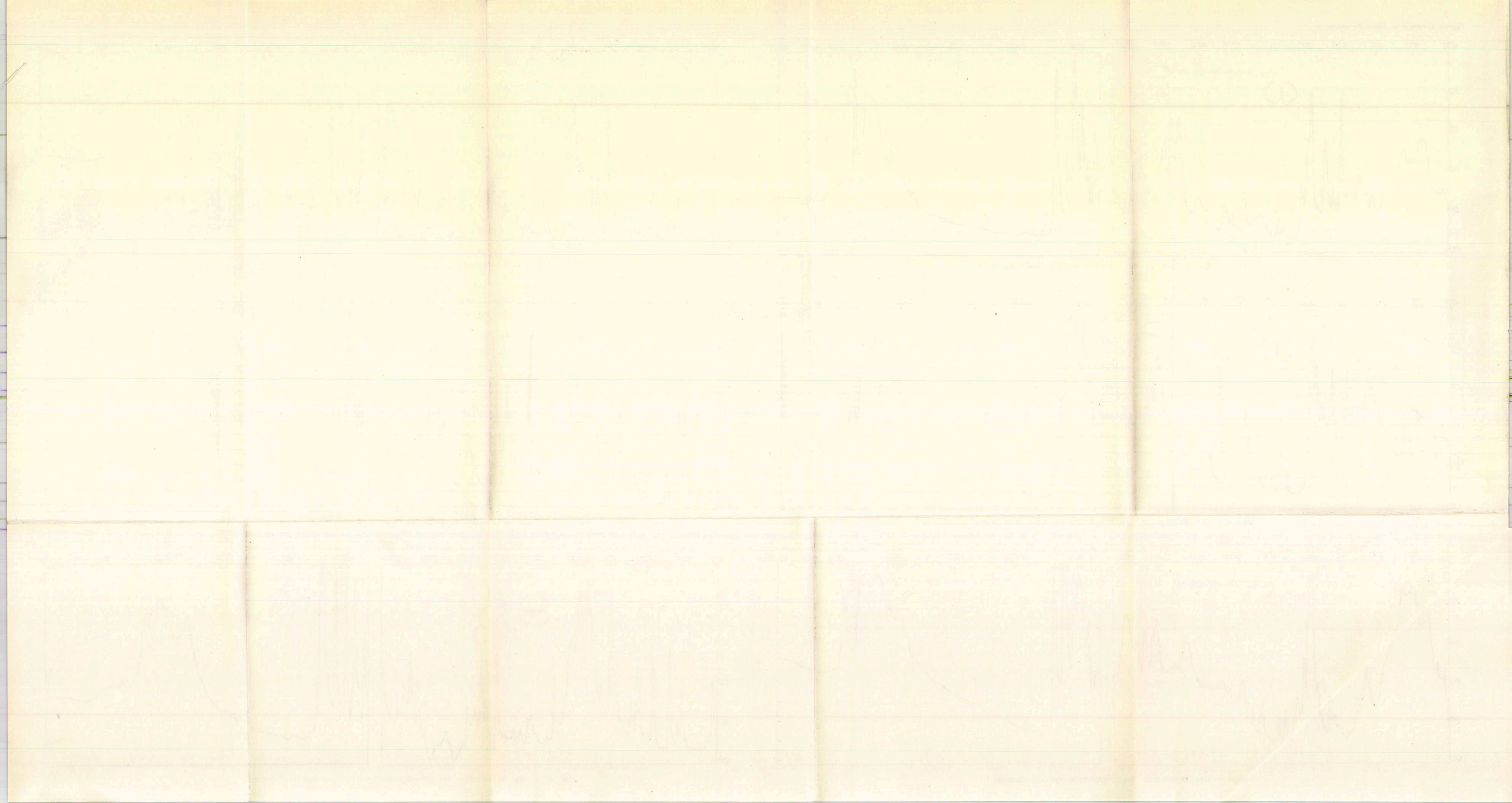


Abb. 6. — Das IR-Spektrum des 3-Naphthylmethyl-4-phenyl-5-hydroxi-1,2,4-triazol.



Das Amidband *III*, welches den Schwingungen entspricht, die den O—C—N und N—H Bindungen zugeschrieben werden, wurde bei den von uns synthetisierten Verbindungen im Bereiche von 1 275...1 300 cm^{-1} in Form einers Bandes mittlerer Intensität identifiziert. Nach einigen Verfasser soll sie der Valenzschwingung der C—N-Bindung zu verdanken sein [11], [12].

Charakteristisch sind auch die Absorptionen, die im Bereiche 3 050... 3 550 cm^{-1} dank der Valenzschwingungen der N—H-Bindung stattfinden. Im allgemeinen sind diese Banden, dank der intermolekulären CO...NH-Wasserstoffbindungen, die besonders bei Stoffen in festem Zustande auftreten, nach den kleineren Frequenzen verlagert. Diese Absorptionen erscheinen bei den von uns synthetisierten Stoffen zwischen 3 150... ...3 190, 3 240...3 280 und 3 320...3 360 cm^{-1}.

Beim Naphthylacetyl-Thiosemicarbazid tritt neben der Absorption der assoziierten N—H-Gruppe (3 060, 3 170, 3 280 cm^{-1}) ein Band bei 3 450 cm^{-1}auf, welches die Schwingung der unassoziierten N—H-Bindung darstellt.

Gleichfalls in diesem Bereiche der hohen Frequenzen absorbieren die alyphatischen und aromatischen C—H-Bindungen.

Im Bereiche der Frequenz von 2 550 cm^{-1} findet man keine Spur einer Absorption die der SH-Gruppe zuzuschreiben wäre. Das Fehlen dieses Bandes unterstützt die Ansicht, dass die Thiosemicarbazide die Thiongruppe enthalten, die diesen Stoffen kaum attribuiert werden kann.

Das Naphthylradikal, welches allen von uns hergestellten Stoffen gemeinsam ist, wird durch ein Band charakterisiert, das konstant bei 780 cm^{-1} erscheint und dem Naphthalinring entspricht.

Zu den Cyclisierungsprodukten der Naphthylacetyl-Thiosemicarbaziden übergehend, bemerkt man das Verschwinden des Amidbandes *I* aus dem Bereiche 1 670...1 695 cm^{-1}; dies ist ein Beweis dafür dass die Cyclisierung zum Triazol-5-thion stattgefunden hat.

Das der N—H-Deformierungsschwingung entsprechende Band erscheint ebenfalls im Bereiche der Frequenz von 1 580 cm^{-1} während die Schwingung der N—H-Valenz stark zu den kleineren Frequenzen hin verlagert ist.

Die Absorptionen der N—H-Valenzbindungen erscheinen klarer im festen Zustande bei den Triazolonen, welche Bande bei 3 150 und 3 330 cm^{-1} aufweisen. Der Umstand, dass diese Verbindungen im Spektrum auch die C=O-Absorption bei 1 700 cm^{-1} enthalten, beweist, dass die Cyclisierungsprodukte der Naphtylacetyl-Semicarbazide nicht Hydroxytriazole, sondern 1, 2, 4-Triazol-5-one sind.

3. Experimenteller Teil

a) *1-Naphthylacetyl-4-Phenylthiosemicarbazid*

2 g naphthylessigsaures Hydrazid werden unter leichtem Erwärmen in 25 ml Äthylalkohol gelöst; man fügt 1,35 g Phenylisothiocyanat zu. Man erhitzt ungefähr 20 Min. auf dem Wasserbade. Das Thiosemicarbazid scheidet sich in der Form von weissen Kristallen aus, die aus Äthylalkohol umkristallisiert werden. Man erhält 2,9 g vom Fp. 166°...167°C.

Analysen
M = 335

	N%	
Berechnet	12,46;	12,61
Gefunden	12,53	

b) *1-Naphthylacetyl-4-Allyl-Thiosemicarbazid*

Es wurde ähnlich wie der vorgehende Stoff dargestellt. Es ergaben sich 2,7 g Thiosemicarbazid, das aus Äthylalkohol unkristallisiert wurde. Fp. 169°C.

Analysen
M = 299

	C%	H%	N%
Berechnet	64,21	5,68	14,04
Gefunden	64,32	5,47	14,29
	64,18	5,82	14,11

c) *1-Naphthylacetyl-4-p-Tolyl-Thiosemicarbazid*

Es wird in gleicher Weise verfahren. Man erhält 3 g Produkt, das durch Umkristallisieren aus Äthylalkohol gereinigt wird. Fp. 188°C.

Analysen
M = 349

	C%	H%	N%
Berechnet	68,76	5,44	12,03
Gefunden	68,93	5,76	12,35
	68,97	5,61	12,29

d) *1-Naphthylacetyl-4-Phenyl-Semicarbazid*

2 g naphthylessigsaures Hydrazid werden in 70 ml wasserfreiem Benzol suspendiert und mit 1,19 g Phenylisocyanat behandelt. Man erwärmt leicht, einige Minuten lang, auf dem Wasserbad; dann lösst man das Reaktionsgemisch ungefähr eine Stunde lang in Ruhe. Man erhiett 3 g Rohprodukt, dass aus Äthylalkohol gereinigt wurde. Kristalle mit einem Fp. von 215°...216°C.

Analysen
M = 319

	C%	H%	N%
Berechnet	71,47	5,32	13,16
Gefunden	71,63	5,51	13,49
	71,39	5,65	13,36

e) *1-Naphthylacetyl-4-Naphthyl-Semicarbazid*

Die Darstellung verläuft ebenso wie die des phenylsubstituierten Semicarbazids. Es scheidet sich 3,4 g Endprodukt aus, welches aus Äthylalkohol umkristallisiert wird. Fp 237°...238°C.

Analysen

M = 281

	C%	H%	N%
Berechnet	74,79	5,14	11,38
Gefunden	74,52	5,44	11,49
	74,66	5,36	11,27

f) *1-Naphthylacetylthiosemicarbazid*

3 g salzsaures naphthylessigsaures Hydrazid wird auf dem Wasserbad in 50 ml Äthylalkohol gelöst; man fügt 3 g NH_4SCN zu. Das Erwärmen wird unter zeitweiligem Rühren zwei Stunden lang forgesetzt. Man wäscht das Produkt auf dem Filter mit viel Wasser um die Mineralsalze zu entfernen und reinigt aus Äthylalkohol. Fp. 208°...209°C.

Analysen

M = 331

	C%	H%	N%
Berechnet	60,23	5,01	16,25
Gefunden	60,41	4,71	16,08
	60,12	5,09	16,39

g) *3-Naphthylmethyl-4-Phenyl-1,2,4-Triazol-5-thion*

2 g 1-Naphthylacetyl-4-Phenylthiosemicarbazid werden mit 25 ml NaOH behandelt und auf dem Wasserbade 30 Min. lang erwärmt. Das Cyclisierungsprodukt wird durch Ansäuern mit verdünnter HCl abgeschieden. Man erhält 1,75 g Triazolthion, welches aus Äthylalkohol umkristallisiert wird. Fp. 234°...235°C.

Analysen

M = 369

	C%	H%	N%
Berechnet	71,92	4,73	13,21
Gefunden	71,65	5,01	12,91
	72,12	4,94	13,06

h) *3-Naphthylmethyl-4-Allyl-1,2,4-Triazol-5-thion*

Die Cyclisierung findet unter ähnlichen Bedingungen statt. Man erhält 1,8 g Rohprodukt, welches durch Umkristallisieren aus Äthylalkohol gereinigt wird. Fp. 187°...188°C.

Analysen

M = 259

	C%	H%	N%
Berechnet	68,32	5,33	14,94
Gefunden	68,27	5,54	14,82
	68,41	5,20	14,91

i) *3-Naphthylmethyl-4-(p-Tolyl)-1,2,4-Triazol-5-thion*

Die Reaktion verläuft in ähnlicher Weise. Es ergaben sich 1,8 g Triazolthion, welches aus Äthylalkohol gereinigt einer Fp. 254° aufweist.

Analysen

M = 317

	C%	H%	N%
Berechnet	72,50	5,13	12,68
Gefunden	72,29	5,35	12,76
	72,33	5,28	12,83

j) *3-Naphthylmethyl-1,2,4-Triazol-5-thion*

Die Cyclisierung findet unter denselben Bedingungen statt. Aus 1,3 g Thiosemicarbazid erhält man 1,1 g cyclisiertes Produkt. Es wird aus Äthylalkohol gereinigt. Fp. 245°C.

Analysen
M = 335

	C%	H%	N%
Berechnet	64,73	4,60	17,42
Gefunden	64,44	4,78	17,29
	64,54	4,85	17,63

k) *3-Naphthylmethyl-4-Phenyl-1,2,4-Triazol-5-on*

2 g 1-Naphthylacetyl-4-Phenylsemicarbazid werden mit 40 ml KOH 10% behandelt und zwei Stunden lang zum Sieden erhitzt. Man säuert mit verd. HCl an, wobei sich das Triazolon ausscheidet, welches aus Äthylalkohol umkristallisiert wird. Fp. 216°C.

Analysen
M = 351

	C%	H%	N%
Berechnet	75,74	4,98	12,53
Gefunden	76,05	5,26	12,78
	75,98	5,15	12,66

l) *3-Naphthylmethyl-4-Naphthyl-1,2,4-Triazol-5-on*

Man verfährt wie beim vorhergehenden Stoff. Man erhält 1,7 g Rohprodukt, welches aus Äthylalkohol umkristallisiert einem Fp. 246°C aufweist.

Analysen
M = 241

	C%	H%	N%
Berechnet	78,63	4,84	11,96
Gefunden	78,42	4,59	12,19
	78,37	4,71	12,23

4. Schlussfolgerungen

1. Durch die Umsetzung von Naphthylacethydrazid mit Isocyanaten und Isothiocyanaten wurden 4-substituierte 1-Naphthyl-acetylsemi- und -thiosemicarbazide dargestellt.

2. Die Cyclisierung von 1-Naphthylacetyl-4-R-Thiosemicarbazide in Gegenwart von verdünntem Natriumhydroxyd lässt 4-R-substituierte 3-Naphthylmethyl-1,2,4-Triazol-5-thione entstehen.

3. 1-Naphthylacetyl-4-Ar-Semicarbazide bilden beim Kochen mit 10% KOH-lauge 3-Naphthylmethyl-4-Ar-1,2,4-Triazol-5-one.

4. Durch den Umsatz von naphthylessigsaurem Hydrazid mit NH_4SCN bildet sich 1-Naphthylacetyl-Thiosemicarbazid, welches in alkaline Medium zu 3-Naphtylmethyl-1,2,4-Triazol-5-thion cyclisiert.

5. Auf Grund der IR-Spektren wurden einige Fragen bezüglich der Struktur der synthetisierten Stoffe geklärt.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für organische Chemie

LITERATURVERZEICHNIS

1. Matei I., Comaniță E., Bul. Inst. polit. Iași, 1966, XII (XVI), *1*—2, p. 189.
2. — Bul. Inst. polit. Iași, 1968, XIV (XVIII), *1*—2, p. 255.
3. — Bul. Inst. polit. Iași, 1966, XII (XVI), *3*—*4*, p. 175.
4. Pesson M., Fr. 1.273.881, 2 febr. 1962; Chem Abstr., 1962, **57**, p. 9860.
5. Zsolnai T., Biochem. Pharmacol., 1962, **11**, p. 271.
6. Lora Tamayo M., Alonso G., Madronero R., Bull. Soc. Chim. France, 1962, p. 1020.
7. Fromm E., Trnka A., Liebigs Ann. Chem., 1924, *442*, S. 150.
8. Girard M., C.r. Ac. Sci. Paris, 1947, **225**, p. 458.
9. Gehlen N. Schade W., Ber. dtsch. chem. Ges., 1964, **675**, S. 180.
10. Rao C., Venkataraghavan R., Spectrochim. Acta, 1962, *541*.
11. Mecke R., Mecke R., Ber. dtsch. chem. Ges., 1956, **89**, S. 343.
12. Mecke R., Mecke R., Lüttringhaus A., Ber. dtsch. Ges., 1957, **90**, S. 975.

ACIL-SEMICARBAZIDE ȘI TIOSEMICARBAZIDE ALE HIDRAZIDEI NAFTILACETICE
Produși de ciclizare

(Rezumat)

1. Prin reacția hidrazidei naftilacetice cu izocianați și izosulfocianați s-au preparat 1-naftilacetil-semi- și tiosemicarbazide-4-substituite.

2. Ciclizarea 1-naftilacetil-4-R-tiosemicarbazidelor în prezența hidroxidului de sodiu diluat dă naștere unor 3-naftil-metil-1,2,4-triazol-5-tione-4-R-substituite.

3. 1-Naftilacetil-4-Ar-semicarbazidele, la fierbere cu KOH 10% conduc la 3-naftilmetil-4-Ar-1,2,4-triazol-5-one.

4. Prin reacția hidrazidei naftilacetice cu NH_4SCN se formează 1-naftilacetil-tiosemicarbazida, care în mediu alcalin ciclizează la 3-naftilmetil-1,2,4-triazol-5-tionă.

5. Pe baza spectrelor IR s-au făcut unele interpretări referitoare la structura compușilor sintetizați.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Spectrul IR al 1-naftilacetil-4-fenil-tiosemicarbazidei.
Fig. 2. — Spectrul IR al 1-naftilacetil-4-fenil-semicarbazidei.
Fig. 3. — Spectrul IR al 1-naftilacetil-tiosemicarbazidei.
Fig. 4. — Spectrul IR al 3-naftilmetil-4-fenil-5-mercapto-1,2,4-triazolului.
Fig. 5. — Spectrul IR al 3-naftilmetil-5-mercapto-1,2,4-triazolului.
Fig. 6. — Spectrul IR al 3-naftilmetil-4-fenil-5-hidroxi-1,2,4-triazolului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 667.212

SINTEZA UNOR COLORANŢI AZOICI REACTIVI

DE

SAVEL IFRIM şi ELENA MIHAI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Coloranţii azoici se folosesc în cantităţi mari în industrie, datorită faptului că se prepară uşor precum şi datorită frumuseţii culorilor.

Legarea coloranţilor de către fibrele textile în procesul de vopsire se realizează cel mai frecvent prin intermediul auxocromilor (uneori şi a cromoforilor) şi depinde de caracterul chimic al auxocromilor şi de structura chimică a fibrei textile.

Coloranţii se pot lega de fibrele textile prin forţe van der Waals, prin punţi de hidrogen, prin legături electrochimice sau prin legături covalente, ca în cazul coloranţilor reactivi. În cazul formării legăturilor covalente vopsirea prezintă o mai bună soliditate.

În clasa coloranţilor azoici se cunosc numeroase grupări de atomi cu rol auxocromic, însă grupa aldehidică (—CHO) nu a fost semnalată pînă în prezent în această calitate.

Scopul lucrării de faţă este de a arăta posibilitatea obţinerii unor coloranţi azoici, care să posede ca auxocromi gruparea aldehidică. Această grupare ar determina posibilitatea de grefare a coloranţilor prin fibrele textile, deci ar conferi coloranţilor proprietăţi reactive. Pentru prepararea acestor coloranţi s-au folosit substanţe organice simple, deosebit de cunoscute.

2. Partea teoretică

Aldehidele sînt substanţe care pot reacţiona cu diferite grupări de atomi, formînd legături covalente, chiar atunci cînd aceste grupări fac parte din structura chimică a fibrelor textile. Este bine cunoscut faptul că aldehidele contribuie la formarea de noi punţi transversale în macromoleculele ce alcătuiesc fibra de lînă, mărind gradul de reticulare al cheratinei. Asemenea punţi transversale se formează la tratarea lînii cu aldehidă formică în mediu acid [1]. Este posibil ca gruparea

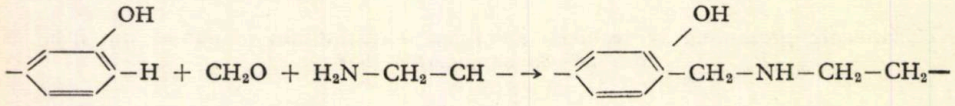
aldehidică să reacţioneze cu resturile de cisteină din lînă, formînd punţi de tipul —S—CH_2—S—, sau poate reacţiona cu grupele aminice şi amidice libere din cheratina lînii.

Speakman a stabilit că în mediu acid, aldehida formică poate reacţiona cu două grupări aminice din cheratina lînii, formînd punţi de tipul —NH—CH_2—NH—. Aceste grupări aminice se găsesc fie în catenele laterale, fie în capetele lanţului polipeptidic, care participînd la formarea de noi punţi interlanţuri, favorizează consolidarea tridimensională a fibrei de lînă. Această consolidare poate proteja lîna contra acţiunilor de degradare care au loc în industrie.

Middlebrook a arătat că aldehida formică poate reacţiona cu grupele funcţionale libere din resturile de acid glutamic şi arginină după schemă:

$$-CO\boxed{OH+H}-CH=\boxed{O+H_2}N-C(=NH)-NH-CH_2-$$

Alexander, Carter şi Johnson consideră că aldehida formică ar reacţiona cu resturile de tirozină şi lizină după schema:



În cazul tratării lînii cu derivatul bisulfitic al glioxalului se consideră că acesta reacţionează cu un rest de arginină din lînă [2]. Şi gruparea aldehidică din *p*-dimetilaminobenzaldehidă reacţionează cu lîna şi ajută la punerea în evidenţă a lînii degradate prin oxidare [3].

Aceste constatări permit să se presupună că şi gruparea aldehidică legată de molecula unui colorant ar putea reacţiona după una din posibilităţile indicate mai sus, realizîndu-se astfel legături covalente între fibra de lînă şi colorant.

Gruparea aldehidică poate reacţiona şi cu hidroxilii alcoolici din fibra celulozică formînd semiacetali sau cetali. În cazul monozaharidelor este cunoscută condensarea acestora cu acetona în mediu acid, rezultînd cetali ciclici sau derivaţi de izopropiliden [4]; pot reacţiona astfel oxidrilii de la atomii de carbon *1* şi *2*, *3* şi *4*, sau cei de la atomii de carbon 5 şi 6. Acest fapt permite să se presupună că şi gruparea aldehidică legată de un colorant ar putea reacţiona cu hidroxilii celulozei, realizîndu-se astfel legături covalente între coloranţi şi fibra de bumbac.

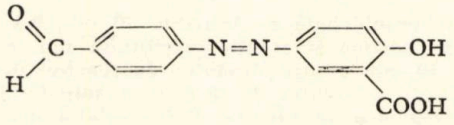
Desigur că în cazul grupărilor aldehidice legate de un colorant, deci de un rest cu volum molecular mare, există împiedicări sterice care nu vor permite formarea de legături covalente decît numai într-o proporţie mai redusă. Formarea unor legături covalente între fibra textilă şi un colorant care are grupă aldehidică, va depinde în mare măsură de structura chimică a fibrei, de exemplu fibra de lînă va reacţiona mai uşor cu astfel de coloranţi decît fibra de bumbac. Dacă însă gruparea aldehidică va fi mai distanţată de nucleul aromat, posibilităţile de formare a legăturilor covalente vor fi simţitor îmbunătă-

țite. Se poate deci admite că prezența grupei aldehidice în structura unui colorant va conferi acestuia proprietăți de grefare pe fibrele textile în procesele tinctoriale.

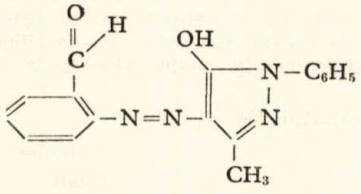
Pentru sinteza coloranților azoici cu grupe aldehidice ca auxocromi, s-au folosit substanțe organice simple, ușor accesibile. Gruparea aldehidică poate să apară într-un colorant azoic dacă ea se găsește în componenta de diazotare sau în componenta de cuplare. În acest scop s-au folosit drept componente diazotabile *p*-aminobenzaldehida și *o*-aminobenzaldehida, care diazotate și cuplate cu componente obișnuite de cuplare, formează coloranți noi, necunoscuți în literatură, care au grupări aldehidice ca auxocromi.

De asemenea diazotînd substanțe organice simple, ca acidul sulfanilic, *p*-nitroanilina și cuplîndu-le în mediu alcalin cu aldehidă salicilică se obțin coloranți azoici care au gruparea, aldehidică cuprinsă în componenta de cuplare. S-au sintetizat 6 noi coloranți azoici care au următoarele structuri chimice :

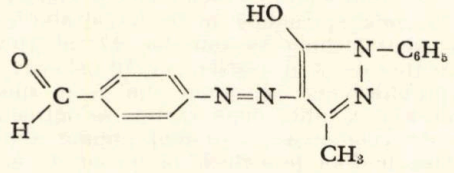
(I)



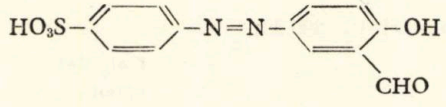
(II)



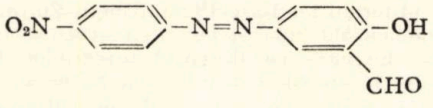
(III)



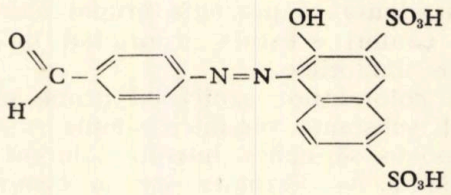
(IV)



(V)



(VI)



Coloranţi organici cu grupe aldehidice în structura lor nu s-au semnalat pînă în prezent în literatură.

3. Partea experimentală

Pentru prepararea coloranţilor de mai sus s-a procedat în modul următor:

a) *Colorantul I* (acidul 4-formol-fenil-azo-salicilic) se prepară prin diazotarea *p*-aminobenzaldehidei şi cuplarea ei în mediu alcalin cu acid salicilic. *P*-aminobenzaldehida este polimerizată, dar în mediul de acid clorhidric se depolarizează [5] şi se poate diazota.

Peste 4 g *p*-aminobenzaldehidă se introduc 20 ml HCl $d=1,19$ şi 50 ml apă. După răcire la 0°C se adaugă o soluţie constituită din 2 g $NaNO_2$ în cît mai puţină apă. Se lasă 5...10 min pentru desăvîrşirea reacţiei de diazotare.

Separat se pregăteşte o soluţie de 4 g acid salicilic în circa 50 ml apă şi 2 g NaOH, care de asemenea se răceşte. Peste soluţia de acid salicilic se introduce sub agitare soluţia de diazoniu, menţinîndu-se aceeaşi temperatură scăzută. Se formează un colorant galben-portocaliu, care se filtrează. Produsul este solubil în apă fierbinte, alcool şi în mediu alcalin. Vopseşte lîna, în mediu de acid acetic, în portocaliu şi fibrele celulozice, în mediu alcalin, în galben deschis.

Analize: $C_{14}H_{10}O_4N_2$ ($M=270,25$)

	N%
Calculat	10,37
Găsit	10,25

b) *Colorantul II* (2-formil-fenil-azo-1'fenil-3'metil-5'pirazolonă) se obţine din *o*-aminobenzaldehidă diazotată şi cuplată în mediu alcalin cu metil-fenil-pirazolona.

Peste 4 g *o*-aminobenzaldehidă se introduc 12 ml HCl concentrat, iar după răcire se adaugă o soluţie de 2 g $NaNO_2$ în 10 ml apă. Separat se pregăteşte o soluţie de metil-fenil-pirazolonă, alcătuită din 6 g substanţă, 60 ml apă şi 1...2 g NaOH. Peste această soluţie, după răcire, se introduce sub agitare soluţia de diazoniu, cînd are loc cuplarea. Colorantul obţinut este greu solubil în apă, se solvă în alcool. Vopseşte lîna în galben în mediu de acid acetic. Nu vopseşte fibrele celulozice.

Analize: $C_{17}H_{14}O_2N_4$ ($M=306,33$)

	N%
Calculat	18,29
Găsit	18,40

c) *Colorantul III* (4-formil-fenil-azo-1'fenil-3'metil-5'pirazolonă) se obţine prin diazotarea a 4 g *p*-aminobenzaldehidă şi cuplarea acesteia în mediu alcalin cu 6 g fenil-metil-pirazolonă. Se lucrează ca în cazul produselor I şi II. Colorantul este greu solubil în apă, solubil în alcool. Vopseşte lîna în galben în mediu de acid acetic şi în galben-deschis fibrele celulozice în prezenţă de carbonat de sodiu.

Analize : $C_{17}H_{14}O_2N_4$ ($M=306,33$)

	N%
Calculat	18,29
Găsit	18,48

d) *Colorantul IV* (acidul 3-formil-4-oxi-fenil-azo-benzensulfonic) se obţine prin diazotarea a 6 g acid sulfanilic şi cuplarea în mediu slab alcalin cu 4 g aldehidă salicilică. Acidul sulfanilic se diazotează după modul cunoscut, iar aldehida salicilică trebuie solvită într-o soluţie de hidroxid de sodiu diluat, deoarece în soluţie alcalină concentrată, precipită. Colorantul precipită foarte bine prin salifiere şi este galben, solubil în apă şi în alcool. Vopseşte lîna în galben-portocaliu. Nu vopseşte fibrele celulozice.

Analize : $C_{13}H_{10}O_5N_2S$ ($M=306,30$)

	N%
Calculat	9,15
Găsit	9,38

e) *Colorantul V* (4-nitro-fenil-azo-salicilaldehida) se obţine prin diazotarea a 5 g *p*-nitroanilină şi cuplarea în mediu alcalin cu 4 g aldehidă salicilică. Diazotarea *p*-nitroanilinei se realizează după tehnica cunoscută. Produsul este galben, greu solubil în apă, solubil în alcool. Vopseşte lîna în galben, iar fibrele celulozice în roz-gălbui.

Analize : $C_{13}H_9O_4N_3$ ($M=271,23$)

	N%
Calculat	15,49
Găsit	15,30

f) *Colorantul VI* (acidul 4'formil-fenil-azo-2-naftol-3,6-disulfonic) se obţine prin diazotarea a 4 g *p*-aminobenzaldehidă şi cuplarea în mediu alcalin cu 8 g acid *R*. Produsul este de culoare roşie, solubil în apă şi în alcool. Vopseşte lîna în mediu de acid acetic într-o nuanţă roşie, foarte frumoasă. Vopseşte şi fibrele celulozice în prezenţa carbonatului de sodiu, în roz.

Analize : $C_{17}H_{12}O_8N_2S_2$ ($M=437,54$)

	N%
Calculat	6,40
Găsit	6,37

Prezenţa grupei aldehidice din structura coloranţilor de mai sus s-a pus în evidenţă cu ajutorul fenilhidrazinei şi cu ajutorul spectrelor IR. Determinările în IR s-au efectuat cu un spectrograf UR_{10} Karl Zeiss, Jena, lucrîndu-se cu substanţe solide, pastilate în bromură de potasiu. Din studiul spectrelor obţinute se constată apariţia unei benzi caracteristice grupei aldehidice legate de nucleul aromatic, în jurul lungimii de undă de 1 650...1 660 cm^{-1}. Deplasarea acestei benzi spre lungimi de undă mai mici, se explică prin influenţa nucleului aromatic asupra grupei carbonilice, datorită efectului de conjugare [7].

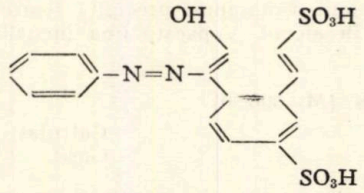
4. Partea aplicativă

S-au efectuat vopsiri pe fibre de lînă şi pe fibre celulozice cu toţi coloranţii noi obţinuţi, constatîndu-se că vopsesc lîna în mediu de acid acetic în nuanţe foarte frumoase de galben, portocaliu, roşu etc. Cei mai mulţi dintre ei vopsesc şi fibrele celulozice în mediu alcalin. Nu trag pe fibrele celulozice coloranţii II şi IV.

Vopsirile au fost efectuate cu 3% colorant faţă de fibra luată în lucru şi li s-a verificat rezistenţa la fierbere în apă, dovedindu-se foarte bună [6].

Pentru a pune în evidenţă faptul că gruparea aldehidică are un rol activ în mecanismul vopsirii, s-a sintetizat un colorant fără grupare aldehidică, din anilină diazotată şi cuplată cu acid *R* (VII) cu următoarea structură chimică :

(VII)



Acest colorant (VII) a fost comparat în procesele tinctoriale cu produsul (VI), de a cărui structură chimică diferă numai prin gruparea —CHO. Cu aceşti doi coloranţi s-a vopsit lîna în cantităţi identice (3% colorant, 5% acid acetic, modul 1/50) şi probelor vopsite li s-au făcut determinări de rezistenţă la fierbere în apă, constatîndu-se că în cazul colorantului (VI) aceasta este foarte bună, iar în cazul colorantului (VII), proba vopsită se decolorează în mod deosebit de vizibil. Aceeaşi comportare se pune în evidenţă şi prin extracţie cu Cl_4C cît şi prin extracţie cu piridină anhidră. Cu piridină s-au efectuat extracţii de colorant de pe mostre vopsite la fierbere, extracţii repetate, constatîndu-se o soliditate foarte bună în cazul mostrei vopsite cu colorantul (VI). Aceeaşi comportare se observă şi în cazurile vopsirii bumbacului cu coloranţii (VI) şi (VII).

Extracţii cu piridină s-au efectuat şi în cazul celorlalte probe de lînă vopsită cu restul coloranţilor obţinuţi, constatîndu-se că şi în aceste cazuri colorantul nu se extrage cu ajutorul piridinei de pe fibra vopsită.

Aceste încercări paralele, de extracţie a colorantului de pe fibră cu ajutorul piridinei, dovedesc că între grupările aldehidice ale coloranţilor şi fibrele textile se formează legături chimice covalente. Aceste legături iau naştere în special cînd gruparea aldehidică este în poziţie *para*.

Dacă mostrele vopsite se lasă mai multă vreme într-un amestec de piridină cu apă, se observă o trecere treptată a colorantului în soluţie şi dacă se înlocuieşte amestecul de piridină cu apă, prin altul proaspăt, procesul de extracţie a colorantului continuă. Aceste observaţii permit să se presupună că are loc un fenomen de hidroliză, deoarece piridina are caracter alcalin şi în prezenţa apei, fenomenul de hidroliză este favorizat.

Este cu totul explicabil faptul că aceşti coloranţi trag mai greu pe fibrele celulozice, decît pe cele proteice, aşa precum se poate interpreta şi din structurile lor chimice.

5. Concluzii

Din analiza rezultatelor obţinute se desprind următoarele concluzii:

1. Se sintetizează şase coloranţi azoici noi, care au funcţia aldehidică drept grupare auxocromă.

2. Coloranţii obţinuţi vopsesc lîna în nuanţe foarte frumoase de galben, portocaliu, roşu, iar unii dintre ei vopsesc şi fibrele celulozice aproximativ în aceleaşi tonuri.

3. Vopsirile efectuate cu aceşti coloranţi prezintă o bună soliditate, coloranţii neputînd fi extraşi de pe fibră cu ajutorul piridinei, ceea ce dovedeşte existenţa unei legături chimice covalente între fibră şi coloranţi, legătură realizată prin intermediul grupei aldehidice.

4. În prezenţa unui amestec de piridină şi apă, colorantul se extrage de pe fibră, avînd loc un fenomen de hidroliză asupra legăturii fibră-colorant.

5. Structura chimică a coloranţilor noi preparaţi precum şi proprietăţile lor tinctoriale, permit clasificarea lor în categoria coloranţilor reactivi.

Institutul pedagogic, Iaşi,
Catedra de chimie

BIBLIOGRAFIE

1. Wibaux M. G., Mazingue M. G., Overbèke M. V., Bull. I. T. Fr., 1959, **79**, p. 25.
2. Howit F. O., J. Text. Inst., 1960, **3**, p. 120.
3. Decroix M. G., Mazingue M. G., Overbèke M. V., Bull. I. T. Fr., 1956, **61**, p. 47.
4. Neniţescu C. D., *Tratat elementar de chimie organică*. Vol. **II**, Ed. Tehn., Buc., 1958, p. 228.
5. Haller A. M., Boudin P., Ann. de Chimie et de Physique, (9), **17**, p. 7.
6. * * * *Coloranţi organici*. STAS 1964.
7. Avram M., Mateescu Gh. D., *Spectroscopia în infraroşu. Aplicaţii în chimia organică*. Ed. Tehn., Buc., 1966, p. 407.

SYNTHESIS OF SOME REACTIVE AZO-DYES

(Summary)

In this paper it is shown the possibility to obtain some new azo-dyes, which have as auxochrome group, the aldehydic group.

The obtained dye-stuffs, dye the wool in very beautiful hues of yellow, orange and red. Some of them dye the cellulosic fibres too.

The obtained dyings have a good resistance, the dye-stuff being tied to the textile fibre through covalent bonds, due to the presence of the aldehydic group in their structure.

The chemical structure and the dyeing properties of these dye-stuffs, permit their classification in the category of reactive dyes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. D. 547.992.3

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS PHYSICO-CHIMIQUES DES LIGNINES

PAR

Acad. CRISTOFOR SIMIONESCU et AGATA CERNĂTESCU-ASANDEI

1. Introduction

La séparation de la lignine du tissu végétal pose de nombreux problèmes théoriques et pratiques, qui concernent l'interaction lignine-solvants, respectivement lignine-réactifs dans le processus d'isolation.

La résolution de ces problèmes suppose la connaissance de la nature des liaisons lignine-hydrates de carbone, la structure chimique de la lignine, les facteurs qui déterminent la mise en solution de la lignine, etc.

Le paramètre de solubilité de Hildebrand (δ), l'énergie de formation des liaisons hidrogène ($\Delta\mu$) et le degré de protonation du solvant permettent la détermination des conditions de solubilisation [1]...[4] ; ainsi on peut obtenir des conclusions concernant la nature chimique des diverses sortes de lignines.

Dans cette Note, on compare les lignines obtenues par des procédés d'extraction ménagée (lignine Björkman et dioxane) ou dure (sulfate, sulfite et hydrotropique) à partir du bois de peuplier *(Populus celei)* et de roseau *(Ph. Communis)* ; on examine surtout leur capacité de dissolution dans différents solvants et la relation entre la composition chimique, la structure et les facteurs de solubilité.

2. Partie expérimentale

2.1. Séparation et purification des lignines

À partir du bois et du roseau on a séparé les types suivants de lignine :

a) *Lignine Björkman :* on broie de la sciure préalablement extraite au mélange d'alcool-benzène dans un broyeur vibratoire pendant 96 heures en présence de toluène ; puis on extrait par le dioxane contenant 10% d'eau jusqu'à l'épuisement. De l'extrait concentré sous

vide, on précipite la lignine par l'éther. Le produit a été purifié par dissolution dans un mélange dichloréthane-éthanol (2 : 1) et reprécipitation par l'éther éthylique [5], [6].

b) *Lignine dioxane:* on extrait à l'aide d'un mélange dioxane—HCl la sciure préalablement traitée avec des solvants organiques, de l'eau chaude et NaOH 4%. Le produit concentré est précipité dans l'eau, puis séparé par centrifugation et sêché sous vide ; la purification est obtenue par disssolution dans l'acide acétique glacial, reprécipitation et hydrolyse à l'eau chaude [7]...[9].

c) *Lignine sulfate :* la lignine est obtenue par précipitation des lessives résiduaires de la cuisson (au sulfate) du bois de peuplier et du roseau avec les paramètres suivants : température 170°C ; alcali actif 20% ; sulfidité 10% ; hydromodule 1/5 dans des lessiveurs rotatifs). Les liqueurs résiduaires chauffées à 80°C sont acidifiés à l'acide chlorhydrique jusqu'à pH=3, puis jusqu'à pH=1.

La lignine lavée à l'eau chaude, est sechée sous vide. Pour éliminer le soufre, le produit est extrait à l'éther éthylique, puis dissous dans le dioxane et reprécipité dans l'éther [10].

d) *Acides lignosulfoniques* du roseau sont obtenus à partir de la liqueur résiduaire sous forme de lignosulfonates de calcium (par précipitation avec $Ca(OH)_2$) ; l'addition de l'acide oxalique fournit les acides correspondants. La purification est réalisée par dialyse [11]...[13].

e) *Lignine hydrotropique :* cette lignine est obtenue par cuisson du roseau avec du xylène-sulfonate de sodium à 165°C et 6 atm. On obtient la lignine par précipitation des solutions résiduaires dans l'eau et purification [14].

2.2. Caractérisation physique et chimique des lignines

Pour la caractérisation chimique des lignines on a effectué les analyses suivantes : a) élémentaire, b) détermination des groupements fonctionnels (OCH_3 [15], [16], CO [17], OH [18]).

Leur caractérisation physique se réfère à la détermination de la viscosité et du poids moléculaire, la diffraction aux rayons X, les spectres UV et IR, l'analyse thermique différentielle ainsi que la solubilité.

a) *Les déterminations de viscosité* ont été effectuées à l'aide d'un viscosimètre Ubbelohde no. 1 en solution, dans le dioxane à 20°C, la concentration de la lignine variant entre 0,5...4%. Pour les acides lignosulfoniques on a utilisé les solutions aqueuses dans les mêmes conditions.

b) *Masse moleculaires.* Nous avons mesuré les masses moleculaires en nombre (*Mn*) dans un osmomètre Piner-Stabin à 25°C±0,2°C sur des solutions dans le dioxane.

c) *La diffraction aux rayons X* a été réalisée avec un diffractomètre type ЛРЗ : УРС 50 И modèle 1, à anticathode de Cu, $K=1{,}540$ Å

d) *Déterminations spectrographiques.* Les spectres dans l'IR ont été obtenus sur des pastilles de KBr dans un appareil UNICAM SP 200, et les spectres UV sur des solutions à 27 mg/l dans le mélange méthanole-eau (4 : 1) à l'aide de l'appareil UNICAM SP 800.

e) *Analyse thermique différentielle.* La stabilité thermique et les dégradations qui se produisent pendant le chauffage ont été étudiées en atmosphère d'air sur un dérivatographe Pauly-Paulik, pour une vitesse de chauffage de 12°C/min et un domaine de températures de 20°... 600°C.

f) *Solubilité.* En utilisant les solvants organiques purs et en mélange en différentes proportions, nous avons établi le degré de solubilité et les concentrations de saturation pour les lignines étudiées.

3. Résultats et discussions

Les résultats expérimentaux concernant la caracterisation chimique des lignines obtenues, sont présentés dans le tableau 1.

Tableau 1

Analyse chimique des différents types de lignine

Composition %	Peuplier			Roseau				Bibliographie
	Lignine Björkman	Lignine dioxane	Lignine sulfate	Lignine dioxane	Lignine sulfate	Acides lignosulfoniques	Lignine hydrotropique	
C	58,84	61,86	63,64	58,52	60,57	52,75	64,98	
H	6,25	6,91	6,22	5,00	5,53	6,13	6,31	
O	34,91	31,23	30,14	36,48	33,88	41,12	28,71	
S	—	—	1,26	—	1	3,24	—	[12], [13]
OCH_3 initiels	20,12	23,51	21,40	19,40	15,58	13,60	12,92	[15]
OCH_3 après la méthylation	22,56	30,05	23,40	—	20,17	—	20,80	[17]
Rapport OCH_3/C	0,341	0,380	0,336	0,331	0,257	0,257	0,198	—
CO	1,08	3,10	1,37	3,20	2,14	—	1,82	[17]
OH	10,01	9,91	9,72	9,02	8,98	—	7,16	[18], [19]
Cendre	—	—	—	—	2,21	—	2,26	[21]

On remarque qu'en fonction de la méthode de séparation de la lignine il y a des variations dans le pourcentage des groupes OCH_3 et C=O pour la lignine de peuplier ainsi que pour celle du roseau, tandis que la concentration en groupements OH reste constante dans les limites des erreurs expérimentales.

Cette constatation suppose des transformations différentes des groupements fonctionnels méthoxy et carboxy au cours de l'isolation de la lignine en fonction de la nature de l'agent d'extraction utilisé. Pourtant le rapport OCH_3/C, presque constant pour la lignine de peuplier, suggère que dans le processus d'extraction l'unité de base phényl propanique de la lignine n'est que très peu modifiée [4], [20].

Si pour la lignine de peuplier ce rapport constant suggère une telle conclusion, on peut constater dans le cas du roseau que la lignine sulfate et les acides lignosulfoniques présentent le même rapport, tandis qu'il y a des variations importantes par rapport à la lignine dioxane et hydrotropique. On peut donc conclure que les modifications de la constitution chimique des lignines sont dues au procédés différents utilisés pour leur extraction.

L'accessibilité des groupements méthoxy à la méthylation est différente pour les lignines de peuplier et presque la même pour celle du roseau ; ce fait est dû probablement au caractère structural et aux liaisons intermoléculaires différentes des lignines étudiées.

Afin d'obtenir des informations concernant les dimensions moléculaires des lignines étudiées, on a déterminé la variation de la viscosité intrinsèque, en solution de dioxane et dans l'eau [22], [23].

Les résultats sont présentés dans les diagrammes des fig. 1, 2 et dans le tableau 2.

Tableau 2

Viscosité intrinsèque et masses moléculaires (Mn) pour différents types de lignine

Type de lignine	Solvant	$\eta_{sp/C}$	Masse moléculaire *Mn*
Lignine Björkman peuplier	dioxane	0,0810	—
Lignine dioxane peuplier	dioxane	0,0842	12 750
Lignine sulfate peuplier	dioxane	0,0610	9 175
Lignine dioxane roseau	dioxane	0,0990	—
Lignine sulfate roseau	dioxane	0,0595	—
Acides lignosulfoniques roseau	eau	0,0860	—

La valeur de la viscosité intrinsèque indique une masse moléculaire plus grande pour les lignines Björkman et dioxane de peuplier et roseau par rapport aux lignines sulfate des mêmes espèces.

Les valeurs des poids moléculaires pour les lignines dioxane et sulfate obtenues par la méthode osmométrique confirment les résultats viscosimétriques. Compte tenu des conditions plus dures de séparation, la lignine sulfate présente un degré de polymérisation plus bas, ce qui se reflète évidemment dans les poids moléculaires plus petits.

La diffraction aux rayons X montre pour les lignines dioxane et sulfate de peuplier une structure amorphe. La lignine dioxane présente un maximum qui peut indiquer une ordonation locale entre les centres de diffusions disposés à une distance moyenne $r_0 = 2{,}3$ Å (fig. 3) .

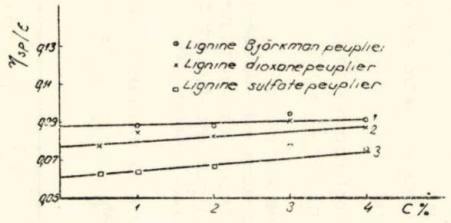


Fig. 1. — Variation de la viscosité avec la concentration pour les lignines de peuplier.

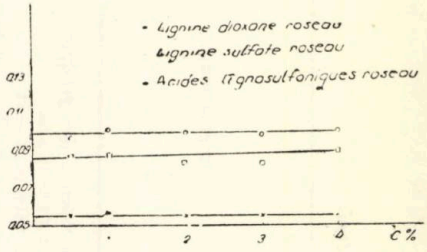


Fig. 2. — Variation de la viscosité avec la concentration pour les lignines de roseau.

Pour pouvoir faire des observations concernant les différences structurales des lignines en fonction des conditions de séparation on a analysé les spectres dans l'IR (fig. 4, 5 et tableau 3) et dans l'UV (fig. 6) [24]...[29].

L'étude des spectres nous permet de constater que tous les types de lignines étudiés présentent des bandes intenses à 3 500 cm^{-1} correspondant aux vibrations des groupements OH alcoolique et phénolique.

Les bandes entre 3 000...2 950 cm^{-1}, qu'on peut attribuer aux vibrations de valence C—H, sont aussi intenses ; à 2 850 cm^{-1} une bande peu intense, qu'on peut attribuer aux vibrations O—CH_3, qui en ce qui concerne le pourcentage de groupes OCH_3 dans la lignine devrait être plus nette.

La structure β-cétonique, présente à 1 720 cm^{-1}, est plus nette pour la lignine sulfate de peuplier.

D'après Bolker et Sommerville, le groupement β-cétonique se trouve seulement dans les lignines isolées, tandis que dans les tissus végétaux il est englobé dans une liaison covalente lignine-hydrate de carbone.

Les acides lignosulfoniques ne présentent pas ce groupement. Il est difficile d'expliquer la disparition des liaisons β-cétoniques ; probablement elles sont plus labiles pour le roseau.

À 1 660 cm^{-1} apparait unde bande attribuée aux groupements carboxy conjugués avec le noyau aromatique. Les bandes intenses à 1 600...1 650 cm^{-1} et à 1 520...1 530 cm^{-1} sont caractéristiques pour le noyau aromatique.

On trouve également, des bandes intenses, pour toutes les lignines étudiées, à 1 470 cm^{-1} et entre 1 430...1 440 cm^{-1}. Elles sont attribuées aux

Tableau 3

Attribution des bandes d'absorption en IR pour les lignines étudiées

Peuplier				Roseau			Observations
Lignine Björkman	Lignine dioxane	Lignine sulfate	Lignine dioxane	Lignine sulfate	Acides lignosulfoniques	Lignine hydrotropique	
Nombre d'onde cm^{-1}							
3 500	3 500	3 500	3 500	3 500	3 500	3 500	Vibrations de valence des groupements —OH alcoolique et phénolique.
3 000	2 950	3 000	3 000	3 000	3 000	3 000	Vibrations de valence C—H.
2 850	2 850	2 850	—	2 850	—	2 850	Bande qui peut être attribuée au vibration OCH_3.
1 700	1 700	1 720	1 710	1 710	—	1 710	Vibrations de valence C=O des groupements β-cétoniques.
1 660	—	—	—	—	—	—	Vibrations de valence C=O des groupements α-cétoniques.
1 600	1 600	1 610	1 600	1 620	1 600	1 610	Vibrations de valence caractéristiques du noyau aromatique.
1 520	1 520	1 530	1 520	1 520	1 530	1 530	Idem.
1 470	1 470	1 480	1 470	1 480	1 470	1 480	Vibration de deformation de C—H du groupement OCH_3 et CH_3.
1 430	1 430	1 440	1 430	1 440	1 430	1 440	Idem.
1 340	1 340	1 340	1 340	1 340	1 340	1 340	Bande difficile à attribuer.
1 280	1 290	—	1 280	1 280	—	1 280	Vibrations de valence C—O dans la lignine.
1 240	1 240	1 230	1 240	1 230	—	1 230	Vibrations de valence asymétrique de C—O.
1 130	1 130	1 120	1 130	1 140	1 130	1 140	Vibrations qui peuvent être attribuées aux groupements dialkyl-étheriques.
1 040	1 040	1 040	1 040	1 050	1 050	1 050	Idem.
—	990	940	—	—	—	—	Vibrations hors du plans de C—H dans le noyau benzénique.
—	900	—	—	—	—	—	Idem.
860	850	860	890	880	—	860	Idem.

Fig. 3. — Diagrammes de diffraction aux rayons X pour la lignine dioxane *(1)* et sulfate *(2)* de peuplier.

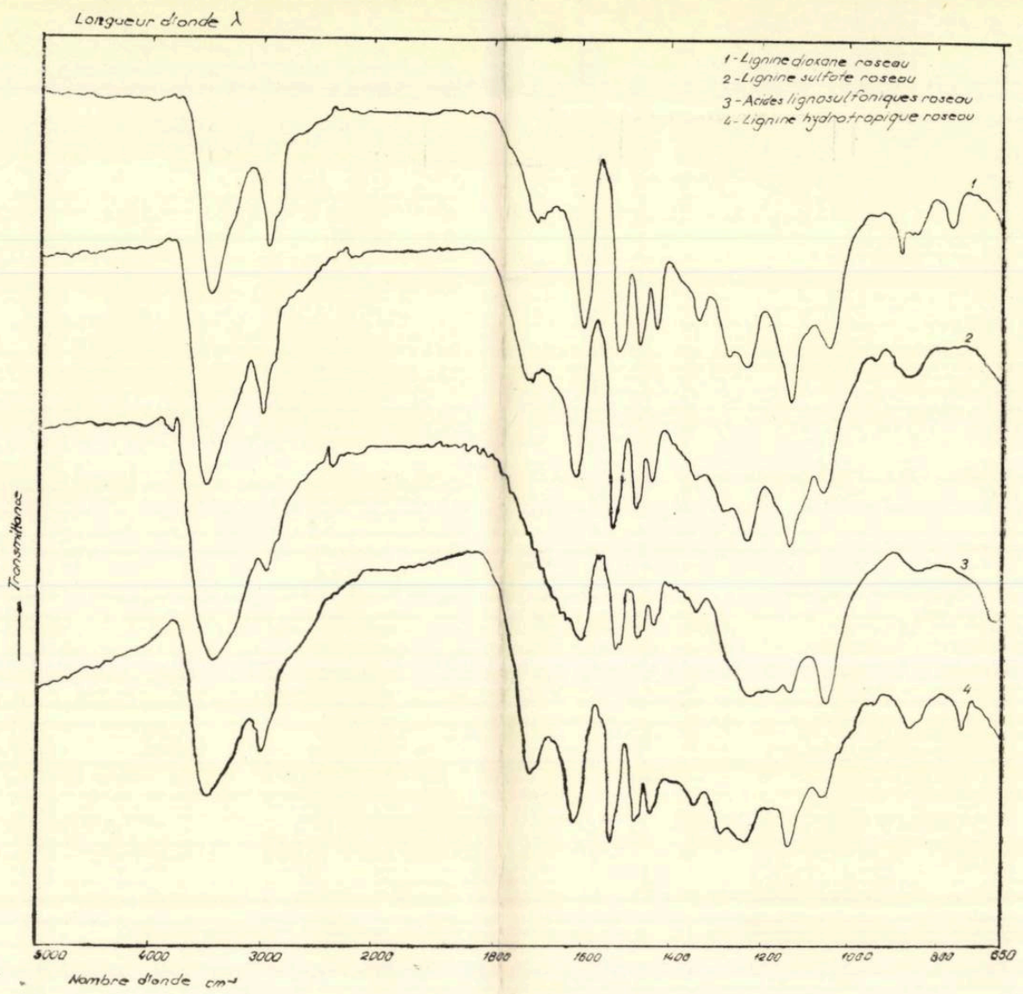


Fig. 5. — Spectres d'absorption en IR pour les lignines de roseau.

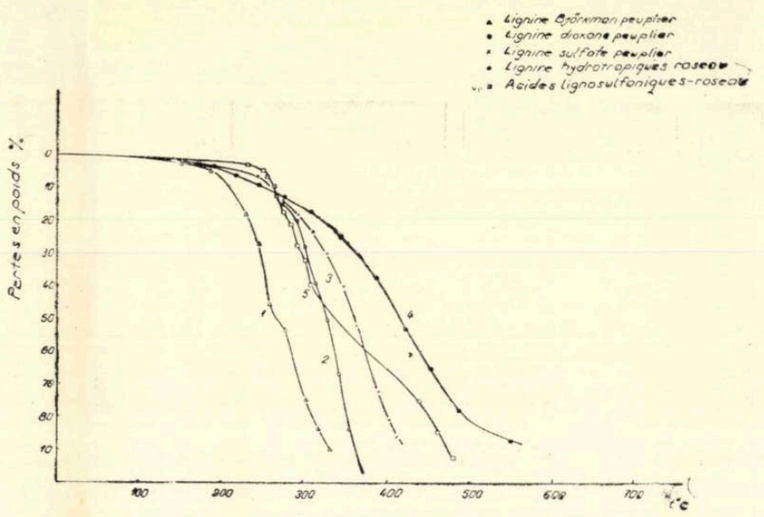


Fig. 7. — Variation des pertes en poids en fonction de la température.

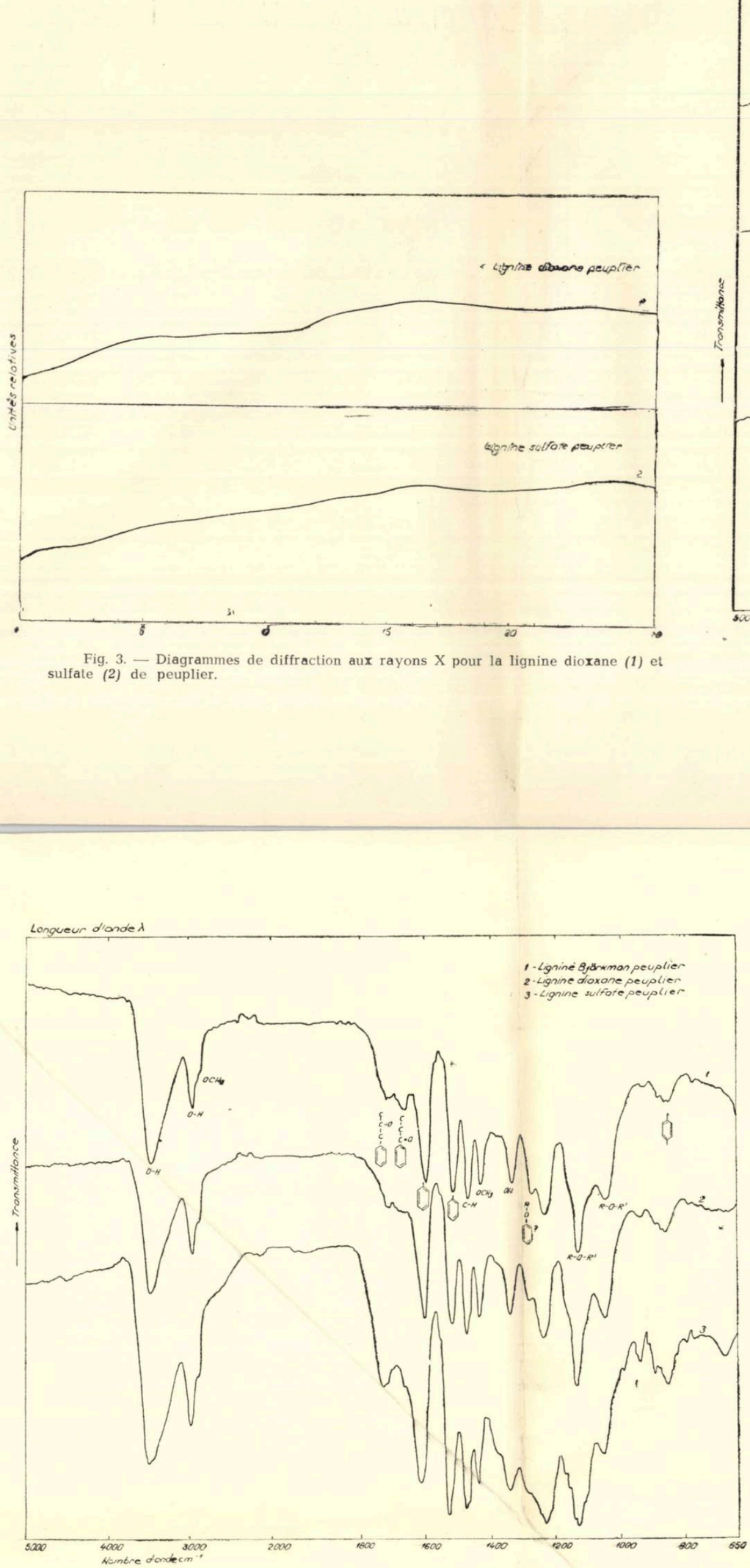


Fig. 4. — Spectres d'absorption en IR pour les lignines de peuplier.

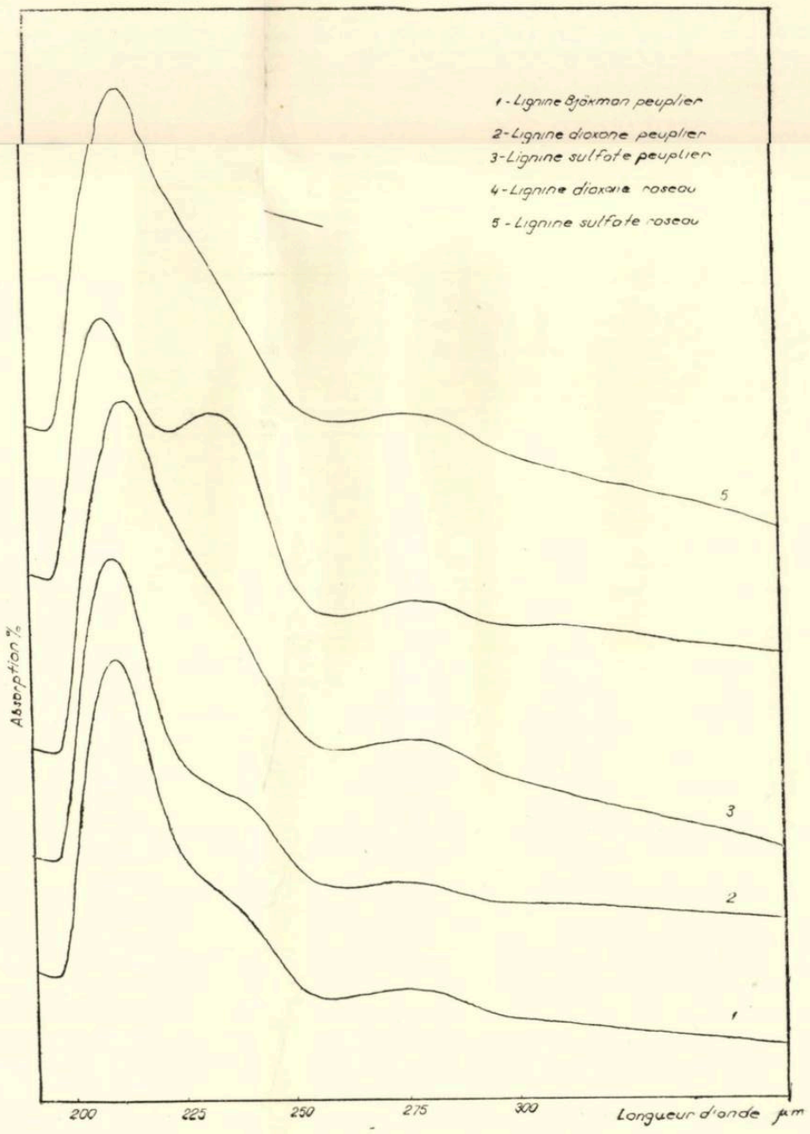


Fig. 6. — Spectres d'absorption en UV pour les lignines de peuplier et de roseau.

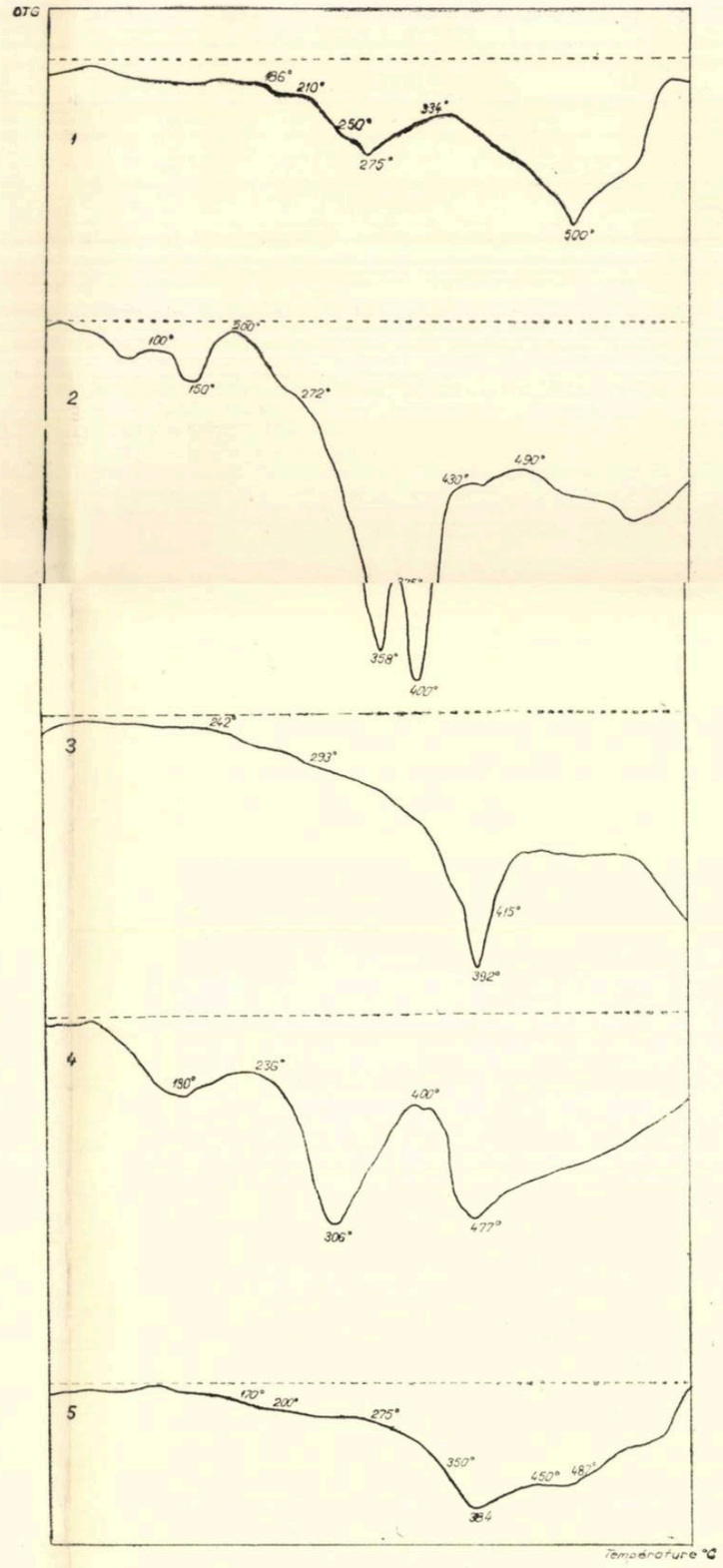


Fig. 8. — Diagrammes DTG pour les lignines de peuplier et roseau.

vibrations de déformation C—H du groupement OCH_3 ainsi qu'au groupement méthylénique.

À 1 230 cm^{-1} sont situées les vibrations asymétriques C—O du groupement phénol-éthérique et OH-phénolique pour toutes les lignines.

À 1 140...1 130 cm^{-1} et à 1 030 cm^{-1} on constate l'apparition des bandes attribuées aux vibrations des groupements dialkyl-éthériques.

Enfin, les bandes observées à 1 000...800 cm^{-1} peuvent trouver leur origine dans les vibrations hors du plan de C—H dans le noyau benzénique.

En général, il n'y a pas de différences essentielles entre les lignines obtenues par des méthodes ménagées et celles des liqueurs résiduaires. À cet égard nos observations coïncident avec celles de J. Michell et collaborateurs.

Les spectres UV offrent moins d'informations concernant la structure. On peut remarquer une absorption intense vers 210 mμ, pour tous les échantillons de lignines ; à 230...235 mμ, dans le cas de la lignine dioxane ; à 275 mμ, pour les lignines de peuplier et enfin à 280 mμ pour le roseau.

Ces absorptions, qui sont dues aux phénols biatomiques liés aux groupements gaïaciliques de la lignine confirment encore une fois la structure aromatique de la lignine.

L'analyse thermique différentielle de la lignine peut fournir des renseignements concernant la structure chimique et particulièrement sur l'homogénéite de cette structure.

Dans la fig. 7 sont présentées les variations des pertes en poids en fonction de la température de destruction en atmosphère d'air pour les lignines de peuplier et de roseau.

On constate que toutes les lignines ont une stabilité thermique assez élevée n'enregistrant des pertes en poids qu'après 150°C. Pourtant il y a une différence en ce qui concerne la limite de température de décomposition en fonction de la méthode d'extraction, qui détermine la classification suivante de la stabilité thermique des produits (fig. 8) : a) lignine hydrotropique de roseau 166°C, b) lignine Björkman de peuplier 186°C, c) acides lignosulfoniques de roseau 236°C, d) lignine sulfate de peuplier 242°C, e) lignine dioxane de peuplier 272°C.

Il en résulte que la lignine hydrotropique contient des fractions qui se décomposent plus vite, tandis que la lignine dioxane de peuplier est plus homogène de ce point de vue. Ces différences peuvent être attribuées soit aux fractions de poids moléculaires plus bas, de même nature chimique, soit à la présence des polyoses qui ayant une stabilité thermique inférieure, déterminent le commencement de la décomposition à des températures moins élévées, comme par exemple la lignine hydrotropique [30]...[32].

Les résultats présentés dans le tableau 4 résument les données concernant la destruction thermo-oxydative des lignines étudiées.

Tableau 4

Décomposition thermo-oxydative des différents types de lignine (pertes en poids %)

Phases de décomposition	Peuplier						Roseau			
	Lignine Björkman		Lignine dioxane		Lignine sulfate		Acides lignosulfoniques		Lignines hydrotropiques	
	t °C	%	t °C	%	t °C	%	t °C	%	t °C	%
Initiation de la réaction	186	5	272	14,51	242	7	236	3	166	2
Décomposition I	200	10	300	10	257	10	260	10	250	10
Décomposition II	270	50	338	50	360	50	350	50	400	50
Décomposition III	334	90	360	90	400	90	470	90	550	90

Bien que la lignine hydrotropique commence à se décomposer à une température basse (166°C), elle devient la plus stable au dessus de 250°C. Les lignines étudiées ont perdu jusqu'à 50% de leur poids entre 270°...350°C, pendant que la lignine hydrotropique a perdu la moitié autour de 400°C.

La vitesse de décomposition diminue en fonction du temps en commençant par la lignine Björkman (peuplier) jusqu'à la lignine hydrotropique, et en mettant en évidence un processus d'autostabilisation.

Les énergies d'activation (tableau 5) calculées à l'aide des données thermogravimétriques, ont des valeurs situées entre 10,062 kcal/mol pour la lignine hydrotropique et 30,74 kcal/mol pour les acides lignosulfoniques de roseau, les lignines de peuplier présentant des valeurs intermédiares [30]...[33].

Tableau 5

Énergies d'activation des différents types de lignine

Tissu végétal	Type de lignine	Énergie d'activation kcal/mol
Bois (*Populus Celei*)	Lignine Björkman	17,03
	Lignine dioxane	12,82
	Lignine sulfate	22,08
Plantes annuelles Roseau (*Ph. communis*)	Acides lignosulfoniques	30,74
	Lignine hydrotropique	10,062

On peut remarquer que les énergies d'activation les plus grandes appartienent aux lignines obtenues par des méthodes dures (sulfate et bisulfite) à cause de l'existence des structures ayant des liaisons intermoléculaires plus stables.

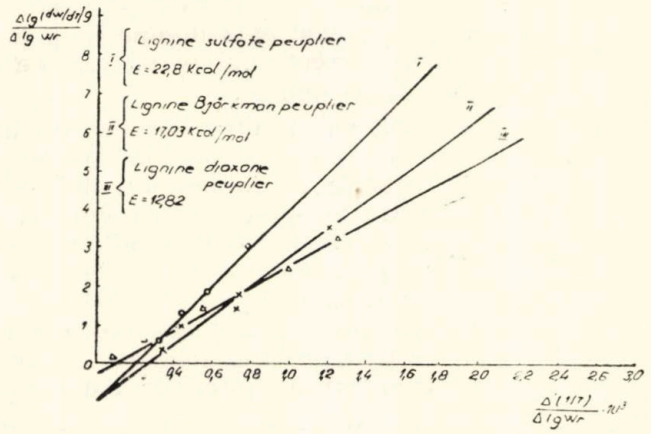


Fig. 9. — Diagramme cinétique de la dégradation thermo-oxydative de la lignine de peuplier.

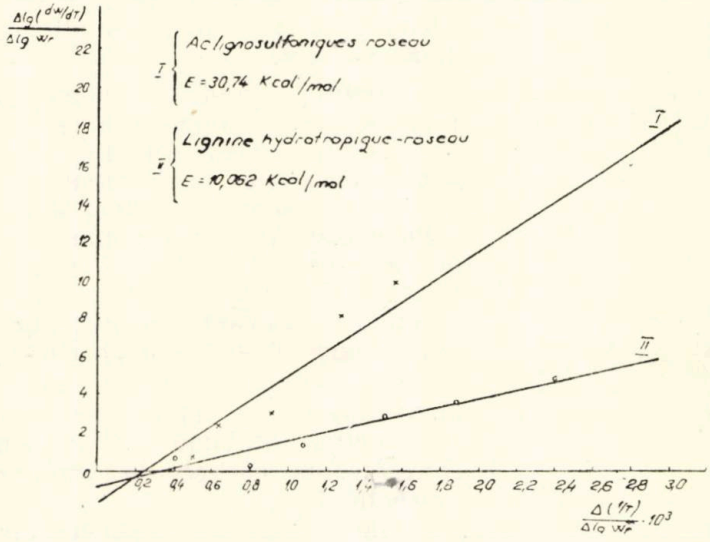


Fig. 10. — Diagramme cinétique de la dégradation thermo-oxydative de la lignine de roseau.

a) *Solubilité de la lignine*

Le problème de la dissolution de la lignine présente une importance pratique particulière.

La séparation à l'aide des solvants organiques, ou des mélanges de solvants peut être appreciée quantitativement par la capacité de former des liaisons hydrogène entre le solvant et la lignine ($\triangle\mu$) et par le paramètre de solubilité (δ) — deux facteurs qui permettent de préciser les caractéristiques de solubilité de la lignine.

Schuerch [1], [2] a établi que la propriété des solvants de gonfler et de solubiliser les divers types de lignines est fonction de la capacité de former des liaisons hydrogène entre le solvant et la lignine, et présente une valeur optimum autour de la valeur 11 du paramètre de solubilité (δ). L'auteur cité, en traçant la courbe $\delta = f(\triangle\mu)$ a constaté que les coordonnées des points représentatifs des bons solvants de la lignine se trouvent à l'interieur d'une parabole.

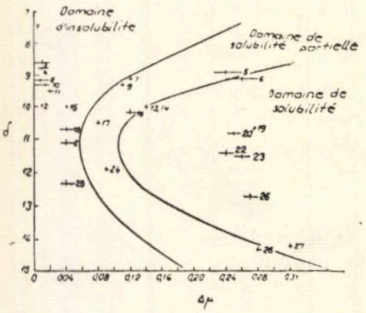


Fig. 11. — Solubilité de la lignine en fonction des propriétés des solvants : *1* — héxane, *2* — éther éthylique, *3* — tétrachlorure de carbone, *4* — xylène, *5* — butile célosolve, *6* — diéthylèneglycol, *7* — acétate d'éthyle, *8* — benzène, *9* — méthyle éthylecétone, *10* — chloroforme, *11* — chlorbenzène, *12* — sulfure de carbone, *13* — dioxane, *14* — acétone, *15* — nitrobenzène, *16* — méthyle formiate, *17* — acrylonitrile, *18* — nitropropane, *19* — pyridine, *20* — méthyle célosolve, *21* — nitroéthane, *22* — butanol, *23* — propanol, *24* — acetonitrile, *25* — nitrométhane, *26* — éthanol, *27* — éthylenglycole, *28* — méthanol.

Ainsi, si on étudie la solubilité des lignines dans divers solvants ou mélanges de solvants, on obtient les résultats du tableau 6.

L'intégration des solubilités des échantillons de lignine (tableau 5) dans le diagramme de Schuerch, conduit aux conclusions suivantes :

Toutes les lignines étudiées, à l'exception des acides lignosulfoniques (à cause de leur groupement sulfonique hydrophile), sont situées dans *le domaine de solubilité*.

Le domaine de solubilité partielle et celui d'insolubilité des lignines ne peuvent pas être bien délimités à cause de la variété des types de lignine ; en effet le même réactif est solvant partiel pour un produit et non-solvant pour un autre.

Par exemple pour les lignines Björkman, dioxane et sulfate, les non-solvants sont l'éther éthylique et le benzène, et les solvants partiels le chloroforme, le butanol, le méthanol et le nitroéthane.

Les résultats expérimentaux du tableau 5 confirment pour toutes les lignines étudiées les hypothèses de Schuerch. Ainsi le benzène, non-solvant, présente les caractéristiques $\triangle\mu$ très bas et $\delta = 9{,}15$ par

Tableau 6

Solubilité des lignines dans les mélanges de solvants binaires (1 : 1 en volumes)

Nr. crt.	Solvants / Echantillon		*A*	Benzène							Chloroforme							Dioxane							Acétone						
				a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
1	Benzène	9,15	*S*	—	—	—	—	—	—	—																					
2	Chloroforme	9,30	0,016	—	—	∓	—	—	—	—	—	±	±	±	±	—	±														
3	Dioxane	10,0	0,14	—	+	±	+	±	—	±	—	+	+	+	+	—	±	+	+	+	+	+	—	+							
4	Acétone	10,0	0,14	—	+	±	+	±	—	±	—	+	+	±	±	—	±	+	+	+	+	+	—	+	—	+	+	+	—	+	
5	Acrylonitrile	10,5	0,08	—	∓	±	∓	±	—	—	—	±	±	±	∓	—	±	±	+	+	+	+	—	+	∓	—	±	±	±	—	±
6	Pyridine	10,7	0,27	+	+	+	+	+	—	±	+	+	+	+	+	—	—	±	+	+	+	+	—	±	+	+	+	+	+	—	∓
7	Nitroéthane	11,1	0,05	—	∓	∓	∓	—	—	—	—	∓	∓	∓	∓	—	—	±	+	+	+	+	—	±	∓	—	±	±	±	—	∓
8	Butanol	11,4	0,24	—	±	±	±	±	—	∓	±	+	∓	∓	∓	—	±	±	±	+	+	+	—	+	—	∓	+	±	±	—	±
9	Propanol	11,5	0,26	∓	±	±	∓	±	—	∓	—	+	±	±	+	—	∓	+	+	+	+	+	—	∓	±	+	+	±	±	—	±
10	Éthanol	12,7	0,28	∓	+	±	±	±	+	±	+	+	+	±	±	—	±	+	+	+	+	+	—	+	∓	∓	+	±	±	—	±
11	Éthylenglicol	14,2	0,31	∓	∓	∓	∓	∓	—	∓	±	±	±	±	±	—	±	+	+	+	+	+	—	+	±	±	+	±	±	—	±
12	Méthanol	14,5	0,28	∓	±	∓	∓	∓	—	∓	±	+	+	+	+	—	±	+	+	+	+	+	—	+	±	±	+	±	±	—	±
13	Eau	23,4	*R*	—	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—	+	+	—	+	+	+	+	+	+	+	—	—	±	±	±	±	±

Nr. crt.	Solvants / Echantillon		*A*	Acrylonitrile							Pyridine							Nitroéthane							Butanol						
				a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
1	Benzène	9,15	*S*																												
2	Chloroforme	9,30	0,016																												
3	Dioxane	10,0	0,14																												
4	Acétone	10,0	0,14																												
5	Acrylonitrile	10,5	0,08	∓	∓	±	∓	∓	—	±																					
6	Pyridine	10,7	0,27	+	+	+	+	+	—	∓	+	+	+	+	+	—	—														
7	Nitroéthane	11,1	0,05	—	—	±	±	∓	—	—	+	+	+	+	+	—	—	+	+	+	+	+	—	—							
8	Butanol	11,4	0,24	±	+	+	±	±	—	±	±	—	+	+	+	—	∓	±	±	+	+	+	—	±	—	—	±	∓	∓	—	—
9	Propanol	11,5	0,26	±	+	±	±	±	—	∓	+	+	+	+	+	—	∓	±	±	±	±	±	—	∓	—	—	—	—	—	—	—
10	Éthanol	12,7	0,28	—	+	+	±	±	—	+	+	+	+	+	+	—	+	+	+	+	+	+	—	±	—	—	±	∓	∓	—	±
11	Éthylenglicol	14,2	0,31	±	±	±	±	±	—	±	+	+	+	+	+	—	±	±	±	±	±	±	—	±	∓	∓	∓	∓	∓	—	∓
12	Méthanol	14,5	0,28	∓	±	±	±	±	—	∓	+	+	+	+	+	—	∓	±	±	±	±	±	—	±	±	+	+	±	∓	—	±
13	Eau	23,4	*R*	—	∓	±	∓	∓	±	—	+	+	+	+	+	±	±	∓	—	∓	∓	∓	±	—	—	—	±	∓	∓	±	—

Nr. crt.	Solvants / Echantillon		*A*	Propanol							Éthanol							Éthylenglicol							Méthanol						
				a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
1	Benzène	9,15	*S*																												
2	Chloroforme	9,30	0,016																												
3	Dioxane	10,0	0,14																												
4	Acétone	10,0	0,14																												
5	Acrylonitrile	10,5	0,08																												
6	Pyridine	10,7	0,27																												
7	Nitroéthane	11,1	0,05																												
8	Butanol	11,4	0,24																												
9	Propanol	11,5	0,26	±	±	±	±	±	—	±																					
10	Éthanol	12,7	0,28	±	±	±	±	±	—	±	±	±	±	±	±	—	+														
11	Éthylenglicol	14,2	0,31	±	±	±	±	±	—	±	±	±	±	±	±	—	±	±	±	±	±	±	—	∓							
12	Méthanol	14,5	0,28	±	±	±	±	±	—	±	±	±	±	±	±	—	∓	±	±	±	±	±	—	±	±	±	±	±	±	—	∓
13	Eau	23,4	*R*	∓	∓	∓	∓	∓	±	±	∓	∓	∓	∓	∓	±	±	∓	∓	∓	∓	∓	±	±	—	—	—	—	—	±	—

a — lignine Björkman (peuplier),
b — lignine dioxane (peuplier),
c — lignine sulfate (peuplier),
d — lignine dioxane (roseau),
e — lignine sulfate (roseau),
l — acides lignosulfoniques (roseau),
g — lignine hydrotropique (roseau),

S — valeur petite,
R — valeur élevée,
\+ — solubilité totale,
± — solubilité partielle,
∓ — peu soluble,
— — insoluble.

rapport à la pyridine et le dioxane qui présentent des valeurs optimum pour ces caractéristiques.

Aussi on peut déduire du tableau 6 que la solubilité dans les alcools diminue avec la croissance de leur chaîne hydrocarbonée.

Ainsi les lignines sont plus solubles dans l'éthanol et le méthanol que dans le butanol, bien que le paramètre de solubilité présente une valeur optimum ($\delta = 11$), et que les „bons" solvants comme la pyridine et le dioxane dissolvent les lignines quel que soit leur poids moléculaire. Les mauvais solvants agissent uniquement sur les produits à poids moléculaire réduit. Du même tableau on peut apprécier la solubilité des lignines dans les mélanges binaires. On constate que les mélanges constitués par des solvants qui ne présentent pas les caractéristiques optimum, ont une capacité de solubilisation supérieure à celle des solvants qui les constituent. Par exemple le benzène, le chloforme, le nitroéthane en mélange avec des alcools, améliorent les propriétés de solubilisation de la lignine.

Si on réalise des mélanges binaires en fonction du type de la liaison hydrogène [4] en considèrant comme : a) *donneurs de protons* (*A*), des produits qui contiennent des halogènes (par ex. le dichloréthane) ; b) *donneurs d'électrons (B)* les cétones, les aldéhydes, les éthers (dioxane, acétone, DMSO) ; c) *donneurs de protons et d'électrons* (l'eau, les alcools, les acides carboxyliques, les amines), et en faisant varier la proportion du deuxième solvant de 0 à 100%, par rapport au premier, on obtient les résultats présentés dans le tableau 7.

D'autre part, les lignines contiennent des groupements donneurs de protons et d'électrons. La plus grande partie des groupements donneurs de protons est engagée dans des liaisons hydrogène intramoléculaires et cet effet doit être annulé au cours de la dissolution.

La dissolution dans divers solvants est determinée par le rapport de ces groupements fonctionnels dans la structure chimique de la lignine.

L'analyse des résultats du tableau 7 nous conduit à l'estimation des limites de variation de la solubilité et de la valeur des concentrations de saturation des diverses sortes de lignine du bois de peuplier (fig. 12).

Dans la fig. 12, qui représente le logarithme de la concentration de saturation de la lignine dioxane de peuplier (mg/ml) en fonction de la composition du mélange des solvants, on peut remarquer l'influence des proportions différentes entre les deux solvants, la concentration de saturation variant d'un mélange à l'autre ; soit qu'il passe par un maximum (éther-dichloréthane ; dichloréthane-ethanol) — donc des systèmes qui contiennent des halogènes, soit une augmentation linéaire avec l'addition du deuxième solvant (éther-dioxane ; butanol-acétone ; butanol-DMSO).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Tableau 7

Limites de solubilité des différents types de lignine du bois de peuplier dans les mélanges binaires (mg/ml)

Nr. crt.	Mélange binaire	Solvant*) %	Lignine Björkman	Lignine dioxane	Lignine sulfate
1	Ether étthylique–dioxane	0	0,00	0,01	0,01
		20	0,01	0,16	0,01
		40	0,02	0,40	0,08
		60	0,04	0,36	0,12
		80	1,25	0,98	0,90
		100	4,80	très soluble	4,50
2	Ether éthylique–dichloréthane	0	0,00	0,01	0,05
		20	0,01	0,13	0,07
		40	0,85	0,82	0,50
		60	0,30	0,13	0,25
		80	0,20	0,30	0,27
		100	0,17	0,47	0,17
3	Dichloréthane–éthanol	0	0,01	0,50	0,13
		20	7,50	1,76	0,95
		40	5,40	2,77	1,78
		60	14,27	14,96	12,17
		80	1,70	3,55	2,00
		100	0,08	1,88	1,17
4	Butanol–acétone	0	0,00	0,09	0,05
		20	0,00	0,10	0,07
		40	0,01	0,20	1,40
		60	0,02	0,70	2,17
		80	0,08	1,40	2,85
		100	0,09	2,80	1,86
5	Butanol–méthanol	0	0,00	0,09	0,05
		20	0,01	0,08	0,05
		40	0,01	0,24	0,07
		60	0,04	0,18	0,25
		80	0,04	0,13	0,33
		100	0,04	0,30	0,47
6	Butanol–DMSO	0	0,00	0,42	0,05
		20	1,00	0,58	0,17
		40	2,75	2,95	2,84
		60	5,70	4,04	très soluble
		80	7,50	4,14	très soluble
		100	25,00	20,20	très soluble
7	Dioxane–eau	0	5,08	très soluble	très soluble
		20	3,40	20,10	très soluble
		40	0,50	3,40	1,60
		60	0,02	0,13	0,21
		80	0,01	0,04	0,04
		100	0,01	0,01	0,01

*) Proportion du deuxième solvant en %.

Le tableau 6 permet de constater que les solvants *(A)* et *(AB)* sont mauvais pour la lignine ; mais si l'on prépare des mélanges avec des substances de la catégorie *(B)*, (donneurs d'électrons), les propriétés de solubilité se modifient sensiblement. Les meilleurs mélanges sont réalisés par la participation d'un donneur de protons et d'un donneur d'électrons *(A+B)*, ou *(B+AB)*.

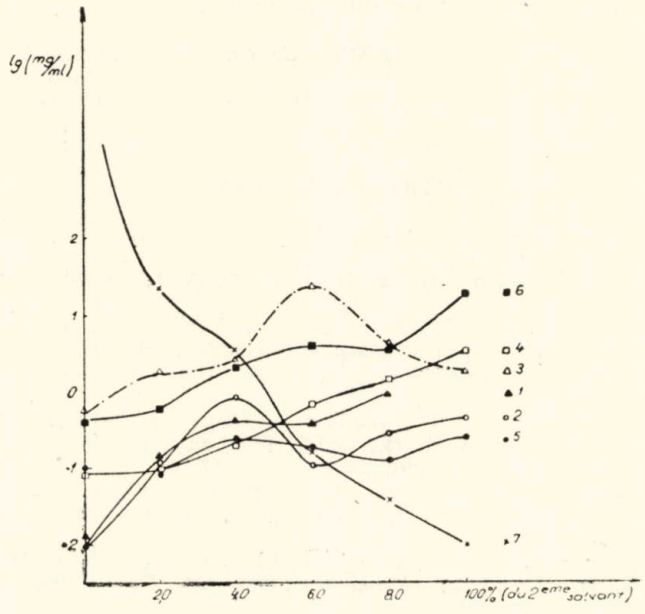


Fig. 12. — Concentration de saturation (%) de la lignine dioxane, dans les mélanges binaires.

4. Conclusions

Dans l'étude des propriétés des lignines la capacité de dissolution dans les solvants organiques en fonction du type de lignine, de la méthode d'extraction et de la nature du solvant présentent une importance particulière.

En utilisant les critères établis par Schuerch et Lindberg, les lignines de peuplier étudiées peuvent être classées du point de vue de la solubilité dans l'ordre suivant : lignine dioxane, lignine sulfate, lignine Björkman.

Il est intéressant de souligner que les mélanges de solvants agissent sinénergétiquement sur la dissolution de la lignine, en accélérant le processus de dissolution.

En fonction de la structure chimique et des méthodes de séparation, on constate l'apparition de différences en ce qui concerne la stabilité thermo-oxydative et la solubilité des lignines.

Ces phénomènes auront probablement une certaine importance dans le processus de modification chimique des lignines par greffage.

Nous remarçins M-lle Cornelia Vasile, chercheur à l'Académie de la Republique Socialiste de Roumanie, Filiale de Jassy, pour les calculs de l'énergie d'activation.

Reçue le 30 VI 1969

Institut de Chimie Macromoléculaire „P. Poni", Académie de la République Socialiste de Roumanie, Filiale de Jassy

BIBLIOGRAPHIE

1. Schuerch C., J. Amer. Chem. Soc., 1952, **74**, p. 5061.
2. — I. & E. C. 1965, 4, p. 61.
3. Rezanowich A., Yean W. Q., Goring D. A. I., Svensk Papperstidn., 1963, **66**, p. 141.
4. Ekman H. K., Lindberg J. J., Suomen Kemistilehti, 1966, **B 39**, p. 89.
5. Björkman A., Person B., Svensk Papperstidn., 1957, **60**, p. 158.
6. Trojanowski J., Leonowicz A., Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodovska, 1963, **18**, p. 441.
7. Pepper J. M., Ballis P. Et., Adler E., Canad. J. Chem., 1959, **37**, p. 1241.
8. Чочьева М. М., Никитин Н. И., ЖПХ, 1959, **32**, стр. 613.
9. Hayashi A., Tachi I., TAPPI, 1958, **41**, p. 173A.
10. Kleinert T., Pulp a. Paper Mag. of Canada, 1966, **67**, p. T-299.
11. Grigoraş M., Cernătescu-Asandei A., Cellul. Chem. a Technol., 1968, **2**, p. 195.
12. Haslam I., Hamilton J. B., Squirrell D. C. M., Analyst, 1960, **85**, p. 556.
13. Pribil R., *Complexonii în chimia analitică*. Ed. Tehn., Buc., 1961, p. 270, (trad. du tchèque).
14. Diaconescu V., Asandei N., Celuloză şi hîrtie, 1961, **10**, p. 361.
15. Gatterman L., *Die Praxis des organischen Chemikers*. Walter de Gruyter et Co., Berlin, 1961, S. 74.
16. Aaltio E., *Investigation on the Mode of Combination of Lignin in Wood with Special Reference to Aspen (P. tremula) Wood*. Suomalainen Tiedeakatemia Helsinki, 1958, p. 42.
7. Бурова Т. С., Диссертация, Ленинград, 1956.
18. Redinger L., Lindenhayn K., Monatsber. dtsch. Akad. Wiss., Berlin, 1964, **6**, p. 582.
19. Brauns F. E., Brauns D. A., *The Chemistry of Lignin*. Suppliment. volume, Acad. Press, N. Y., 1960, p. 244.
20. Lindberg J. J., Finska Kemists Medd., 1959, **68**, p. 5.
21. * * * TAPPI, 1958, T-15 m.
22. Lawson L. R. Jr., Doughty J. B., Abstr. Meeting Ammer. Chem. Soc., Sept. 1956.
23. Gorden J. L., Mason S. G., Canad. J. Chem., 1955, **33**, p. 1491.
24. Michell A. J., Watson A, J,, Higgins H. G., TAPPI, 1965, **48**, p. 520.
25. Harrington K. J., Higgins H. G., Michell A. J., Holzforschung, 1964, **18**, S. 108.
26. Arseneau D. F., Pepper J. M., Pulp a. Paper Mag. of Canada, 1965, **8**, p. 415.

27. Kawamura I., Higuchi T., *Chimie et Biochimie de la Lignine, de la Cellulose et des Hémicelluloses.* Actes du Symposium International de Grenoble, Juillet, 1964, Les Imprimeries réunies de Chambéry, 1964, p. 439.
28. Bolker H. I., Somerville N. G., Pulp a. Paper Mag. of Canada, 1963, **64**, p. T-187.
29. — TAPPI, 1962, **45**, p. 826.
30. Solomon B., Rozmarin Gh., Biro A., Simionescu Cr., Cellul. Chem. a. Technol., 1967, **1**, p. 44.
31. Sanderman W., Augustin H., Holz als Roh- und Werkstoff, 1963, **21**, S. 256.
32. Arseneau D. F., Canad. J. of Chem., 1961, **39**, p. 1915.
33. Freeman E. S., Carrol B., J. Phys. Chem., 1958, **62**, p. 394.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL PROPRIETĂȚILOR FIZICO-CHIMICE ALE LIGNINEI

(Rezumat)

Se întocmește o caracterizare fizico-chimică amănunțită a ligninei obținute din lemn de plop și din stuf.

Au fost examinate comparativ ligninele extrase prin diferite metode (Björkman, dioxan, sulfat etc.) în ceea ce privește capacitatea de dizolvare în diferiți solvenți organici, stabilindu-se corelații între compoziția chimică, structura și solubilitatea acestora.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Variația viscozității cu concentrația pentru diferite tipuri de lignină din plop.
Fig. 2. — Variația viscozității cu concentrația pentru diferite tipuri de lignină din stuf.
Fig. 3. — Difractogramele cu raze X pentru lignina dioxan *(1)* și sulfat de plop *(2)*.
Fig. 4. — Spectrele de absorbție în IR pentru diferite tipuri de lignină din plop.
Fig. 5. — Spectrele de absorbție în IR pentru diferite tipuri de lignină din stuf.
Fig. 6. — Spectrele de absorbție în UV pentru ligninele din plop și stuf.
Fig. 7. — Variația pierderilor în greutate funcție de temperatură.
Fig. 8. — Curbele D.T.G. pentru lignina din plop și stuf.
Fig. 9. — Diagrama cinetică pentru degradarea termooxidativă a ligninei din plop.
Fig. 10. — Diagrama cinetică pentru degradarea termoxidativă a ligninei din stuf.
Fig. 11. — Solubilitatea ligninei funcție de proprietățile solvenților (δ, $\Delta\mu$).
Fig. 12. — Concentrația de saturație (%) a dioxanligninei în amestecuri de solvenți organici.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 675.02

STUDII PRIVIND OBŢINEREA BIZONULUI PENTRU ÎNCĂLŢĂMINTEA CONFECŢIONATĂ PRIN VULCANIZARE

DE

AGLAIA CHIRIŢĂ şi GH. CHIRIŢĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Confecţionarea încălţămintei cu talpă vulcanizată necesită sortimente de piei de feţe care să nu-şi modifice proprietăţile chimice, fizico-chimice şi organoleptice la temperatura de vulcanizare şi să aibă o bună aderenţă la talpa de cauciuc.

În scopul stabilirii tehnologiei de fabricaţie a pieilor de feţe de încălţăminte rezistente la temperatura de vulcanizare s-au întreprins numeroase studii [1] ... [5], atenţia principală îndreptîndu-se asupra operaţiilor de tăbăcire, gresare şi vopsire cu coloranţi de acoperire.

Creşterea temperaturii de contracţie a pieilor se realizează prin procedee de tăbăcire care măresc forţele de coeziune laterală a lanţurilor polipeptidice, datorită, în primul rînd, formării de legături transversale. Stabilitatea termică a pieilor finite depinde de natura substanţelor tanante folosite la tăbăcire, de tipul şi numărul legăturilor care se formează între colagen şi substanţa tanantă [6].

Contracţia pieilor finite, tăbăcite în moduri diferite, sub influenţa temperaturii, este într-o strînsă dependenţă de umiditatea lor [7].

În lucrarea de faţă, ca o continuare a unor preocupări anterioare [5], s-a urmărit obţinerea pieilor de feţe de încălţăminte de tip bizon care să se comporte corespunzător la temperatura de vulcanizare şi în acelaşi timp să aibă o absorbţie şi o permeabilitate faţă de apă cît mai scăzută.

2. Partea experimentală

S-a experimentat tăbăcirea combinată formol-crom [9], [10] şi tăbăcirea în crom „la cald" urmate de o retăbăcire vegetală. Pentru mărirea impermeabilizării faţă de apă s-au folosit produse comerciale de tip Baykanol [8].

Experimentările s-au efectuat pe piei de bovine categoria 12...14 kg/buc., conservate prin sărare.

Pieile gelatină, obținute prin cenușerire cu var și sulfură de sodiu, decalcificate complet și sămăluite, au fost împărțite în 4 serii : *I*, *II*, *III* și *IV*, fiecare cuprinzînd cîte 5 piei.

Seriile *A*, *B* și *C* au fost tăbăcite combinat formol-crom, iar seria *D* a fost tăbăcită în crom la cald.

Pretăbăcirea cu aldehidă formică a avut loc în aceleași condiții pentru toate seriile tăbăcite combinat formol-crom. Pieile gelatină s-au pretăbăcit prin agitare la butoi cu 1,5% formol de 36%, flota 250%, la pH=7,2...7,5, timp de 6 ore. pH-ul a fost controlat periodic și corectat cu o soluție de carbonat de sodiu de 10%. Pieile au rămas apoi în flotă peste noapte, după care s-a procedat la coborîrea pH-ului lor prin adăugarea unei soluții de 1,5% acid sulfuric. După 4 ore de agitare aveau un pH=3,5. S-a îndepărtat flota și s-a trecut la tăbăcirea în crom.

Tăbăcirea în crom s-a desfășurat în condiții identice pentru toate seriile, cu deosebirea că s-au folosit cantități diferite de oxid de crom, astfel : 1,5% Cr_2O_3 la seria *I*, 2,0% Cr_2O_3 la seria *II* și 2,2% Cr_2O_3 la seria *III*.

Tăbăcirea a avut loc prin agitare la butoi, cu o flotă de 100...120%, timp de 8 ore, după care pieile au rămas în flotă peste noapte. S-au utilizat soluții bazice de crom cu bazicitățile : 37,5%, 41,0% și 44,0%. Cu 2 ore înainte de terminarea agitării s-a adăugat 0,5...1,0% carbonat de sodiu, funcție de cantitatea de oxid de crom folosită la tăbăcire.

Pieile din seria *IV* s-au tăbăcit cu 2,2% Cr_2O_3 prin „metoda tăbăcirii la cald". Pieile gelatină decalcificate, sămăluite și piclate, au fost introduse în butoiul rotativ în care s-a adăugat în prealabil 25% apă la 30°C, raportată la greutatea pielii gelatină, apoi s-au tratat cu 1,3% tanant sintetic de tip Romasin, care are drept scop fixarea structurii straturilor superficiale ale pielii și ușurarea pătrunderii sărurilor bazice de crom. S-a adăugat apoi sarea de crom cu o bazicitate de 41,0%. Bazificarea sării de crom și intensificarea tăbăcirii s-au realizat prin creșterea flotei și a temperaturii. Astfel, după 4 ore de agitare flota a fost crescută treptat de la 25%, cît era inițial, la 100%, iar temperatura de la 30°C la 45°C. În aceste condiții pieile au mai fost agitate încă 3 ore, după care au rămas în flotă peste noapte.

După tăbăcirea în crom, pieile din toate seriile s-au lăsat la odihnă în vederea fixării cromului nelegat, s-au stors și s-au fățuit la grosimea de 1,7 mm. Neutralizarea s-a efectuat cu 1,5% formiat de calciu și 0,4% bicarbonat de sodiu pentru pieile din seria *I* și cu 2,0% formiat de calciu și 0,5...0,7% bicarbonat de sodiu pentru cele din seriile *II*, *III* și *IV*. Apoi toate pieile celor trei serii au fost despărțite în canate,

formîndu-se 2 grupe : a) o grupă *D* cuprinzînd toate canatele din dreapta ; b) o grupă *S* cuprinzînd toate canatele din stînga.

Grupa canatelor *D* s-au retanat cu 8% tanin pur, folosindu-se un amestec alcătuit din 35% quebracho sulfitat, 3,5% castan şi 30% mimoza şi s-au gresat cu 7,7% ulei de copită sulfatat şi 1,0% ulei de copită brut.

Grupa canatelor *S* s-au retanat cu 11,35% tanin pur, folosindu-se un amestec alcătuit din 50% quebracho sulfitat, 30% romatan şi 20% mimoza şi apoi s-au impregnat cu 3,0%, Baykanol O.I. şi 1,0% Baykanol O.Z.

A urmat apoi finisajul obişnuit aplicat pieilor de tip bizon atît pentru canatele *D* cît şi pentru cele *S*.

Pieile finite impregnate au un tuşeu plăcut, sînt pline, moi, fără tendinţă de curgere sau crăpare a feţei.

Pieile finite impregnate cu Baykanol au un tuşeu mai aspru, sînt mai puţin moi şi au o oarecare tendinţă de curgere şi crăpare a feţei.

Rezultatele analizei chimice a pieilor finite sînt date în tabelul 1. Canatele *D* (tabelul 1) au un conţinut de substanţe grase care corespunde pieilor finite de tip „bizon neuns". „Substanţele grase" determinate din canatele *S* sînt formate din grăsimile naturale ale pielii şi probabil din substanţa care intră în compoziţia Baykanolului O.I. şi Baykanolului O.Z.

Tabelul 1

Analiza chimică a pieilor finite

Seria	Formol de 36% folosit la pretăbăcire %	Cr_2O_3 folosit la tăbăcire %	Substanţe grase %		Substanţe minerale %		Cr_2O_3 %		Solubile totale %	
			D	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*	D	S
I	1,5	1,5	7,95	3,11	5,05	4,68	2,90	3,33	—	—
II	1,5	2,0	7,33	2,89	5,44	5,37	3,69	3,62	2,73	1,60
III	1,5	2,2	8,20	2,38	5,99	5,72	4,08	3,76	2,84	1,66
IV	1,5	2,2	7,67	2,71	6,12	6,13	4,35	4,12	—	1,61

Notă. *D* — canatele din dreapta retanate şi neimpregnate, *S* — canatele din stînga impregnate ; substanţele grase sînt calculate la pielea fără umiditate; Cr_2O_3, substanţele minerale şi substanţele solubile totale sînt calculate la pielea fără umiditate şi substanţe grase.

Conţinutul redus în substanţe grase a canatelor *S* contribuie la înrăutăţirea unor proprietăţi organoleptice (tuşeu, moliciune) şi fizico-mecanice. Oxidul de crom fixat nu diferă sensibil la canatele *D* şi *S* ale aceleiaşi serii.

Solubilele totale sînt mult mai reduse decît limita impusă de standard pentru bizonul neuns. Solubilele totale sînt mai mici la canatele

S, deşi au fost retăbăcite mai intens decît canatele *D*. Acest fapt se datoreşte impregnării pieilor cu Baykanol O.I. care produce şi insolubilizarea taninurilor introduse în piele la retanare.

În urma analizei fizico-mecanice s-au obţinut rezultatele înscrise în tabelul 2. Rezultă că alungirea sub sarcină de 1 kgf/mm², pentru toate probele, are valori apropiate şi se încadrează în limitele prevăzute de STAS. Alungirea la rupere a canatelor impregnate este cu 13,7...23,1% mai redusă decît la probele neimpregnate, iar alungirea la crăparea feţei este mai mică la probele impregnate cu Baykanol cu 10,6...23,5% decît la probele neimpregnate. Probele tăbăcite formol-crom cu cantităţi diferite de crom, au alungiri apropiate. Rezistenţa la crăpare a feţei la probele impregnate este mai mică cu 19,4...31,6% decît la cele neimpregnate. Rezistenţa la crăpare a feţei şi rezistenţa la rupere a tuturor probelor neimpregnate au valori apropiate.

Tabelul 2

Analiza fizico-mecanică a pieilor

Seria	Alungirea sub sarcină de 1 kgf/mm² %		Alungirea la crăparea feţei %		Alungirea la rupere %		Rezistenţa la crăpare a feţei kgf/mm²		Rezistenţa la rupere kgf/mm²		Rezistenţa la sfîşiere kgf/cm gros.	
	D	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*
I	19,78	22,60	31,50	26,22	49,88	43,06	1,96	1,17	2,64	1,94	42,30	23,07
II	21,80	21,60	31,20	27,90	51,56	42,80	1,94	1,47	2,69	2,16	43,30	21,60
III	20,70	19,50	34,50	26,40	51,40	39,50	1,95	1,26	3,07	2,04	50,20	24,26
IV	18,30	20,80	30,80	24,40	44,40	36,70	2,03	1,64	2,63	2,12	38,60	22,12

Rezistenţa la sfîşiere a probelor impregnate este mai redusă cu 42,7...51,3% în comparaţie cu rezistenţa la sfîşiere a produselor neimpregnate, iar probele neimpregnate tăbăcite în crom la cald au rezistenţa la sfîşiere mai mică decît cele tăbăcite formol-crom.

Alungirile şi rezistenţele mai mici la pieile impregnate decît la cele neimpregnate se explică prin proporţia mai ridicată de tananţi utilizaţi la retanare, prin faptul că pieile nu s-au gresat, iar substanţele de impregnare probabil că reacţionează cu pielea, crescîndu-i rigiditatea.

S-a cercetat modul de comportare faţă de apă a tuturor probelor de piele tăbăcită, determinîndu-se cu ajutorul penetrometrului Bally: timpul de pătrundere a apei, absorbţia dinamică în 1, 2 şi 3 ore şi cantitatea de apă trecută prin piele după 1 şi 2 ore. Rezultatele determinărilor sînt date în tabelul 3.

Se constată că probele de piele neimpregnate cu Baykanol sînt pătrunse mult mai repede și absorb mai intens apa decît probele impregnate. În schimb, atît după 1 oră cît și după 2 ore, prin probele de piele impregnată trece o cantitate mai mare de apă decît prin probele neimpregnate. Acest fapt dovedește că prin impregnare cu Baykanol s-a produs o hidrofobizare destul de energică a fibrei pielii care împiedică o absorbție mărită a apei, în schimb pielea poate fi traversată, în același timp, de o cantitate mai mare de apă decît pielea neimpregnată.

Permeabilitatea la vaporii de apă atît a probelor de piele impregnate cît și a celor neimpregnate este corespunzătoare pieilor pentru fețe de încălțăminte (tabelul 3). Pieile impregnate cu Baykanol au o permeabilitate la vaporii de apă mai bună decît cele neimpregnate.

Tabelul 3

Comportarea pieilor față de apă și vaporii de apă

Seria	Timpul de pătrundere min		Absorbția dinamică %						Cantitatea de apă trecută g				Permeabilitatea la vaporii de apă mg/24 ore	
			1 oră		2 ore		3 ore		1 oră		2 ore			
	D	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*
I	1,5	16,2	75,7	34,7	78,2	46,2	77,9	53,3	2,05	3,39	1,85	5,40	359,3	566,9
II	2,4	25,1	73,1	22,6	73,4	38,7	76,1	44,3	3,84	3,78	3,80	3,49	375,5	410,9
III	2,7	25,4	76,1	21,3	77,6	32,5	77,6	38,2	3,18	2,36	3,04	2,81	521,0	528,6
IV	2,3	19,5	75,4	35,7	76,8	49,1	78,1	53,5	4,24	5,32	3,84	6,19	474,0	520,0

Pe baza studiilor efectuate a rezultat că produsele de impregnare Baykanol cresc gradul de impermeabilizare a pieilor finite, micșorează absorbția de apă ; pieile își păstrează permeabilitatea la vaporii de apă și se produce o insolubilizare a taninurilor vegetale nefixate. De asemenea, se înrăutățesc proprietățile organoleptice și mecanice ale pieilor finite (rezistența la rupere, rezistența la crăparea feței, alungirea la rupere, alungirea la crăparea feței, rezistența la sfîșiere) ; pieile impregnate se lasă mai ușor traversate de către apă, în timp, în comparație cu pieile neimpregnate.

S-a studiat apoi influența temperaturii de vulcanizare de 140°C asupra probelor de piele finită de tip bizon.

La confecționarea încălțămintei prin vulcanizare, pielea pentru față vine în contact cu calapodul fierbinte și talpa de cauciuc este supusă vulcanizării la 140°C. Pentru a reproduce cît mai fidel procesul de încălzire a pielii de față în timpul vulcanizării încălțămintei [2], [11], s-au supus încălzirii la 140°C, timp de 15 min, la etuvă, eșantioane de piele cu suprafață determinată și care în prealabil au fost condiționate timp

de 2 zile la temperatura camerei şi la o umiditate relativă a aerului de 65%. După şedere la etuvă s-a măsurat din nou suprafaţa probelor de piele pentru a li se determina contracţia. Apoi au fost supuse condiţionării timp de 8 zile. După 2 zile şi respectiv 8 zile s-a măsurat suprafaţa probelor de piele pentru a se urmări dacă contracţia suprafeţei la temperatura de 140°C nu este reversibilă. Rezultatele determinărilor sînt date în tabelul 4. Din analiza datelor rezultă că după o şedere de 15 min la temperatura de 140°C, probele neimpregnate au o contracţie cu 15,6...29,5% mai mică decît cele impregnate. Valorile contracţiei la diferitele probe neimpregnate sînt apropiate; de asemenea şi valorile probelor impregnate.

Tabelul 4

Comportarea pieilor la temperatura de vulcanizare (15 min la 140°C)

Seria	Indicele de contracţie %		După 2 zile de condiţionare				După 8 zile de condiţionare			
			contracţia %		revenirea %		contracţia %		revenirea %	
	D	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*	*D*	*S*
I	7,87	11,15	5,87	8,00	33,08	30,70	4,80	7,87	38,5	36,7
II	8,48	11,20	6,67	7,18	21,55	33,40	5,94	7,08	30,0	36,8
III	8,82	10,45	6,16	7,73	32,40	26,1	5,31	5,77	39,7	44,86
IV	8,60	10,77	5,24	8,01	39,29	27,24	4,80	6,23	45,3	42,02

La toate probele de piele se observă o oarecare revenire, în timp, a suprafeţei contractate. După 8 zile pieile impregnate rămîn cu o contracţie cu 22,5% mai mare decît a celor neimpregnate.

3. Concluzii

1. În urma tăbăcirii combinate formol-crom, cu 1,5% formol de 36% şi 1,5% Cr_2O_3, se obţin piei de tip bizon de bună calitate şi cu o contracţie redusă la temperatura de vulcanizare.

Calitatea pieilor tăbăcite cu 1,5% Cr_2O_3 determinată organoleptic, în urma analizei chimice şi fizico-mecanice, este comparabilă cu aceea a probelor tăbăcite în crom la cald cu 2,2% Cr_2O_3.

2. Impregnarea cu Baykanol măreşte impermeabilizarea faţă de apă a pieilor dar în acelaşi timp le înrăutăţeşte o serie de proprietăţi organoleptice şi fizico-mecanice.

3. Impregnarea cu Baykanol produce o hidrofobizare destul de energică a fibrei pielii care împiedică o absorbţie mărită a apei, în schimb pielea poate fi traversată, în acelaşi timp, de o cantitate mai mare de apă decît pielea neimpregnată.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de confecţii din piele,
Catedra de tehnologia pielii,
înlocuitorilor de piele şi
substanţelor tanante

BIBLIOGRAFIE

1. Hough A. T., J.S.L.T.C., 1950, **34**, p. 138.
2. Lasserre R., Bull. de l'A.F.C.I.C. et Doc. sci. et techn. des ind. de cuir, 1957, *9*, p. 155.
3. Stather F., Herfeld H., Collegium, 1936, *2*, S. 118.
4. * * * Schuh und Leder, 1960, *10*, S. 288.
5. Chiriţă A., Chiriţă Gh., Rev. Ind. Uşoară, 1966, 7, p. 389.
6. Flaerti F. O., Roddy V. T., Lollar R. M., *The Chemistry and Technology of Leather.* Vol. **II**, Reinhold Publishing Corporation, New York, 1958.
7. Balfe M. P., Humphreys E. E., ***Progress in Leather Science.*** Vol. **II**, British Leather Manufacturers Research Association, London, 1947, pp. 415—423.
8. Van Vlimmeren, Leder und Hautemarkt, 1965, *11*.
9. Alexa Gh., Chiriţă Gh., Chiriţă A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *1—2*, pp. 193—202.
10. Alexa Gh., Chiriţă Gh., Chiriţă A., Năneşcu V., Năneşcu G., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4*, pp 169—180.
11. Chiriţă A., Chiriţă Gh., Rev. Ind. Uşoară, 1966, *4*, pp. 203—206.

ÉTUDES CONCERNANT L'OBTENTION DES CUIRS „BIZON" POUR LA FABRICATION DES CHAUSSURES VULCANISÉES

(Résumé)

On a étudié le tannage et l'impregnation des cuirs façon „bizon" utilisés dans la fabrication des chaussures vulcanisées. Par le tannage combiné formaldéhyde-chrôme, avec 1,5% formaldéhyde de 36% et 1,5% Cr_2O_3 on obtient des cuirs façon „bizon" de bonne qualité et avec une petite contraction à la température de vulcanisation.

L'impregnation avec Baykanol produit une hydrophobisation et une imperméabilisation des cuirs, mais s'aggravent nombre de propriétés organoléptiques et physico-mécaniques des cuirs.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. D. 631,82; 669

COMPORTEMENT COMME ENGRAIS DE QUELQUES RÉSIDUS DE L'INDUSTRIE MÉTALLURGIQUE

PAR

IONELA POPESCU et M. DIMA

1. Introduction

Quelques résidus de l'industrie métallurgique contiennent des quantités très importantes de phosphore, de potassium et de divers microéléments et par suite peuvent être utilisés comme engrais dans l'agriculture. D'ailleurs la scorie des fours Thomas est utilisée depuis longtemps comme engrais.

D. Davidescu et P. Avram [1] ont utilisé, dans le même but, la scorie ferromanganique de Tîrnăveni, un résidu avec du manganèse de Iacobeni et de phosphogypse, obtenu comme résidu à la fabrication de l'acide phosphorique par voie humide. W. Jost [2] a utilisé comme engrais les scories de cuivre. P. Lejnev et I. Finkovski [3] obtiennent de bons résultats en utilisant comme engrais le cendre des pyrites. V. N. Karavaev [4] obtient des augmentations considérables de récolte en utilisant comme engrais les scories basiques du four Martin. P. A. Vlasiuk [5], S. Nicolić [6], et d'autres chercheurs recommandent l'utilisation comme engrais contenant des microéléments, des différents résidus industriels qui contiennent cuivre, zinc, bore etc.

En général, les recherches effectuées jusqu'à présent quant à la teneur en éléments nutritifs des divers résidus industriels et de leurs comportement comme engrais, représentent à peine un début pour ce domaine. C'est ainsi que dans ce qui suit nous présenterons les résultats obtenus par l'analyse de quelques scories métallurgiques en même temps que leur comportement comme engrais appliqué à quelques plantes de culture.

2. Méthode de travail

Afin de connaître la teneur en élements fértilisants, on a analysé la scorie de four (clinker) de l'usine chimique-métallurgique de Copşa-Mică et la scorie métallurgique du combinat chimique de Tîrnăveni.

Parce que ces résidus se présentent sous forme d'agglomérats durs, ils ont été finement broyés dans un moulin à boulets. Pour l'analyse on a utilisé des méthodes gravimétriques, flammephotométriques et spectrophotométriques décrites par divers chercheurs (J. H. Joe [7], E. B. Sandell [8], E. Jouis [9], N. G. Vinogradova [10], K. V. Veriguina [11], [12] etc.).

Compte tenu de la composition chimique de ces résidus, ils ont été appliqués comme engrais dans les doses indiquées dans le tableau 1, sur un terrain qui avait reçu préalablement de l'azotate d'ammonium et du superphosphate. Sur le terrain en discussion on a semé du blé d'hiver, du maïs, du tournesol et de la betterave sucrière. Les expériences ont été organisées sur un tchernozium moyennement dégradé dont le contenu en éléments nutritifs est indiqué dans les tableaux 2 et 3. En comparant les résultats de ces analyses avec ceux obtenus par D. Davidescu [13], C. D. Chiriţă [14] et d'autres, on constate que le sol, sur lequel a été effectuée l'expérimentation, a une teneur modérée d'azote, de phosphore, de potassium et assez de microéléments.

Dans la région où les experiences ont été effectuées on compte, en moyenne, annuellement, 517,8 mm de précipitations, les premiers deux ans d'expérimentations étant pluvieux et la dernière année plus sêche.

Les semailles ont été faites à l'époque optimum pour chaque culture et pendant la végétation on a effectué les travaux communs d'entretien.

Tableau 1

Doses de résidu utilisées comme engrais

Variante	N kg/ha	P_2O_5 kg/ha	Scorie de four kg/ha	Scorie métallurgique kg/ha
1	60	45	—	—
2	60	45	50	—
3	60	45	100	—
4	60	45	200	—
5	60	45	—	50
6	60	45	—	100
7	60	45	—	200

Tableau 2

Teneur des composants nutritifs du sol

Profondeur cm	pH avec du KCl	Teneur des composants nutritifs %				
		N	P_2O_5	K_2O	Na_2O	Humus
0...10	6,05	0,21	0,17	2,04	0,99	3,33
10...20	6,07	0,26	0,17	2,08	0,94	3,33
20...30	6,15	0,23	0,17	2,16	0,96	3,25
30...40	6,23	0,23	0,17	2,08	0,90	3,09
40...60	6,14	0,23	0,17	2,24	0,96	2,93
60...80	7,05	0,19	0,05	2,10	0,94	2,61

Tableau 3

Teneur en microéléments dans le sol (mg/kg)

Profondeur cm	Mn		Zn		Cu		Co		Mo		B	
	total	mobile	total	mobile	total	mobile	total	mobile	total	mobile	total	mobile
0...10	800,00	135	32	0,33	22,00	6,10	11,00	7,33	2,50	0,18	37	1,20
10...20	810,10	140	39	0,80	23,00	7,03	12,00	7,16	1,45	0,15	37	1,07
20...30	850,00	—	61	—	30,10	—	12,00	—	2,85	—		
30...40	502,00	—	30	—	23,10	—	12,40	—	2,50	—		
40...60	744,00	—	58	—	22,00	—	16,10	—	1,60	—		
60...80	570,00	—	63	—	26,40	—	10,60	—	1,90	—		

3. Résultats obtenus et leur interprétation

À l'analyse des scories on a constaté que celle de four a un pH = 5,1 et celle métallurgique, de 6,5. L'humidité de ces residus est de 1,12%, respectivement 0,90%. La teneur en macrocomposants et microéléments est indiquée dans les fig. 1 et 2 et on peut constater que ces résidus contiennent beaucoup de fer, silicium et aluminium, donc des éléments qui se trouvent aussi en grande quantité dans le sol. Parmis les microéléments qui se trouvent en quantités plus grandes dans ces résidus on peut citer les suivants: Cu, Mn et Co. De la quantité totale des microéléments la proportion la plus grande d'éléments mobiles est constituée par le Co, le Mo et le Mn. Il en résulte que par l'application de ces résidus comme engrais, on peut enrichir le sol avec du Zn, Cu, Mn, Co, Mo et d'autres microéléments encore.

Dans les expérimentations avec du blé d'automne on a obtenu les résultats indiqués dans la fig. 3 qui prouvent que les résidus utilisés apportent des augmentations modérés de récolte qui ne dépassent pas en moyenne, pour deux années, 5,7%, et qu'ils déterminent dans une certaine mesure une amélioration de la teneur en substances protéiques des grains en même temps qu'une augmentation modérée de leurs poids.

Dans les grains s'accumulent des quantités de Co un peu plus grandes. Les meilleurs résultats ont été obtenus avec la dose de 50 kg/ha, scorie de Copşa Mică. Gh. Miron, P. Avram [17] ainsi que D. Davidescu et P. Avram [1] en utilisant comme engrais pour le blé d'automne des residus de manganèse de Iacobeni-Suceava ont obtenu des augmentations de récolte qui ne dépassent pas 7,3%. En traitant le sol brun de forêt avec certains residus industriéls, N. V. Karavaev [4] obtient pour le blé d'automne des augmentations de récolte de 4,8...12,3%.

Le maïs cultivé sur un terrain auquel on a appliqué des résidus, a donné les productions indiquées dans la fig. 4. On peut remarquer que la scorie de Copşa Mică détermine des augmentations de récolte qui atteignent, en moyene, pour 3 ans, 336 kg/ha ou 8,3%. La dose la plus convenable est de 50 kg/ha. La scorie de Tîrnăveni détermine, toutefois, une augmentation de la production de grains pour maïs, de 313 kg/ha ou de 7,7% en moyenne, la dose optimum étant de 100 kg/ha.

V. D. Rudin [15] obtient pour la maïs des augmentations de récolte un peu plus grandes en utilisant pour le traitement des sémences des solutions de sels pures de Mo et Mn. Stiles [16] montre que le Zn a un rôle très important dans le développement des plantes de maïs. Nous considérons que l'effet favorable que les résidus étudiés exercent sur la production de maïs pourrait être atribué à la teneur relativement élevée de Mn, Mo et Zn de ces residus. Donc il en résulte que les résidus expérimentés ont déterminé une augmentation de récolte, plus grande pour le maïs que pour le blé, en même temps qu'une amélioration du poids des grains et le leurs teneur en microéléments.

Les expériences effectuées avec le tournesol et les résultats obtenus, représentés dans la fig. 5, ont montré que les residus ont determiné pour cette culture une augmentation de récolte de 5,2...6,2% en moyenne, et ont influencé dans une certaine mesure la qualité de la récolte et la teneur des grains en microéléments. Les meilleurs doses ont été de 100 kg/ha pour les scories de Copşa-Mică et 50 kg/ha pour les scories de Tîrnăveni.

Pour la betterave à sucre, les résidus expérimentés ont donné les résultats indiqués dans la fig. 6, qui mettent en évidence une augmentation de 5,1...5,3% de la récolte de racines. Elles ont déterminé en

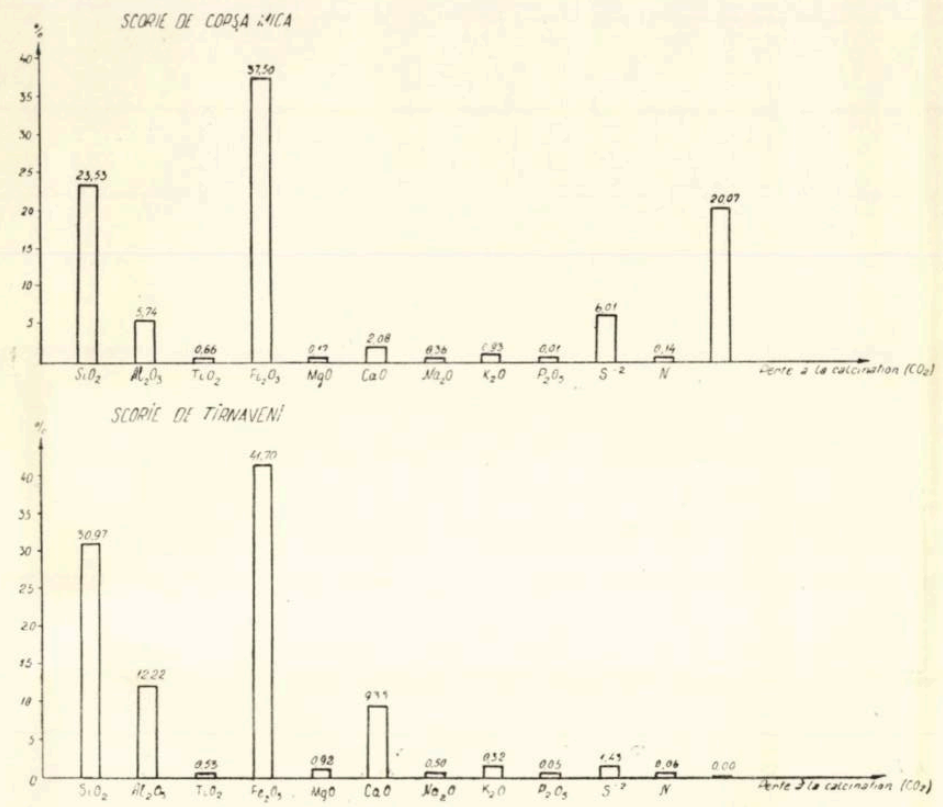


Fig. 1. — Le contenu en microéléments de la scorie de Copşa Mică et de Tîrnăveni

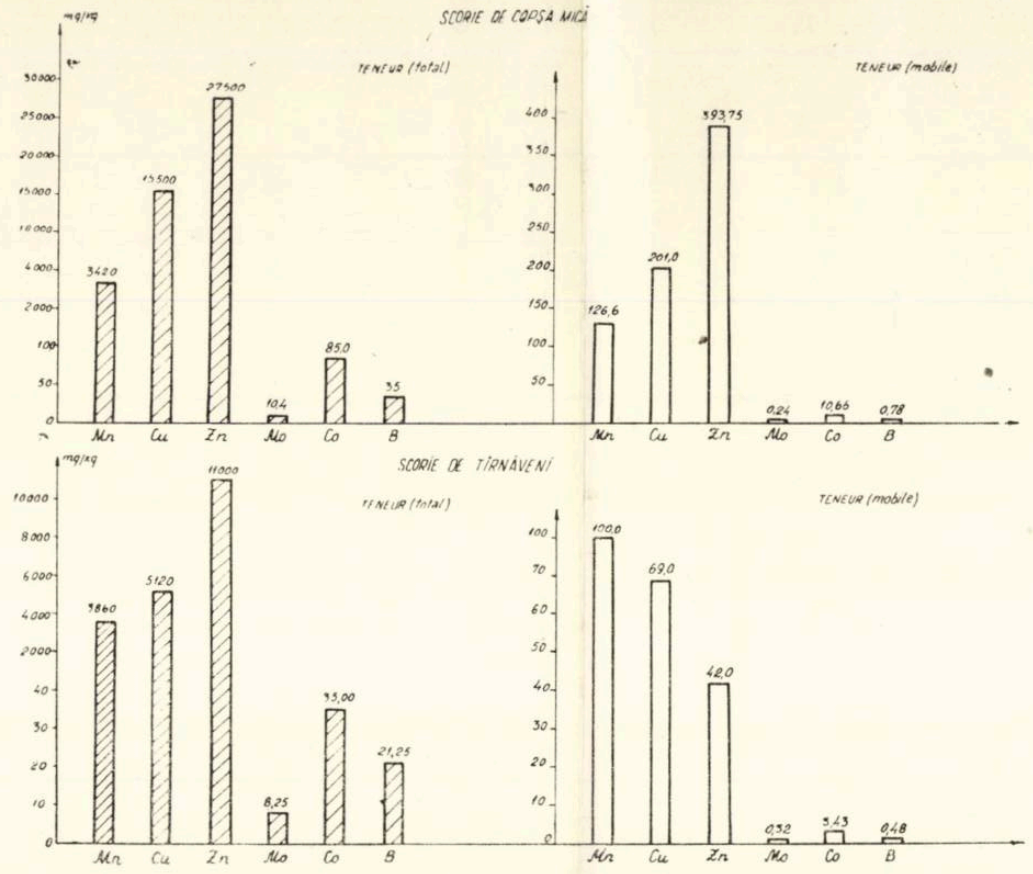


Fig 2 — Le contenu en microéléments (total et mobile) de la scorie de Copşa Mică et de Tîrnăveni.

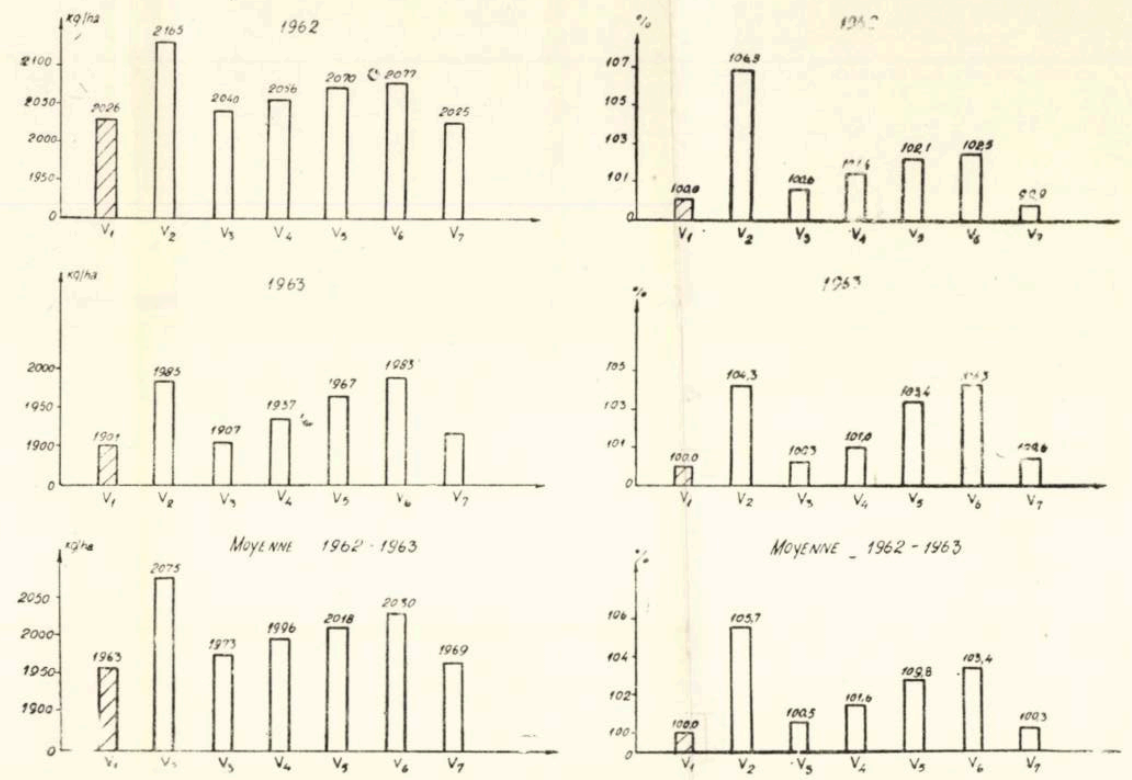


Fig. 3. — La production des grains de blé (1962—1963, la moyenne 1961—1963).

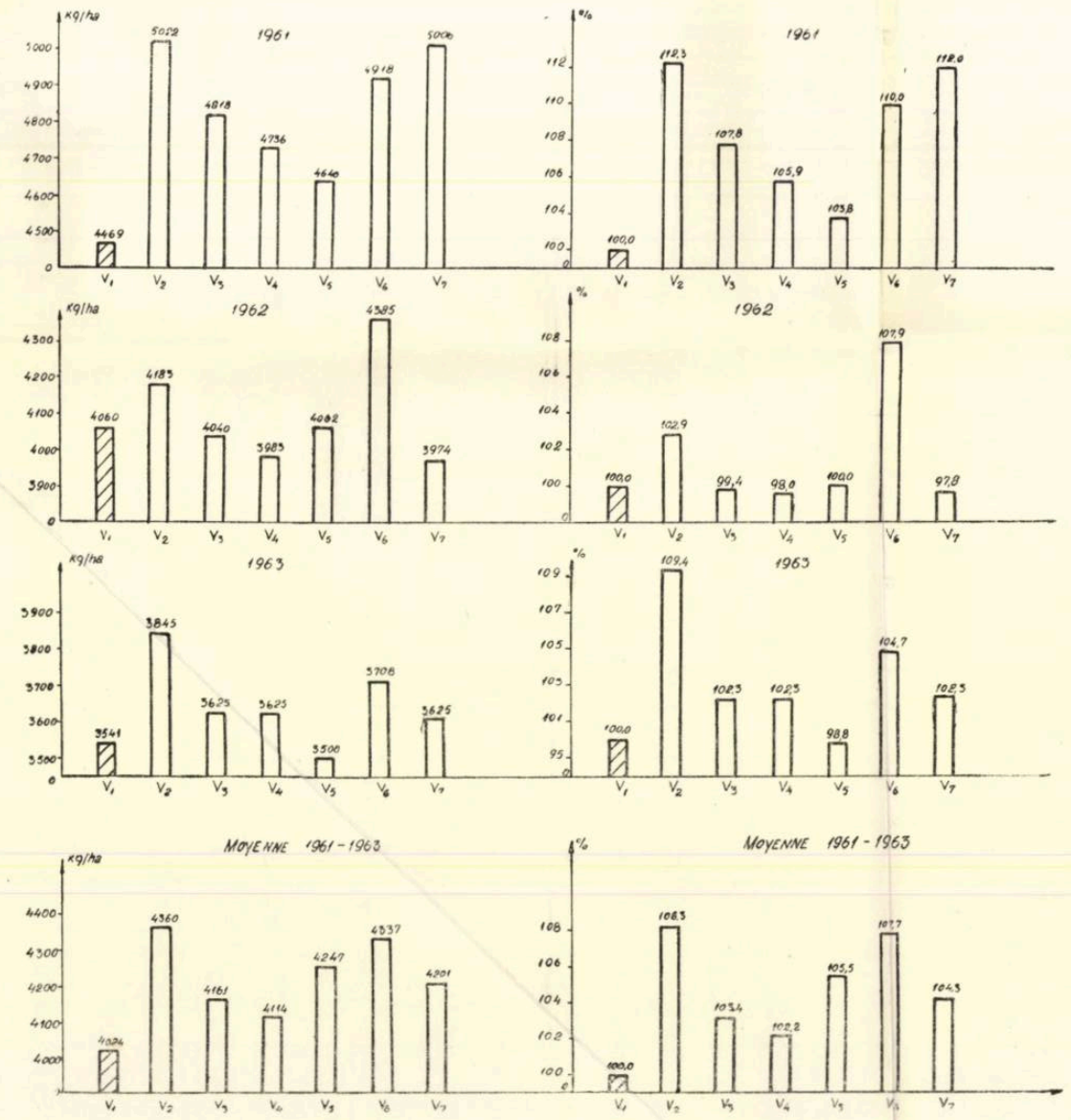


Fig. 4. — La production des grains de maïs (1961, 1962, 1963, la moyenne 1961—1963).

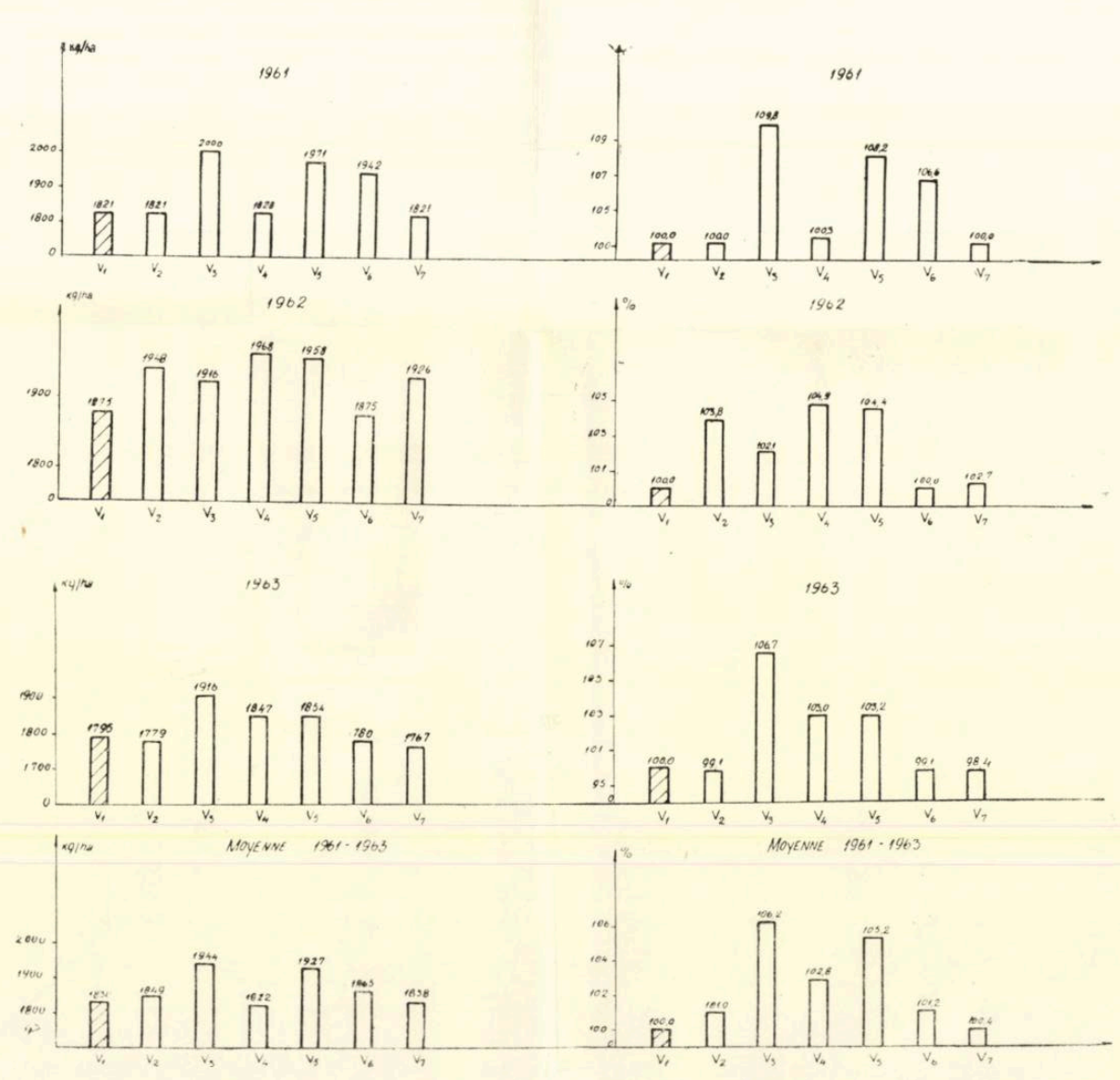


Fig. 5. — La production des grains de tournesol (1961, 1962, 1963, la moyenne 1961—1963).

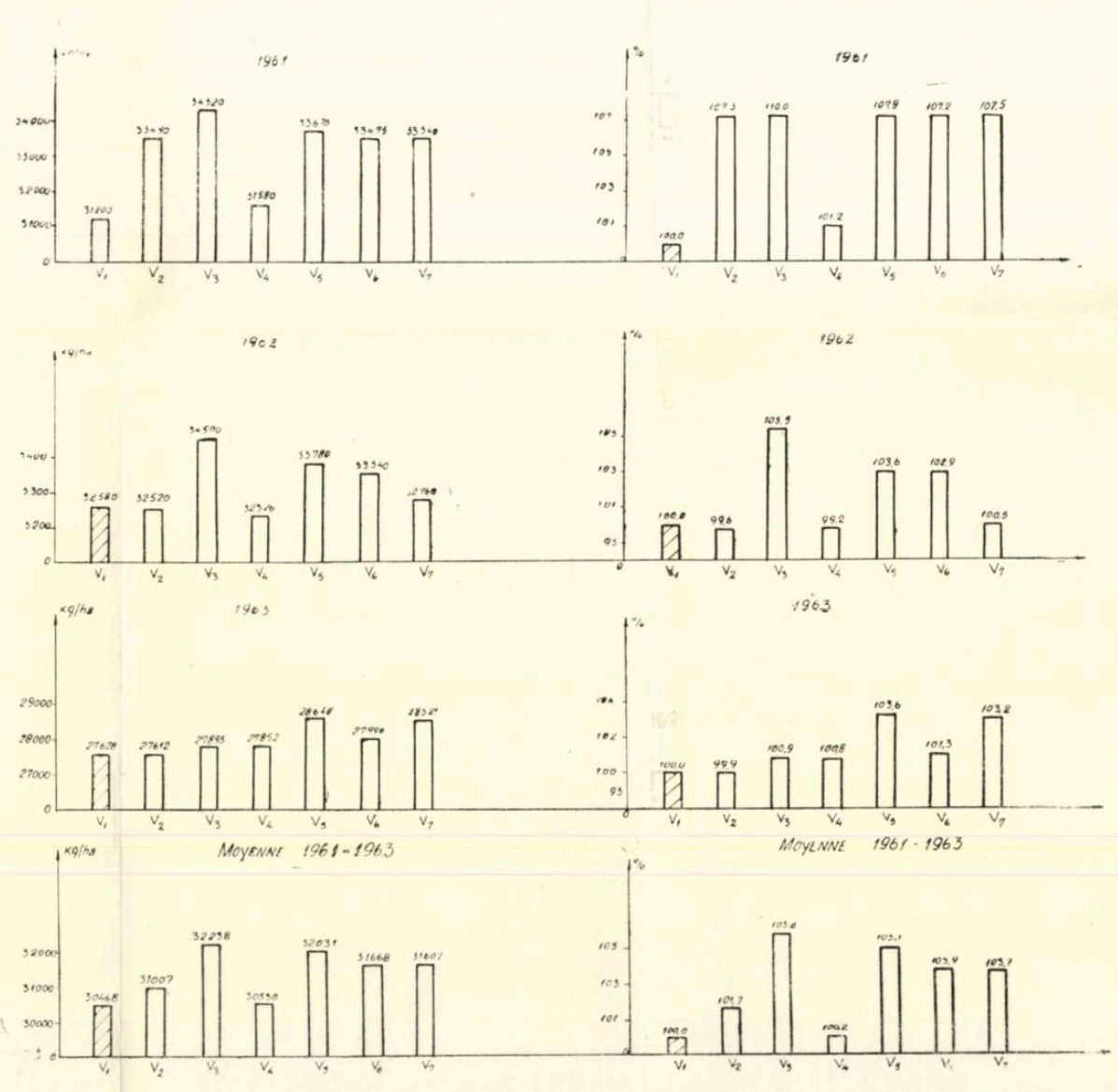


Fig. 6. — La production des racines de la betterave à sucre (1961, 1962, 1963, la moyenne 1961—1963).

même temps une amélioration de la teneur des racines en matières sêches et en sucre. La meilleure dose a été de 100 kg/ha pour la scorie de Copşa Mică et de 50 kg/ha pour celle de Tîrnăveni. Gh. Miron et P. Avram [17], en utilisant comme engrais un résidu avec du manganèse de Iacobeni-Suceava, et D. Davidescu et P. Avram [1] qui ont expérimenté avec une scorie férromanganique, ont obtenu des augmentations de récolte semblables. A. Rosell et A. Ulrich [18] montrent que le Zn a un rôle très important dans le processus d'accumulation du sucre dans les racines de betterave. Les microéléments se trouvant dans les résidus utilisés comme engrais, interviennent dans le métabolisme de la plante et s'accumulent, dans une certaine quantité, dans les racines.

4. Conclusions

Les scories métallurgiques de Copşa Mică et de Tîrnăveni ont une teneur élevée en Fe, Si, Al etc., et aussi en microéléments comme par exemple Zn, Cu, Mn, Co etc. Appliquées commes engrais elles peuvent enrichir le sol en microéléments.

À l'aide de ces résidus, appliqués sur le tchernozium dégradé, on peut obtenir des augmentations modérés de récolte qui atteignent à peine 5,7% pour le blé d'automne, 7,7% pour le mais, 6,2% pour le tournesol et 5,8% pour la betterave. Généralement, les qualités de la récolte sont favorablement influencées par ces résidus et la teneur de la récolte en microéléments s'accroît.

Comme doses avantageuses de résidus, se sont affirmées celles de 500...100 kg/ha.

Compte tenu des résultats des expériences effectuées dans le cadre de ce travail quant au comportement dans le sol des résidus métallurgiques, nous considérons qu'ils pourraient être tout de même utilisés comme engrais sur les terrains ayant une teneur moins élevée de microéléments, parce qu'il déterminent une augmentation de production.

Reçue le 20 III 1969

Institut Agronomique „Ion Ionescu de la Brad", Jassy,
et
Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Chimie technologique

BIBLIOGRAPHIE

1. Davidescu D., Avram P., *Efectul unor reziduuri industriale aplicate ca îngrăşăminte*. Lucr. şt. Inst. agron. „N. Bălcescu", seria A, 1962, VI.
2. Jost W., *Trace Nutrient Fertilizer from Manufacturing Residues of the Metal Working Industry*. German Patent nr. 10007789, 9 May, 1957.
3. Лежнев П., Финковский И., *О применении микроэлементов в сельском хозяйстве СССР*. Земледение, 1954, *8*.
4. Караваев В. И., *О влиянии промышленных отходов, содержащих медь и марганец, на урожай сельскохозяйственных культур. Микроэлементы в сельском хозяйстве и медицине*. Киев, 1963.
5. Власиук П. А., *Новые микроудобрения*. Агробиология, 1960, *2*.

6. Nicolić S., *Contribution à l'étude des microéléments* (Mn, Cu, Zn, Mo) *dans la nutrition des plantes.* V-e Congrès Mondial des fertilisants, Zurich, 4—6 mai, 1964.
7. Joe J. H,. Vill F., *A New Colorimetric Reagent for Molybdenum.* Anal. chim. Acta., 1952, *6.*
8. Sandell E. B., *Colorimetric Determination of Traces of Metals.* Sec. Ed., Intersci. Publ., N.Y, 1950.
9. Jouis E., Lecacheux M., *Recherches sur des méthodes de dosage pratique des oligoéléments cuivre, zinc, manganèse, dans les plantes et dans les sols en vue d'applications de routine dans les laboratoires agricoles.* Ann. Agron., 1959, *3.*
10. Виноградова Н. И., *Молибден и его биологическая рам.* М., 1952.
11. Веригина К. В., *Метод определения меди в форме диэтил дит окарбамата. Метод определения микроэлементов в почвах и растениях.* Изд. АН СССР, М., 1968.
12. — *Метод определения цинка и кобальта. Метод определения микроэлементов в растениях.* Изд. АН СССР, М., 1958.
13. Chiriță C. D., *Pedologie generală.* Ed. Agro-Silvică de stat, Buc., 1955.
14. Davidescu D., *Sur les cartes agrochimiques des sols de la R. P. Roumaine.* Agrochimia, dec. 1956, **I.**
15. Рудин В. Д., Кукуруза, 1959, *10.*
16. Stiles W., *Trace Elements in Plants.* Cambridge University Press, 1961.
17. Miron Gh., Avram P., *Eficiența ca îngrășământ a reziduului de mangan de la Iacobeni-Suceava.* Comun. Acad. R.P.R., 1961, **XI,** *4.*
18. Rosell A. R., Ulrich A., *Critical Zinc Concentrations and Leaf Minerals of Sugar Beet Plants.* Soil Science, 1964, **97,** *3.*

COMPORTAREA CA ÎNGRĂȘĂMÎNT A UNOR REZIDUURI DIN INDUSTRIA METALURGICĂ

(Rezumat)

Au fost analizate zgura de cuptor (clincher) de la uzina chimico-metalurgică Copșa-Mică și zgura metalurgică de la combinatul chimic din Tîrnăveni. Rezultatele analizelor dovedesc că aceste reziduuri conțin mult fier, siliciu și aluminiu, iar dintre microelemente zinc, cupru, mangan, cobalt și molibden.

Ținînd seama de compoziția chimică a reziduurilor ele au fost aplicate ca îngrășământ, pe cernoziom degradat, la culturile de grîu, porumb, floarea soarelui și sfeclă de zahăr. După trei ani de experiențe s-a constatat că aceste reziduuri dau sporuri mici de recoltă care ajung la 5,7% la grîul de toamnă, 7,7% la porumb, 6,2% la floarea-soarelui și 5,8% la sfecla de zahăr. Însușirile calitative ale recoltei sînt influențate favorabil, iar conținutul în microelemente al recoltei sporește.

Dozele potrivite de reziduuri s-au dovedit a fi cele de 50...100 kg/ha.

Deși aceste reziduuri dau sporuri mici de recoltă, ele se pot întrebuința ca îngrășăminte cu microelemente.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Conținutul în microelemente în zgura de Copșa Mică și în zgura de Tîrnăveni.

Fig. 2. — Conținutul în microelemente (total și mobil) al zgurei de Copșa Mică și al zgurei de Tîrnăveni.

Fig. 3. — Producția de boabe de grîu (1962—1963, media anilor 1961—1963).

Fig. 4. — Producția de grăunțe de porumb (1961, 1962, 1963, media anilor 1961—1963).

Fig. 5. — Producția semințelor de floarea soarelui (1961, 1962, 1963, media anilor 1961—1963).

Fig. 6. — Producția rădăcinilor de sfeclă de zahăr (1961, 1962, 1963, media anilor 1961—1963).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia II : CHIMIE INDUSTRIALĂ

УДК 631.893.134; 633

ВЛИЯНИЕ УДОБРЕНИЙ НА УРОЖАЙ И РАСХОД ВОДЫ НА НЕКОТОРЫЕ КОРМОВЫЕ РАСТЕНИЯ

К. ПОПЕСКУ, И. ПОПА и И. ВОЙКУ

1. *Введение*

Интенсивное развитие животноводства требует обеспечение кормом все большее количество животных и в разнообразном сортименте. Вместе с увеличением орошаемой площади можно получить у кормовых растений большие урожаи хорошего качества. Для этого нужно знать подходящую дозу удобрений для почвенных условий и климат в котором работаем, расход воды на различные кормовые культуры и т. д. Проведенные до сих пор опыты в стране и за рубежом, позволяют выявление этих вопросов для различных природных зон. Так в степи Бэрэгана И. Мога и сотрудники [7] установили, что азотные удобрения повышают урожай суданской травы и кукурузы на зеленый корм, когда влажность почвы больше чем 60% из способности содержания воды почвой.

Г. Авриджеану и М. Василиу [1] показывают, что в пойме Дуная можно получить у кукурузы, выращенной после лущения стерни около 35 т/га зеленой массы, поливая только два раза, во-время посева и роста. На песках Олтении Д. Хэлэлэу [5] получает большие прибавки урожая на сорг и суданскую траву, используя минеральные удобрения.

В Клуже Ф. Биану [2] получает большие урожаи на суданскую траву, проводя 1...2 полива с орошаемой нормой 1 000...1 200 м³/га.

Учитывая эти изменения, эффективность удобрений и расход воды для различных кормовых культур поставили цель исследовать лучшее влияние удобрений и коэффициент использования кормовыми культурами в почвенно-климатических условиях в низменности Жижиа—Бахлуй.

2. *Почвенно-климатические условия*

Опыты были проведены в период с 1966—1968 гг. в кооперативном хозяйстве Балцаци, Ясского уезда на деградированном черноземе, на склоне с 8...9% в направлении юга-запада, с pH = 6,7, содержанием гумуса 3,2%, фосфора 0,15%, калия 1,9%, способностью сохра-

нения воды почвой на глубине 0...50 см, с 25,68% и коэффициентом увядания 12,4%.

В области выпадает в среднем (50 лет), 474,4 мм осадков, а в годы когда были проведены опыты было зарегистрировано на метеорологической станции Поду-Илоайе 510,6 мм в 1966 г., 388,3 мм в 1967 г. и 489 мм в первые десять месяцев 1968 г.

В 1966 и 1968 гг. общее количество выпадших осадков было больше нормальных, но тогда были зарегистрированы большие периоды

Таблица 1

Выращенные культуры и опыты проведенные с ними

№ варианта	Выращенная культура	Удобрения		Орошение
		N кг/га	P_2O_5 кг/га	
1	Горох	—	—	без орошения
2	Горох	40	60	без орошения
3	Горох	—	—	с орошением
4	Горох	40	60	с орошением
1	Вика	—	—	без орошения
2	Вика	40	60	без орошения
3	Вика	—	—	с орошением
4	Вика	40	60	с орошением
1	Боб	—	—	без орошения
2	Боб	40	60	без орошения
3	Боб	—	—	с орошением
4	Боб	40	60	с орошением
1	Кукуруза	—	—	без орошения
1	Кукуруза	90	60	без орошения
3	Кукуруза	—	—	с орошением
4	Кукуруза	90	60	с орошением
1	Сорг	—	—	без орошения
2	Сорг	90	60	без орошения
3	Сорг	—	—	с орошением
4	Сорг	90	60	с орошением
1	Суданская трава	—	—	без орошения
2	Суданская трава	90	60	без орошения
3	Суданская трава	—	—	с орошением
4	Суданская трава	90	60	с орошением

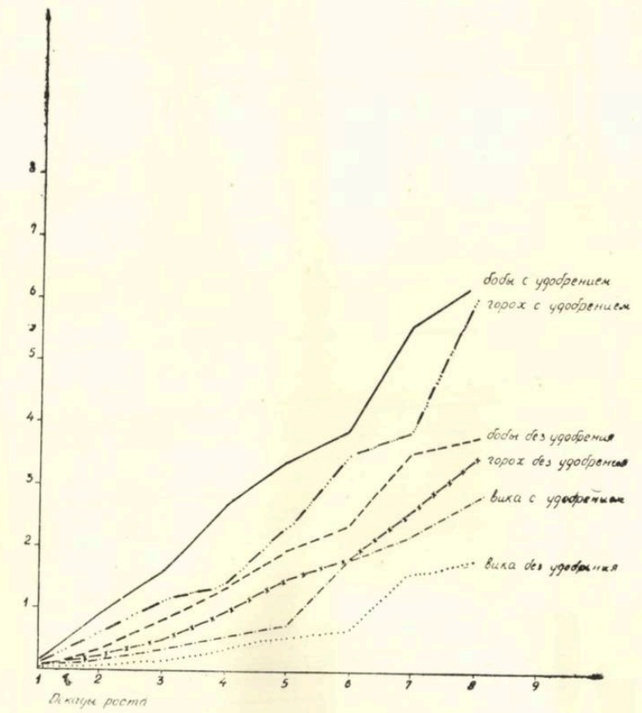


Рис. 1. — Ритм накопления сухого вещества у некоторых бобовых, посеянных для фуража.

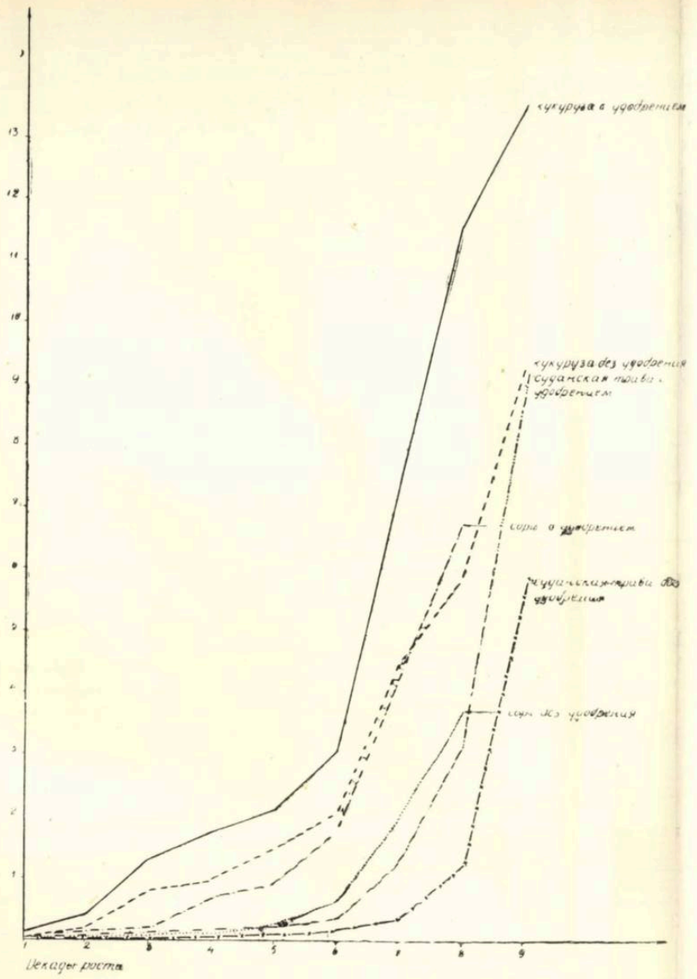


Рис. 2. — Ритм накопления сухого вещества у некоторых колосных, посеянных для фуража.

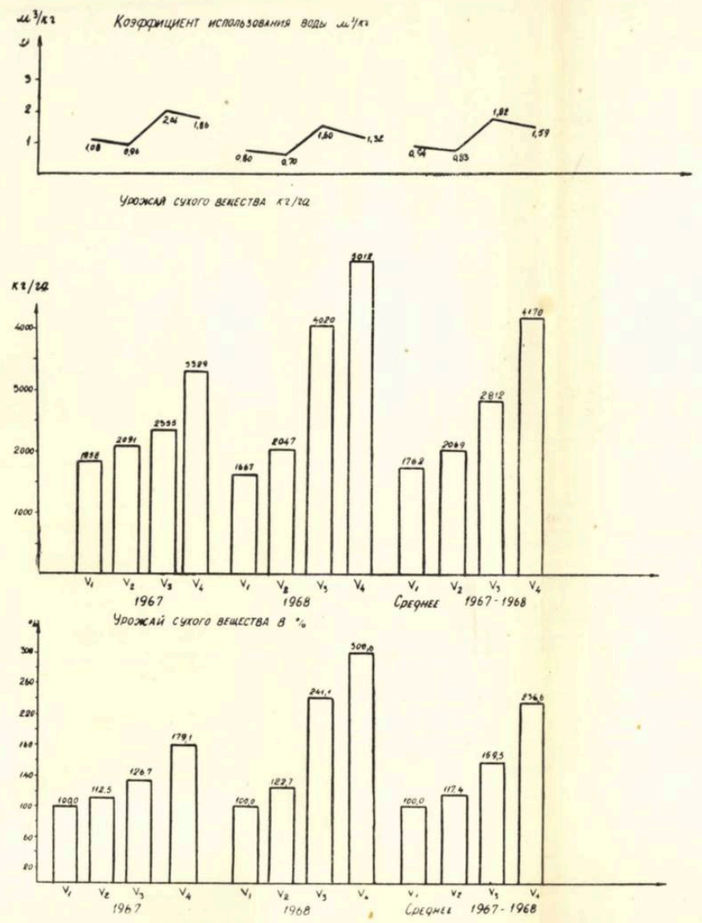


Рис. 3. — Урожай сухого вещества и коэффициент использования воды горохом.

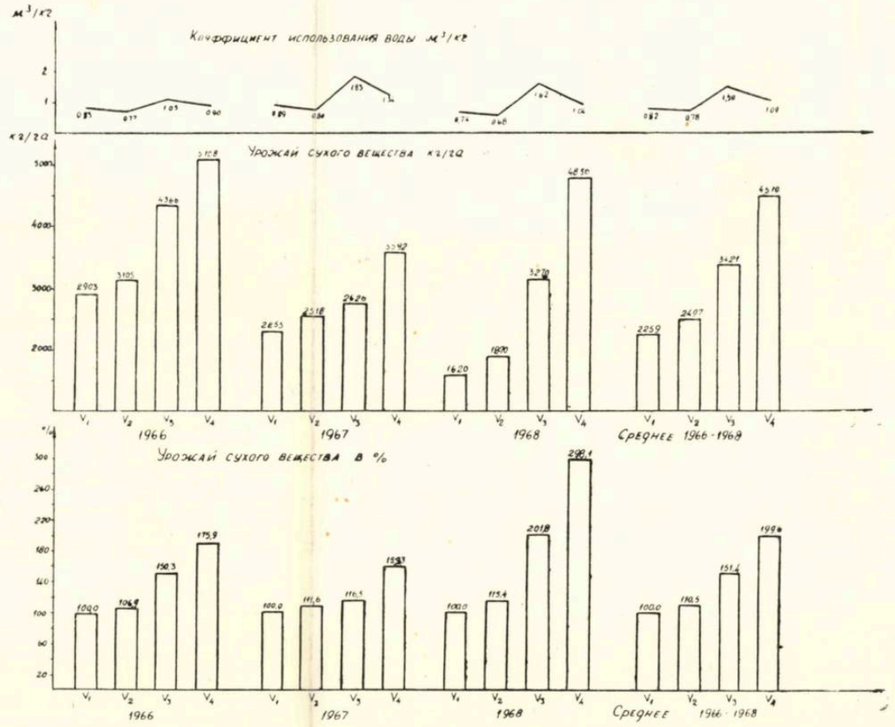


Рис. 4. — Урожай сухого вещества и коэффициент использования воды викой.

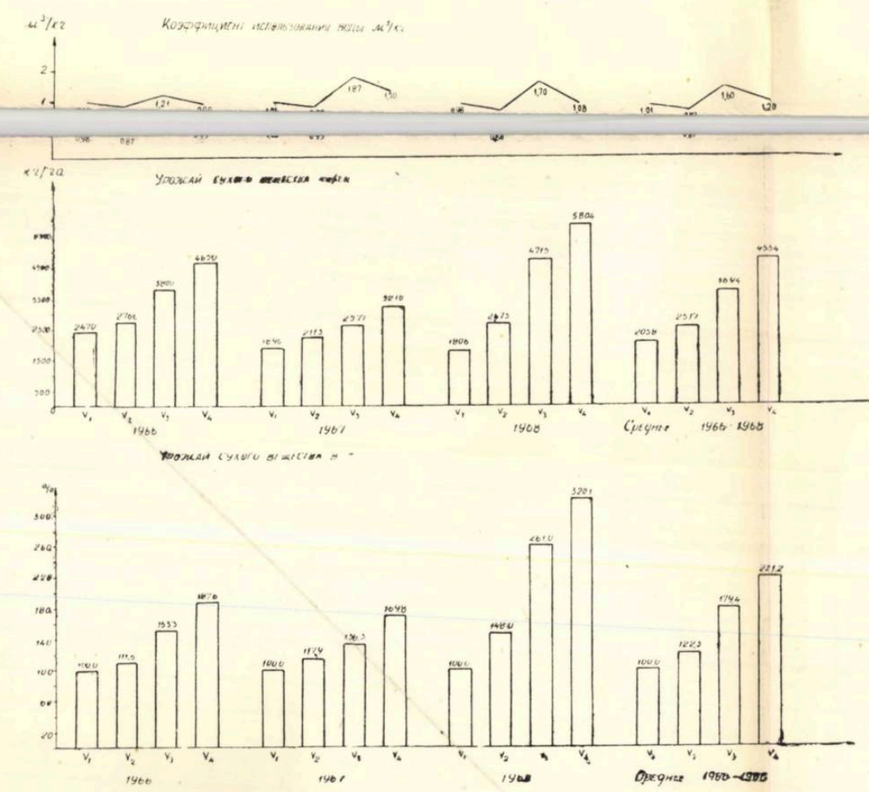


Рис. 5. — Урожай сухого вещества и коэффициент использования воды бобами.

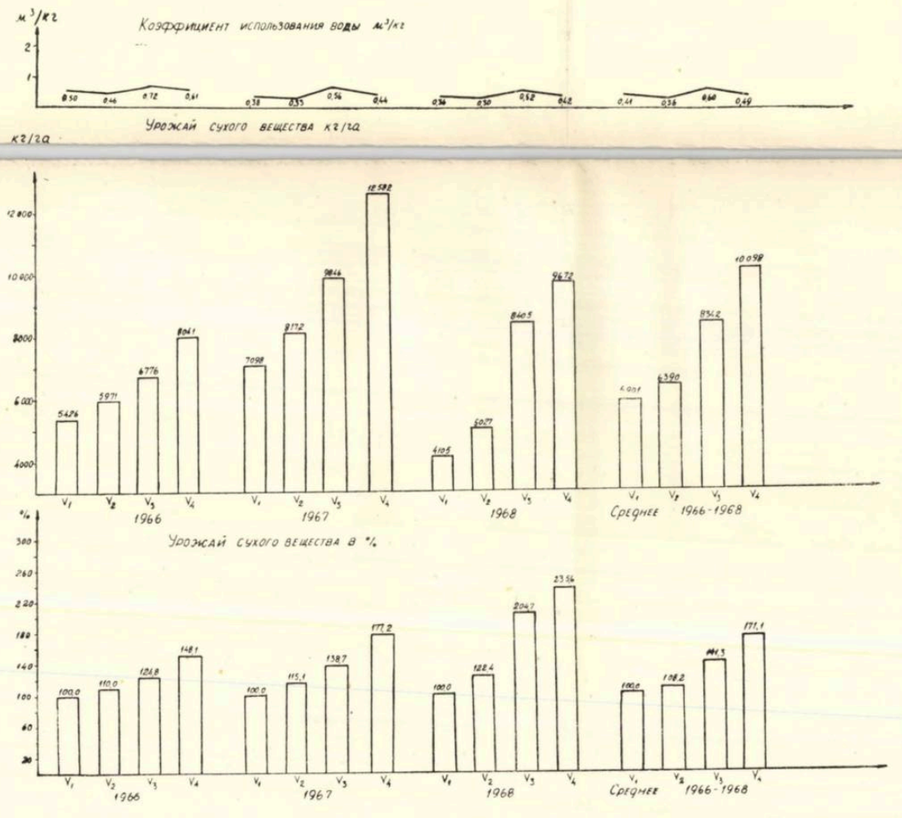


Рис. 6. — Урожай вещества и коэффициент использования воды кукурузой.

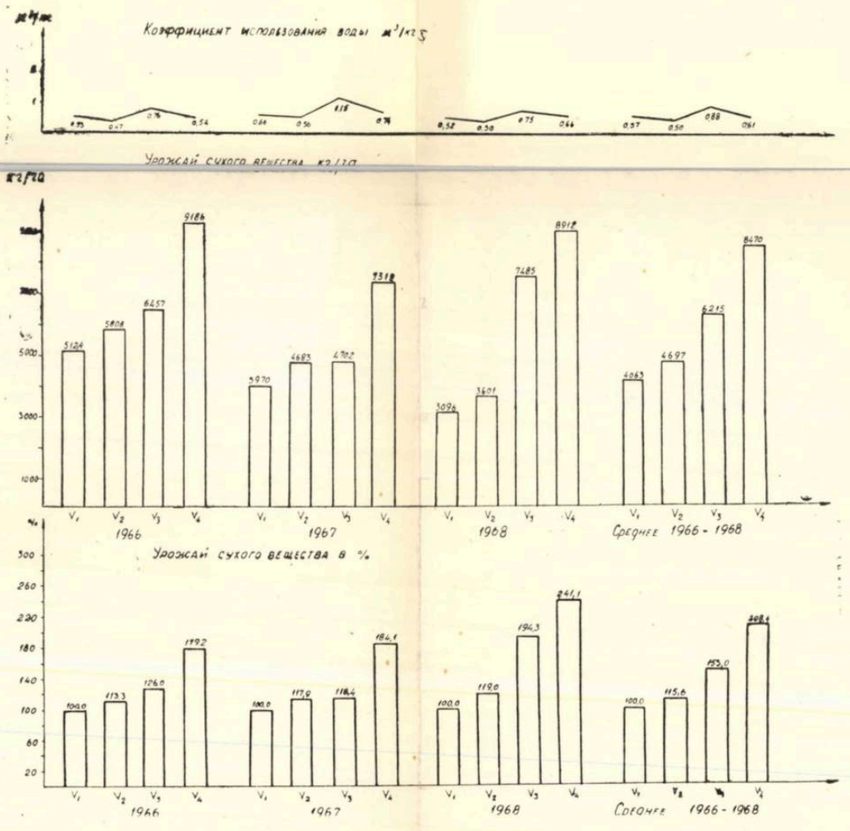


Рис. 7. — Урожай сухого вещества и коэффициент использования воды сорго.

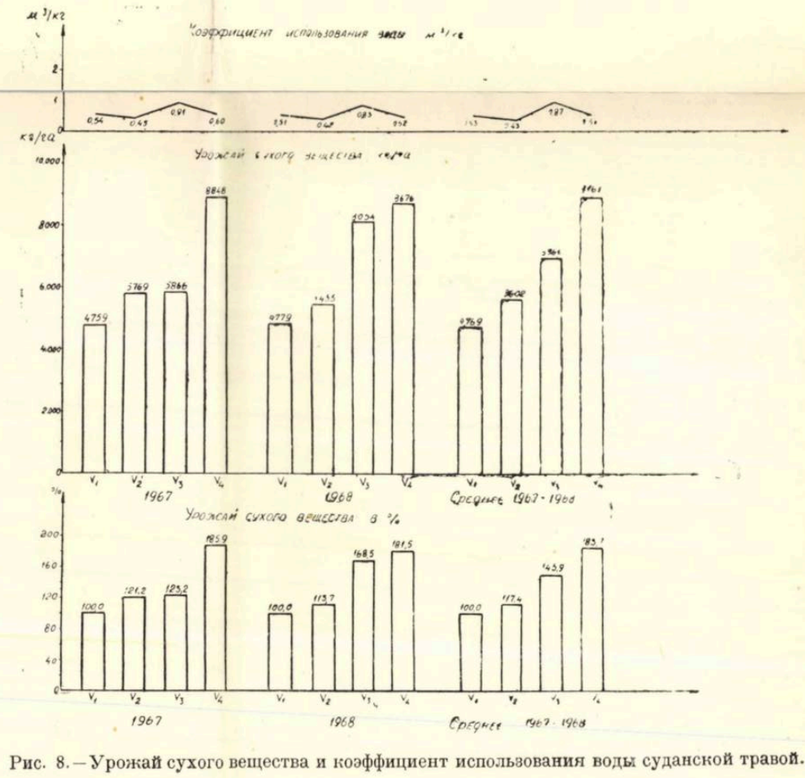


Рис. 8. — Урожай сухого вещества и коэффициент использования воды суданской травой.

засухи, которые неблагоприятно повлияли на развитие культурных растений. Так, весной 1968 г. недостаток достиг 58,9 мм и поэтому орошение повысило значительно урожай.

Нормальная температура есть 9,6° Ц в период 1966—1968 гг. зарегистрированы значения близкие к нормальным.

3. *Метод работы*

Подготовка земли и внесение фосфорных удобрений делали осенью, а весной обрабатывали почву боронами и культиваторами, внося азотные удобрения в дозах записанных в таблице 1. В подходящее время высеяли следующие виды и сорта: пшеница HD—208, сорг SUA — II-2, суданская трава III-37, боб — коричневый, горох — Виктория Штрубе и вика — местный сорт. Во-время прорастания были проведены обычные работы по уходу за культурами и в записанных вариантах в таблице 1 проследили влажность почвы поддерживая орошением минимальный уровень на 60% из способности содержания воды почвой. Так в 1966 г. было введено 2000 м³ воды на гектар пятью поливами, на следующий год 2350 м³ воды на гектар шестью поливами, а в 1968 г. было израсходовано 2700 м³ на гектар семью поливами. Для полива использовали поливной агрегат АРТ-4, который брал воду из водохранилища и вводил маленькими поливными нормами, чтобы избежать образование потоков.

Для того чтобы знать ход накопления сухого вещества на орошонных культурах собирали пробы через десять дней сушили их, определяя вес надземной части растений. Уборку всех растений проводили в период цветения или в начале образования семян, когда они содержат самое большое количество питательных веществ и путем взвешивания определяли вес зеленых и сухих растений.

Для расчета коэффициента использования воды был учтен запас воды в почве при посеве и уборке до 1 м глубины, количество осадков из вегетационного периода, вода использованная при орошении, а также количество сухого вещества полученного при уборке растений.

4. *Полученные результаты и их обработка*

Определяемый ритм накопления сухого вещества, представлен на рис. 1, 2, который показывает, что в первые 4...5 декады вегетационного периода рост веса надземных частей колосных проходит медленнее чем у бобовых. Начиная с 5...6 декады рост зеленой массы колосных становится более интенсивным чем у бобовых.

С этой точки зрения нужно отметить кукурузу. Удобрения повлияли на все растения, ускоряя ритм накопления сухого вещества. После уборки, сушки и взвешивания всех растений получили данные, которые представлены на рис. 3...8.

Исследуя эти данные установлено, что вообщем урожаи полученные на не орошонных и не удобренных участках (V_1) похожи на те которые получил Д. Рошка и сотрудники [9] и М. Иониц э [6]. Кормовые растения хорошо реагируют на удобрения и орошение.

Удобрения повысили урожай на не орошонных участках больше всего у колосных, посеянных для корма, отмечая средний прирост, который достиг 833 кг/га сухого вещества или 17,4% у суданской травы. Прирост урожая, отмеченный у суданской травы сходен с теми результатами, которые получил К. Попеску и В. Бутнару на экспериментальной станции Мирослава—Яссы [8]. Из бобовых-боб лучше использует удобрения, получая в среднем прибавку в урожае 459 кг/га сухого вещества или 22,3%.

Исследуя эффект орошения установлено, что сохранение влажности почвы больше 60% из способности сохранения воды почвой определило прирост урожая больше всего у колосных фуражных культур. Прибавка в весе сухого вещества достигает 2441 кг/га у кукурузы. Боб также реагирует хорошо на орошение, получая в среднем прибавку урожая 1636 кг/га сухого вещества или 79,4% по сравнению с культурой без орошения. Обьединяя удобрение с орошением получается самый большой урожай у всех культур.

Так, у сорга прибавка в урожае достигает в среднем 4407 кг/га сухого вещества или 108,4%, у кукурузы 4197 кг/га или 71,1% и т. д. В опытах, организованных Н. Замфиреску и сотрудниками [11] сорг также дал самые большие урожаи. Кукуруза примерно дает такую же прибавку в урожае как и сорг, но общая продукция получается больше.

М. Койфан [4] внося удобрения на участки с орошением получает примерно такой же прирост в урожае у кукурузы на силос, выращенной в Коцофени в Олтении. Из бобовых, которые были исследованы — боб лучше всего использует удобрения в условиях орошения, давая средний прирост в урожае 2496 кг/га сухого вещества или 121,2%. Горох в этом случае занимает второе место, а вика третье место.

Приходим к выводу, что в условиях в которых исследовали, сорг и кукурузу дают самые высокие урожаи на участках с орошением и удобрением, а из бобовых боб и горох.

Исследуя коэффициент использования воды у кормовых растений установили, что на участках без орошения и без удобрения кукуруза и суданская трава экономично расходуют воду, при этом коэффициент использования есть 0,41 и соответственно 0,53 м³/кг.

У бобовых, расход воды гораздо выше он достигает 1,01 м³/кг на боб. Путем внесения удобрений коэффициент использования воды снижается как колосных так и бобовых. Так у суданской травы он снижается от 0,53 до 0,43 м³/кг, у боба с 1,01 до 0,87 м³/кг и т. д.

Самый маленький расход воды наблюдается у кукурузы и у суданской травы отмечая значения 0,36 и соответственно 0,43 м³/кг. Кукуруза, посеянная для зерна В. Штефан и Н. Хурдук [10] установили, что путем внесения удобрений, уменьшается расход воды.

Приходим к выводу, что при наличии удобрений кормовые растения экономичнее расходуют воду из почвы.

Вводя орошение на участках без удобрения расход воды намного увеличивается. Так у гороха он увеличивается с 0,94 до 1,82 м³/кг, у суданской травы с 0,53 до 1,87 м³/кг.

Эти данные показывают довольно ясно слабый эффект орошения на участках с низким плодородием. Так как при орошении условия создаются менее благоприятные для развития симбиотических бактерий бобовые расходуют на участках с орошеним и без удобрения в два, три раза больше воды чем колосовые, для образования одного кг сухого вещества. У кукурузы коэффициент использования воды, вычисленный нами немного меньше чем тот который вычислил М. Ботцан [3] в Дунайской степи.

Совмещая удобрения с орошением расход воды уменьшится у всех культур по сравнению с растениями с орошением и без удобрения. Значительные результаты есть у вики, где коэффициент использования воды уменьшается с 1,50 до 1,09 м³/кг и у суданской травы, где он уменьшается с 0,87 до 0,56 м³/кг.

Самое маленькое количество воды в этом случае расходует кукуруза и вика.

5. *Выводы*

1. На участках без орошения, минеральные удобрения приносят у кукурузы, сорга и суданской травы, средний прирост урожая от 489 до 833 кг/га сухого вещества. У гороха, бобов и вики эти же удобрения приносят прирост от 238 до 459 кг/га.

2. На орошенных участках растения усваивают удобрения лучше, получая средний прирост урожая 4 407 кг/га сухого вещества у сорга, 4 197 кг/га у кукурузы, 2 496 кг/га у бобов и т. д.

3. Самый низкий расход воды отмечается у растений, которые получили удобрения (0,35...0,49 м³/кг у кукурузы), а самый большой отмечается у растений, которые были орошены, но не получили удобрение (1,59 м³/кг у бобов, 1,82 м³/кг у гороха и т. д.).

4. Ритм роста колосовых в первые 4...5 декады прорастания медленный, но в следующие декады становится очень интенсивным, превосходя бобовые. Удобрения хорошо повлияли на образовательный процесс сухого вещества у всех растений.

5. Среди колосовых хорошо осваивают удобрения сорг и кукуруза, а самый маленький расход воды отмечается у кукурузы и суданской травы.

6. Боб дает самый большой прирост урожая на участках с удобрением, а расход воды есть гораздо экономичнее у вики и бобов.

Поступила 30 XI 1968 г.

Яский политехнический институт,
Кафедра почвоведения
и борьбы с эрозией почвы

ЛИТЕРАТУРА

1. Avrigeanu Gh., Vasiliu M., *Contribuţii privind stabilirea regimului de irigaţie la principalele culturi agricole în zona Brăilei.* Probl. agr., 1968, *2.*
2. Bianu F., *Rezultate ale experienţelor cu culturi duble furajere în condiţii de irigare.* Probl. agr., 1968, *7,* p. 13.
3. Botzan M., *Culturi irigate.* Ed. Agro-silvică, Buc., 1966, ediţia 3-a.
4. Coifan M., *Rezultate experimentale privind cultivarea plantelor furajere în condiţii de irigare pe sol aluvial de la Coţofeni.* Analele ICCPT Fundulea, 1965, **XXXIII**, Seria B.
5. Hălălău D., *Rezultate experimentale privind cultura plantelor furajere pe nisipurile din Oltenia.* Probl. agr., 1967, *11,* p. 34.
6. Ioniţă M., *Rezultate experimentale comparative la culturi de nutreţ.* Lucr. şt. Inst. agron. Timişoara, 1963, **VI**, p. 183.
7. Moga I. и сотр., *Influenţa îngrăşămintelor asupra producţiei şi calităţii principalelor plante furajere în condiţiile Cimpiei Bărăganului.* Probl. agr., 1967, *11.*
8. Popescu Ch., Butnaru V., *Efectul prelungit al îngrăşămintelor chimice aplicate la iarba de Sudan.* Lucr. şt. Inst. agr. „Ion Ionescu de la Brad", Iaşi, 1962.
9. Roşca D., Panait V., *Amestecuri de plante anuale cultivate pentru nutreţ în Cimpia Moldovei.* Lucr. şt. Inst. agr. „Ion Ionescu de la Brad", Iaşi, 1960.
10. Ştefan V., Hurduc N., *Cercetări privind influenţa îngrăşămintelor asupra consumului de apă la plantele de porumb în timpul vegetaţiei.* Probl. agr., 1967, *4.*
11. Zamfirescu N. и сотр., *Contribuţii cu privire la cultura plantelor de nutreţ în mirişte pe solul brun roşcat de pădure de la gospodăria didactică experimentală Băneasa.* Lucr. şt. Inst. agron. „N. Bălcescu", Bucureşti, 1964, seria A, **VII**.

INFLUENŢA ÎNGRĂŞĂMINTELOR ASUPRA PRODUCŢIEI ŞI CONSUMULUI DE APĂ LA CÎTEVA PLANTE FURAJERE

(Rezumat)

Lucrarea cuprinde rezultatele unor experienţe organizate în perioada 1966—1968 pe cernoziom degradat în depresiunea Jijia—Bahlui în condiţii de irigare, folosind ca plante furajere porumbul, sorgul, iarba de Sudan, bobul, măzărichea şi mazărea. La parcelele îngrăşate s-au aplicat 40...90 kg/ha N şi 60 kg/ha P_2O_5.

Pe teren neirigat îngrăşămintele au sporit recolta la gramineele furajere cu 489...833 kg/ha substanţă uscată, iar la leguminoase sporul este cuprins între 238 şi 459 kg/ha substanţă uscată.

Pe teren irigat îngrăşămintele dau sporuri mai mari de recoltă ajungînd la 4407 kg/ha substanţă uscată la sorg, 4197 kg/ha la porumb, 2496 kg/ha la bob etc.

Îngrăşămintele determină plantele să consume mai economic apa. Cel mai redus coeficient de valorificare a apei se remarcă la plantele neirigate care au primit îngrăşăminte (0,36 m^3/kg substanţă uscată la porumb). Cel mai ridicat consum de apă se observă la plantele irigate care n-au primit îngrăşăminte (1,82 m^3/kg la mazăre).

În general la graminee se remarcă un consum mai redus de apă decît la leguminoase.

Începînd din decada 5...6 ritmul de creştere al plantelor este mai rapid la graminee decît la leguminoase, fiind influenţat favorabil de către îngrăşăminte.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Ritmul de acumulare a substanţei uscate la cîteva leguminoase cultivate pentru furaj.

Fig. 2. — Ritmul de acumulare a substanţei uscate la cîteva graminee cultivate pentru furaj.

Fig. 3. — Producţia de substanţă uscată şi coeficientul de valorificare a apei la mazăre.

Fig. 4. — Producţia de substanţă uscată şi coeficientul de valorificare a apei la măzăriche.

Fig. 5. — Producţia de substanţă uscată şi coeficientul de valorificare a apei la bob.

Fig. 6. — Producţia de substanţă uscată şi coeficientul de valorificare a apei la porumb.

Fig. 7. — Producţia de substanţă uscată şi coeficientul de valorificare a apei la sorg.

Fig. 8. — Producţia de substanţă uscată şi coeficientul de valorificare a apei la iarba de Sudan.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECȚIA III

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV XIX), вып. 1- 2, 1969

СЕКЦИЯ III

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECTION III

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. D. 537.226.1/2; 537.226.3; 678.4

PROPRIÉTÉS DIÉLECTRIQUES DE QUELQUES CAOUTCHOUCS POLYURÉTHANIQUES ET LEURS VARIATION EN FONCTION DE LA TEMPÉRATURE, DE LA FRÉQUENCE ET DE LA DOSE D'IRRADIATION PAR RAYONS X

PAR

EMIL LUCA, OVIDIU SCUTARU,
ANASTASIA VASILIU et ILIE MATEI

Comunication présentée lors de la session scientifique de l'Institut polytechnique de Jassy, le 28—30 septembre 1967

1. Considérations générales

La production des caoutchoucs polyuréthaniques basée sur l'utilisation des diisocyanés et polyesters [1], qui ont des propriétés mécaniques remarquables, a aussi posé le problème de leurs propriétés diélectriques dans différentes conditions de travail.

Tout comme dans quelques travaux antérieurs (nous avons effectué des recherches similaires concernant les produits techniques de polychlorure de vinyle [2], les produits phénoliques par coulée [3] et aussi les dérivés sulfonamidés des acides phénoxyacétiques [4]), nous nous sommes proposés d'étudier aussi, dans le cas des caoutchoucs polyuréthaniques, la variation de la permittivité ε' et des pertes diélectriques, exprimées par $\operatorname{tg}\delta$, lorsque la température, la fréquence et la dose d'irradiation par rayons X varient.

Les mesures expérimentelles en ce qui concerne la valeur de ε' et de $\operatorname{tg}\delta$ ont été éffectuées dans la gamme de fréquence 400...10 000 Hz, à l'aide d'un pont Tesla, ou par un montage en pont Wien, réalisé par nous [5], et aussi dans la gamme de températures — 70°... + 80°C.

Comme source de rayons X on a utilisé un tube Röntgen 4ВДМ-100 alimenté par un transformateur de tension en échelons.

2. Résultats expérimentaux

On a étudié quatre espèces de caoutchoucs polyuréthaniques, notées dans les diagrammes relevés par voie expérimentelle par *a*, *b*, *c* et *d* qui diffèrent par le rapport de la quantité des diisocyanés et des polyesters qui intervient dans leur composition, à savoir la quantité de polyesters croît de l'espèce *a* à l'espèce *c*, la quatrième, *d*, ayant aussi dans sa composition et du stéarate de zinc.

a) *Variation de* ε' *et de* tg δ *en fonction de la température*

Dans le cas de la variation de la permittivité et des pertes diélectriques en fonction de la température on a effectué les expériences entre la température de $-70°C$ (obtenue à l'aide d'un mélange réfrigérant d'acétone et anhydride carbonique) et $+80°C$.

Les résultats expérimentaux (fig. 1) mettent en évidence que :

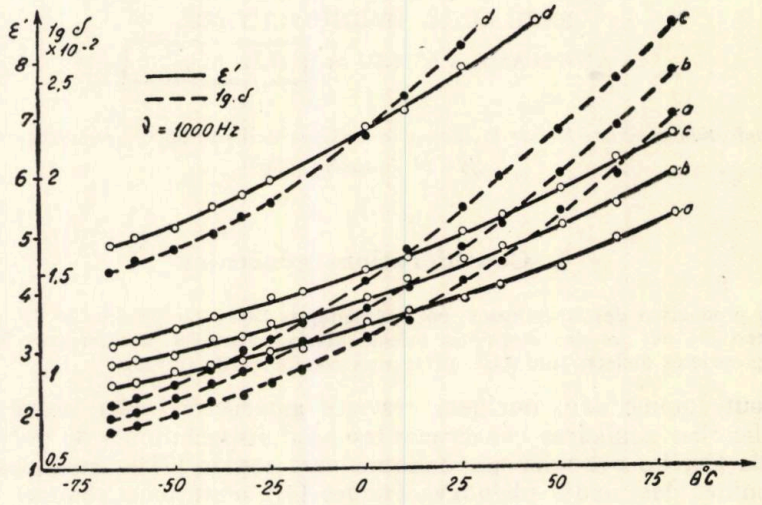


Fig. 1

1° Les trois espèces de caoutchoucs polyuréthaniques étudiés, *a*, *b* et *c*, qui sont constitués seulement par des diisocyanés et des polyesters, présentent des propriétés diélectriques acceptables, tandis que la quatrième espèce (*d*), qui contient du stéarate de zinc, ne peut être prise en considération à ce point de vue.

On constate que les propriétés de bons isolants exprimées par une permittivité petite et par des pertes diélectriques réduites sont d'autant plus accentuées que le pourcentage de polyesters est plus grand.

2° Les propriétes diélectriques des caoutchoucs étudiés comme isolants sont plus accentuées à des températures réduites. On remarque qu'à la température de —70°C la valeur de la permittivité est à peu près 2...3, ce qui correspond à celle du caoutchouc naturel. Jusqu'à la température de 0°C la permittivité varie relativement peu, en présentant une augmentation plus accentuée pour les températures supérieures à 0°C et en atteignant à la température de 80°C, des valeurs de l'ordre 6...7.

De même, au point de vue des pertes diélectriques, exprimées par tg δ, on observe une valeur réduite des celles-ci à des températures plus basses, inférieures à 0°C, et une augmentation plus accentuée au dessus de cette température.

Il en résulte que les caoutchoucs étudiés présentent des propriétés isolatrices acceptables, particulièrement dans le cas des températures basses.

b) *Variation de* ε' *et de* tg δ *en fonction de la fréquence*

Dans ce cas on a utilisé la gamme de fréquences entre 400 et 10 000 Hz; les résultats expérimentaux sont donnés dans la fig. 2.

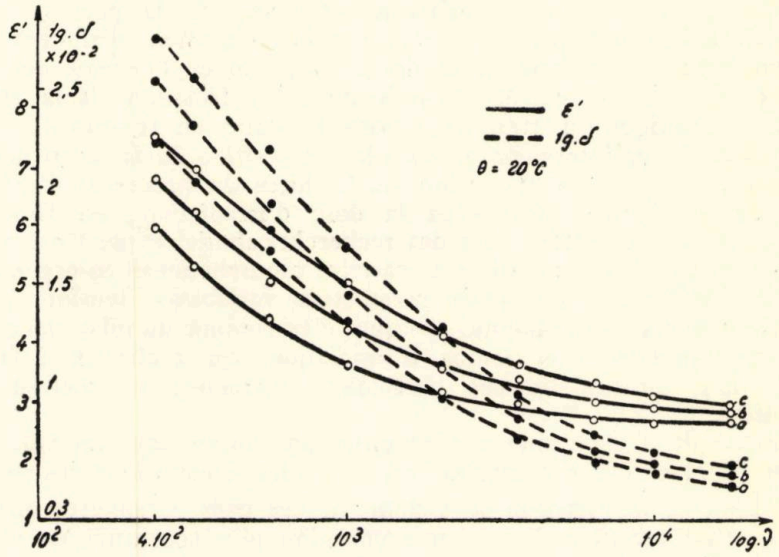


Fig. 2

De l'analyse des courbes tracées seulement pour les trois espèces de caoutchoucs polyuréthaniques qui présentent des propriétés isolatrices acceptables, on constate une diminution progressive de la permittivité et aussi des pertes diélectriques lorsque la fréquence augmente.

Tant la diminution de la valeur de la permittivité que celle des pertes diélectriques sont plus accentuées au début de la courbe, c'est-à-dire

pour la zone des fréquences comprises entre 400 et 1 000 Hz, ce qui permet à affirmer que pour des fréquences inférieures à 400 Hz, il y a une zone de dispersion, caracterisée par un maximum de la tg δ. Puisque cette zone de dispersion apparaît pour des fréquences plus petites que 400 Hz, il en résulte que le processus de polarisation pour ces caoutchoucs est de nature dipolaire, ce qui est en concordance avec leur structure chimique macromoléculaire.

Pour des fréquences supérieures à 1 000 Hz, la valeur de la permittivité diminue jusqu'à des valeurs de l'ordre 3, et les pertes diélectriques, exprimées par tg δ, ont également des valeurs petites; il en résulte que les sortes respectives des caoutchoucs peuvent être aussi utilisées comme isolants dans les installations électrotechniques de haute fréquence.

c) *Variation de ε' et de* tg δ *en fonction de la dose d'irradiation par rayons X*

En soumettant les preuves respectives à un processus d'irradiation par rayons X, on a tracé des courbes de variation de la permittivité ε' et des pertes diélectiques (tg δ) en fonction de la tension d'alimentation du tube générateur des rayons X, (donc en fonction de l'énergie des photons X utilisés dans le processus d'irradiation), en fonction de la valeur du courant électronique du tube de rayons X (donc en fonction du nombre des photons X qui interviennent dans la composition du faisceau des rayons X incident) et aussi en fonction de la durée du processus d'irradiation. Toutes ces grandeurs définissent la dose d'irradiation; en fonction de ce paramètre ont été effectuées des recherches similaires par Vodopeanov et Vorojtzova, en ce qui concerne certains caoutchoucs silico-organiques [5].

Par l'utilisation des trois paramètres variables: tension d'alimentation (donc énergie des photons), courant électronique du tube (donc nombre des photons incidents) et temps d'irradiation, on a cherché à établir la manière dont chacun de ces paramètres influence le processus global d'irradiation.

Les résultats expérimentaux obtenus sont donnés dans les fig. 3...5.

De l'analyse des ces courbes résultent les conclusions ci-dessous:

1. Lors de la variation de chacun de ces trois paramètres on constate une très petite variation de ε' et une variation plus accentuée de tg δ, dans le sens de l'augmentation de leurs valeurs à la suite du processus d'irradiation.

2. Le processus de variation de tg δ et de ε' est brusque au moment de l'irradiation de la preuve par le faisceau de rayons X et puis il continue plus lentement, lorsqu'on augmente la valeur de l'un des trois paramètres. On constate que le processus de l'augmentation de la valeur de la permittivité est un peu plus accentué lorsque le courant électronique du tube varie, respectivement le nombre des photons X qui participent dans

la composition du faisceau incident se modifie et plus lentement lorsque le courant électronique, c'est-à-dire le nombre des photons est maintenu constant et la tension d'alimentation du tube de rayons X varie.

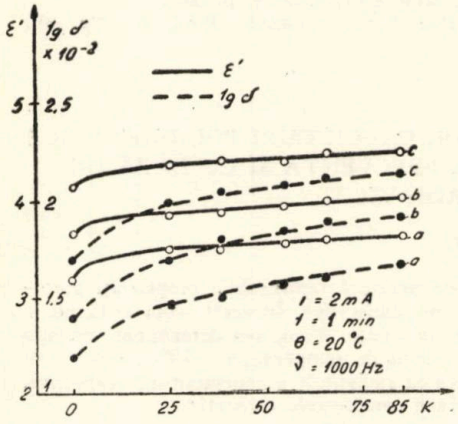


Fig. 3

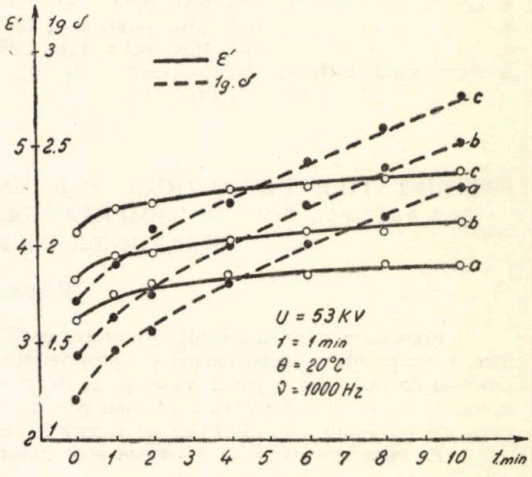


Fig. 4

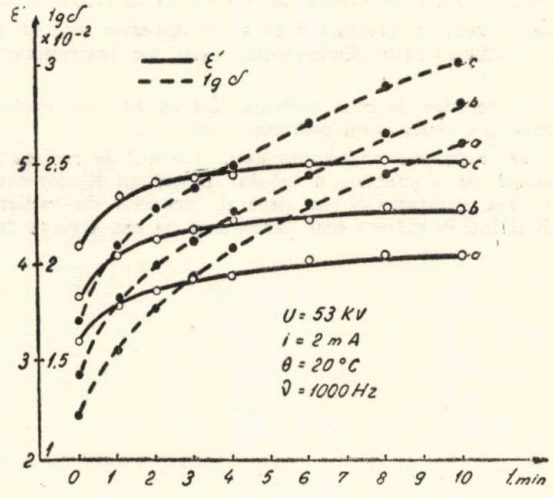


Fig. 5

On peut expliquer le processus dans son ensemble à l'aide des processus d'ionisation produits par les rayons X sur les molecules et les atomes de la preuve irradiée comme nous avons montré dans un travail antérieur [2].

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Matei I. et collab., St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1962, **XIII**, *1*, p. 109.
2. Luca E. et collab., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X(XIV)**, *1—2*, p. 185.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI(XV)**, *3—4*, p. 219.
4. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV(XVIII)**, *3—4*, p. 235.
5. Водопянов К.А., Ворожцова Ж. Ф., Изв. ВУЗ, Физика, 1962, *1*, стр. 48; Ibid., 1960, *5*, стр. 11.

PROPRIETĂŢILE DIELECTRICE ALE UNOR CAUCIUCURI POLIURETANICE ŞI VARIAŢIA LOR CU TEMPERATURA, FRECVENŢA ŞI CU DOZA DE IRADIERE CU RADIAŢII X

(Rezumat)

Prepararea unor cauciucuri poliuretanice [1], ce prezintă remarcabile proprietăţi mecanice, a pus problema determinării şi a proprietăţilor lor dielectrice. În acest scop, utilizînd în procesul de măsurare o punte Tesla şi un dispozitiv în punte Wien, s-a determinat variaţia permitivităţii ε' şi a pierderilor evaluate prin tg δ în gama de temperaturi —70°... +80°C, în gama de frecvenţe 0,4 ... 10 kHz, cît şi prin iradierea cu radiaţii X a cauciucurilor respective.

Pe baza măsurătorilor efectuate s-au putut face următoarele constatări:

a) Cauciucurile poliuretanice, constituite dintr-un amestec de diizocianaţi şi poliesteri, prezintă proprietăţi izolatoare bune, în special la temperaturi reduse şi frecvenţe ridicate, unde permitivitatea atinge valori de ordinul 2...3, ca şi la cauciucul natural.

b) Cauciucurile respective prezintă o zonă de dispersie pentru frecvenţe inferioare valorii de 400 Hz, justificată prin dimensiunile mari ale macromoleculelor ce constituie cauciucul.

c) Proprietăţile dielectrice de buni izolanţi sînt cu atît mai evidente cu cît cantitatea de poliesteri din compoziţia cauciucului este mai mare.

d) Supunînd probele de cauciuc acţiunii unui fascicul de radiaţii X şi luînd ca parametri variabili: tensiunea de alimentare a tubului de radiaţii X, curentul electronic din tub şi timpul de iradiere, s-a constatat că, în general, procesul de iradiere influenţează puţin valoarea permitivităţii şi într-o măsură mai accentuată pe cea a pierderilor dielectrice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D. C. 621.3.013.1 ; 621.314.2

THE BEHAVIOUR OF THE CORE FLUX FOLLOWING THE CHOPPING OF TRANSFORMER MAGNETISING CURRENT

BY

P. ELLISON, N. MULLINEUX and J. R. REED

1. Introduction

In calculating the overvoltage generated when the magnetising current of a transformer is chopped it would be convenient to be able to produce an equivalent circuit consisting of an inductor, capacitor and resistor all connected in parallel. The purpose of the resistor is to represent the losses in the system and for the present purpose we neglect the losses due to resistance and eddy currents in the windings and investigate the effect of eddy-current losses in the core.

In studying the eddy-current loss in the core it is necessary to know the inherent B-H characteristic of the iron in the absence of eddy-currents. No information appears to be available about the dependence of this characteristic on the rate of change of H with regard to time. Accordingly for this theoretical investigation it is assumed that in the current range of interest the inherent characteristic is

$$B = B_r + \mu' \mu_0 H, \tag{1}$$

where B_r is the remanent flux density and μ' is independent both of H and dH/dt (although of course due to eddy-currents the flux in a core lamination will be dependent on dH/dt).

This form of the B-H characteristic can, of course, only be used for $H \geqslant 0$, i. e. $B \geqslant B_r$. However, the flux in the core will decay more rapidly at the surfaces of the laminations than in their interiors so that the magnetising force will reach zero first at the surfaces. Since it is the surface magnetising force which is directly related to the winding current the calculation can be carried as far as the first current zero i. e. as far as the first voltage peak.

The problem is formulated taking into account the variation of flux density across each lamination. This gives rise to an integral equation which can only be solved numerically. Consequently the effect of ignoring the variation of flux density within each lamination is examined, (i. e. it is assumed that the flux decays uniformly throughout the core). Under this assumption an equivalent L, C, R circuit can be drawn up and solved analytically.

The results of the two methods are compared numerically for a specific core. Further investigation then indicates a means of determining for any core the conditions under which the approximate analytic solution (and equivalent circuit) is likely to be acceptable.

For the present investigation it is sufficient to consider chopping a D. C. current and the calculations are restricted to this case.

2. Flux Distribution within a Lamination

For a length, l, of magnetic circuit with a current i in a coil of N turns the magnetising force, H_s, at the surface of each lamination in the core is

$$H_s = \frac{Ni}{l}. \tag{2}$$

From Maxwell's equations, for an eddy current density $\mathbf{J}$ within a lamination of resistivity ρ the electric field strength is

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} \quad \text{and} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

so that using eq. (1)

$$\nabla \times \mathbf{J} = -\frac{\mu' \mu_0}{\rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{say.} \tag{3}$$

Also we have that

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla . \mathbf{B} \quad \text{and} \quad \nabla . \mathbf{H} = 0$$

so the eq. (3) gives

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \alpha \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{4}$$

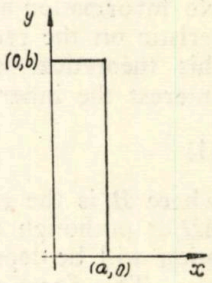


Fig. 1

The cross-section of the lamination may be taken to lie in the x, y-plane as shown in Fig. 1 with $\mathbf{H}$ in the normal direction. Then, since, the width b is very much greater than the thickness a, the y-dependence of H may be ignored so that eq. (4) reduces to

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{5}$$

Since a D.C. current is chopped at $t = 0$ the initial distribution of H is constant over the cross-section and it is shown in Appendix 1 that the solution to eq. (5) at any subsequent time is

$$H = H_s(t) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-A_n t} \frac{\sin[(2n+1)\pi x/a]}{2n+1} \int_0^t e^{A_n \tau} \frac{dH_s}{d\tau} d\tau \right\}, \tag{6}$$

where

$$A_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{(\alpha a)^2}.$$

3. Transfer of Energy from Core to Capacitance

The over voltage developed across the terminals of the transformer is obtained by considering the transfer of energy from the core to the capacitance of the system. This is taken as being connected across the terminals as shown in Fig. 2.

The flow of energy from the laminations can be expressed in terms of Poynting's vector ($\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$) at the surface, $x = a$. Since $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ i. e. $\mathbf{J} = -(\partial H/\partial x)\,\mathbf{j}$ and $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$ it follows that

$$\mathbf{P}\Big|_{x=a} = -\rho \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=a} \mathbf{J} \times H_s \mathbf{k} = -\rho H_s \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=a} \mathbf{i}.$$

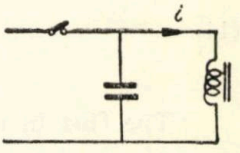


Fig. 2

If the total number of laminations in the core is n' the surface area of lamination is $2n'lb$ so that in a time δt :

a) energy increase in core

$$W_c = -P\Big|_{x=a} 2n'lb\delta t = 2n'lb\rho H_s \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=a} \delta t; \tag{7}$$

b) energy increase in capacitor

$$W_{cap} = -Vi\delta t = i\delta t \left(\frac{1}{C} \int_0^t i\, d\tau - v_0 \right), \tag{8}$$

where v_0 is the voltage at $t = 0$ and is zero under our assumptions.

Hence the behaviour of the current is given by

$$\frac{i}{C} \int_0^t i(\tau)\, d\tau + 2n'lb\rho H_s \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0. \tag{9}$$

From eq. (6) we have that

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{4}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ e^{-A_n t}\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{a}x\right]\int_0^t e^{A_n \tau}\frac{dH_s}{d\tau}d\tau\right\}$$

so that

$$\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{4}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-A_n t}\int_0^t e^{A_n \tau}\frac{dH_s}{d\tau}d\tau\right).$$

Substituting in eq. (9) and using eq. (2) to express H_s in terms of i there results

$$\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + 8\frac{n' b\rho N^2}{al}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-A_n t}\int_0^t e^{A_n \tau}\frac{di}{d\tau}d\tau\right) = 0. \tag{10}$$

This equation may be solved numerically, using the method given in Appendix 2, to give a curve of current i with regard to time t. The voltage then follows from

$$v = v_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

The flux in the core may also be obtained from

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{N}\int_0^t v(\tau)\,d\tau \tag{12}$$

where

$$\Phi_0 = n' ab\left(B_r + \mu'\mu_0\frac{N}{l}I\right); \tag{13}$$

I is the D.C. current chopped.

4. Approximation for Slow Rates of Change

When the rate of change of flux in the core is sufficiently slow the flux will decay approximately uniformly over the cross-section of the laminations. We therefore examine the results achieved under the assumption that the flux density remains uniform over each lamination.

Then for the eddy-currents Faraday's law

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

gives on integration

$$E = -\left(x - \frac{a}{2}\right)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

so that energy loss in lamination in time δt

$$W_l = bl\,\mathrm{d}t \int_0^a \jmath E\,\mathrm{d}x = \frac{a^3 bl}{12\rho}\,\delta B \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}.$$

Hence with the area of cross-section of iron $A = n'ab$ eddy current loss in core

$$W_c' = \frac{Aa^2 l}{12\rho}\,\delta B \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},$$

or since the terminal voltage is

$$v = -NA\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, \tag{14}$$

eddy-current loss in core

$$W_c' = -\frac{a^2 l}{12\rho N} v\,\delta B. \tag{15}$$

Further eq. (14) can be expressed as

$$v = -NA\mu'\mu_0 \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$$

or carrying out the integration

$$H - H_0 = -\frac{1}{NA\mu'\mu_0}\int_0^t v\,\mathrm{d}\tau,$$

where H_0 is the initial magnetising force.

Energy gain in core for a change of flux density δB

$$W_c'' = AlH\,\delta B = Al\,\delta B\left(H_0 - \frac{1}{NA\mu'\mu_0}\int_0^t v\,\mathrm{d}\tau\right), \tag{16}$$

and energy gain by capacitor

$$W'_{cap} = v\,\delta q = -NA\frac{dB}{dt}\delta q = -NA\,\delta B\,C\frac{dv}{dt}. \tag{17}$$

Hence from eq. (15)...(17), $W'_{cap} + W'_c + W''_c = 0$ becomes

$$NAC\frac{dv}{dt} + \frac{a^2 l}{12\rho N}v - lA\left(H_0 - \frac{1}{NA\mu'\mu_0}\int_0^t v\,d\tau\right) = 0,$$

or on differentiating with regard to t and re-arranging:

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\cdot\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0, \tag{18}$$

where

$$R = 12\frac{AN^2\rho}{a^2 l}, \quad L = \frac{N^2 A}{l}\mu'\mu_0.$$

This equation represents the zero current input into a parallel connection of a capacitor C, resistor R, inductor L, with solution

(i) when $\eta = R\sqrt{\frac{C}{L}} < \frac{1}{2}$

$$v = -\frac{2IR}{\sqrt{1-4\eta^2}}\,e^{-t/2RC}\sinh\frac{\sqrt{1-4\eta^2}}{2RC}t, \tag{19}$$

(ii) when $\eta > \frac{1}{2}$

$$v = -\frac{2IR}{\sqrt{4\eta^2-1}}\,e^{-t/2RC}\sin\frac{\sqrt{4\eta^2-1}}{2RC}t, \tag{20}$$

where I is the D.C. current chopped.

5. Results

Since eq. (10) could only be evaluated numerically it is necessary to proceed by investigating the behaviour of a specific case. The following values were therefore chosen

$$\mu' = 2.5\times10^3,\ \rho = 6\times10^{-7}\,\Omega\,\text{m},\ a = 3.56\times10^{-4}\,\text{m},\ b = 1.89\times10^{-1}\,\text{m},$$
$$l = 2.72\,\text{m},\ n' = 531,\ N = 30,\ I = 10\,\text{A}.$$

This value of a corresponds to a lamination thickness of 0.014 in and the value of μ' was estimated from B-H curves at 50 c/s.

Table 1

C F	Full method			Approximat method		No losses
	V_m kV	T_m s	$\frac{\Phi-\Phi_r}{\Phi_0-\Phi_r}\cdot 100$	V_m kV	T_m s	V_m
5×10^{-5}	0.26	2.1×10^{-3}	1	0.27	2.1×10^{-3}	0.27
5×10^{-6}	0.77	6.4×10^{-4}	9.3	0.78	6.6×10^{-4}	0.86
5×10^{-7}	2.06	1.85×10^{-4}	28	2.06	1.9×10^{-4}	2.74
5×10^{-8}	4.66	4.55×10^{-5}	59.5	4.16	5×10^{-5}	8.65
5×10^{-9}	9.97	9.9×10^{-6}	78.5	5.94	9.6×10^{-6}	27.4
5×10^{-10}	21.3	2.1×10^{-6}	99.1	6.52	1.6×10^{-6}	86.5

The results for the maximum voltage, V_m, and time, T_m, to maximum are given in the table 1 for a range of capacitance 5×10^{-5} to 5×10^{-10} F for three methods of calculation:

(i) the full method, using eqs. (10), (11) and eq. (12) to obtain the flux (above the remanent flux) left in the core as a percentage of the initial flux (above remanent flux) i.e. 100 $(\Phi-\Phi_r)/(\Phi_0-\Phi_r)$. These results where obtained using a digital computer;

(ii) the approximate method, examining eqs. (19), (20) using tables;

(iii) ignoring losses from the eq.

$$V_m = I\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

6. Discussion of Results

For the parameters chosen, it is apparent that if the time-to-peak is less than 10^{-3} s it is necessary to take the core losses into account. However, provided that the time-to-peak exceeds 10^{-4} s the approximate approach (with its equivalent circuit) will yield effectively the same results as the full method. For shorter time-to-peak the full representation would appear necessary.

In order to attempt to generalise these results to other cores it is natural to employ the time constant of the decay of flux when the surface magnetising force is reduced instantaneously from its steady value H_{s0}, say, to zero, i.e.

$$H_s = H_{s0}\,[1 - U(t)], \tag{21}$$

where $U(t)$ is the unit step-function.

Differentiation of eq. (21) yields

$$\frac{dH_s}{dt} = -H_{s0}\,\delta(t),$$

where $\delta(t)$ is the Dirac delta-function.

On substituting eqs. (21), (22) in eq. (6) and evaluating the integral there results, for $t>0$,

$$H = \frac{4H_{s0}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-A_n t}}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{a}x. \tag{23}$$

Hence, the time-constant of the nth space harmonic, T_n, is given by

$$T_n = \frac{1}{A_n} = \frac{\alpha a^2}{(2n+1)^2\pi^2} = \frac{\mu'\mu_0 a^2}{(2n+1)^2\pi^2\rho},$$

and in particular the time constant of the fundamental space component is T_0 with

$$T_0 = \frac{\mu'\mu_0 a^2}{\pi^2\rho} \quad [s]. \tag{24}$$

In our particular example

$$T_0 = 6.6\times 10^{-5}\,\mathrm{s},$$

so that it is suggested that the generalisation may be that:

a) if time-to-peak $>15\,T_0$ we may neglect core losses;

b) if $15\,T_0 >$ time-to-peak $> 1.5\,T_0$ core losses may be accounted for by using the equivalent circuit;

c) if time-to-peak $< 1.5\,T_0$ the full method involving the integral equation should be used.

Appendices

1° *Solution for Flux Distribution within a Lamination*

It is required to solve eq. (5) subject. to the boundary condition $H = H_s(t)$ at $x=0, a$ and the initial condition $H = H_{s0}$ at $t=0$ for $0 \leqslant x \leqslant a$.

On taking the finite sine transform of eq. (5) with regard to x (i. e. multiplying throughout by $\sin(m\pi x/a)$ and integrating over $(0, a)$) and evaluating the integral on the left-hand side by parts there results

$$\frac{d\bar{H}}{dt} + \frac{m^2\pi^2}{\alpha a^2}\bar{H} = \frac{m\pi}{\alpha a}H_s[1-(-1)^m], \tag{25}$$

where

$$\bar{H} = \int_0^a H \sin \frac{m\pi x}{a} \, dx$$

and at $t = 0$, $H = H_{s0}$ for $0 \leqslant x \leqslant a$ becomes

$$\bar{H}(0) = \frac{aH_{s0}}{m\pi} [1 - (-1)^m].$$

Taking the Laplace transform of eq. (25) with regard to t we have

$$\left(p + \frac{m^2 \pi^2}{\alpha a^2}\right) \bar{H}^* = \bar{H}(0) + \frac{m\pi}{\pi a} H_s^* = [1 - (-1^m)], \tag{26}$$

where the asterisk denotes the Laplace transform.

The inverse Laplace transform of $1/[p + m^2\pi^2/(\alpha a^2)]$ is $e^{-A_m t}$, where $A_m = m^2\pi^2/(\alpha a^2)$, so that on using the convolution theorem eq. (26) yields

$$\bar{H} = \frac{a}{m\pi} H_{s0} [1 - (-1)^m] e^{-A_m t} + \frac{m\pi}{\alpha a} [1 - (-1)^m] \int_0^t H_s(\tau) e^{-A_m (t-\tau)} \, d\tau.$$

With only obvious simplification eq. (6) follows on taking the inverse sine transform with regard to m.

2° *Method of Solution of the Integral Equation*

A time range in excess of that estimated as corresponding to the first current zero is chosen and split into steps h. The trapezoidal rule is then used to approximate the integrals in the equation in the form

$$\int_0^t i(\tau) d\tau + K \sum_{n=0}^{\infty} e^{-A_n t} \int_0^t e^{A_n \tau} \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = 0.$$

Thus, at $t = mh$

$$M_0 i_0 + \sum_{k=1}^{m-1} M_k i_k + M_m i_m = 0 \tag{27}$$

where

$$M_0 = \frac{h}{2} - \frac{K}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-A_n(m-1)h][1 - \exp(-A_n h)]}{A_n},$$

$$M_k = h - \frac{K}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-A_n(m-k-1)h][1 - 2\exp(-A_n h) + \exp(-2A_n h)]}{A_n},$$

$$M_m = \frac{h}{2} + \frac{K}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \exp(-A_n h)}{A_n}.$$

In this way a matrix of the form

$$Ai = b$$

may be set up with

$$i = \text{col.}\{i_0, i_1, \ldots, i_n\}, \quad b = \text{col.}\{I, 0, \ldots, 0\}$$

and A is such that only the elements of the first column and last row need be calculated separately. The matrix equation may then be solved by forward substitution.

It was found desirable to choose h so that there were 40...60 intervals up to the current zero.

In summing the series of the form

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-A_n h}}{A_n}, \quad A_n = (2n+1)^2 A_0,$$

t was found expeditious to write S as

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{A_n} - \sum_{=0}^{\infty} \frac{e^{-A_n h}}{A_n} = \frac{1}{A_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-A_n h}}{A_n} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8A_0} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-A_n h}}{A_n}$$

and then form the partial sum

$$S_N = \frac{\pi^2}{8A_0} - \sum_{n=0}^{N} \frac{e^{-A_n h}}{A_n}$$

and proceed until S_N was sensibly constant, e. g.

$$S_{N+1} - S_N < S_N \times 10^{-5}.$$

List of Symbols

B — flux density, [Wb/m²],
B_r — remnant flux density, [Wb/m²],
H — magnetising force, [A/m],
H_s — magnetising force at surface of a lamination, [A/m],
H_{s0} — initial surface magnetising force, [A/m],
μ_0 — permeability of free space ($=4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m),
i — current, [A],
I — D. C. current chopped, [A],
$\mathfrak{J}$ — current density, [A/m²],
E — electric field strength, [V/m],
l — length of magnetic circuit, [m],
a — thickness of lamination, [m],
b — width of lamination, [m]
ρ — resistivity of iron, [Ω m],
α $= \mu' \mu_0/\rho$,
i, j, k — unit vectors in the x-, y-, z- directions respectively,
n' — number of laminations,

A $= n' ab$ — area of core [m²],
C — capacitance, [F],
v — voltage across transformer, [V],
$\mathbf{P}$ — Poynting's vector,
W_c — energy increase in core, [J],
W_{cap} — energy increase in capacitor, [J],
W_l — energy loss in lamination, [J],
W_c' — eddy current loss in core, [J],
W_c'' — energy gain in core, [J],
W_{cap}' — energy gain by capacitor, [J],
Φ — flux in core, [Wb],
Φ_r, Φ_0 — remnant flux (at $H=0$) in core, [Wb],
Φ_0 — initial flux in core, [Wb],
T_n — time constant for decay of nth space harmonic, [s].

Received the 7 IX 1968

Magnetic Computer Bureau
and
University of Aston,
Birmingham, England

EVOLUȚIA FLUXULUI MAGNETIC ÎN MIEZ DUPĂ ÎNTRERUPEREA CURENTULUI DE MAGNETIZARE AL UNUI TRANSFORMATOR

(Rezumat)

Se studiază procesul tranzistoriu al evoluției fluxului magnetic în miezul unui transformator după întreruperea curentului de magnetizare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 621.3.014.8 ; 621.392.5

REZONANŢA GLOBALĂ LA PORŢILE DE ACCES ALE UNUI CUADRIPOL DIPORT LINIAR, PASIV ŞI RECIPROC, ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

DE

HUGO ROSMAN

1. Introducere

În cîteva lucrări anterioare [1]...[3] am determinat şi studiat condiţiile în care un cuadripol liniar, pasiv şi reciproc (CDLPR), este capabil să realizeze, în regim permanent sinusoidal, simultan, rezonanţa la ambele porţi. Am denumit aceste regimuri — de *rezonanţă cuadripolară dublă* (RCD), dovedind că pentru un CDLPR dat pot exista cel mult două astfel de regimuri, caracterizate prin

$$1) \qquad Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0,$$

unde Q_1 reprezintă puterea reactivă schimbată de cuadripol pe la poarta de intrare cu exteriorul iar Q_2 — puterea reactivă schimbată de cuadripol cu exteriorul pe la poarta de ieşire.

2. Rezonanţa globală

Regimurile RCD, atunci cînd există, definite cu ajutorul relaţiilor (1), pot fi considerate drept cazuri particulare ale unei situaţii mai generale, în care se realizează *rezonanţa cuadripolară globală* (RCG). Anume, fiind dat un CDLPR în regim permanent sinusoidal, se aplică unei suprafeţe închise S care conţine cele patru borne de acces ale cuadripolului, teorema energiei electromagnetice [4] :

$$(2) \qquad \iint_S \mathbf{s}\, d\mathbf{A}_{int} = P + jQ,$$

unde $\mathbf{s} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ reprezintă vectorul lui Poynting, $d\mathbf{A}_{int}$ — elementul vectorial de arie avînd normala orientată pozitiv spre interiorul suprafeţei S, P — puterea activă şi Q — puterea reactivă schimbată de cuadripol cu exteriorul, cu :

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

(3) $$Q = Q_1 + Q_2,$$

Q_1 şi Q_2 avînd semnificaţiile din §1.

Prin extensiune, se convine a se denumi RCG orice regim în care este satisfăcută egalitatea:

(4) $$Q = 0\ ^{1}).$$

Mai mult, în cazul unui multipol cu n porţi de acces este posibil să se definească, în aceeaşi ordine de idei, regimurile de *rezonanţă multipolară globală*, în care:

(5) $$Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k = 0,$$

unde Q reprezintă puterea reactivă schimbată de multipol cu exteriorul.

3. Diagrama-loc geometric a impedanţei receptorului în regimurile RCG

Se consideră un CDLPR în regim permanent sinusoidal avînd ecuaţiile:

(6) $$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix},$$

cu

(7) $$\det|\underline{A}_{st}| = 1, \quad (s, t = 1, 2).$$

Puterea reactivă schimbată de cuadripol cu exteriorul pe la poarta de intrare poate fi determinată cu relaţia:

(8) $$Q_1 = \frac{X_{e1}}{Z_{e1}^2} U_1^2,$$

unde $\underline{Z}_{e1} = R_{e1} + \mathrm{j}X_{e1}$ reprezintă impedanţa echivalentă a cuadripolului la poarta respectivă:

(9) $$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}},$$

cu $\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}X_2$ — impedanţa receptorului.

Efectuînd calculele se obţine

---

[1]) Introducerea conceptului de rezonanţă cuadripolară globală, în baza relaţiei (4), a fost sugerată autorului de către prof. dr. ing. A. Ţugulea.

$$\underline{Z}_{e1}^2 = \frac{(\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12})(\underline{A}_{11}^*\underline{Z}_2^* + \underline{A}_{12}^*)}{(\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22})(\underline{A}_{21}^*\underline{Z}_2^* + \underline{A}_{22}^*)} =$$

(10)

$$= \frac{A_{11}^2(R_2^2 + X_2^2) + 2\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^*)R_2 - 2\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^*)X_2 + A_{12}^2}{A_{21}^2(R_2^2 + X_2^2) + 2\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)R_2 - 2\mathcal{I}m(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)X_2 + A_{22}^2}$$

și

$$X_{e1} = \mathcal{I}m(\underline{Z}_{e1}) = \mathcal{I}m\frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}} = \frac{\mathcal{I}m[(\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + A_{12})(\underline{A}_{21}^*\underline{Z}_2^* + \underline{A}_{22}^*)]}{(\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22})(\underline{A}_{21}^*\underline{Z}_2^* + \underline{A}_{22}^*)} =$$

(11)

$$= \frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}^*)(R_2^2 + X_2^2) + \mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*)R_2}{A_{21}^2(R_2^2 + X_2^2) + 2\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)R_2 - 2\mathcal{I}m(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)X_2 + A_{22}^2} +$$

$$+ \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*)X_2 + \mathcal{I}m(\underline{A}_{12}\underline{A}_{22}^*)}{A_{21}^2(R_2^2 + X_2^2) + 2\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)R_2 - 2\mathcal{I}m(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)X_2 + A_{22}^2}.$$

Introducînd expresiile (10) și (11) în (8) rezultă:

(12)

$$Q_1 = \left[\frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}^*)(R_2^2 + X_2^2) + \mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*)R_2}{A_{11}^2(R_2^2 + X_2^2) + 2\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^*)R_2 - 2\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^*)X_2 + A_{12}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*)X_2 + \mathcal{I}m(\underline{A}_{12}\underline{A}_{22}^*)}{A_{11}^2(R_2^2 + X_2^2) + 2\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^*)R_2 - 2\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^*)X_2 + A_{12}^2}\right] U_1^2.$$

Puterea reactivă schimbată de cuadripol, pe la poarta de ieșire, cu exteriorul, se determină cu relația:

(13) $$Q_2 = X_2 I_2^2.$$

Pentru a calcula curentul I_2 se scrie prima din ecuațiile (6) sub forma echivalentă $\underline{U}_1 = (\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12})\underline{I}_2$, de unde rezultă:

(14) $$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}$$

și deci

(15) $$I_2^2 = \frac{U_1^2}{A_{11}^2(R_2^2 + X_2^2) + 2\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^*)R_2 - 2\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^*)X_2 + A_{12}^2},$$

încît expresia (13) devine:

(16) $$Q_2 = \frac{X_2}{A_{11}^2(R_2^2 + X_2^2) + 2\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^*)R_2 - 2\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^*)X_2 + A_{12}^2} U_1^2.$$

Substituind expresiile (12) şi (16) ale puterilor reactive Q_1 şi Q_2 în (4) se obţine:

$$R_2^2 + X_2^2 + \frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*)}{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}^*)} R_2 + \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*) + 1}{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}^*)} X_2 + \tag{17}$$
$$+ \frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{12}\underline{A}_{22}^*)}{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}^*)} = 0.$$

În cazul cînd parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia $\mathcal{I}m(A_{11}A_{21}^*) \neq 0$, relaţia (17) reprezintă ecuaţia unui cerc constituind *diagrama - loc geometric a impedanţei receptorului în regimurile RCG ale unui CDLPR, în regim permanent sinusoidal, alimentat în sens direct.*

Evident, în cazul receptorilor pasivi interesează numai arcul cercului (17) conţinut în semiplanul $R_2 \geqslant 0$.

Este interesant de observat că dacă se notează cu (C') ecuaţia cercului (17) şi cu (C) ecuaţia cercului diagramă - loc geometric a impedanţei receptorului unui CDLPR în regimurile care realizează rezonanţa cuadripolară la poarta de intrare (RCI) [3]:

$$R_2^2 + X_2^2 + \frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*)}{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}^*)} R_2 + \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*)}{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}^*)} X_2 + \tag{18}$$
$$+ \frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{12}\underline{A}_{22}^*)}{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}^*)} = 0,$$

se obţine egalitatea interesantă:

$$(C') \equiv (C) + X_2. \tag{19}$$

Dacă $\mathcal{I}m(A_{11}A_{21}^*)=0$ (echivalentă cu $Q_{10}=0$, unde Q_{10} reprezintă puterea reactivă schimbată la gol de cuadripol cu exteriorul pe la poarta de intrare), cercul (17) degenerează în dreapta:

$$\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*)R_2 + [\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*) + 1]X_2 + \mathcal{I}m(\underline{A}_{12}\underline{A}_{22}^*) = 0. \tag{20}$$

Procedînd în mod analog este posibil să se determine diagrama-loc geometric a impedanţei receptorului în regimurile RCG ale aceluiaşi cuadripol alimentat în sens invers. De asemenea se pot determina, în aceleaşi regimuri, diagramele-loc geometric ale impedanţei echivalente la poarta de intrare, atît la alimentarea în sens direct cît şi la alimentarea în sens invers a cuadripolului. Deoarece relaţia (9) reprezintă o transformare *liniară* [5] care transformă conform cercuri din planul variabilei $\underline{Z}_2$ în cercuri din planul variabilei $\underline{Z}_{e1}$, rezultă că şi aceste diagrame-loc geometric sînt de asemenea cercuri.

Dacă se impune, în plus, una din condițiile $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, se regăsesc rezultatele obținute în [1]...[3], relative la regimurile RCD.

4. Exemplu

Se consideră, cu titlu de exemplu, un circuit constituit din două subcircuite cuplate inductiv (CC) [6], având ecuațiile:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

cu

$$\underline{Z}_{ss} = R_{ss} + \mathrm{j}X_{ss}\,, \quad \underline{Z}_{st} = \mathrm{j}X_{st}\,, \quad (s, t = 1, 2\,;\, s \neq t), \tag{22}$$

unde

$$X_{ss} = \omega L_{ss} - \frac{1}{\omega C_{ss}}\,, \quad X_{st} = \omega L_{st}\,. \tag{23}$$

Dacă se compară ecuațiile (6) și (21) și se are în vedere relația de reciprocitate (7), rezultă pentru parametrii CC considerat expresiile:

$$\underline{A}_{11} = -\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22}}\,, \quad \underline{A}_{12} = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{12}}\,, \quad \underline{A}_{21} = -\frac{1}{\underline{Z}_{12}}\,, \quad \underline{A}_{22} = -\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}}\,, \tag{24}$$

cu ajutorul cărora se deduc relațiile:

$$\left\{\begin{aligned} &Im(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*) = \frac{2X_{11}R_{22}}{X_{12}^2}\,, \quad Im(\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}^*) = \frac{X_{11}}{X_{12}^2}\,, \\ &Re(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^* - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^*) = \frac{2X_{11}X_{22} - X_{12}^2}{X_{12}^2}\,, \\ &Im(\underline{A}_{12}\underline{A}_{22}^*) = \frac{(R_{22}^2 + X_{22}^2)X_{11} - X_{22}X_{12}^2}{X_{12}^2}\,, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

utile în cele ce urmează.

Ținînd seama de (25), ecuația (17) a diagramei-loc geometric a impedanței receptorului în regimurile RCG ale CC considerat devine:

$$R_2^2 + X_2^2 + 2R_{22}R_2 + 2X_{22}X_2 + R_{22}^2 + X_{22}^2 - \frac{X_{22}}{X_{11}}X_{12}^2 = 0, \tag{26}$$

care se poate restrînge și sub forma echivalentă:

$$(R_2 + R_{22})^2 + (X_2 + X_{22})^2 = \frac{X_{22}}{X_{11}}X_{12}^2\,, \tag{26'}$$

din care prezintă interes, în cazul receptorilor pasivi, doar arcul conținut în semiplanul $R_2 \geqslant 0$.

Este ușor de observat că centrul acestui cerc este conținut în cadranul $R_2 \leqslant 0, X_2 \leqslant 0$. Pentru a exista regimuri RCG realizate cu receptori pasivi este necesar și suficient ca originea să fie interioară cercului (26'), adică parametrii CC să satisfacă inegalitatea:

$$R_{22}^2 + X_{22}^2 - \frac{X_{22}}{X_{11}}X_{12}^2 < 0. \tag{27}$$

5. Concluzii

1. Se definesc regimurile de rezonanță cuadripolară globală ale unui cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc, în regim permanent sinusoidal, caracterizate prin egalitatea (4).

2. Se stabilește ecuația (17) a diagramei-loc geometric a impedanței receptorului unui astfel de cuadripol în regimurile de rezonanță cuadripolară globală.

Primită la 17 IV 1969

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Rosman H., Braier A., Saal C., *Rezonanța în sistemele de tip cuadripol* (II). Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *1-2*, pp. 247-260.
2. — *Rezonanța în sisteme de tip cuadripol.* Lucr. șt. Inst. polit. Brașov, 1965, **VII**, pp. 69–111.
3. Rosman H., *Rezonanța la porțile de acces ale unei rețele electrice liniare de tip cuadripol diport, liniar, pasiv și reciproc, în regim permanent sinusoidal.* Teză de doctorat, Iași, 1968, § **IV.**
4. Timotin Al. și colab., *Lecții de Bazele electrotehnicii.* Vol. **II**, 1964, EDP, Buc., p. 18.
5. Stoilov S., *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă.* Vol. **I**, Ed. Acad. R.P.R., Buc. 1954, p. 94.
6. Rosman H., *Asupra rezonanței în circuite cuplate.* Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII (XV)**, *3-4*, pp. 403—413.

LA RÉSONANCE GLOBALE AUX PORTES D'ACCÈS D'UN QUADRIPÔLE DIPORTE, LINÉAIRE, PASSIF ET RÉCIPROQUE, EN RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL

(Résumé)

On définit les régimes de résonance quadripolaire globale d'un quadripôle diporte, linéaire, passif et réciproque, en régime permanent sinusoïdal, caractérisés par l'égalité (4).

On établit l'équation (17) du diagramme de l'impédance du récepteur d'un tel quadripôle, dans les régimes de résonance quadripolaire globale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D. C. 621,314,263

SINGLE PHASE STATIC FERROMAGNETIC FREQUENCY MULTIPLIER WITH AN ODD MULTIPLICATION FACTOR

BY

GH. SAVIN, SAVEL MITREA and NORBERT ZITRON

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, the 28—30 September 1967

1. Introduction

A characteristic property of nonlinear circuits is the modification of the output signal spectrum compared with the input signal; particularly, to a sinusoidal input signal, it answers a nonsinusoidal output signal. Frequency multiplication by using nonlinear circuits is one of the first application of the above mentioned property.

Owing to the possibility of avoiding the undesired harmonics of the output signal, either by connecting the output windings in such a way that these harmonics be compensated, or by the use of filters, or at last, by simultaneous use of both methods, the static ferromagnetic devices used for frequency multiplication has been developed.

The main element of a nonlinear circuit used in the frequency multipliers, that is nonlinear reactor, alows to get high outputs. J. Neirynck [1] using Manley-Rowe's relations, has showed that an ideal nonlinear reactance is able to change the f frequency signal to an integer multiple of it, alowing at the same time the whole transfer of energy.

The first important contribution in the field of static frequency multipliers is to be find in M. Joly's work [2], where, in order to double the frequency, the author proposes the scheme of a magnetic amplifier and in order to triple it, he proposes the scheme of two transformers, a linear and a nonlinear one.

J. J. Suozzi and E. T. Hopper [3] replaced the nonlinear transformer of the frequency tripler by a nonlinear reactor.

A bridge single phase frequency tripler, first presented by O. v. Bronk and improved by W. A. Geyger [4], was another variant of Joly's tripler.

L. J. Johnson and S. E. Rauch [5] modified Joly's scheme in order to obtain a single phase frequency quintupler. The nonlinear transformer was conceived to achieve a better saturation such a maner the fifth harmonic to be in higher percentage.

As far as we know, no single phase magnetic frequency multiplier with a multiplication factor greater than 5 was designed.

The problem of single phase frequency multiplication with the n factor, consists in achieving practically an input-output characteristic which can be approximated by an n degree Tchebycheff polynomial [6].

In such conditions to a sinusoidal input signal of angular frequency ω, ($x = X_m \cos \omega t$) corresponds also a sinusoidal output signal of angular frequency $n\omega$, ($y = Y_m \cos n\omega t$).

Writting

$$(1)\qquad \alpha = \frac{x}{X_m} = \cos\,\omega t = \cos\,\tau, \qquad (2)\qquad \beta = \frac{y}{Y_m} = \cos\,n\omega t = \cos\,n\tau,$$

it results

$$(3)\qquad \beta = \cos\,(n \arccos\,\alpha) = T_n\,(\alpha),$$

$T_n\,(\alpha)$ being a Tchebycheff function of first species and of n degree. If there is a phase difference (φ) between the input and output signal then

$$(4)\qquad \beta = \cos\,(n\tau + \varphi) = \cos\,\varphi\,\cos\,(n \arccos\,\alpha) - \sin\,\varphi\,\sin\,(n \arcsin\,\alpha) = \\ = \cos\,T_n\,(\alpha) - \sin\,\varphi\,U_n\,(\alpha),$$

where $U_n\,(\alpha)$ is the Tchebycheff function of second species and of n degree.

Kl. Müller [7] studied the synthesis of single phase frequency doublers and triplers and he represented the input-output characteristics by second and third degree Tchebycheff polinomials.

2. Working Principle of a New Type of Single Phase Frequency Multiplier

Hereunder, we will show how is practically possible to obtain input-output characteristics which can be approximated by odd degree Tchebycheff polinomials, using controlled nonlinear transformers associated with linear transformers.

The controlled nonlinear transformer can be conceived with two distinct cores (Fig. 1) or with a sigle E shaped core. Both primary and secondary windings of the nonlinear transformer are connected in adding series. In the control windings, which are supplied by a d.c. current, no induced electromotive force of fundamental frequency is to be find. The idealized flux-current characteristic of the nonlinear controlled transformer is represented in Fig. 2, where $\Phi\,(i) = \Phi_{\mathrm{I}}\,(i) + \Phi_{\mathrm{II}}\,(i)$.

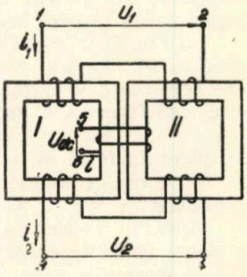


Fig. 1. — The nonlinear controlled transformer scheme made of two distinct cores.

If we use the scheme of Fig. 3, which represents a linear transformer associated to a controlled nonlinear one, having the primary windings connected in adding series and the secondary ones in subtracting series, we obtain an input-output flux-current characteristic which can be approximated by a fifth degree Tchebycheff polinomial. The diagram indicated in Fig. 4 shows that the flux difference from the secondary windings of transformers $(\Phi_{\mathrm{III}} - \Phi_{\mathrm{I}} - \Phi_{\mathrm{II}})$ as a current function represents approximatively a Tchebycheff polinomial, while as a time function it represents a sinusoidal function of 5ω angular frequency.

In conclusion, in the case of small losses, to a sinusoidal f frequency applied voltage in the primary of the device from Fig. 3 it corresponds also a sinusoidal f frequency sum flux $(\Phi_I + \Phi_{II} + \Phi_{III})$ with ω angular frequency, while the flux and electromotive force induced in the secondary of device, are sinusoidal too but with 5ω angular frequency.

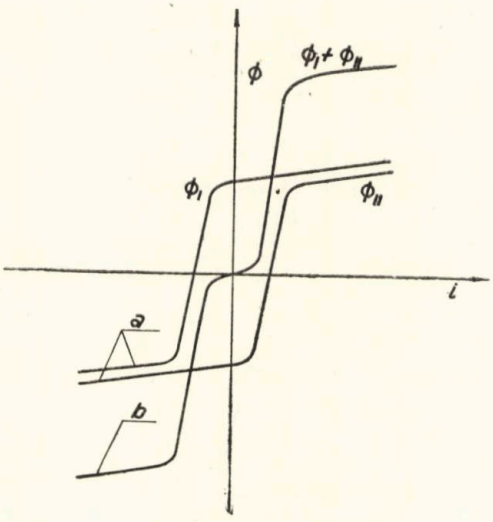


Fig. 2. — The nonlinear controlled transformer flux-current characteristic.

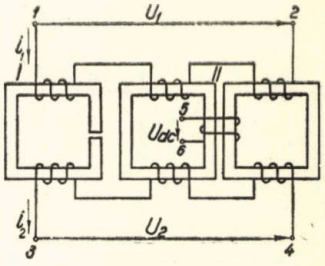


Fig. 3. — The scheme of the frequency quintupler.

The above mentioned method can be extended to obtain input-output characteristics which can be approximated by higher odd degree Tchebycheff polynomials, such as 7, 9, 11, and so on.

Fig. 5 shows a seven frequency multiplier. This is provided with two nonlinear transformers one of them being controlled and the other being noncontrolled. The flux-current characteristic of the group of the tvo nonlinear transformers has the shape of a two stairs ladder.

As Fig. 6 indicates, the input-output characteristic can be approximated by a seventh degree Tchebycheff polynomial.

In order to achieve frequency multipliers with a higher than seven multiplication factor, the d. c. magnetomotive forces of the nonlinear controlled transformers must be different from each other, for, it is only way to obtain the flux-current characteristics of the groups of the nonlinear transformers in stairs ladder shape. Obviously, the number of nonlinear controlled transformers increases with the increase of the multiplication factor.

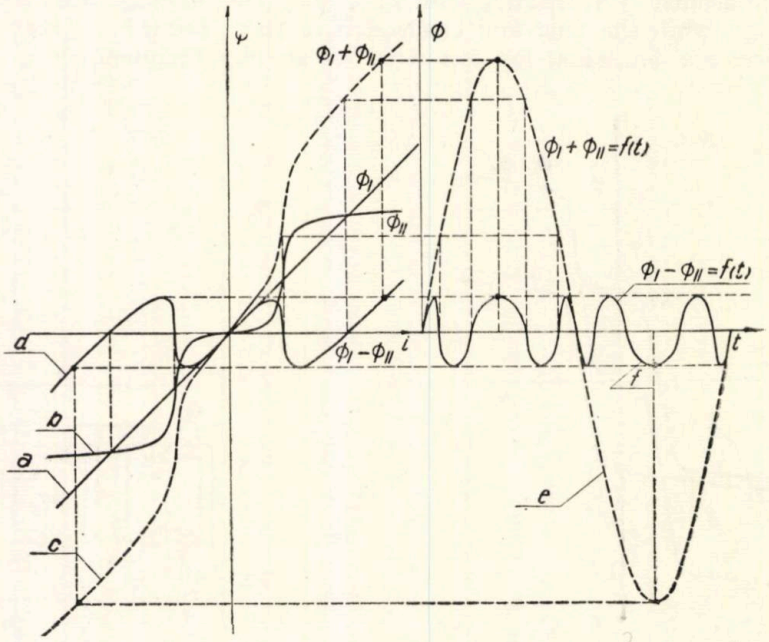


Fig. 4. — The flux-current characteristics of the frequency quintupler.

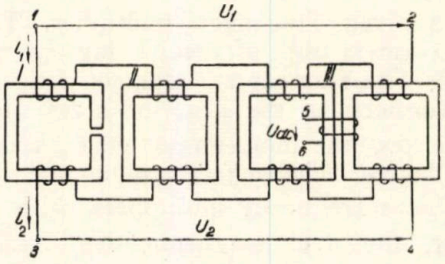


Fig. 5. — The scheme of the frequency multiplier by seven.

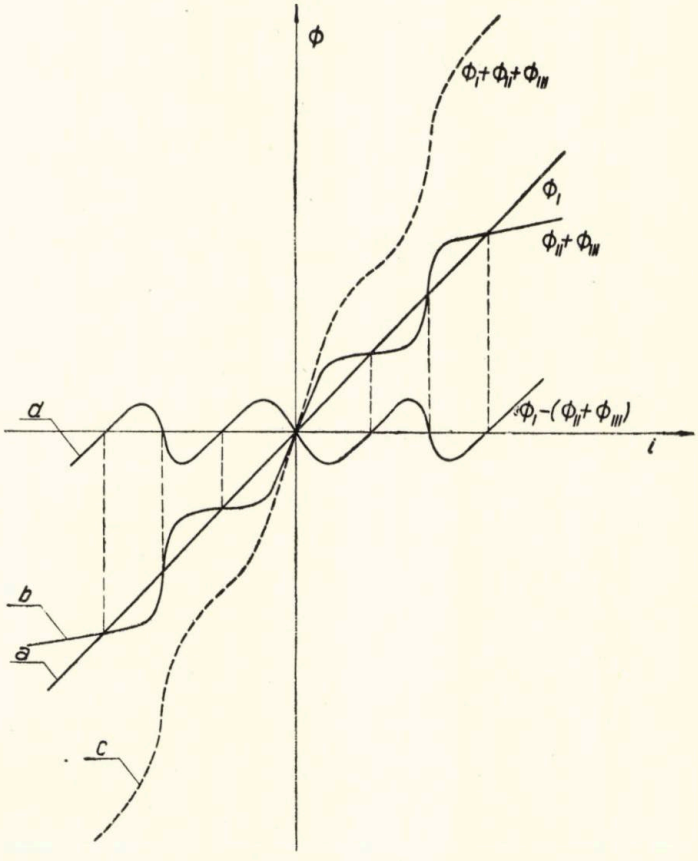


Fig. 6. — The flux-current characteristics of frequency multiplier by 7.

3. Theoretical Considerations on the Single Phase Frequency Quintupler with an Optimal Multiplication Characteristic

a) *Frequency Quintupler having both Input Signals Sinusoidal*

In the case analysed in the § 2, the input flux is sinusoidal and the current is nonsinusoidal. If both the input flux and input current are sinusoidal, the quintupler is acting in the network as a linear circuit. This remark allows a relative simple analytical presentation. Since the input-output characteristic appears as a power polynomial with only odd terms, it is reasonable to represent the nonlinear characteristics of the two transformers by polynomials having the same terms.

If

$$\beta_1 = \frac{\Phi_I}{\Phi_{I\max}}, \quad \beta_2 = \frac{\Phi_{II}}{\Phi_{II\max}}, \quad \alpha_1 = \frac{i_I}{i_{I\max}}, \quad \alpha_2 = \frac{i_{II}}{i_{II\max}},$$

then the nonlinear characteristics of the two coils ca be expressed as follows:

$$\beta_1 = a_1\alpha_1 + a_3\alpha_1^3 + a_5\alpha_1^5, \quad \beta_2 = b_1\alpha_2 + b_3\alpha_2^3 + b_5\alpha_2^5. \tag{5}$$

Since the coils are series connected it results $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ and

$$\beta_1 + \beta_2 = (a_1 + b_1)\alpha, \quad \beta_1 - \beta_2 = (a_1 - b_1)\alpha + (a_3 - b_3)\alpha^3 + (a_5 - b_5)\alpha^5. \tag{6}$$

Putting $\beta_1 + \beta_2 = \alpha = \cos\tau$ it results:

$$a_1 + b_1 = 1, \quad a_3 + b_3 = 0, \quad a_5 + b_5 = 0. \tag{7}$$

Putting $\beta_1 - \beta_2 = \cos 5\tau$ it results:

$$\begin{aligned}&(a_1 - b_1)\cos\tau + (a_3 - b_3)\left(\frac{3}{4}\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau\right) + \\ &+ (a_5 - b_5)\left(\frac{5}{8}\cos\tau + \frac{5}{16}\cos 3\tau + \frac{1}{16}\cos 5\tau\right) = \cos 5\tau.\end{aligned} \tag{8}$$

The relation (8) gives

$$\begin{cases} (a_1 - b_1) + \frac{3}{4}(a_3 - b_3) + \frac{5}{8}(a_5 - b_5) = 0, \\ \frac{1}{4}(a_3 - b_3) + \frac{5}{16}(a_5 - b_5) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

The relation between the coefficients of the function $\cos 5\tau$ is not to be considered because the experimental characteristics $\beta_1(\alpha)$ and $\beta_2(\alpha)$ does not present a maximum or a minimum value.

Assuming $\beta_1(\alpha)$ a monotonous increasing function, then $d\beta_1/d\alpha \geqslant 0$; with $d\beta_1/d\alpha = 0$ we obtain the sixth relation between the coefficients

$$a_1 + 3a_3 + 5a_5 = 0. \tag{10}$$

Solving the system, we obtain the values

$$a_1 = \frac{2}{5}, \quad b_1 = \frac{3}{5}, \quad a_3 = \frac{2}{5}, \quad b_3 = -\frac{2}{5}, \quad a_5 = -\frac{8}{25}, \quad b_5 = \frac{8}{25}, \tag{11}$$

therefore

$$\beta_1 = \frac{2}{5}\alpha + \frac{2}{5}\alpha^3 - \frac{8}{25}\alpha^5, \quad \beta_2 = \frac{3}{5}\alpha - \frac{2}{5}\alpha^3 + \frac{8}{25}\alpha^5. \tag{12}$$

For the output signal it results:

$$\beta_{output} = \beta_1 - \beta_2 = -\frac{1}{5}\alpha + \frac{4}{5}\alpha^3 + \frac{16}{25}\alpha^5. \tag{13}$$

Putting $\alpha = \cos\tau$ we find

$$\beta_{output} = \frac{1}{25}\cos 5\tau. \tag{14}$$

In the diagram (Fig. 7) are represented the relations (12) which express the possible characteristics to be experimentally obtained.

b) *Frequency Quintupler with a Single Sinusoidal Input Signal*

By realising the quintupler from a linear and a controlled nonlinear transformer, it become easy to obtain analytically the optimal multiplication characteristic (Tchebycheff polinomials of 5th degree) if we assume a sinusoidal current. It is to start from the relations

$$\beta_1 = a_1\alpha + a_3\alpha^3 + a_5\alpha^5, \quad \beta_2 = b_1\alpha, \tag{15}$$

where $\alpha = \sin\tau$. In the same time, if both transformers are nonlinear and controlled, the calculations are more simpler if the current is sinusoidal and the flux is nonsinusoidal. In these circumstances, we are able to get an output signal of a higher amplitude than 1/25 from that of the input signal.

Practically, the input flux is provided with a sinusoidal change, while the current is nonsinusoidal. Even though we are able to find analytically the optimal characteristics in this case, yet graphical iteration is to be prefered. If the flux-current characteristic of the nonlinear transformer is known and if the second transformer is a linear one, then the input-output characteristic can be obtained at the first approximation as in Fig. 4. Then, the Tchebycheff function of 5th degree, having the same amplitude as the input-output characteristic has to be drawn correctly. Thus, a graphical iteration will give us the shape of the fit characteristic for an optimal multiplication.

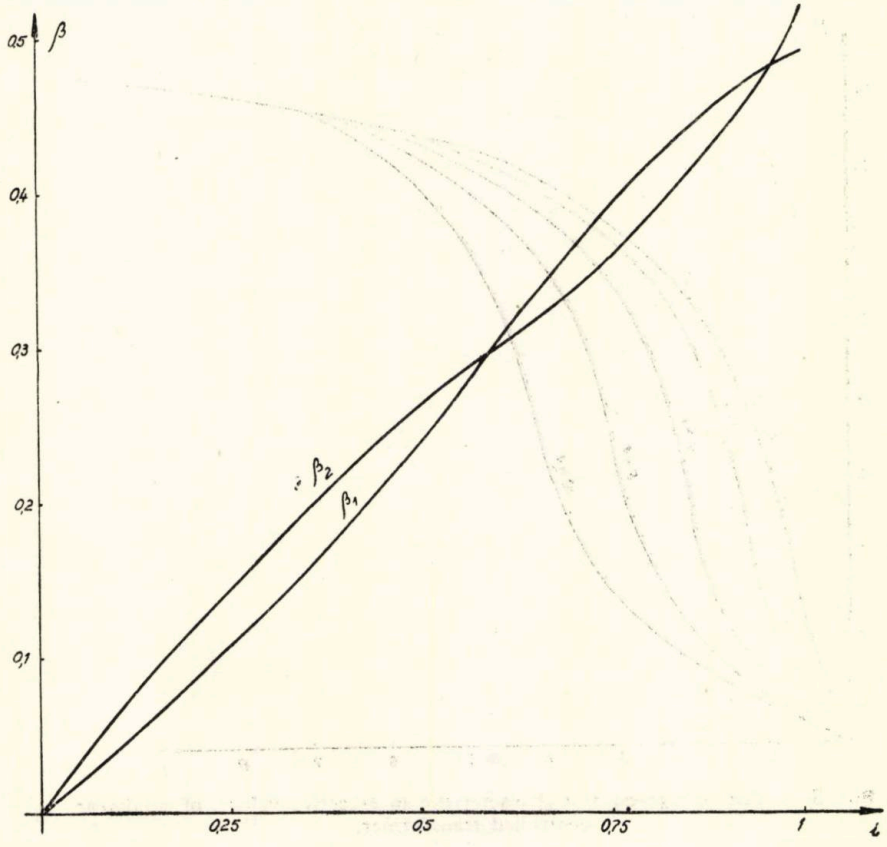


Fig. 7. — The graphical representation of the relations (12).

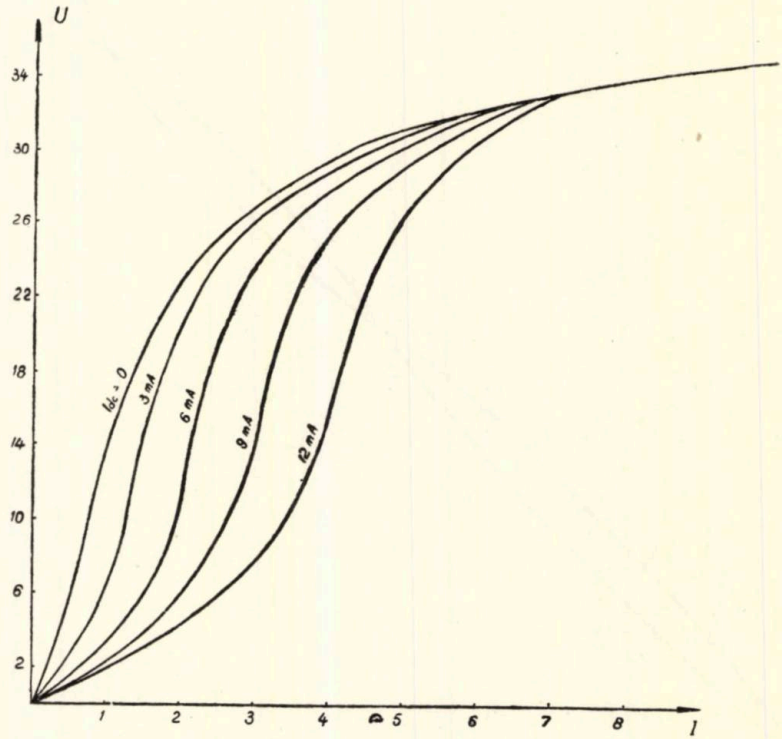


Fig. 8. — The voltage–current characteristic in effective values, of nonlinear controlled transformer.

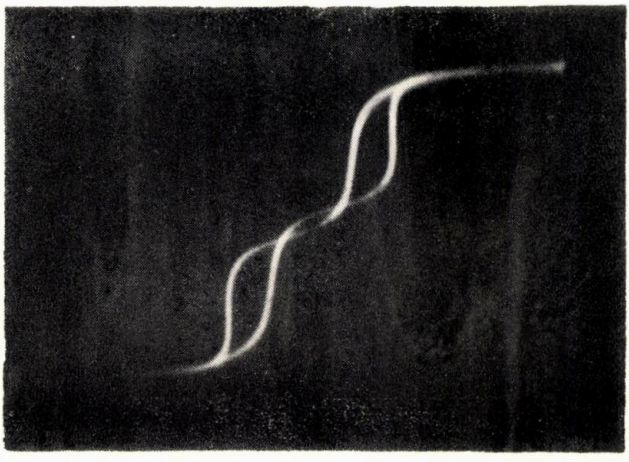


Fig. 9. — The flux-current characteristic oscil'ogramas in instantaneous values, of nonlinear controlled transformer.

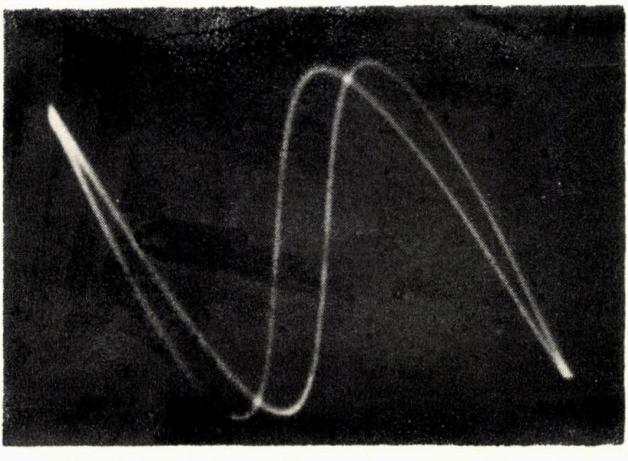


Fig 10. — Output characteristic oscillogramas of the classical frequency tripler.

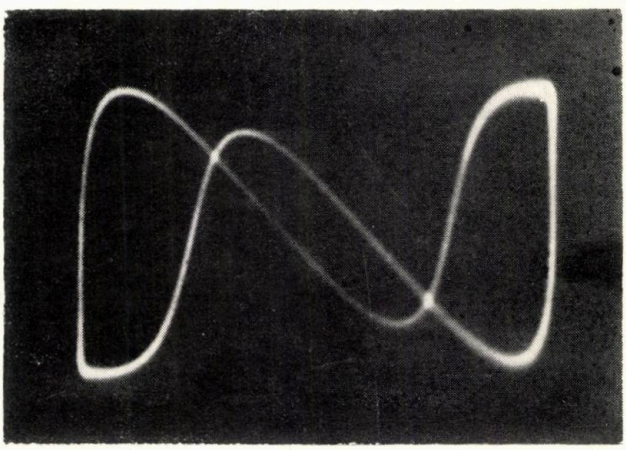


Fig. 11 a. — The output flux-current characteristic oscillc-gramas of the quintupler, working as a tripler.

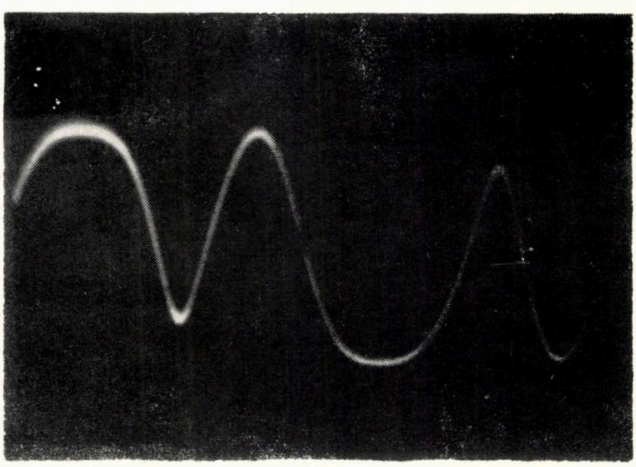
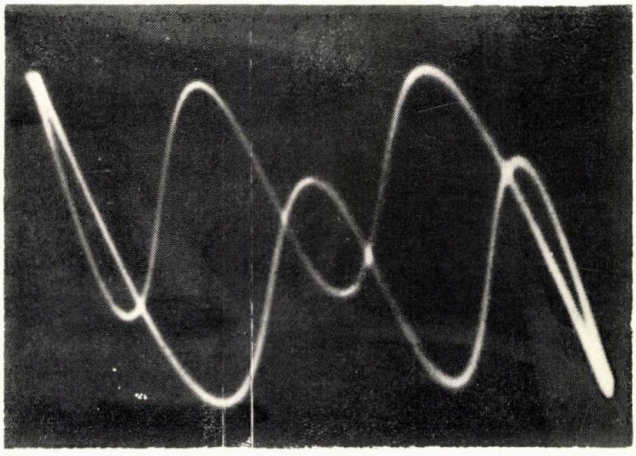


Fig 11 b. — The time output voltage function oscillogramas of the quintupler, working as a tripler.



Fig, 12 a. — The output flux-current characteristic oscillogramas of the quintupler.

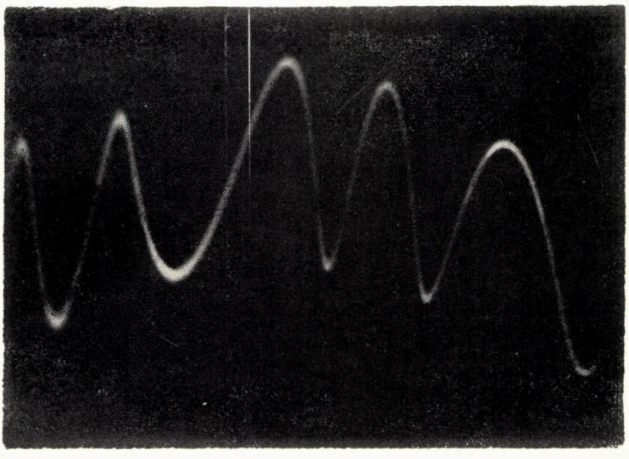


Fig. 12 b. — The time output voltage function oscillogramas of the quintupler.

4. Some Experimental Attempts

To test our assumptions we used controlled nonlinear transformers with permalloy core whose voltage current characteristics in effective values are given in Fig. 8. From the oscillograms given in Fig. 9 appears the similarity between the characteristics given in instantaneous values and those given in effective values.

To design this kind of single phase multipliers, we used the classical method for design transformers of small power and low frequency. The ratio of transformation was taken equal to 1 in order to have the same characteristic in primary as wel as in secondary.

Considering the real flux-current loop it results an output characteristic shaped as a Tchebycheff polynomial for each branch of the loop. The real output characteristic for the classical tripler is shown in Fig. 10.

The device proposed by us for frequency quintuplation can work as a tripler or as a quintupler. The applied voltage will be greater in the case of working as a quintupler than that one as a tripler. The oscillograms for tripler and quintupler are shown in Fig. 11 a, b respectively Fig. 12 a,b. The oscillograms were obtained by using the classical scheme for the drawing of the dynamic flux-current loop.

From the harmonic analysis, worked out by us, results that the distortions are not larger than 5 %, provided that the average of those two characteristics represent exactly the Tchebycheff polynomial (Fig. 10).

For the experimental curve, obtained by using two transformers, one liniar and the second nonlinear controlled transformer, have resulted distortions of 25 % for working as a tripler and 20 % for working as a quintupler. The experimental curves has been obtained without filtration circuits.

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Electrical Engineering

REFERENCES

1. Neirynck J., *Les propriétés énergétiques des circuits de réactances non linéaires.* Rev. HF, 1961, **V**, *1*, pp. 13–17.
2. Joly M., *Transformateurs statiques de fréquence.* La Lumière Électrique, 1911, **XIV**, *20*, p. 195.
3. Suozzi J. J., Hopper E. T., *An All-magnetic Audio Amplifier System.* AIEE Transactions, P. I, 1955, **74**, pp. 297-301.
4. Geyger W. A., *Magnetic-Amplifier Circuits.* Ist Ed., Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1954, pp. 251-252.
5. Johnson L. J., Rauch S. E., *Decicycle Magnetic-amplifier System for Servo Applications.* AIEE Transactions, P. I, 1955, **74**, pp. 667-672.
6 Philippow E., *Nichtlineare Elektrotechnik.* Akad. Verlag, Leipzig, 1963, S. 321.
7. Müller Kl., *Einphasige Freqenzvervielfachung mit optimalen Vervielfacherkennlinien und ihre technische Realisierung.* Diss., Ilmenau, 1963.

MULTIPLICATOR DE FRECVENŢA FEROMAGNETIC STATIC MONOFAZAT CU FACTOR DE MULTIPLICARE IMPAR

(Rezumat)

În prezenta lucrare se propune un nou tip de multiplicator de frecvenţă feromagnetic static monofazat cu factor de multiplicare impar.

Multiplicatorul de frecvenţă este constituit dintr-un transformator liniar şi unul sau un grup de transformatoare neliniare, acest fapt depinzînd de factorul de multiplicare urmărit a fi realizat. Acestea permit obţinerea unor caracteristici flux-curent care pot fi aproximate cu polinoame Cebîşev de rang impar, rangul polinomului reprezentînd factorul de multiplicare al frecvenţei.

Explicaţia figurilor

Fig. 1.—Schema transformatorului neliniar comandat constituit din două miezuri distincte.
Fig. 2.—Caracteristica flux-curent a transformatorului neliniar comandat.
Fig. 3.—Schema cvintuplorului de frecvenţă.
Fig. 4.—Caracteristica flux-curent a cvintuplorului de frecvenţă.
Fig. 5.—Schema multiplicatorului de frecvenţă cu factor de multiplicare egal cu şapte.
Fig. 6.—Caracteristica flux-curent a multiplicatorului de frecvenţă cu factor de multiplicare egal cu şapte.
Fig. 7.—Reprezentarea grafică a relaţiilor (12).
Fig. 8.—Caracteristica tensiune-curent în valori efective a transformatorului neliniar comandat.
Fig. 9.—Oscilograma caracteristicii flux-curent în valori instantanee a transformatorului neliniar comandat.
Fig. 10.—Oscilograma caracteristicii de ieşire a triplorului de frecvenţă clasic.
Fig. 11 a.—Oscilograma caracteristicii flux-curent de ieşire a cvintuplorului funcţionînd ca triplor.
Fig. 11 b.—Oscilograma tensiunii de ieşire a cvintuplorului funcţionînd ca triplor.
Fig. 12 a.—Oscilograma caracteristicii flux-curent de ieşire a cvintuplorului.
Fig. 12 b.—Oscilograma tensiunii de ieşire a cvintuplorului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 621.396.611.1

ASUPRA REZONANŢEI ÎN CIRCUITUL ELECTRIC NELINIAR DE TIP PARALEL CU BOBINA COMANDATĂ

DE

ILIE POPESCU şi EMIL SIMION

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Cluj, din 10—12 octombrie 1968

1. Introducere

Circuitelor electrice neliniare de tip paralel conţinînd un condensator liniar şi o bobină comandată, alimentate la o sursă sinusoidală de tensiune, le corespund ecuaţii diferenţiale neliniare, dificil de rezolvat în cazul general.

Unul din fenomenele care apar în astfel de circuite, îl constituie salturile amplitudinii oscilaţiilor întreţinute cînd semnalul răspuns al circuitului (curentul total) sau alt parametru din circuit variază în mod continuu.

În cele ce urmează se va studia cazul în care bobina din circuitul electric paralel este comandată, determinînd analitic şi verificînd experimental valorile critice pentru care circuitul devine ferorezonant şi dublu-ferorezonant, la variaţia parametrilor.

2. Circuitul electric neliniar cu disipaţie. Ecuaţii.

Se aplică prima teoremă a lui Kirchhoff circuitului electric din fig. 1, considerînd tensiunea la bornele circuitului de forma

$$u = U_m \sin \omega t. \tag{1}$$

Rezultă

$$i = i_r + i_L + i_C, \tag{2}$$

cu

$$i_r = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t, \quad i_C = C \frac{du}{dt} = C\omega U_m \cos \omega t. \tag{3}$$

Se aproximează convenabil caracteristica neliniară a bobinei (fig. 2) cu un polinom de puteri de gradul cinci dat de expresia:

$$i_L(\psi) = a_1\psi + a_3\psi^3 + a_5\psi^5, \tag{4}$$

în care coeficienţii a_1, a_3, a_5 satisfac relaţiile

$$a_3^2 < \frac{20\,a_1 a_5}{9}, \quad a_1 > 0, \quad a_5 > 0, \quad a_3 < 0. \tag{5}$$

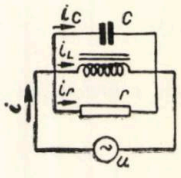


Fig. 1

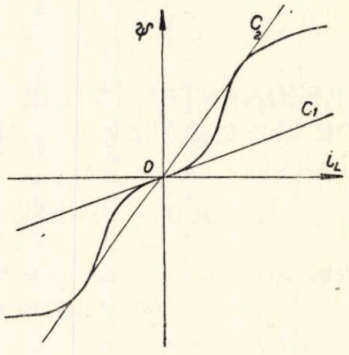


Fig. 2

De asemenea are loc relaţia evidentă:

$$\psi = -\frac{U_m}{\omega}\cos\omega t. \tag{6}$$

Introducînd (4) în (2) se obţine

$$\frac{U_m}{r}\sin\omega t + C\omega U_m\cos\omega t + a_1\left(-\frac{U_m}{\omega}\cos\omega t\right) + a_3\left(-\frac{U_m}{\omega}\cos\omega t\right)^3 + a_5\left(-\frac{U_m}{\omega}\cos\omega t\right)^5 = i = \sum_{k=0}^{2} I_{m_{2k+1}}\sin[(2k+1)\omega t + \varphi_{2k+1}]. \tag{7}$$

Se substituie în ecuaţia (7) puterile funcţiilor trigonometrice şi se obţine ecuaţia

$$\frac{U_m}{r}\sin\omega t + \left(C\omega U_m - \frac{a_1 U_m}{\omega} - \frac{3a_3 U_m^3}{4\omega^3} - \frac{10a_5 U_m^5}{16\omega^5}\right)\cos\omega t - \left(\frac{a_3 U_m^3}{4\omega^3} + \frac{5a_5 U_m^5}{16\omega^5}\right)\cos 3\omega t - \frac{a_5 U_m^5}{16\omega^5}\cos 5\omega t = i = \sum_{k=0}^{2} I_{m_{2k+1}}\sin[(2k+1)\omega t + \varphi_{2k+1}], \tag{8}$$

care descrie toate fenomenele din circuit în regim permanent (în cazul nostru regimul de funcţionare al circuitului neliniar, ţinînd seama şi de armonicile introduse de neliniaritatea bobinei).

3. Circuit dubluferorezonant inerţial. Armonici

Din ecuaţia (8) se obţine pentru termenul fundamental al curentului total din circuit următoarele expresii

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{U_m}{r} = I_{m_1}\cos\varphi_1, \\ C\omega U_m - \dfrac{a_1 U_m}{\omega} - \dfrac{3a_3 U_m^3}{4\omega^3} - \dfrac{10a_5 U_m^5}{16\omega^5} = I_{m_1}\sin\varphi_1. \end{cases}$$

Faza termenului fundamental al curentului raportată la faza tensiunii aplicate circuitului este dată de

$$(10)\qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = r\omega C - \frac{a_1 r}{\omega} - \frac{3a_3 r}{4\omega^3}U_m^2 - \frac{10a_5 r}{16\omega^5}U_m^4,$$

adică

$$\varphi_1 = f(\omega, r, C, a_1, a_3, a_5, U_m).$$

Se observă că faza termenului fundamental al curentului din circuit îşi schimbă semnul la variaţia tensiunii de alimentare sau a altui parametru din circuit anulîndu-se cînd:

$$(11)\qquad C\omega - \frac{a_1}{\omega} - \frac{3a_3}{4\omega^3}U_m^2 - \frac{10a_5}{16\omega^5}U_m^4 = 0,$$

de unde rezultă

$$(12)\qquad U_{m_{1,2}} = \sqrt{-\frac{3a_3}{8\omega^3} \pm \sqrt{\frac{9a_3^2}{64\omega^6} - \frac{10a_5}{16\omega^5}\left(\frac{a_1}{\omega} - C\omega\right)}}.$$

La variaţia tensiunii aplicate circuitului, faza termenului fundamental al curentului îşi schimbă de două ori semnul cînd sînt verificate inegalităţile:

$$(13)\qquad \frac{9a_3^2}{64\omega^3} - \frac{10a_5}{16\omega^5}\left(\frac{a_1}{\omega} - C\omega\right) \geqslant 0, \quad \frac{a_1}{\omega} - C\omega \gtrless 0.$$

Din aceste inegalităţi rezultă imediat limitele de variaţie a capacităţii pentru ca în circuit să se obţină dubluferorezonanţa:

$$(14)\qquad C_1 \leqslant \frac{a_1}{\omega^2}, \quad C_2 \geqslant \frac{a_1}{\omega^2} - \frac{9a_3^2}{40a_5\omega^2}.$$

De asemenea se pot studia, plecînd de la ecuaţia (8), defazajele iniţiale ale armonicilor 3 şi 5 care apar în spectrul curentului total din circuit şi anume:

$$\varphi_3 = \arcsin\left(-\frac{a_3}{4\omega^3} - \frac{5a_5}{16\omega^5}U_m^2\right)\frac{U_m}{I_{m_3}}\,U_m^2 = f(\omega, a_3, a_5, U_m), \tag{15}$$

$$\varphi_5 = \arcsin\left(-\frac{a_5}{16\omega^5}\cdot\frac{U_m}{I_{m_5}}\right)U_m^4 = f(\omega, a_5, U_m). \tag{16}$$

Considerînd mărimile din circuit normate şi trasînd defazajele armonicilor în funcţie de amplitudinea tensiunii se obţin variaţiile reprezentate în fig. 3, care corespund cu observaţiile experimentale făcute. Rezultă de aici că la aplicarea unei tensiuni sinusoidale, indiferent de amplitudinea ei nu se poate produce ferorezonanţa simultan pe mai multe armonici. De asemenea pentru o valoare a tensiunii uşor de determinat teoretic se poate pune în evidenţă oricare din frecvenţele a care are loc ferorezonanţa.

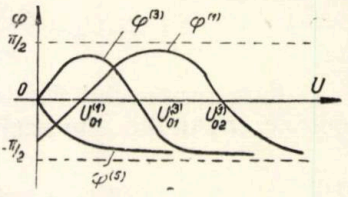


Fig. 3

4. Caracteristici de funcţionare. Valori critice

Curentul nesinusoidal din circuit în regim permanent va fi

$$I_m^2 = I_{m_1}^2 + I_{m_3}^2 + I_{m_5}^2 + \ldots = f(I_{CC}, r, C, \omega, U_m), \tag{17}$$

adică

$$I_m^2 = \left(\frac{U_m}{r}\right)^2 + \left(C\omega U_m - \frac{a_1 U_m}{\omega} - \frac{3a_3 U_m^3}{4\omega^2} - \frac{10a_5 U_m^5}{16\omega^5}\right)^2 + \tag{18}$$
$$+ \left(\frac{a_3 U_m^3}{4\omega^3} + \frac{5a_5 U_m^5}{16\omega^6}\right)^2 + \left(\frac{a_5 U_m^5}{16\omega^5}\right)^2,$$

cu $a_1, a_3, a_5 = F(I_{CC})$.

Se observă că circuitul neliniar de tip paralel se poate substitui printr-un singur element neliniar a cărui caracteristică voltamper este dată de relaţia

$$\left(\frac{I_m}{U_m}\right)^2 = Y^2 = f(r, C, \omega, I_{CC}, U_m). \tag{19}$$

Ţinînd cont de expresiile (18) şi introducînd notaţiile:

$$U_m^2 = x,\quad I_m^2 = y,\quad \frac{a_1}{\omega} = k_1,\quad \frac{3a_3}{4\omega^3} = k_3,\quad \frac{10a_5}{16\omega^5} = k_5, \tag{20}$$

ecuaţia generală a caracteristicii voltamper a circuitului studiat va avea forma:

$$1{,}26\,k_5^2x^5 + 2{,}13\,k_3k_5x^4 + [1{,}11k_3^2 - 2(C\omega - k_1)k_5]x^3 - 2k_3(C\omega - k_1)x^2 + \\ + \left[(C\omega - k_1)^2 + \frac{1}{r^2}\right]x = y\,. \tag{21}$$

Se observă că funcţie de valorile parametrilor din circuit se pot obţine două domenii nestabile, unul singur sau nici un domeniu nestabil. Prezintă interes să se determine în acest caz valorile critice ale rezistenţei şi respectiv capacităţii, ecuaţia generală care delimitează domeniile stabile şi nestabile de funcţionare fiind dată de:

$$6{,}3\,k_5^2x^4 + 8{,}52k_3k_5x^3 + 3[1{,}11\,k_3^2 - 2\,(C\omega - k_1)\,k_5]\,x^2 - \\ - 4k_3(C\omega - k_1)x + (C\omega - k_1)^2 + g^2 = y'(x). \tag{22}$$

Se observă că pentru

$$(C\omega - k_1)^2 + g^2 = 0 \tag{23}$$

sau pentru un circuit ideal

$$C\omega = k_1, \quad g = 0, \quad r = \to \infty,$$

funcţionarea circuitului este nestabilă chiar din origine. În toate celelalte cazuri circuitul funcţionează pe porţiunea stabilă începînd din origine.

Cînd:

$$r = 0, \quad g \to \infty, \tag{24}$$

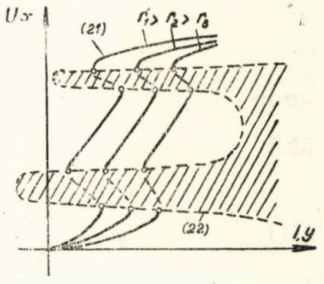


Fig. 4

curentul creşte foarte repede chiar din origine.

Între aceste două regimuri limită se înscriu regimurile normale de funcţionare cu mai multe domenii stabile de funcţionare.

În continuare se determină valorile critice pentru parametrii circuitului electric considerat inerţial. În acest caz ecuaţia circuitului devine de forma

$$k_5^2x^5 + 2k_3k_5x^4 + [k_3^2 + 2k_5(k_1 - C\omega)]\,x^3 + 2k_3(k_1 - C\omega)x^2 + \\ + [g^2 + (C\omega - k_1)^2]\,x = y, \tag{25}$$

a cărei derivată este

$$5k_5^2x^4 + 8k_3k_5x^3 + 3[k_3^2 + 2k_5(k_1 - C\omega)]\,x^2 + 4k_3(k_1 - C\omega)x + \\ + [g^2 + (C\omega - k_1)^2] = y'(x). \tag{26}$$

În cazul cînd ecuaţia $y'(x) = 0$ are toate rădăcinile reale şi distincte, circuitul este dubluferorezonant. Cînd ecuaţia $y'(x) = 0$ are numai două rădăcini reale şi distincte, circuitul este ferorezonant. Din discuţia ecuaţiei de mai sus această condiţie rezultă că este îndeplinită atunci cînd

$$8z + b^2 - 4c > 0, \tag{27}$$

unde z este soluţia ecuaţiei:

$$8z^3 - 4cz^2 + (2bd - 8e)\, z + e(4c - b^2) - d^2 = 0,$$

cu

$$a_1 = 1, \quad b = \frac{8}{5}\cdot\frac{k_3}{k_5}, \quad c = \frac{3}{5}\cdot\frac{k_3^2}{k_5^2} + \frac{6}{5}\cdot\frac{k_1 - C\omega}{k_5}, \quad d = \frac{4}{5}\cdot\frac{k_3}{k_5^2}(k_1 - C\omega),$$

$$e = \frac{g^2}{5k_5^2} + \frac{(C\omega - k_1)^2}{5k_5^2}. \tag{28}$$

Pentru capacitate se obţin valori apropiate de cele date de expresiile (14).

Pentru ca circuitul să nu prezinte domenii nestabile de funcţionare trebuie ca toate cele patru soluţii să fie imaginare, adică

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leqslant 0, \tag{29}$$

unde

$$p = \frac{24\,(2bd - 8e) - 16c^2}{3\cdot 64}, \tag{30}$$

$$q = \frac{-2.4^3c^3}{3^3\cdot 8^3} - \frac{4c(2bd - 8e)}{3\cdot 8^2} + \frac{e(4c - b^2) - d^2}{8} \tag{31}$$

sau

$$p = -\frac{(k_1 - C\omega)^2}{5k_5^2} + \frac{8k_3^2}{5^2k_5^3}(k_1 - C\omega) - \frac{g^2}{5k_5^2} - \frac{3}{100}\cdot\frac{k_3^4}{k_5^4}, \tag{32}$$

$$q = \frac{24}{5^3k_5^3}(k_1 - C\omega)^3 - \frac{46}{5^3}\cdot\frac{k_3^2}{k_5^4}(k_1 - C\omega)^2 -$$

$$-\left(\frac{3}{2\cdot 5^3}\cdot\frac{k_3^4}{k_5^5} - \frac{6}{5^2k_5^3}g^2\right)(k_1 - C\omega) - \frac{1}{2^2.5^2}\cdot\frac{k_3^6}{k_5^6} + \frac{7}{5^3}\cdot\frac{k_3^2}{k_5^3}g^2. \tag{33}$$

Introducînd expresiile (32) în (33) se pot obţine valorile critice pentru orice parametru din circuit. Cele mai simple rezultate şi care nu rezultă din alte expresii sînt cele care permit determinarea rezistenţei critice pentru care circuitul nu mai prezintă domenii de funcţionare nestabilă. Pentru capacitate s-au găsit expresii mai simple şi foarte apropiate de rezultatele experimentale.

5. Rezultate experimentale

Pentru verificarea experimentală a relaţiilor şi rezultatelor obţinute teoretic s-a folosit schema de montaj din fig. 5.

Ca bobină neliniară comandată s-a folosit un amplificator magnetic oţel siliciu transformator E 12,5, de construcţie şi dimensiuni date în fig. 6, cu $a = 12{,}5$ mm, $G = 28$ mm, $w/2 \cong 250$ spire, $w_C = 250$ spire, $I_{CC} = 100$ mA. Caracteristica bobinei, dată de expresia (4), are în cazul de faţă următoarele valori ale coeficienţilor:

$$\psi_{max} = \psi_{sat} = 0223 \text{ Wb}, \quad I_{sat} = 0{,}23 \text{ A}, \quad a_1 = 1{,}368 \text{ AWb}^{-1},$$
$$a_3 = -0{,}455.10^{2} \text{ AWb}^{-3}, \quad a_5 = 0{,}075.10^{4} \text{ AWb}^{-5},$$

$$k_1 = \frac{a_1}{\omega} = 4{,}38.10^{-3} \text{ AV}^{-1},$$

$$k_3 = \frac{3a_3}{4\omega^3} = -1{,}11.10^{-6} \text{ AV}^{-3},$$

$$k_5 = \frac{10a_5}{16\omega^5} = 1{,}5.10^{-10} \text{ AV}^{-5}.$$

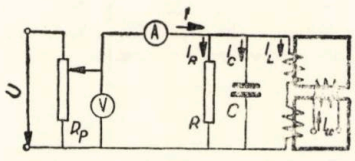


Fig. 5

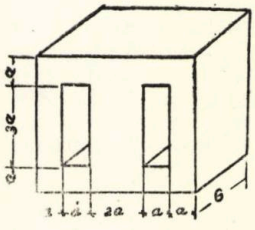


Fig. 6

Valorile critice pentru capacitate sînt:

$$C_{1cr} \leqslant \frac{a_1}{\omega^2} = 13{,}9\,\mu\text{F}, \quad (C_{1cr_{exp}} = 14\,\mu\text{F});$$

$$C_{2cr} \geqslant \frac{a_1}{\omega^2} - \frac{9a_3^2}{40a_5\omega^2} = 7{,}8\,\mu\text{F}, \quad (C_{2cr_{exp}} = 8\,\mu\text{F}).$$

Valoarea critică a rezistenţei este

$$r_{cr} \geqslant \frac{10}{\sqrt{15}} \cdot \frac{k_5}{k_3^2} = 210\,\Omega = r_{cr_{exp}}.$$

Se poate observa că valorile critice calculate cu expresiile teoretice sînt foarte apropiate de cele determinate pe cale experimentală.

6. Concluzii

S-a studiat pe cale analitică circuitul electric neliniar paralel cu bobina comandată, aproximînd caracteristica voltamper a bobinei printr-o funcţie continuă, obţinînd rezultate verificate precis pe cale experimentală.

Se poate constata că la aplicarea unui semnal sinusoidal circuitului electric neliniar paralel conţinînd o bobină neliniară comandată, nu poate apare fenomenul de ferorezonanţă pentru mai multe frecvenţe a semnalului răspuns (curentul total) nesinusoidal.

S-au determinat de asemenea pe cale analitică valorile critice pentru parametrii din circuit astfel încît să se obţină ferorezonanţa.

Din studiul circuitului ferorezonant paralel rezultă aplicaţii importante ale acestuia în automatizări.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică
şi
Institutul politehnic, Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Savin Gh., Simion E., Popescu I., *Circuits à double ferrorésonnance utilisant des bobines à noyaux ferromagnétiques magnetisées en courant continu.* RGÉ, 1965, **74**, 5.
2. Hayashi Ch., *Forced Oscillations in Non-liniar Systems.* Mc Graw-Hill, 1964.
3. Cunningham W. J., *Analyse non linéaire.* Dunod, Paris, 1963, (trad. din l. engleză).
4. Popescu I,. Simion Al., *Unele aspecte ale rezonanţei in circuitele electrice neliniare serie.* Electrotehnica, 1969, **17**, 5.

SUR LA RÉSONANCE DANS LE CIRCUIT ÉLECTRIQUE NONLINÉAIRE DU TYPE PARALLÈLE, À BOBINE COMMANDÉE

(Résumé)

Dans les circuits électriques nonlinéaires du type parallèle on peut mettre en évidence des sauts brusques des amplitudes des oscillations entretenues lorsque le signal réponse (par. ex. le courant total du circuit) ou n'importe quel paramètre du circuit varie d'une façon continue.

On étudie le cas du circuit parallèle lorsque la bobine est commandée en courant continu. Si l'on approxime la caractéristique V—A de la bobine commandée à noyau ferromagnétique par une fonction continue, on peut étudier par voie analytique le comportement des circuits à double ferrorésonance, lorsque les paramètres varient d'une façon continue.

On a déterminé les valeurs critiques qui correspondent aux domaines bi- ou tristabiles de fonctionnement du circuit étudié.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 621.392.5; 621.395; 34

O NOUĂ SCHEMĂ DE CALCUL PENTRU REALIZAREA ORICĂREI FUNCŢII DE TRANSFER DE ORDINUL DOI-DOI

DE

NINA POEATĂ

1. Introducere

Prin funcţie de transfer de ordin doi-doi a cuadripolului din fig. 1 vom înţelege expresia:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}. \tag{1}$$

Fracţia raţională (1) este fizic realizabilă numai dacă polinomul de la numitorul ei este polinom Hurwitz, adică dacă polii funcţiei se găsesc în semiplanul stîng al variabilei complexe s. În acest scop este necesar ca toţi coeficienţii b_i să fie pozitivi. În schimb semnele coeficienţilor a_i pot fi oarecari deoarece zerourile funcţiei de transfer realizabile se pot situa oriunde în planul variabilei complexe s.

Pentru realizarea funcţiilor de transfer de tipul (1) se folosesc diferite structuri de scheme de calcul [1], [2]. Schemele clasice necesită în general un număr mare de amplificatoare operaţionale, dar la realizarea lor se folosesc operatorii de calcul elementari uzuali ai calculatorului analogic. Pentru reducerea numărului de amplificatoare operaţionale se recurge la folosirea operatorilor compuşi. O soluţie constă în introducerea în circuitul de intrare şi cel de reacţie al amplificatorului operaţional a cîte un ansamblu de cuadripoli pasivi conectaţi în paralel ca în fig. 2. Funcţia de transfer realizată de această schemă este de forma [3]:

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{\sum_{j=1}^{m} Y_{1j}}{\sum_{k=1}^{m} Y_{2k}}, \tag{2}$$

în care Y_{1j} este admitanţa de transfer de scurtcircuit directă a cuadripolului conectat în ramura j de intrare, iar Y_{2k} reprezintă admitanţa de transfer de scurtcircuit inversă a cuadripolului conectat în ramura k din circuitul de reacţie.

În [4] se indică diferite tipuri de cuadripoli care pot fi folosiţi în circuitele de intrare şi reacţie din schema reprezentată în fig. 2, care permit realizarea funcţiilor de transfer de fază minimă de ordinul 2. Din analiza acestor scheme rezultă necesitatea folosirii unui număr

foarte mare de elemente pasive, fără ca ele să permită realizarea oricărei funcţii de transfer de tipul (1). Pentru înlăturarea acestui inconvenient tot în aceeaşi lucrare [4] se indică schema din fig. 3 care realizează un caz particular al unei funcţii de transfer de forma:

$$H(s) = -\frac{as}{K_2 s^2 + K_1 s + 1}. \tag{3}$$

Într-adevăr funcţia de transfer realizată de acestă schemă are expresia:

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{C_1 R_3 s}{C_1 C_4 R_2 R_4 s^2 + C_4 (R_2 + R_1) s + 1}, \tag{4}$$

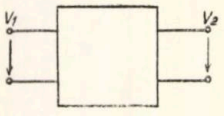


Fig. 1

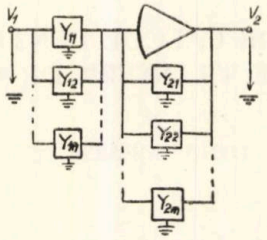


Fig. 2

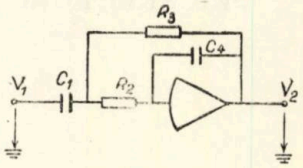


Fig. 3

de acelaşi tip cu (3). Dacă parametrii schemei din fig. 3 se aleg astfel ca să fie îndepliníte condiţiile:

$$C_1 R_3 = a, \quad C_1 C_4 R_2 R_4 = K_2 \quad \text{şi} \quad C_4 (R_2 + R_1) = K_1, \tag{5}$$

atunci ea va realiza funcţia de transfer dată de (3).

Aceeaşi schemă poate fi utilă şi la realizarea funcţiei de transfer de tipul trece-tot. Într-adevăr expresia acestei funcţii are forma:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{b_2 s^2 - b_1 s + b_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}, \tag{6}$$

din care rezultă

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 - \frac{2 b_1 s}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}. \tag{7}$$

Deci schema din fig. 3, în asociaţie cu un sumator cu două intrări, furnizează posibilitatea de a realiza (3), dar nu şi funcţia (1) din cazul general.

2. Schema propusă pentru realizarea oricărei funcţii de transfer de ordinul doi-doi

Se propune ca element de bază, schema din fig. 4. În scopul stabilirii funcţiei de transfer realizată de această schemă se substituie steaua $OABC$ cu triunghiul echivalent (fig. 5) şi se obţine:

$$Y_{13} = \frac{Y_1 Y_3}{\sum_{j=1}^{3} Y_j}, \quad Y_{12} = \frac{Y_1 Y_2}{\sum_{j=1}^{3} Y_j}, \quad Y_{23} = \frac{Y_2 Y_3}{\sum_{j=1}^{3} Y_j}. \tag{8}$$

Pentru nodul C din figură se poate scrie:

$$I_{12} + I_5 + I_6 = I_{23} + I_4 + I_0 . \tag{9}$$

Ţinînd cont că pentru un amplificator operaţional corect realizat atît curentul cît şi tensiunea de la intrare sînt neglijabile ($I_0 \simeq 0$, $V_A \simeq 0$) se obţine:

$$I_{12} = V_1 Y_{12}, \quad I_5 = -V_1 Y_5, \quad I_6 = V_1 Y_6, \quad I_{23} = -V_2 Y_{23}, \quad I_4 = -V_2 Y_4. \tag{10}$$

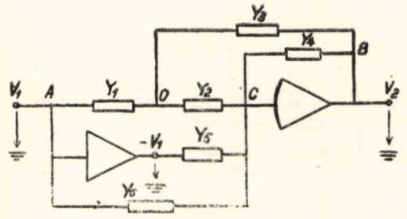


Fig. 4

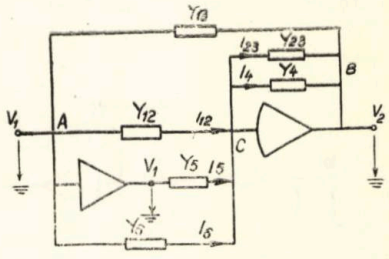


Fig. 5

Introducînd aceste relaţii în (9) şi ţinînd cont şi de (8) rezultă în final

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{Y_1 Y_2 + (Y_6 - Y_5)(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3} . \tag{11}$$

Dacă se alege:

$$Y_1 = \frac{1}{R_1}, \quad Y_2 = C_2 s, \quad Y_3 = C_3 s, \quad Y_4 = \frac{1}{R_4}, \quad Y_5 = \frac{1}{R_5} \text{ şi } \quad Y_6 = C_6 s \tag{12}$$

se obţine schema din fig. 6 pentru care expresia (11) devine:

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{R_1 R_4 C_6 (C_2 + C_3) s^2 + R_1 R_4 \left(\frac{C_2 + C_6}{R_1} - \frac{C_2 + C_5}{R_5} \right) s - \frac{R_4}{R_5}}{R_1 R_4 C_2 C_3 s^2 + R_1 (C_2 + C_3) s + 1} . \tag{13}$$

Expresia (13) permite realizarea unei funcţii de transfer particulare de ordin doi-doi, şi anume care conţine la numărător termenul în s^2 de semn opus faţă de cel liber. Termenul în s poate avea orice semn. Pentru înlăturarea acestor delimitări se realege

$$Y_5 = \frac{1}{R_5} + C_5 s \quad \text{şi} \quad Y_6 = \frac{1}{R_6} + C_6 s \tag{14}$$

şi prin urmare (13) devine:

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{R_1 R_4 (C_6 - C_5)(C_2 + C_3) s^2}{R_1 R_4 C_2 C_3 s^2 + R_1 (C_2 + C_3) s + 1} +$$

$$+ \frac{R_4 (C_2 + C_6 - C_5) + \frac{R_5 - R_6}{R_5 R_6} R_1 R_4 (C_2 + C_3)] s + R_4 \frac{R_5 - R_6}{R_5 R_6}}{R_1 R_4 C_2 C_3 s^2 + R_1 (C_2 + C_3) s + 1}. \tag{15}$$

Expresia (15) corespunde schemei din fig. 7. Ea indică posibilitatea realizării oricărei funcții de transfer de tipul (1).

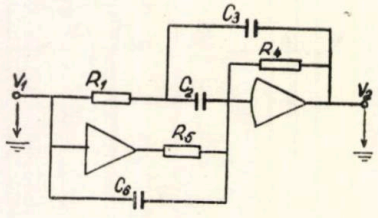


Fig. 6

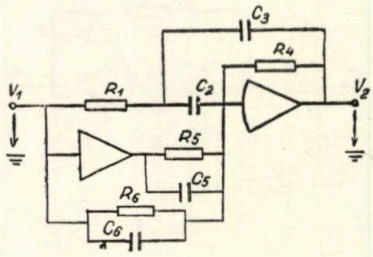


Fig. 7

3. Determinarea parametrilor schemei din fig. 7

Pentru a ilustra modul de determinare a parametrilor schemei din fig. 7 am ales expresia funcției de transfer de ordin doi-doi propusă în [5] pentru aproximarea funcției de transfer a întîrzierii:

$$H_{22}(s) = \frac{0{,}2932(\tau s)^2 - 2{,}2896(\tau s) + 5{,}6174}{(\tau s)^2 + 3{,}0220(\tau s) + 5{,}6174}, \tag{16}$$

în care τ este întîrzierea dorită, [sec]. Se alege $\tau = 1$ sec și se pune (16) sub forma:

$$H_{22}(s) = \frac{0{,}0522\, s^2 - 0{,}4076\, s + 1}{0{,}1781\, s^2 + 0{,}5380\, s + 1}. \tag{17}$$

Egalarea coeficienților expresiei (15) cu cei ai expresiei (17) furnizează următorul sistem de ecuații:

$$R_1 R_4 (C_6 - C_5)(C_2 + C_3) = -0{,}0522, \tag{18}$$

$$R_4 (C_2 + C_6 - C_5) + \frac{R_5 - R_6}{R_5 R_6} R_1 R_4 (C_2 + C_3) = 0{,}4076, \tag{19}$$

$$R_4 \frac{R_5 - R_6}{R_5 R_6} = -1, \tag{20}$$

$$R_1 R_4 C_2 C_3 = 0{,}1781, \tag{21}$$

$$R_1 (C_2 + C_3) = 0{,}5380. \tag{22}$$

Deoarece pentru cei opt parametri se impun doar cinci relații obligatorii, rezultă că trei parametri pot fi aleși arbitrar, ceilalți cinci fiind unic determinați. Determinarea parametrilor se va efectua din aproape în aproape deoarece sistemul (18)...(22) fiind neliniar, parametrii ce se aleg arbitrar nu pot fi oarecari.

După o serie de substituţii în sistemul de ecuaţii (18)...(22) se ajunge la expresia:

$$R_1 C_2 = 1{,}0426, \tag{23}$$

care conţine doar două necunoscute din care se alege arbitrar

$$C_2 = 1\,\mu F \tag{24}$$

rezultînd

$$R_4 = 1{,}0426\ M\Omega. \tag{25}$$

Introducînd (25) în (20) se obţine:

$$\frac{R_6 - R_5}{R_6 R_5} = 0{,}9591. \tag{26}$$

Se alege

$$R_5 = 0{,}5\ M\Omega \tag{27}$$

şi rezultă

$$R_6 = 0{,}9606\ M\Omega. \tag{28}$$

Din (18) şi (22), ţinînd cont şi de (25), se deduce

$$C_5 - C_6 = 0{,}0930\ \mu F. \tag{29}$$

Se alege

$$C_6 = 1\ \mu F \tag{30}$$

şi rezultă:

$$C_5 = 1{,}0930\ \mu F. \tag{31}$$

Introducînd (24) şi (25) în (21) şi (22) se obţine în cele din urmă:

$$R_1 = 0{,}3672\ M\Omega \text{ şi } C_3 = 0{,}4651\ \mu F. \tag{32}$$

La alegerea parametrilor schemei din fig. 7 trebuie să se urmărească ca valorile obţinute pentru capacităţi şi rezistenţe să fie în limitele celor uzuale în schemele analogice.

4. Concluzii

1. Se propune o nouă schemă de operator compus capabilă să realizeze orice funcţie de transfer de tipul (1).

2. Datorită faptului că o funcţie de transfer de orice ordin poate fi pusă sub forma unui produs de factori, fiecare factor fiind o fracţie raţională de ordin cel mult doi-doi, rezultă că prin conectarea în cascadă a unui număr de scheme de tipul celei din fig. 7 (cîte una pentru fiecare factor) se poate realiza orice funcţie de transfer întîlnită în practică.

3. Faţă de alte scheme folosite în prezent, schema propusă foloseşte un număr rezonabil de amplificatoare operaţionale şi elemente pasive.

4. Datorită posibilităţii de a alege arbitrar un număr de parametri, se pot obţine valori uzuale ale rezistenţelor şi capacităţilor pentru limite largi de variaţie ale coeficienţilor numerici a_j şi b_j din expresia (1).

Primită la 10 VI 1969

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Коган Б. Я., *О способах моделирования дробно-рациональных передаточных функций без помощи дифференцирующих элементов.* Автом. и телемех., 1960, **21**, стр. 72—81.
2. Noronha L. G., *Analogue Simulation of Transfer Functions.* Ann. Assoc. Internat. Calcule Analogique, 1964, *4*, pp. 233—242.
3. Poeată N., *Calculatoare automate şi programare.* EDP, Buc., 1967.
4. Paul R. J. A., Mech A. M. I., *Simulation of Rational Transfer Functions with Adjustable Coefficients.* Proceed. I. E. E., 1963, **110**, *4*, p. 671.
5. Mc. Avoy T. J., *Least-Square Dead-Time Approximations.* IEEE Trans. on Comp., 1968, pp. 174—177.

UN NOUVEAU SCHÉMA DE CALCUL POUR RÉALISER UNE FONCTION ARBITRAIRE DE TRANSFERT D'ORDRE DEUX-DEUX

(Résumé)

On propose un nouveau schéma analogique pour réaliser une fonction arbitraire de transfer d'ordre deux-deux. La schéma proposé est plus économique que ceux utilisés fréquemment.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D. C. 621.317.73.025

ON THE MEASURE OF REACTANCES WITH THE MODULUS BRIDGE

BY

V. PETRESCU, M. CREŢU, TRAIAN BALAN and PAUL GAVRILESCU

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, the 28—30 September 1967

1. Introduction

The paper treats some peculiar aspects of the measure of reactances by using a bridge of a. c. and a galvanometer of d. c. as a null instrument.

The bridge is represented in Fig. 1, where the following notations have been made: d_1, d_2, d_3, d_4 — diodes with silicium, with very close characteristics, r_2, r_3 — semivariable resistances for symmetrizing the arms with diodes, a — four equal resistances, much more bigger than the direct resistances of the diodes, R — fixed resistance, about as big as the resistances a, R_v — variable resistance (resistance box) having its maximum value at least equal with R, $Z = R_x + jX$ — the unknown impedance to be measured.

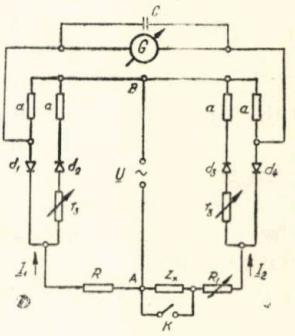


Fig. 1

Though the diodes $d_1 \ldots d_4$ have been chosen with as close as possible parameters it is, however very difficult to find diodes having the same nonlinear variation of the resistance as function of the current. That is why, there has been made initially the symmetrization of the arms with diodes at a certain value of the current wich will be kept roughly constant while measuring by introduction of adjusting semivariable resistances. We remove in this way an important source of errors of this bridge because of the nonliniarity of the diodes. Similarly, the small oscillations of the current for wich the symmetrization has been made will determine imperceptible errors because the resistances a in series with the diodes have a high value.

2. Experimental Proceeding

We shall consider the resistances r as the symmetrization resistance. The two alternations of the current I (fig. 2) will successively pass through the MLN and $ML'N$ arms, corresponding to the direction of conduction of the diodes d_3 and d_4. Owing to the high value of the resistance capable of shutting off a silicium diode we shall not take into account the shutting effect of the arm with shut off diode upon the one with conducting diode.

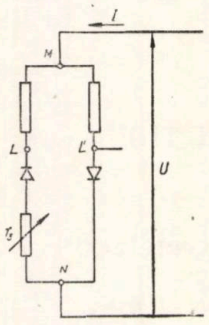


Fig. 2

The null instrument will show equilibrium when the average value of the current passing through it is equal to zero, or when the average value of the tension at the terminals is equal to zero.

Therefore :

$$(1)\quad \frac{1}{T}\int_0^T (u_{CB} + u_{BD})\,dt = 0, \qquad \int_0^T u_{BC}\,dt = \int_0^T u_{BD}\,dt,$$

with $u_{BC} = ai_1$ and $u_{BD} = ai_2$.

Taking into account that $i_1 = I_{1\max} \sin \omega t$, $i_2 = I_{2\max} (\sin \omega t - \varphi)$, and introducing into (1) we get :

$$\frac{1}{T}\int_0^{T/2} I_{1\max} \sin \omega t\,dt = \frac{1}{T}\int_{\varphi/\omega}^{T/2+\varphi/\omega} I_{2\max} \sin (\omega t - \varphi)\,dt,$$

therefore results $I_{1\max} = I_{2\max}$.

But $I_{1\max} = U/|R + d|$ and $I_{2\max} = U/|Z_x + R_v + d|$; hence follows :

$$|R + d| = |Z_x + R_v + d|,$$

this one being the basic relation for finding out the unknown impedance.

As the moduli of the arms interfere, we called this circuit *modulus bridge*.

We shall make the basic relation a particular one in the case of the measure of the capacitance of capacitors and the inductance of coils without losses.

2.1. Measure of the Capacitance

Let's take $Z_x = 1/j\omega C_x$. Introducing it into the basic relation there results :

$$R + d = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C_x^2} + (R_v + d)^2},$$

where R_v is the value of the variable resistance in the equilibrium situation.

Hence results:

$$C_x = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{(R+d)^2 - (R_v+d)^2}} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{(R-R_v)(R+R_v+2d)}} .$$

The above relation may constitute the calculus one.

2.2. Measure of the Inductance

Let be $Z_x = R_x + j\omega L_x$. The equilibration for determining the resistance proper to the R_x coil is executed with the same bridge fed at a continuous tension (of such a value that the current through the arms should be equal to symmetrizing current).

Let's take $R_x = r$. Introducing it in the basic relation we get

$$R + d = \sqrt{L_x^2 \omega^2 + (r + R_v + d)^2},$$

whence:

$$L_x = \frac{1}{\omega} \sqrt{(R - R_v - r)(R + R_v + r + 2d)}.$$

By and large the way of measuring goes on as follows:

The bridge being equilibrated for $R_v = R$ and the K switch — shut the latter is opened introducing the impedance Z_x in the circuit. The resistance R_v is decreased until the equilibrium is reached. In this case, the value of R_v enters into the equilibrium relation.

3. Advantages of the Measure with the Modulus Bridge

a) The modulus bridge has owing to the fact that a galvanometer of continuous current is used as a null instrument, a superior sensitiveness as compared with that of the common one of alternating current even if the latter uses a vibrations galvanometer as null indicator.

The increasing of sensitiveness was made without using the electronic amplification of the unequilibrium signal.

b) No other standard reactive elements of comparison are necessary for measuring the inductance and capacitance, this measure being made only by varying a resistance.

As a disadvantage there is mentioned the necessity of knowing the value of the feeding tension for the bridge to which the perfect symmetrization of the values of the resistances in the arms with diodes is made.

4. Experimental Results

There has been verified the standardization of a capacity box of Ulrich type with four steps in tens.

The bridge was made up of the following elements: $a = 5000\ \Omega$, $R = 5000\ \Omega$, R_v — resistance box with the minimum step of 0,1 Ω. The resistance of a diode, with the symmetrizing value, was of 149 Ω. The symmetrization of the bridge arms has been made for a current of 5 mA.

Romanian silicium diodes, type DR-303, have been used. The feeding tension of the bridge was of 55 V.

There has been used as null indicator a d. c. galvanometer, type R. F. T., with the following characteristic features: the constant — 10^{-7} A/mm, $R_i = 2{,}4$ kΩ. To protect the galvanometer against the alternating component of the pulsating current a capacitor of 100 μF has ben used. For the second harmonic, the one with the maximum amplitude in the frequency spectrum of the alternating components, the used capacitor has a reactance of about 15 Ω.

The high sensitiveness of the modulus bridge when varying the capacity must be noticed: $s = 4$ div/nF when measuring a capacity of 0,5 μF.

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Electrical Measurements and Machines

REFERENCES

1. Векслер М. А., Денисов К. К., *Автоматизация химических анализов растворов.* Изд. „Химия", М., 1965.
2. Karo D., *Electrical Measurements.* **T. II,** London, 1953.
3. Grave H. F., *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice.* Ed. Tehn., Buc., 1966 (trad. din l. germană).
4. Карандеев К., *Мостовые методы измерения.* ГИТЛ, Киев, 1953.

ASUPRA MĂSURĂRII REACTANŢELOR CU PUNTEA DE MODUL

(Rezumat)

Se evidenţiază aspecte particulare ale măsurării reactanţelor prin metoda punţii Wheatstone de c. a., cu diode semiconductoare, denumită de autori „punte de modul".

Se deduc formulele de calcul pentru măsurarea reactanţelor inductive şi capacitive fără pierderi şi se descriu condiţiile de lucru pentru reducerea la minimum a erorii de metodă.

Măsurările cu puntea de modul prezintă următoarele avantaje: a) sensibilitatea indicării poziţiei de zero este simţitor mărită, faţă de cazul cînd se utilizează indicatoare de c. a. clasice, căci se foloseşte ca indicator de nul un galvanometru magnetoelectric; b) pentru măsurarea parametrilor reactivi (L sau C) nu sînt necesare alte elemente reactive etalon de comparaţie, obţinerea echilibrului realizîndu-se numai prin variaţia unei rezistenţe.

Ca dezavantaje se semnalează dependenţa de frecvenţă şi necesitatea simetrizării braţelor cu diode prin menţinerea aproximativ constantă a tensiunii de alimentare a punţii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 621.317.7.082.72

LOGOMETRU ELECTROSTATIC CU VARIAŢIE DE TENSIUNE

DE

M. ANTONIU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Condiţia de funcţionare a oricărui logometru este ca cel puţin unul din cele două cupluri active să depindă de unghiul de rotire al organului mobil [1]. La logometrul electrostatic clasic [2], [3] această condiţie se realizează printr-o geometrizare corespunzătoare a electrozilor activi, avînd drept consecinţă o anumită complicare şi scumpire a tehnologiei. Un alt neajuns al acestui logometru îl constituie prezenţa bendiţei subţiri care leagă electrodul mobil cu borna de intrare respectivă, prezenţă ce devine supărătoare mai ales la frecvenţe ridicate.

Utilizînd principiul variaţiei de tensiune [4] s-a ajuns la un nou tip de logometru — logometrul electrostatic cu variaţie de tensiune — la care inconvenientele menţionate sînt eliminate în întregime. În cele ce urmează se prezintă două variante ale acestuia: cu patru şi cu trei condensatoare. Pentru simplificare acestea vor fi notate simbolic cu λ_4 şi respectiv λ_3. În acelaşi scop, logometrul electrostatic clasic descris în [3] va fi notat cu λ_k.

Din cîte cunoaşte autorul, logometrul electrostatic cu variaţie de tensiune nu a fost descris în literatura de specialitate.

2. Circuitul de măsură

Atît λ_3 cît şi λ_4 se studiază în schemă de frecvenţmetru; în acest scop se utilizează circuitul de măsură cu rezonanţă de tensiune (alcătuit la rîndul său din circuitele rezonante serie: $R_1 L_1 K_1$ şi $R_2 L_2 K_2$), reprezentat în fig. 1 şi care este analizat în [3].

Tensiunile de ieşire din circuitul menţionat, au forma arătată în fig. 4 şi satisfac relaţiile:

$$(1) \qquad U_1 = U_{1m}\left[1 + a\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\right], \quad U_2 = U_{2m}\left[1 - a\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\right],$$

unde

$$(2) \quad U_{1m} = U_{2m}, \quad (3) \quad a = \frac{U_{1n} - U_{10}}{U_{1m}} \approx \frac{U_{20} - U_{2n}}{U_{2m}}, \quad (4) \quad \mu = \frac{f - f_0}{f_n - f_0}$$

şi în care f reprezintă frecvenţa de măsurat iar indicii 0, m şi n simbolizează valorile mărimilor U_1, U_2 şi f pentru $\alpha = 0$, $\alpha = \alpha_n/2$ şi respectiv $\alpha = \alpha_n$ (fig. 1).

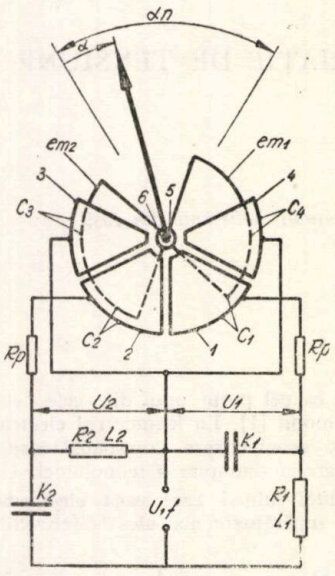


Fig. 1

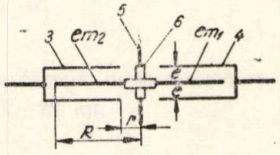


Fig. 2

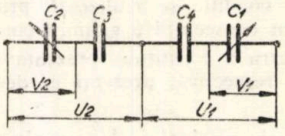


Fig. 3

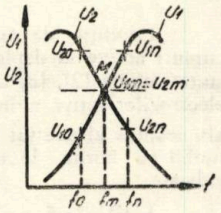


Fig. 4

3. Logometrul cu patru condensatoare (λ_4)

Schema de principiu şi schema electrică a acestuia sînt reprezentate în fig. 1 şi respectiv în fig. 3. Electrodul mobil em_1 împreună cu electrozii ficşi *1* şi *4* alcătuiesc condensatoarele C_1 şi C_4 iar electrodul mobil em_2 împreună cu electrozii ficşi *2* şi *3* constituie condensatoarele C_2 şi C_3. În C_1 se dezvoltă cuplul direct iar în C_2 — cuplul oponent. C_3 şi C_4 servesc la variaţia tensiunilor de intrare în primele două condensatoare şi totodată la legătura capacitivă cu o bornă fixă exterioară, înlăturînd necesitatea folosirii bendiţei de aducţie utilizată la λ_k. Electrozii mobili em_1 şi em_2 sînt izolaţi electric între ei precum şi faţă de axul *5* cu ajutorul bucşei *6* (fig. 2). Rezistenţele de protecţie R_p servesc la limitarea curentului în caz de scurt-circuit între electrozii activi.

3.1. Ecuaţia de funcţionare

Tensiunile la bornele condensatoarelor active C_1 şi C_2 (fig. 3) sînt:

$$V_1 = U_1 \frac{C_4}{C_1 + C_4}, \quad V_2 = U_2 \frac{C_3}{C_2 + C_3}.$$

Primele, după cum rezultă din fig. 1, satisfac relaţiile:

$$C_1 = C_{10} + K\alpha, \quad C_2 = C_{20} - K\alpha, \tag{5}$$

în care:

$$K = \frac{\beta C_{1n}}{\alpha_n} = \frac{\beta C_{20}}{\alpha_n}, \tag{6}$$

$$\beta = \frac{C_{1n} - C_{10}}{C_{1n}} = \frac{C_{20} - C_{2n}}{C_{20}} \approx \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \delta}. \tag{7}$$

Prin urmare

$$V_1 = \frac{U_1}{\psi_1}, \quad V_2 = \frac{U_2}{\psi_2},$$

unde:

$$\psi_1 = 1 + b[1 - \beta(1 - \eta)], \quad \psi_2 = 1 + b(1 - \beta\eta) \tag{8}$$

şi în care:

$$b = \frac{C_{1n}}{C_4} = \frac{C_{20}}{C_3}, \tag{9}$$

$$\eta = \frac{\alpha}{\alpha_n}. \tag{10}$$

Aici, C_{10}, C_{20} şi C_{1n}, C_{2n} reprezintă valorile lui C_1 şi C_2 pentru $\alpha = 0$ şi respectiv $\alpha = \alpha_n$ iar δ are semnificaţia din (16).

Datorită tensiunilor V_1 şi V_2, asupra organului mobil acţionează cuplurile:

$$M_1 = \frac{1}{2} V_1^2 \frac{dC_1}{d\alpha} = \frac{KU_1^2}{2\psi_1^2}, \quad M_2 = \frac{KU_2^2}{2\psi_2^2}, \tag{11}$$

primul în sensul creşterii lui α iar al doilea în sens contrar. Din condiţia de echilibru ($M_1 = M_2$) rezultă ecuaţia de funcţionare căutată

$$\eta = \frac{(\rho - 1)(b + 1) + \beta b}{\beta b(\rho + 1)}, \tag{12}$$

unde:

$$\rho = \frac{U_1}{U_2} = \frac{1 + a(\mu - 1/2)}{1 - a(\mu - 1/2)}, \tag{13}$$

precum şi condiţia de racordare dintre circuitul de măsură şi mecanismul logometric:

$$b = \frac{2a}{2(\beta - a) + a\beta}. \tag{14}$$

Asociind (12), (13) și (14) se ajunge la $\eta = \mu$, ceea ce arată că scara instrumentului, în unități de frecvență, este liniară (uniformă).

3.2. Expresii de calcul

Utilizînd expresiile (11) se obține cuplul stabilizant specific minim

$$M_s' = \frac{\partial}{\partial \alpha}(M_1 - M_2) = \frac{2b^2\beta^2 C_{1n} U_{1m}^2}{\alpha_n^2[1 + b(1 - \beta/2)]^3}. \tag{15}$$

Pe de altă parte, din fig. 1 și fig. 2, neglijînd efectul de margine și considerînd $r^2 \ll R^2$, rezultă relațiile:

$$C_{10} = C_{2n} = \frac{\varepsilon\delta R^2}{e}, \quad C_{1n} = C_{20} = \frac{\varepsilon(\alpha_n + \delta)R^2}{e}, \tag{16}$$

unde ε reprezintă permitivitatea dielectricului (aer) dintre electrozii activi iar δ — unghiul de întrepătrundere dintre electrozii em_1 și *1* (fig. 1) cînd $\alpha = 0$ sau, dintre electrozii em_2 și *2* cînd $\alpha = \alpha_n$.

Asociind expresiile (7), (15) și (16) se ajunge la:

$$R^2 = \frac{e(\alpha_n + \delta)[1 + b(1 - \beta/2)]^3 M_s'}{2b\varepsilon U_{1m}^2}, \tag{17}$$

relație fundamentală pentru dimensionarea mecanismului λ_4. Distanța dintre electrozii activi (fig. 2) poate fi calculată cu relația:

$$e = \frac{(2 + a)U_{1m}}{2(1 + b)E_L}, \tag{18}$$

unde E_L reprezintă intensitatea admisibilă a cîmpului electric dintre electrozii activi; practic această valoare este de 0,4 ... 0,7 kV (eff)/mm [5].

Dacă se compară (17) cu relația (31) din [3] se poate observa că în condiții egale, λ_4 asigură un cuplu stabilizant specific ceva mai mare decît λ_k.

Notînd cu θ unghiul la centru al electrozilor em_1 și em_2, cu θ_1 pe cel al electrozilor ficși *1* și *2* și cu θ_2 pe cel al electrozilor ficși *3* și *4*, în baza fig. 1 se pot scrie relațiile:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \quad \theta_1 = \alpha_n + \delta, \quad \theta_2 = \frac{\alpha_n + \delta}{b}. \tag{19}$$

Din aceeași figură rezultă ca α_n trebuie să satisfacă inegalitatea $2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_n < 2\pi$ adică:

$$\alpha_n < \frac{2\pi}{2(1 + \delta/\alpha_n)(1 + 1/b) + 1}. \tag{19'}$$

Pentru $\delta/\alpha_n = 0{,}3$ și $b = 1 \ldots 2$, din (19') rezultă $\alpha_n < 58° \ldots 73°$, ceea ce arată că la λ_4 unghiul de scară disponibil este sensibil mai mic decît la λ_k.

3.3. Exemplu de calcul şi construcţie

Se utilizează circuitul de măsură calculat în [3] care furnizează la ieşire $U_{1m} = U_{2m} = 1\,120$ V. Se adoptă $\alpha_n = 55°$, $\alpha_n M'_s = 3$ μNm, $\delta = 18°$, $b = 1{,}15$. Cu ajutorul acestor date, din (17), (18) şi (19) rezultă: $R = 38$ mm, $e = 2$ mm, $\theta = 136°$, $\theta_1 = 73°$, $\theta_2 = 63°$.

Pe baza acestor rezultate de calcul s-a construit, în condiţiile unui atelier obişnuit de mecanică fină, modelul λ_4, reprezentat în fig. 5. Electrozii ficşi şi mobili s-au construit din tablă de aluminiu de 1 mm şi respectiv 0,075 mm grosime iar izolaţia electrică a părţilor sub tensiune — din polimetilmetacrilat. Ecranul electrostatic s-a realizat prin metalizarea interiorului cutiei de bachelită a aparatului. Principalii parametri ai modelului λ_4, determinaţi experimental, sînt trecuţi în tabelul din § **4.3.**

4. Logometrul cu trei condensatoare (λ_3)

În fig. 6 este reprezentată schema de principiu iar în fig. 8 — schema electrică a unui astfel de logometru. Aici, electrodul mobil *em*, izolat electric faţă de axul *4* prin intermediul bucşei *5* (fig. 7), împreună cu electrozii ficşi *1, 2, 3*, formează condensatoarele de lucru C_1 şi C_2 precum şi condensatorul divizor C_3. În C_1 se dezvoltă cuplul direct iar în C_2 — cuplul oponent. C_3 serveşte la variaţia tensiunilor de intrare în primele şi totodată la realizarea legăturii capacitive cu borna de intrare respectivă. Tensiunile de intrare U_1 şi U_2, satisfac relaţia (1).

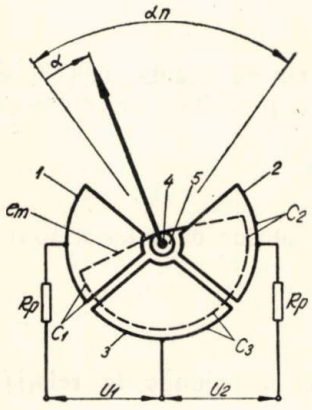


Fig. 6

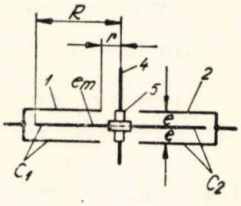


Fig. 7

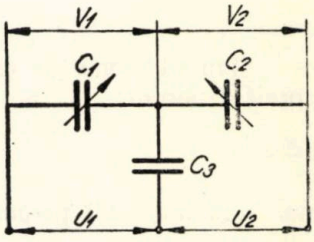


Fig. 8

4.1. Ecuaţia de funcţionare

Punctul de funcţionare al circuitului de măsurat (*M* — fig. 4) este astfel ales încît tensiunile U_1 şi U_2 sînt aproximativ mereu în cuadratură. În această situaţie, ţinînd seama că C_1, C_2 şi C_3 (fig. 8) sînt mici în comparaţie cu K_1 şi K_2 (fig. 1) şi că primele două sînt de forma (5), în baza fig. 8 rezultă că tensiunile de intrare la electrozii activi satisfac relaţiile:

$$V_1^2 = \frac{\psi_2^2 U_1^2 + (\psi_2 - 1)^2 U_2^2}{c^2}, \quad V_2^2 = \frac{\psi_1^2 U_2^2 + (\psi_1 - 1)^2 U_1^2}{c^2}, \tag{20}$$

unde:

$$c = 1 + b(2 - \beta), \tag{21}$$

iar ψ_1 şi ψ_2 sînt de forma (8) cu deosebirea că

$$b = \frac{C_{1n}}{C_3} = \frac{C_{20}}{C_3}, \tag{22}$$

în care C_{1n} şi C_{20} au semnificaţia din (9).

Prin urmare, cuplul direct (în sensul de creştere a lui α) şi cel oponent vor fi:

$$M_1 = \frac{KV_1^2}{2}, \quad M_2 = \frac{KV_2^2}{2}, \tag{23}$$

ecuaţia de funcţionare căutată fiind:

$$\rho^2 = \frac{\psi_1^2 - (\psi_2 - 1)^2}{\psi_2^2 - (\psi_1 - 1)^2}. \tag{24}$$

De aici se deduce condiţia de racordare ($\eta = \mu = 1$) dintre circuitul de măsură şi mecanismul logometric:

$$a \approx \beta b. \tag{25}$$

Substituind pe aceasta din urmă în (24) şi ţinînd seama de (13) se obţine $\eta = \mu$, ceea ce arată că scara instrumentului în unităţi de frecvenţă este liniară.

4.2. Expresii de calcul

Ţinînd seama de (23) şi utilizînd (6) şi (7) se obţine cuplul stabilizant specific minim:

$$M_s' = \frac{2b\beta^2 C_{1n} U_{1m}^2}{c\alpha_n^2}, \tag{26}$$

sau utilizînd (25) precum şi a doua expresie (16) se ajunge la relaţia:

$$R^2 = \frac{ce\alpha_n M_s'}{2a\varepsilon U_{1m}^2}, \tag{27}$$

care este fundamentală pentru dimensionarea mecanismului λ_3.

Cercetînd tensiunile la bornele condensatoarelor C_1, C_2 şi C_3 se găseşte că toate sînt mai mici decît tensiunea U_{1m}; considerînd pentru acoperire pe aceasta din urmă, distanţa dintre electrozii activi va fi dată de relaţia:

$$e = \frac{U_{1m}}{E_L}. \tag{28}$$

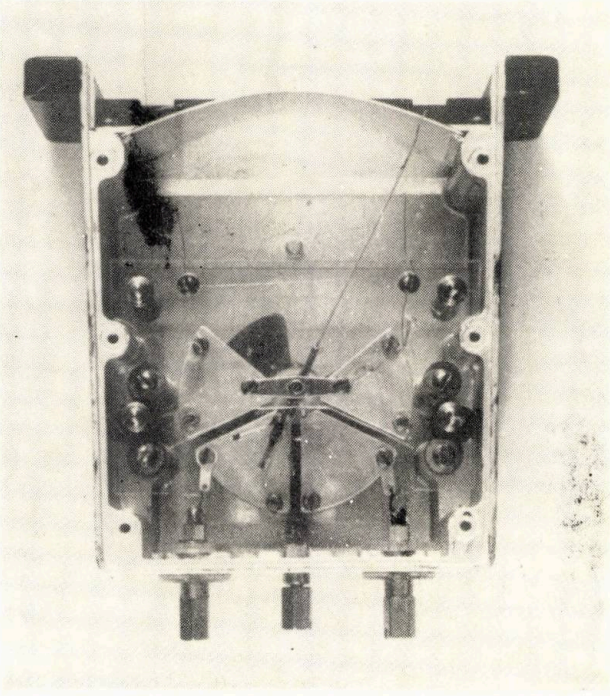


Fig. 5

Notînd acum cu θ unghiul la centru al electrodului e_m și cu θ_1, θ_2, θ_3 — unghiurile la centru ale electrozilor ficși *1*, *2*, *3* (fig. 6) rezultă:

$$\theta = \theta_1 + \theta_3 + \delta, \quad \theta_1 = \theta_2 = \alpha_n + \delta, \quad \theta_3 = \frac{\alpha_n + \delta}{b}. \tag{29}$$

Din aceeași figură se observă că $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 2\pi$, adică

$$\alpha_n < \frac{2\pi}{(1 + \delta/\alpha_n)(2 + 1/b)}.$$

Pentru $\delta/\alpha_n = 0{,}3$ și $b = 1 \ldots 2$ rezultă $\alpha_n < 90° \ldots 110°$, ceea ce arată că la λ_3 unghiul de scară disponibil este suficient de mare.

În fine, notînd pe M'_s din (27) și din (31) [3], cu $M'_{s\lambda_3}$ și respectiv $M'_{s\lambda_k}$ și comparînd aceste relații ($\delta/\alpha_n = 0{,}3$, $b = 0{,}9$, $a \approx 0{,}7$) cu expresia (25) se obține:

$$\frac{M'_{s\lambda_3}}{M'_{s\lambda}} = \frac{(2+a)^2}{2c\,(2-a)} = 1{,}4 \ldots 1{,}6,$$

ceea ce arată că la egale dimensiuni și tensiuni de alimentare mecanismul λ_3 asigură un cuplu stabilizant specific, sensibil mai mare decît λ_k și deci este mai adecvat ca aparat de tablou decît acesta din urmă.

4.3. Exemplu de calcul și construcție

Se consideră: $U_{1m} = 1\,120$ V, $a = 0{,}7$ și se adoptă: $\alpha_n = 60°$, $\delta = 20°$, $\alpha_n M'_s = 3\,\mu$Nm. Cu ajutorul acestora ($b = 0{,}93$) din (27), (28) și (29) rezultă $R = 29$ mm, $e = 2$ mm și respectiv $\theta_1 = \theta_2 = 80°$, $\theta_3 = 87°$, $\theta = 180°$. Un calcul simplu pe baza densității de curent în *em*, conduce la $R_p = 5$ kΩ.

Mecanismul λ_3 construit pe baza acestor calcule este reprezentat în fig. 9. Cutia aparatului este identică cu cea din fig. 5. Principalii parametri ai logometrului λ_3 sînt trecuți în tabelul 1, unde, pentru comparație, s-au trecut și parametrii logometrelor λ_k și λ_4.

Tabelul 1

Logometrul	R mm	g mm	α_n	Γ	R_p kΩ	f kHz
λ_k	41	0,1	90°	0,50	100	50
λ_4	38	0,075	55°	0,55	5	500
λ_3	29	0,04	60°	0,90	5	500

În tabel R, R_p și α_n au semnificația din text iar g, Γ și F reprezintă grosimea electrodului mobil, factorul de calitate Keinath [6] și respectiv limita superioară a domeniului de frecvențe pînă la care se menține clasa

de precizie (1,5) a logometrului respectiv. F s-a determinat în condiţiile în care simultan scăderea cuplului stabilizant, datorită căderilor de tensiune pe rezistenţele de protecţie R_p, să fie sub 25% iar puterea disipată pe ambele rezistenţe să fie sub 5 W.

Datele din tabel arată pe de o parte că, exceptînd α_n şi F, λ_k şi λ_4 au aproximativ aceiaşi parametri de calitate iar pe de altă parte că λ_3 are Γ şi R sensibil mai buni decît la primele două şi ca urmare este mai adecvat pentru tablou decît ele. La aceasta trebuie adăugat, după cum se observă din fig. 9, şi simplitatea remarcabilă a geometriei mecanismului λ_3.

Neajunsul principal al logometrului λ_3 constă în dependenţa cuplurilor active de unghiul de fază dintre tensiunile U_1 şi U_2. În cazul de faţă acestea fiind în cuadratură, neajunsul menţionat este în bună măsură eliminat.

5. Concluzii

1. Logometrul electrostatic cu variaţie de tensiune are o geometrie mai simplă (alcătuită numai din arce de cerc şi linii drepte) decît cel clasic şi — funcţionînd în schemă de frecvenţmetru — parametri mai buni. În schimb are un grad mai redus de adaptabilitate în ceea ce priveşte forma cerută a scării gradate.

2. Dintre logometrele analizate, cel cu trei condensatoare (λ_3) are parametrii mai buni şi este adecvat ca aparat de tablou fiind o construcţie simplă, compactă şi suficient de robustă. În afară de funcţia de frecvenţmetru el poate fi utilizat şi în schemă de faradmetru, teraohmmetru sau alt tip de instrument la care tensiunile puse în joc, sînt în mod necesar mari.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de măsuri şi maşini electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Арутюнов В. О., *Электромеханические логометры.* ГЭИ, М., 1956, стр. 26.
2. Keinath G., *Die Technik elektrischen Messgeräte.* Oldenburg Verlag, Berlin, 1922, S. 448.
3. Antoniu M., *Frecvenţmetru cu logometru electrostatic pentru domeniul audio.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3—4*, pp. 359—368.
4. — *Voltmetru electrostatic cu variaţie de tensiune.* Metrol. apl., 1969, *2.*
5. Drysdale C. V., *Electrical Measuring Instruments.* London, 1952, Ch. **10.**
6. Palm A., *Elektrische Messgeräte und Messeinrichtungen.* Springer Verlag, Berlin, 1963, S. 11.

LOGOMÈTRE ÉLECTROSTATIQUE À VARIATION DE TENSION

(Résumé)

On présente un logomètre électrostatique dont la loi de fonctionnement est réalisée par la variation des tensions d'entrée aux electrodes, à l'aide de deux diviseurs de tension variables commandés par le mécanisme logométrique même. Par rapport au logomètre électrostatique classique, ce nouveau logomètre a la géométrie des électrodes plus simple, le facteur de qualité Keinath plus grand et peut fonctionner à des fréquences plus élevées. Le fréquencemètre qui utilise un logomètre electrostatique à variation de tension est acceptable comme appareil de tableau jusqu'à 500 kHz.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 621.317.41

DISPOZITIV TRANZISTORIZAT PENTRU MĂSURAREA SUSCEPTIBILITĂŢII MAGNETICE

DE

V. BĂRBOIU şi C. ONU

1. Introducere

Problema cunoaşterii susceptibilităţii magnetice în cîmpuri magnetizante slabe este foarte importantă, în special în lucrările de geofizică. Există numeroase metode pentru astfel de determinări. Unele din ele necesită mult timp, altele sînt aplicabile la cîmpuri magnetizante intense şi majoritatea sînt neutilizabile în condiţii de teren.

În cele ce urmează este prezentat un susceptibilometru realizat în fază de laborator care lucrează cu cîmpuri magnetizante slabe şi care poate fi adaptat pentru măsurători efectuate pe teren. Aparatul se bazează pe metoda punţii de transformare [1], [2], care reprezintă o perfecţionare a metodei de inducţie magnetică [3]. Se poate determina susceptibilitatea magnetică totală precum şi susceptibilitatea de anizotropie (susceptibilitatea pe direcţii. diferite). Aparatul măsoară susceptibilităţi de ordinul a 5.10^{-6} uem. cm^{-3} cu o precizie de 5%. Pragul de sensibilitate poate fi coborît la 5.10^{-8} uem. cm^{-3} dar imprecizia devine de ordinul a 10...20%. Pentru susceptibilităţi mai mari decît 10^{-4} uem. cm^{-3} precizia măsurătorilor este de aproape 1%.

2. Metoda punţii de transformare

În principiu metoda punţii de transformare constă în următoarele: proba supusă măsurătorii şi introdusă în întrefierul miezului unuia din cei doi transformatori (fig. 1) modifică reluctanţa acestuia.

Înfăşurările primare A şi A' şi înfăşurările secundare B şi B' sînt astfel legate încît în lipsa probei tensiunile din secundare se autocompensează.

Modificarea reluctanţei produsă de probă introduce un dezechilibru care după amplificare şi detecţie produce o tensiune proporţională cu momentul magnetic indus în probă şi deci cu susceptibilitatea magnetică a acesteia.

Printr-un calcul aproximativ se poate evalua mărimea dezechilibrului tensiunilor din secundare datorat probei. În acest scop se va calcula variaţia relativă a inducţiei magnetice $(B' - B)/B$ din miezul în întrefierul căruia se introduce proba, care este egală cu variaţia relativă a tensiunii secundarului de pe acest miez. În absenţa probei legea circuitului magnetic pentru acest miez (fig. 2) se scrie:

$$NI = BA(R_m + R_{mg}), \tag{1}$$

unde NI reprezintă numărul de amper-spire, B—inducţia magnetică, R_m—reluctanţa miezului cu întrefier, R_{mg}—reluctanţa întrefierului.

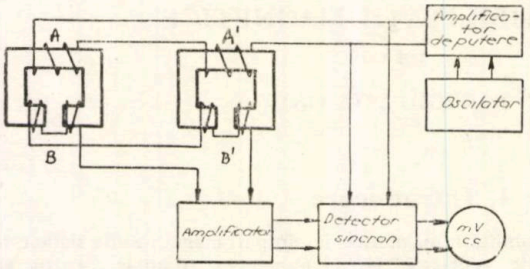


Fig. 1

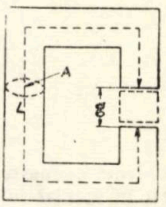


Fig. 2

Cînd proba umple întrefierul legea devine:

$$NI = B'A(R_m + R'_{mg}), \tag{2}$$

R'_{mg} fiind reluctanţa întrefierului umplut de o probă de susceptibilitate χ. Din compararea relaţiilor (1) şi (2) şi folosind expresiile reluctanţelor se găseşte relaţia:

$$B\left(\frac{L}{\mu} + g\right) = B'\left(\frac{L}{\mu} + \frac{g}{1 + 4\pi\chi}\right),$$

μ fiind permeabilitatea miezului cu întrefier. Efectuînd calculele şi ţinînd cont că în cazul rocilor slabe $4\pi\chi \ll 1$ se găseşte:

$$\frac{B' - B}{B} = 4\frac{g}{L}\mu\pi\chi. \tag{3}$$

Deci conform celor de mai sus variaţia relativă a tensiunii secundarului de pe acest miez este:

$$\frac{U' - U}{U} = 4\frac{g}{L}\mu\pi\chi; \tag{4}$$

$U_s = U' - U$ este chiar semnalul introdus de dezechilibrul produs de probă şi după cum se observă este proporţional cu susceptibilitatea magnetică a acesteia:

$$U_s = 4\pi U \frac{g}{L} \mu\pi\chi . \tag{5}$$

Excitarea miezului se poate realiza fie alimentînd în c.c. şi observînd semnalul cu un galvanometru balistic, fie folosind curent sinusoidal de frecvenţă joasă şi în acest caz semnalul, după amplificare şi detecţie, este indicat de un instrument cu ac indicator. Calculul expus corespunde primului tip de excitare şi la întreruperi de viteză infinită, dar el este principial aplicabil şi pentru al doilea tip de excitare (cel folosit de noi). Deosebirea constă în dependenţa de frecvenţă a semnalului, care are un caracter de proporţionalitate. Se poate considera, pentru cazul excitării cu curent sinusoidal de joasă frecvenţă, care este avantajoasă din toate punctele de vedere, următoarea relaţie de proporţionalitate.

$$U_s \approx \frac{g}{L} \mu U \omega \chi . \tag{6}$$

Deoarece nu se pot realiza simultan g şi μ de valori mari, pentru amplificarea semnalului se vor folosi miezuri cu μ mare, mărimea întrefierului alegîndu-se printr-un compromis.

Miezurile folosite de noi, de secţiune $2 \times 2{,}5$ cm, avînd perimetrul (fără întrefier) de 20 cm, iar lungimea întrefierului de 1,5 cm (cu $\mu_i \simeq 1\,000$), au pentru $g = 1{,}5$ cm, $\mu \simeq 5$. Frecvenţa este limitată de dimensiunile miezurilor, aparatul lucrînd la frecvenţa de 5 kHz. Miezurile sînt realizate din ferită Mn-Zn şi au punctul Curie situat la peste 100°C, deci în afara temperaturilor de lucru. De asemenea inducţia de saturaţie depăşeşte cu mult valoarea inducţiei maxime care s-ar putea realiza prin umplerea completă a întrefierului (5000 Gs faţă de 2000 Gs).

3. Descrierea susceptibilometrului

Schema de principiu a susceptibilometrului este dată în fig. 1. El comportă un oscilator sinusoidal de frecvenţă 5 kHz, un amplificator de putere, cele două transformatoare în opoziţie şi partea de amplificare şi detecţie a semnalului U_s. În fig. 3 este redată schema electronică a susceptibilometrului. Oscilatorul este realizat cu tranzistorul T_1 (EFT 131) şi este de tipul Hartley. Amplificatorul de putere lucrează cu tranzistorii T_2, T_3 (EFT 213) în contratimp şi poate debita în primarele transformatoarelor o putere de 1...5 W, reglabilă prin potenţiometrul din colector. El excită cele două miezuri printr-un cîmp avînd intensitatea de 1...2 Oe. Secundarele B şi B' sînt legate în opoziţie astfel că în lipsa probei suma tensiunilor induse este nulă. Pentru o compensare mai bună se foloseşte potenţio-

metrul P_1 de 200 kΩ. Mărimea tensiunii induse în secundar (U) este de 10...12 V fiind limitată de creşterea instabilităţii amplificatorului de putere şi de mărirea vibraţiilor mecanice. Divizorul capacitiv de la intrarea în etajul de amplificare permite lărgirea domeniului de măsură spre valori mari. Amplificatorul cuprinde două etaje de adaptare (tranzistorii T_4 şi T_6 (EFT 352)), un etaj de amplificare în tensiune realizat cu tranzistorul T_5 (EFT 352) şi

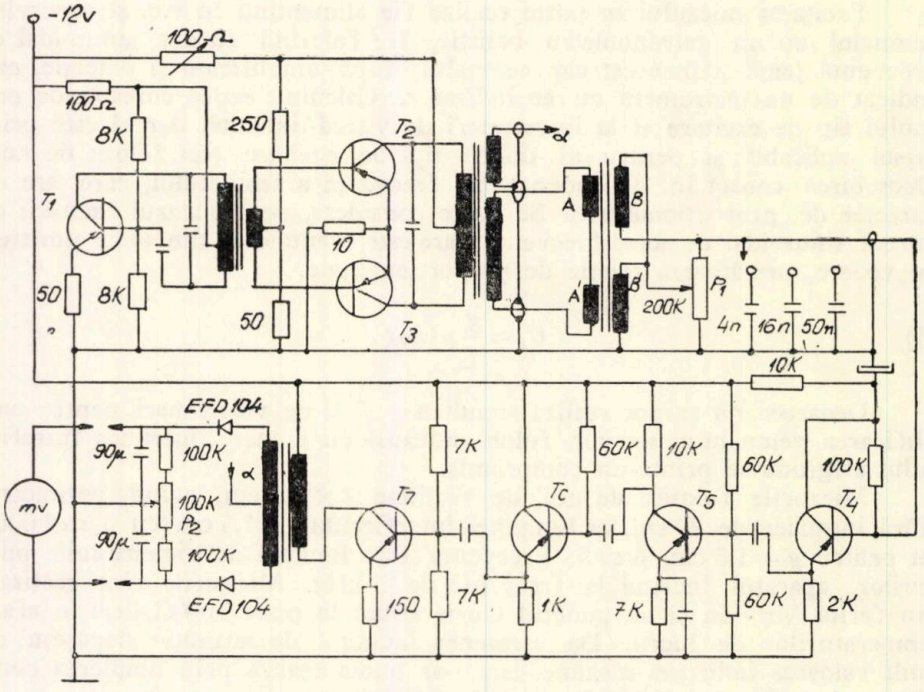


Fig. 3

etajul final realizat cu tranzistorul T_7 (EFT 131). Detectorul sincron foloseşte diodele EFD 108. Potenţiometrul P_2 serveşte la simetrizarea braţelor detectorului. S-a obţinut următoarea corespondenţă între tensiunea semnalului detectat dat de probă şi susceptibilitatea ei magnetică:

$$1\text{mV} \rightarrow 5.10^{-7}\ \text{uem. cm}^{-3}.$$

Deoarece instabilitatea aparatului este de aproximativ 0,5 mV măsurătorile se pot efectua satisfăcător pentru probe cu $\chi > 5.10^{-6}$ uem. cm^{-3}.

Instabilitatea se datorează atît zgomotului termic al tranzistorilor cît şi variaţiilor în timp şi funcţie de temperatură a proprietăţilor magneto-mecanice ale miezurilor. Menţionăm că miezurile folosite de noi nu sînt complet rigide; pentru micşorarea întrefierului s-au folosit adaosuri din ferită.

4. Modul de lucru

Pentru măsurători trebuie folosite probe cu aceleași dimensiuni și anume: a) cilindrice de $2 \times 1{,}3$ cm (diametru $\times$ înălțime) pentru măsurători de susceptibilitate totală și b) prismatice de $1{,}3 \times 1{,}3 \times 1{,}3$ cm pentru determinări de susceptibilitate de anizotropie. De asemenea probele trebuie introduse în același mod în întrefier.

Pentru etalonarea semnalului detectat s-au folosit probele indicate în lucrarea [1].

O limită a aparatului este aceea că nu poate furniza indicații corecte pentru probe cu rezistivitate electrică redusă, datorită unor semnale parazite defazate cu 90° față de semnalul magnetic. Aceste semnale se pot micșora mult folosind probe majorate foarte fin, astfel ca particolele de rezistivitate mică (în speță chiar magnetita) să fie foarte mici. Aparatul poate fi folosit cu succes pentru determinările enunțate și efectuate asupra rocilor cu susceptibilități cuprinse într-o gamă foarte largă (de la 5.10^{-6} uem. cm^{-3} la 10^{-1} uem. cm^{-3}. Cu unele perfecționări (rigidizarea miezurilor și scăderea coeficientului de temperatură a acestora) aparatul poate fi folosit și în condiții de teren. Realizarea unor astfel de miezuri constituie obiectul lucrărilor noastre din prezent.

Primită la 20 III 1969

Academia Republicii Socialiste România
Filiala Iași,
Centrul de cercetări fizice

BIBLIOGRAFIE

1. Collinson D. W., Molyneux L., Stone D. B., J. Sci. Instr., 1963, **40**, p. 310.
2. Balsley J. R., Buddington A. F., Amer. J. Sci., 1960, **A 258**, p. 6.
3. Calinicenco N., Bărboiu V., Moldovanu Al., St. și cerc. de Fizică, 1969, (sub tipar).

A TRANSISTORISED APPARATUS FOR THE MEASURE OF THE MAGNETIC SUSCEPTIBILITY

(Summary)

In this work is presented a transistorised apparatus designed for the measure of the magnetic susceptibility.

The method employed is based on the utilisation of a type of transformer bridge. The apparatus has a limit of sensibility of 5.10^{-6} emu. cm^{-3}.

The calculation of magnetic signal is given and the apparatus is described.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D. K. 621.3.016.25

ZUR BESTIMMUNG DES PHYSIKALISCHEN SINNES DER BLINDLEISTUNG

VON

V. N. NEDELCU

1. Vorwort

Eine der wichtigsten Seiten des Problems der Blindleistung, die bisnoch keine zufriedenstellende Lösung gefunden hat, betrifft das physikalische Wesen dieser Grösse. Üblicherweise wird im Fachschrifttum diese Grösse durch Definition eingeführt [1], [2]; wird jedoch versucht ihren physikalischen Sinn zu enthüllen, so gelingt dies nicht in überzeugender Weise [3]. Trotzdem die Blindenergie den Gegenstand zwingender, technischer Überlegungen bildet, da sie gemessen, übertragen, ausgeglichen, geregelt, bewertet usw. wird, bleibt der Zusammenhang zwischen ihr und der Blindleistung in Augenblicksgrössen ausgedrückt, weiterhin unenthüllt.

Oft wird sogar der Begriff der Blindenergie in Anführungszeichen gesetzt.

Die vorliegende Arbeit verfolgt den Zweck die physikalische Zuordnung des in den vorhergehenden Arbeiten [4]...[6] für die Augenblicksblindleistung vorgeschlagenen mathematischen Ausdruckfestzustellen. Als am geeignetesten hierfür wurde die Leistungsübertragung zwischen einen Synchrongenerator und dem Netz an das dieser angeschlossen ist, angenommen.

In Anbetracht der prinzipiellen Seite des Problems wird auf einen Synchrongenerator mit versenkten Polen Bezug genommen.

2. Die Spannungshauptzeigergleichung des Generators

In Betracht gezogen wird ein Dreiphasensynchrongenerator mit versenkten Polen, im Parkschen Sinne idealisiert [7], nur mit Erregerwicklung am Läufer (f).

In Abb. 1 wird das Schaltbild des synchronen Bezugsgenerators gegeben.

Zur Bestimmung der Spannungsgleichungen der drei Phasen wird auf einen geschlossenen, sich auf Wicklung einer Phase und Klemmenlinie der entsprechenden Phase stützenden Kreis, der zweite Kirchhoffsche Satz angewandt.

Verwendet man die Indizes $m, n = a, b, c$, worin a, b, c die drei Phasen des Ständers darstellen und nimmt man die Erzeugerzweipolpfeilsetzungsregel und überregten Betrieb an, so kann

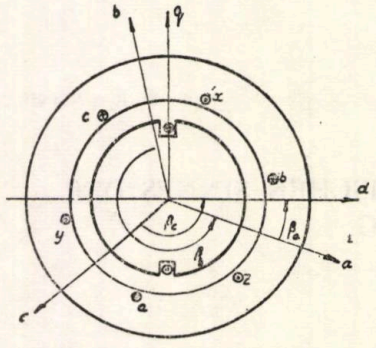


Abb. 1. — Der Synchrongenerator als Beziehung.

$$u_m = e_m - R_s i_m \tag{1}$$

geschrieben werden, worin u_m, e_m, i_m die mit der Phase m assozierte elektrische Augenblicksspannung an den Klemmen, elektromotorische Augenblicksspannung und Augenblicksstrom, R_s — der elektrische Widerstand einer Ständerphase sind.

Die elektromotorische Spannung e_m hat, laut elektromagnetischer Induktionslehre, den Ausdruck:

$$e_m = - D\psi_m, \quad D = \mathrm{d}/\mathrm{d}t,$$

worin: ψ_m — der mit den Windungen der Phase m verkettete magnetische Fluss:

$$\psi_m = l_{mm} i_m + \sum_{n \neq m} m_{nm} i_n - l_{fm} I_f, \tag{3}$$

mit: l_{mm} — die gesamte Eigeninduktivität der Phase m, $m_{nm} = m_{mn}$ — die Gegeninduktivitäten zwischen den Phasen m, n des Ständers, $l_{fm} = l_{mf}$ — die Gegeninduktivitäten zwischen der Phase m des Ständers und der Erregerphase f:

$$\begin{cases} l_{mm} = L'_{j\sigma} + L'_{s0}, \; m_{mn} = m_{nm} = - M'_{s\sigma} - M'_{\sigma 0} = - M'_{s\sigma} - \dfrac{1}{2} L'_{s0}, \\ l_{fm} = - M \cos \beta_m, \; \beta_a = \omega t, \; \beta_b = \beta_a + 2\rho, \; \beta_c = \beta_a + \rho, \end{cases} \tag{4}$$

worin $\rho = 2\pi/3$ el. Rad., ω — die synchrone elektrische Winkelumlaufsgeschwindigkeit des Läufers, $L'_{s\sigma}$, $M'_{s\sigma}$ — die Induktivitäten der Eigenstreuungen einer Phase und der Gegeninduktivitäten zwischen zwei Ständerphasen, L'_{s0} — die Eigengegeninduktivität einer Ständerphase, M — die Höchstgegeninduktivität zwischen einer Ständerphase und dem Erregerkreis, M'_{s0} — die Gegeninduktivität zwischen zwei Ständerphasen:

$$\begin{cases} -M'_{s0} = L'_{s0} \cos \rho, \; L'_{s\sigma} = w_s^2 G_{s\sigma}, \; M'_s = w_s^2 G_{s\sigma m}, \\ L'_{s0} = w_s^2 G_0, \; M = w_s w_f G_0, \end{cases} \tag{5}$$

mit: $G_{s\sigma}$ — die magnetische Leitfähigkeit des Streukreises einer Ständerphase, $G_{s\sigma m}$ — die magnetische Leitfähigkeit des gemeinsamen Streukreises zwischen zwei Ständerphasen, G_0 — die magnetische Leitfähigkeit des Hauptkreises der Maschine.

Zur Bestimmung der Hauptzeigergleichung der Spannungen, mittels der gleichzeitig die Vorgänge in den drei Phasen überprüft werden können werden die Hauptzeiger eingeführt.

Zu diesem Zweck amplifiziert man die Gleichungen (1) mit den Verschiebungsoperatoren $\frac{2}{3}\underline{\alpha}_m$:

$$\alpha_a = e^{j2}\ ,\ \alpha_b = e^{j\rho},\ \alpha_c = e^{j2\rho}. \tag{6}$$

Nach Summierung der linken und rechten Teile und nach Berücksichtigung der Gleichungen (2) folgt:

$$\underline{u} = \underline{e} - R_s\underline{i} = -D\underline{\psi} - R_s\underline{i}, \tag{7}$$

worin: $\underline{u}, \underline{e}, \underline{i}, \underline{\psi}$ — die Hauptzeiger der mit den, auf das Koordinatensystem $a, b, c,$ bzw. auf das rechtwinklige α, β-System bezogenen Stromkreise der drei Phasen, assozierte Augenblicksklemmenspannungen, der Augenblicks-e.m.K., der Augenblicksströme und magnetischen Flüsse sind:

$$\begin{cases} \underline{u} = \frac{2}{3}\underline{\alpha}_m u_m = u\ \underline{|\alpha(t)}, \quad \underline{e} = \frac{2}{3}\underline{\alpha}_m e_m = e\ \underline{|\gamma(t)}, \\ \underline{i} = \frac{2}{3}\underline{\alpha}_m i_m = i\ \underline{|\lambda(t)}, \quad \underline{\psi} = \frac{2}{3}\underline{\alpha}_m\psi_m = \psi\ \underline{|\varepsilon(t)}, \end{cases} \tag{8}$$

worin: u, e, i, ψ — die Augenblicksamplituden und $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ — die Augenblicksphasen gegenüber der Achse $\alpha(a)$ des rechtwinkligen Systems α, β sind.

Gegenüber dem schwingenden rechtwinkligen d, q - Koordinatensystems sind die Phasen der Hauptzeiger: $\alpha_0(t)$, $\gamma_0(t)$, $\lambda_0(t)$, $\varepsilon_0(t)$.

Führt man eine Umdrehungstransformierung durch, so kann die Gleichung (7) auf das d, q - Koordinatensystem bezogen werden:

$$\underline{u}' = \underline{e}' - R_s\underline{i}' = -(D + jD\beta_a\underline{\psi}') - R_s\underline{i}, \tag{7'}$$

weil zwischen den Phasen der Hauptzeiger gegenüber dem alten und neuen Koordinatensystem die Beziehungen:

$$\alpha(t) = \beta_a + \alpha_0(t),\ \gamma(t) = \beta_a + \gamma_0(t),\ \lambda(t) = \beta_a + \lambda_0(t),\ \varepsilon(t) = \beta_a + \varepsilon_0(t),$$

bestehen.

Den Ausdruck des Hauptzeigers der resultierenden Flüsse, entsprechend den Parametern der Maschine und den Strömen, erhält man durch Berücksichtigung der Beziehung (6).

Somit folgt, gegenüber dem α, β - System, nach Durchführung der entsprechenden Rechenoperationen:

$$\underline{\psi} = \frac{2}{3}\sum \underline{\alpha}_m\psi_m = L_s\underline{i}_s - MI_f e^{j\beta_a}, \tag{6'}$$

und gegenüber dem d, q - System:

$$\underline{\psi}' = L_s \underline{i}_s'' - MI_f. \tag{6''}$$

Für den elektromechanischen Dauerbetrieb der im nachfolgenden berücksichtigt werden wird, erhält man die Spannungsgleichung durch entsprechende Auslegung der allgemeinen Gleichungen (7) oder (7′) für diesen Fall.

Geht man von der Gleichung (7) aus, so muss die Bedingung $D = j\omega$ eingeführt werden; wird von der Gleichung (7′) ausgegangen, so müssen die Bedingungen: $D = 0$, $D\beta_a = \omega$ gestellt werden, worin ω die in el. Rad./s ausgedrückte synchrone Winkelumlaufsgeschwindigkeit ist.

Hieraus folgt:

$$\hat{\underline{U}}' = \hat{\underline{E}}' - R_s \hat{\underline{I}}', \tag{9}$$

oder, unter Berücksichtigung von (6″)

$$\hat{\underline{U}}' = \hat{\underline{E}}_0' - jX_s \hat{\underline{I}}' - R_s \hat{\underline{I}}', \tag{9′}$$

worin:

$$\hat{\underline{E}}_0' = -j\omega M I_f, \tag{10}$$

der Hauptzeiger der, bei Leerlauf, in die Ständerwicklungen induzierten elektromotorischen Spannungen und $X_s = \omega L_s$ – die synchrone Reaktanz der Maschine.

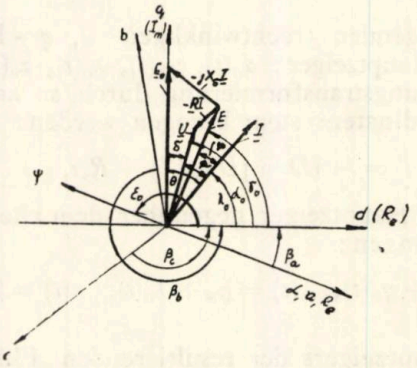


Abb. 2. — Das der alleinigen Spannungsgleichung des im elektomechanisch stetigen symmetrischen Betrieb arbeitenden Synchrongenerator entsprechende Zeigerdiagramm.

Wie aus (10) folgt, ist der Hauptzeiger $\underline{E}_0'$ nur in elektromechanischem Dauerbetrieb auf die geometrische Querachse q ausgerichtet.

In Abb. 2 ist die Gleichung (9′) graphisch dargestellt.

Da alle Hauptzeiger gegenüber dem α, β-Koordinatensystem mit synchroner Geschwindigkeit umlaufen, werden sie gegenüber dem d, q-Koordinatensystem stillstehen.

Die Augenblickswerte der verschiedenen Indexgrössen m erhält man als Projektionen der Hauptzeiger auf die geometrische Achse der Phase m.

3. Der Leistungsaustausch zwischen Generator und dem Netz

Die in der Phase m erzeugte elektrische Augenblickswirkleistung (p_{gm}) bestimmt man wie folgt:

$$p_{gm} = e_m i_m = -[D\psi_m] i_m . \tag{11}$$

Berücksichtigt man (2), (6), sowie die Beziehungen, die sich aus Abb. 2 ergeben, so kann:

$$\begin{cases} e_m = -D\psi_m = \hat{E}\cos\gamma_m = L_s \hat{I}\sin\lambda_m(D\beta_m) - MI_f \sin\beta_m(D\beta_m), \\ i_m = \hat{I}\cos\lambda_m, \end{cases} \tag{12}$$

geschrieben werden, worin $D\beta_m = \omega$ el. Rad./s — die elektrische Winkelumlaufsgeschwindigkeit des Läufers darstellt, die für den Bezugsbetrieb stetig ist, und $\gamma_m = \beta_m + \gamma_0$, $\lambda_m = \beta_m + \lambda_0$.

Andererseits kann bei Berücksichtigung von (1):

$$e_m = u_m + R_s i_m \tag{13}$$

geschrieben werden, worin die elektrische Augenblicksspannung u_m, entsprechend dem Modul ($\hat{U}$) und der Hauptzeigerphase ($\underline{\hat{U}}$) durch die Gleichung:

$$u_m = \hat{U}\cos\alpha_m \tag{14}$$

ausgedrückt werden kann, worin $\alpha_m = \beta_m + \alpha_0$.

Berücksichtigt man die Beziehungen (12)...(14), so wird die Beziehung (11) zu:

$$\begin{aligned} p_{gm} &= \hat{E}\hat{I}\cos\gamma_m\cos\lambda_m = X_s\hat{I}^2\sin\lambda_m\cos\lambda_m - \hat{E}_0\hat{I}\sin\beta_m\cos\lambda_m = \\ &= \hat{U}\hat{I}\cos\alpha_m\cos\lambda_m + R_s\hat{I}^2\cos^2\lambda_m . \end{aligned} \tag{15}$$

Nach Umformung der trigonometrischen Produkte, erziehlt man:

$$\begin{aligned} p_{gm} &= \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}[\cos\varphi' + \cos(\gamma_m+\lambda_m)] = \\ &= \frac{1}{2}\hat{X}_s\hat{I}^2\sin 2\lambda_m - \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}[\sin(-\lambda_0) + \sin(\beta_m+\lambda_m)] = \\ &= \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}[\cos\varphi + \cos(\alpha_m+\gamma_m)] + \frac{1}{2}R_s\hat{I}^2(1+\cos 2\lambda_m), \end{aligned} \tag{15'}$$

wo

$$\varphi' = \gamma_0 - \lambda_0, \quad \varphi = \alpha_0 - \lambda_0.$$

Wird der Mittellwert der Funktion (15′) zurückgehalten, folgt:

$$P_{gm} = \{p_{gm}\} = \frac{1}{T}\int_0^T p_{gm}\,dt = \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\cos\varphi' = \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\sin\lambda_0 =$$

(16)

$$= \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos\varphi + \frac{1}{2}R_s\hat{I}^2,$$

worin:

(17) $$\hat{E}_0 = \omega M I_f = \omega\hat{\psi}_{mf}$$

den Höchstwert der, durch das Induktorfeld ψ_{mf}, in den Ständer induzierte elektromotorische Leerlaufspannung darstellt.

Wie aus der Betrachtung des Ausdrucks (17) ersichtlich, stellt die elektromotorische Spannung $\hat{E}_0$ den Höchstinduktorfluss $(\hat{\psi}_{mf})$ dar, bezogen auf eine dem synchronen Radian (r.s.) gleiche Zeiteinheit, d.h. die Zeit innerhalb derer das Polarrad sich gegenüber einem Fixpunkt des Ständers, in einem synchronen Radian gleichen, elektrischen Winkel verschiebt. Die Beziehung zwischen der Zeiteinheit — Sekunde (s) — und der Einheit — synchroner Radian (r.s.) ist:

$$1\,[\mathrm{s}] = 2\pi f\,[\mathrm{r.s.}] = 314\,[\mathrm{r.s}]$$

bzw.:

$$1\,[\mathrm{r.s.}] = \frac{1}{2\pi f}\,[\mathrm{s}] = \frac{1}{314}\,[\mathrm{s}].$$

Als Zeit- und Raumfunktionen stehen die zwei Grössen ψ_{mf} in Quadratur, weil der magnetische Induktorfluss ψ_{mf} eine radiale Grösse ist und die elektromotorische Spannung die Tangentialkomponente der Variation dieses Flusses darstellt.

In diesem Licht betrachtet, kann die mittlere Leistung P_{gm} als mittlere elektrodynamische Energie ausgelegt werden:

$$\frac{1}{2}MI_f\hat{I}\sin\lambda_0 = \frac{1}{2}\psi_{mf}\,\hat{I}\sin\lambda_0,$$

durch die die Tangentialvariation des Drehinduktorfeldes einer Ständerphase übertragen und auf ein, einem synchronen Radian gleichen Zeitintervall bezogen ist.

Die Beziehung (16) kann umgewandelt werden, wenn die Beziehung zwischen den Winkeln θ, λ_0: $\theta + \lambda_0 = \pi/2$, berücksichtigt wird, also:

(16′) $$P_{gm} = \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\cos\theta.$$

Berücksichtigt man (16), so verwandelt sich der Ausdruck (15'):

$$p_{gm} = P_{gm} + p_{2gm}, \tag{15''}$$

worin

$$p_{2gm} = \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\sin(\gamma_m + \lambda_m) = \frac{1}{2}X_s\hat{I}^2\sin 2\lambda_m - \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\sin(\beta_m + \lambda_m) = \tag{15''}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos(\alpha_m + \lambda_m) + \frac{1}{2}R_s\hat{I}^2\cos 2\lambda_m,$$

die schwingende Augenblickswirkleistung der Phase m, ist.

Drückt man die Funktion (11) in Form:

$$p_{gm} = -[D\psi_m]i_m = -[w'_m(t)]_{i_m = \text{const.}} \tag{11'}$$

aus, worin

$$w_m(t) = \psi_m i_m, \tag{18}$$

so lohnt es sich eine neue Funktion zu untersuchen und zwar:

$$p'_{gm} = -\psi_m[Di_m] = -[w'_m(t)]_{\psi m = \text{const.}} \tag{19}$$

Unter Berücksichtigung von (6), (12), nimmt die Beziehung (19) die Form:

$$p'_{gm} = -\frac{1}{2}X_s\hat{I}^2\sin 2\lambda_m - \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\sin\lambda_0 + \sin(\alpha_m + \lambda_m), \tag{19'}$$

an, oder bei Zurückhaltung des Mittelwertes:

$$P'_{gm} = \{p'_{gm}\} = -\frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\sin\lambda_0. \tag{20}$$

Im Hinblick auf die Beziehungen (16), (20) kann festgestellt werden, dass der Mittelwert der Zeitableitung der Funktion $w_m(t)$ (18) Null ist:

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_m(t)\right\} = P_{gm} + P'_{gm} = 0, \tag{21}$$

folglich, dass die entsprechende Funktion periodisch ist. Dieses Ergebnis konnte übrigens vorausgesehen werden.

Vergleicht man (11'), (19) mit (18), so kann man in Anbetracht dessen, dass die Variationslehre der Funktionen $\psi_m(t)$, $i_m(t)$ sinusförmig ist, ohne Schwierigkeit feststellen, dass die Funktionen p_{gm}, p'_{gm} in Quadratur zur Funktion $w_m(t)$ stehen.

Es lohnt sich zu untersuchen welches der Mittelwert der Funktion $-w_m(t)$ ist und welchen physikalischen Sinn diese Grösse hat.

Berücksichtigt man (1), (2), (12), (14), so kann für ψ_m die Beziehung:

$$\psi_m = -\int e_m \, dt = -\int (u_m + R_s i_m) \, dt,$$

geschrieben werden, also:

$$(22) \qquad \psi_m = -\frac{1}{\omega} \hat{E} \sin \gamma_m = -\frac{1}{\omega} \hat{U} \sin \alpha_m - \frac{1}{\omega} R_s \hat{I} \sin \lambda_m ,$$

woraus folgt, dass ψ_m, seinerseits, die mit der Zeiteinheit (r.s.) multiplizierte elektromotorische Spannungsvariation darstellt.

Wird diese Variation auf die Zeiteinheit bezogen, so erhält man:

$$(22') \qquad \omega \psi_m = -\hat{E} \sin \gamma_m = -\hat{U} \sin \alpha_m - R_s \hat{I} \sin \lambda_m .$$

Demzufolge erhält man den Ausdruck des Wertes der Augenblicksfunktion:

$$-w_m(t) = -L_s \hat{I}^2 \cos^2 \lambda_m + MI_f \hat{I} \cos \beta_m \cos \lambda_m = \frac{1}{\omega} \hat{E}\hat{I} \sin \gamma_m \cos \lambda_m =$$

$$= \frac{1}{\omega} \hat{U}\hat{I} \sin \alpha_m \cos \lambda_m + \frac{1}{\omega} R_s \hat{I}^2 \sin \lambda_m \cos \lambda_m ,$$

oder, durch Transformierung der trigonometrischen Funktionen:

$$-w_m(t) = -\frac{1}{2} L_s \hat{I}^2 (1 + \cos 2\lambda_m) + \frac{1}{2} MI_f \hat{I} [\cos \lambda_0 + \cos (\beta_m + \lambda_m)] =$$

$$(23) \qquad = \frac{1}{2\omega} \hat{E}\hat{I} [\sin \varphi' + \sin (\gamma_m + \lambda_m)] = \frac{1}{2\omega} \hat{U}\hat{I} [\sin \varphi + \sin (\alpha_m + \gamma_m)] +$$

$$+ \frac{1}{2\omega} R_s \hat{I}^2 \sin 2\lambda_m .$$

Wie ersichtlich, stellt die, durch die Beziehung (23) ausgedrückte Grösse, den Augenblickswert der sich im, aus der Wicklung *m* resultierenden magnetischen Fluss, gespeicherten Energie, dar. Wie sich aus der rechten Seite ergibt, ist ihre Dimension eine mit der Zeiteinheit — synchroner Radian — multiplizierte Leistung.

Die entsprechende Augenblicksleistung erhält man durch Teilung des Ausdrucks (23) durch die Zeiteinheit (r.s.).

Diese Leistung schreibt man mit q und sie stellt, wie weiter ersichtlich sein wird, die Augenblicksblindleistung dar:

$$(24) \qquad q_{gm} = -\omega w_m(t) = -\omega \psi_m i_m .$$

Hält man dem Mittelwert der Funktion (24) zurück, so folgt:

$$(25) \qquad Q_{gm} = \{q_{gm}\} = \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\cos\lambda_0 - \frac{1}{2}X_s\hat{I}^2 = \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\sin\varphi' = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\sin\varphi.$$

Wird die dem magnetischen Induktorfeld entsprechende mittlere Leistung mit Q_{mf} geschrieben:

$$(26) \qquad Q_{mf} = \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\cos\lambda_0 = \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\sin\theta,$$

so wird die Beziehung (25) zu:

$$(27) \qquad Q_{mf} = \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\sin\varphi' + \frac{1}{2}X_s\hat{I}^2 = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\sin\varphi + \frac{1}{2}X_s\hat{I}^2.$$

Die Beziehung (27) drückt das Prinzip der Erhaltung der Blindleistung aus; die durch das Induktordrehfeld Q_{mf} erzeugte Blindleistung wird, nach Deckung der im eigenen Feld der Wicklung m, $\frac{1}{2}X_s\hat{I}^2$ gespeicherten Energie, durch die Klemmen dem Netz übertragen.

Wie im Falle der Wirkleistung, wird auch die Blindleistung vom Läufer auf den Ständer ebenfalls vermittels des Induktordrehfeldes übertragen.

Bei Berücksichtigung von (27) kann die Beziehung (24) umgeschrieben werden:

$$(24') \qquad q_{mf} = Q_{mf} + q_{2mf},$$

worin

$$(24'') \qquad q_{2mf} = \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\cos(\beta_m+\lambda_m) = \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\sin(\gamma_m+\lambda_m) + \frac{1}{2}X_s\hat{I}^2\cos 2\lambda_m =$$
$$= \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\sin(\alpha_m+\lambda_m) + \frac{1}{2}R_s\hat{I}^2\sin 2\lambda_m + \frac{1}{2}X_s\hat{I}^2\cos 2\lambda_m,$$

die durch der Induktorfluss erzeugte schwingende Augenblicksblindleistung ist.

Da die Grössen p_{gm} und q_{gm} in Quadratur stehende Zeitfunktionen sind, können diese zwei Grössen in eine einzige komplexe Grösse vereinigt werden — die komplexe Augenblicksscheinleistung, bezogen auf das Koordinatensystem α, β:

$$(28) \qquad \underline{s}_m = p_{gm} + jq_{gm} = \underline{e}_m\underline{i}_m = (\underline{e}_{0m} - jX_s\underline{i}_m)\underline{i}_m = (\underline{u}_m + R_s\underline{i}_m)\underline{i}_m,$$

worin $\underline{e}_m$, $\underline{e}_{0m}$, $\underline{i}_m$, $\underline{u}_m$ — die positiven Fresnel-Zeiger, der sich ergebenden elektromotorischen Spannung, des Leerlaufs, des Stromes und der elektrischen Spannung an den Klemmen der Phase m sind:

$$(29) \qquad \begin{cases} \underline{e}_m = \hat{E}\underline{|\gamma_m}, \quad \underline{e}_{0m} = \hat{E}\underline{|\beta_m + \pi/2}, \\ \underline{i}_m = \hat{I}\ \underline{|\lambda_m}, \quad \underline{u}_m = \hat{U}\underline{|\alpha_m}. \end{cases}$$

Ersetzt man in (28) $\underline{i}_m = (\underline{i}_m + \underline{i}_m^*)/2$, wo $\underline{i}_m^*$ der, dem $\underline{i}_m$-Zeiger komplex konjugierte Zeiger ist und berücksichtigt man (29) so folgt:

$$\underline{s}_m = \frac{1}{2}\underline{e}_m \underline{i}_m + \frac{1}{2}\underline{e}_m \underline{i}_m^* = \underline{S}_m + \underline{s}_{2m}. \tag{30}$$

Hier $\underline{S}_m$ ist die von der Phase m erzeugte mittlere komplexe Scheinleistung und $\underline{s}_{2m}$ — die komplexe schwingende Scheinleistung:

$$\underline{S}_m = \frac{1}{2}\underline{e}_m \underline{i}_m^* = \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\ \underline{|\gamma_0 - \lambda_0} = \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\underline{|\varphi'} = P_{gm} + \mathrm{j}Q_{gm}, \tag{30'}$$

$$\underline{s}_{2m} = \frac{1}{2}\underline{e}_m \underline{i}_m = \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\ \underline{|\gamma_m + \lambda_m} = p_{2gm} + \mathrm{j}\, q_{2gm}. \tag{30''}$$

Berücksichtigt man auch die anderen Formen der Beziehung (28) so erhält man:

$$\begin{aligned}\underline{s}_m &= \frac{1}{2}\underline{e}_{0m}\underline{i}_m^* - \mathrm{j}\frac{1}{2}X_s\hat{I}^2 + \frac{1}{2}\underline{e}_{0m}\underline{i}_m - \mathrm{j}\frac{1}{2}X_s^2\underline{i}_m^2 = \frac{1}{2}\underline{e}_m\underline{i}_m^* + \frac{1}{2}\underline{e}_m\underline{i}_m = \\ &= \frac{1}{2}\underline{u}_m\underline{i}_m^* + \frac{1}{2}R_s\hat{I}^2 + \frac{1}{2}\underline{u}_m\underline{i}_m + \frac{1}{2}R_s\underline{i}_m^2 = \underline{S}_m + \underline{s}_{2m},\end{aligned} \tag{31}$$

worin:

$$\underline{S}_m = \frac{1}{2}\hat{E}\,\hat{I}_m^* - \frac{1}{2}\mathrm{j}X_s\hat{I}^2 = \frac{1}{2}\underline{\hat{U}}_m\hat{I}_m^* + \frac{1}{2}R_s\hat{I}^2 = P_{gm} + \mathrm{j}Q_{gm}, \tag{32}$$

mit

$$P_{gm} = \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\cos\theta = \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\cos\varphi' = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos\varphi + \frac{1}{2}R_s\hat{I}^2, \tag{33}$$

$$Q_{gm} = \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{I}\sin\theta - \frac{1}{2}X_s\hat{I}^2 = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\sin\varphi, \tag{34}$$

$$\underline{s}_{2m} = \frac{1}{2}\underline{e}_{0m}\underline{i}_m - \mathrm{j}\frac{1}{2}X_s\underline{i}_m^2 = \frac{1}{2}R_s\underline{i}_m^2 = \frac{1}{2}\underline{u}_m\underline{i}_m + \frac{1}{2}R_s\underline{i}_m^2. \tag{35}$$

Aus dem Vergleich der Formeln (30) ... (35) mit den vorher aufgestellten, ergibt sich deren völlige Gleichheit, sowie auch die Zweckmässigkeit des Begriffes der komplexen Scheinleistung und deren physikalischer Sinn wird offensichtlich.

Die gesamte, durch die Maschine über die drei Klemmen ausgetauschte komplexe Scheinleistung ($\underline{s}_g$) wird als die Summe:

$$\underline{s}_g = \sum \underline{s}_m = p_g + \mathrm{j}\, q_g \tag{36}$$

bestimmt, worin

(37) $$p_g = \sum p_{gm}, \quad q_g = \sum q_{gm},$$

die gesamten Augenblicks-Wirk- und Blindleistungen darstellen.

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (30)...(35) erhält man für (37):

(38) $$s_g = \underline{S},$$

worin

(39) $$\underline{S} = 3\underline{S}_m$$

die gesamte mittlere komplexe Scheinleistung ist, weil die gesamte schwingende komplexe Augenblicksscheinleistung s_2 Null ist, da die drei Zeiger s_{2m} um $2\pi/3$ el. Rad. phasenverschoben sind:

(40) $$\underline{s}_2 = \sum \underline{s}_{2m} = 0.$$

Somit ist die schwingende Leistung, im Falle der Drehstrommaschine in symmetrischem Betrieb, zum Unterschied zur einphasigen Maschine, Null. Dies ist der grosse Vorteil der symmetrischen Dreiphasensysteme gegenüber den Einphasensystemen und wird veranschaulicht durch die Steigerung auf das Doppelte der auf einen Leiter der Dreiphasenleitung übertragenen, mittleren elektromagnetischen Leistung, beziehungsweise auf eine Phase des Dreiphasensystems, gegenüber einem Leiter der Einphasenleitung.

Wie bekannt ist, verschwindet dieser Vorteil teilweise im Falle der unsymmetrischen Dreiphasensysteme, wenn die schwingende Leistung auftritt.

4. Schlussfolgerungen

In der Arbeit wird ausgeführt:

1. Dass die Augenblicksblindleistung, deren mathematischer Ausdruck vom Verfasser in [5] vorgeschlagen wurde, die Variation der magnetischen Energie mit negativen Vorzeichen, die im magnetischen Fluss einer Wicklung in einer, einem elektrischen Radian gleichen Zeiteinheit gespeichert wurde, darstellt (24).

Der Mittelwert dieser Augenblicksleistung stellt die allgemein anerkannte und verwendete Blindleistung dar.

3. Dieses Ergebnis entspricht dem von H. Poincaré [8] ausgedrückten ersten elektrotechnischen Allgemeinsatz, welcher die Bedingung des Vorhandenseins der Phasenverschiebung des Stromes gegenüber der Spannung in einem elektrischen Stromkreis mit Induktivität erweist.

4. Die Augenblicksblindleistung in einer Phase eines synchronen Generators entspricht der Radialvariation in einer, einem synchronen Radian gleichen Zeiteinheit des sich ergebenden umlaufenden, mit den Windungen der entsprechenden Wicklung verketteten magnetischen Flusses.

5. Die in einer Phase eines synchronen Generators erzeugte Augenblickswirkleistung entspricht der Tangentialvariation in einer, einem synchronen Radian gleichen Zeiteinheit, des sich ergebenden umlaufenden, mit den Windungen der entsprechenden Wicklung verketteten magnetischen Flusses.

6. Da die Augenblicks-Wirk- und Blindleistungen als Zeitfunktionen in Quadratur stehen, kann von dem physikalischen Sinn des Begriffs der komplexen Augenblicksscheinleistung gesprochen werden, ein Begriff der ebenfalls in [5] vorgeschlagen wurde.

7. Die vorgeschlagenen Formeln für die Blindleistung, sowohl in Abhängigkeit von der Klemmenspannung eines Stromkreises, als auch von dem Windungen des entsprechenden Stromkreises verketteten magnetischen Flusses, lösen auf eindeutige Weise die sogenannten Frage des Sinnes der Blindleistung.

8. Diese Formeln gestatten die Berechnung und die Messung der Blindleistung in jedem Betrieb, ob stetig oder nichtstationär, ob symmetrisch oder unsymmetrisch.

Eingegangen am 8.XI 1967

Technische Hochschule „Gh. Gheorghiu-Dej", Bukarest, Lehrstuhl für elektrische Maschinen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Ионкин П. А. и. сотр., *Теоретические основы электротехники.* т. **I**, Изд. Высшая школа, М., 1965, стр. 311.
2. Cahen F., *Électrotechnique* Vol. **I...IV**, Gauthier Villars Cie, Paris, 1964.
3. Поливанов К. М., *Теоретические основы электротехники.* т. **I**, Изд. Энергия, М-Л., 1965, стр. 127.
4. Неделькy В. Н., *К вопросу о выражении реактивной мощности трехфазных систем* Изв. ВУЗ, Энергетика, 1962, *2*, стр. 18—23.
5. — *Die einheitliche Leistungstheorie der unsymmetrischen und mehrweltigen Mehrphasensysteme.* ETZ, 1963, **A 84**, S. 153—157.
6. — *Neue Betrachtungen zur Frage der Blindleistung.* ETZ, 1967, **A 87**.
7. Park R. H., *Definition of an Ideal Synchronous Machine and Formula for the Armature Flux Linkages.* G.E.R., 1928, **31**, p. 332.
8. Poincaré H., *Sur quelques théorèmes généraux relatifs à l'électrotechnique.* L'Éclairage Électrique, 1908, **1**, *9*, pp. 293—304.

CU PRIVIRE LA DEFINIREA SENSULUI FIZIC AL PUTERII REACTIVE

(Rezumat)

Se urmăreşte stabilirea unei expresii matematice a puterii reactive instantanee urmărind ordinea de idei din lucrările anterioare [4]...[6].

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Generatorul sincron de referinţă.
Fig. 2. — Diagrama fazorială corespunzătoare ecuaţiei unice de tensiuni a generatorului sincron în regim electromecanic permanent simetric.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D. C. 621.313.323

STUDY OF AN OSCILLATING BIPHASE SYNCHRONOUS LINEAR MOTOR (II)

BY

CAROL SAAL

1. Introduction

In the study effectuated in [1], [2], were established the operation equations of the oscillating biphase synchronous linear motor; on this basis it was developed a simplified theory of this motor, equipped or not with a spring. In this paper we pass on to the interpretation of the steady-state displacement of the movable armature, examining the power balance too. Some experimental results and the stroke characteristics of the studied motor will form the object of a subsequent paper.

2. Interpretation of the Steady-State Displacement of the Movable Armature

If the oscillomotor is operating coupled with a one-connection receiver [3], let m, β, k_r be the equivalent parameters of the mechanical oscillating system, including the armature and the coupled receiver, i. e. the mass, damping constant (mechanical resistance) and spring stiffness of the equivalent spring, respectively. The steady-state displacement of the armature will be, in practice, as it follows:

$$x = X_{mr} \sin (2\omega t - \alpha_r), \quad \text{with } \alpha_r = \tan^{-1}\left(\frac{4\omega^2 - \gamma}{2\rho\omega}\right), \tag{1}$$

where ω represents the angular frequency of the supplying voltages and

$$\gamma = \frac{k_r}{m}, \quad \rho = \frac{\beta}{m}. \tag{2}$$

The amplitude X_{mr}, given by Eq. (26_1) [1], may be written:

$$X_{mr} = \frac{F'_m}{\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - 4\omega^2/\gamma)^2 + 4\omega^2 \rho^2/\gamma^2}} = A_0 X_s, \tag{3}$$

with:

$$F'_m = \frac{F_m}{m}, \quad X_s = \frac{F'_m}{\gamma}, \quad A_0 = \frac{1}{\sqrt{(1 - 4\omega^2/\gamma)^2 + 4\omega^2 \rho^2/\gamma^2}}, \tag{3'}$$

F_m being the amplitude of the electromagnetic instantaneous resulting force, acting axially on the movable armature of the motor.

It may be noted that X_s has a physical meaning, namely the static deformation of the equivalent spring, acted by a force equal to the amplitude F_m of the electromagnetic force, because:

$$X_s = \frac{F_m}{m} \cdot \frac{m}{k_r} = \frac{F_m}{k_r} \tag{4}$$

(s. [5]). The dimensionless factor $A_0 = X_{mr}/X_s$ may be denominated *amplifying factor*.

Let:

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\beta}{\sqrt{k_r m}}, \quad \omega' = \frac{2\omega}{\sqrt{\gamma}} = 2\omega\sqrt{\frac{m}{k_r}}; \tag{5}$$

the amplifying factor becomes:

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega'^2)^2 + \rho'^2 \omega'^2}}. \tag{6}$$

The diagram $A_0(\omega')$, for different constant values for ρ', then for different damping constants of the mechanical oscillating ensemble, it is that of a curves family, well known in the study of a linear oscillator, harmonically perturbed. A_0 will be maximum, therefore the amplitude X_{mr} of the mechanical oscillations too, for $\omega' = 1$, in practice. This maximum will be greater, if ω' gets smaller. The mechanical resonance condition is then:

$$\omega' = 1 = 2\omega\sqrt{\frac{m}{k_r}}. \tag{7}$$

The amplitude of the armature oscillations can be tangible modified only for $\omega' \in [0{,}5; 2]$. Out of this domain, A_0 may be calculated, with sufficient accuracy, with the equality:

$$A_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 4\omega^2} = (A_0)_{\rho=0}. \tag{8}$$

The greatest possible amplitude, reached in practice for $\omega' = 1$, is:

$$(X_{mr})_{max} = (A_0)_{\omega'=1} X_s = \frac{X_s}{\rho'} = \frac{F'_m}{\rho\sqrt{\gamma}}. \tag{9}$$

Having in sight Eq. (2) and (16) [1], Eq. (9) becomes:

$$(X_{mr})_{max} = \frac{U^2}{\beta\mu_0 S_f w^2 \omega^2}\sqrt{\frac{m}{k_r}} = \frac{C}{\beta}\left(\frac{U}{f}\right)^2\sqrt{\frac{l}{k_r S_t}}, \tag{9'}$$

where: U — effective phase supply voltage, μ_0 — magnetic constant, $f = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{k_r}{m}}$ — supply frequency, l — length of the armature, supposed cylindrically.

S_f signifies the iron cross section of the movable armature; it may be also expressed as $k_u S_t$, where S_t is the total cross section of the armature and $k_u < 1$ a filling coefficient; further:

$$C = \frac{1}{4\pi^2 \mu_0 w^2}\sqrt{\frac{\delta_f}{k_u}}. \tag{10}$$

Here δ_f represents the density of the armature. In Eq. (9') it was appreciated that the mass of the mechanical system ensemble coincides with that of the movable armature. This case corresponds to an operation of the motor without load; C signifies a constant quantity, characterizing the studied oscillomotor.

Examining Eq. (9), it follows that the maximum amplitude of the armature displacement, reached at mechanical resonance of the oscillating movable system, is proportionally with the second power of the ratio U/f; f being the supply voltages frequency, $(X_{mr})_{max}$ will occur if the condition (7) is realized, respectively:

$$f = f_0 = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{k_r}{m}}. \tag{7'}$$

The conclusions deduced above, regarding the maximum amplitude of the armature displacement, will not be sufficiently exactly for too smaller supplying frequencies, since the coils resistances of the oscillomotor cannot be neglected with respect to their reactances.

If the equivalent spring stiffness of the oscillating system is equal to zero, consequently $k_r = 0$, $(\gamma = 0)$, the amplitude of the armature displacement, given by Eq. (3), becomes:

$$X_m = (X_{mr})_{\gamma=0} = \frac{F'_m}{2\omega\sqrt{\rho^2 + 4\omega^2}}, \tag{11}$$

coinciding with Eq. (20), [1].

The ratio $k_m = X_{mr}/X_m$ gives an indication concerning the utility of the presence of a spring, with the object of obtaining a greater amplitude X_{mr}, relatively to the amplitude X_m, reached in the same conditions, but without spring. For this purpose, we must have

$$k_m = \frac{X_{mr}}{X_m} > 1, \tag{12}$$

if we tend to obtain a greater amplitude. Since:

$$k_m = 2\omega \sqrt{\frac{\rho^2 + 4\omega^2}{4\rho^2\omega^2 + (4\omega^2 - \gamma)^2}} = \gamma\omega' \sqrt{\frac{\rho'^2 + \omega'^2}{(\omega'^2 - 1)^2 + \omega'^2\rho'^2}} = \gamma k', \tag{13}$$

where:

$$k' = A_0\,\omega' \sqrt{\rho'^2 + \omega'^2}. \tag{13'}$$

The curves $k'(\omega)$ are traced, for different constant values for ρ', in Fig. 1.

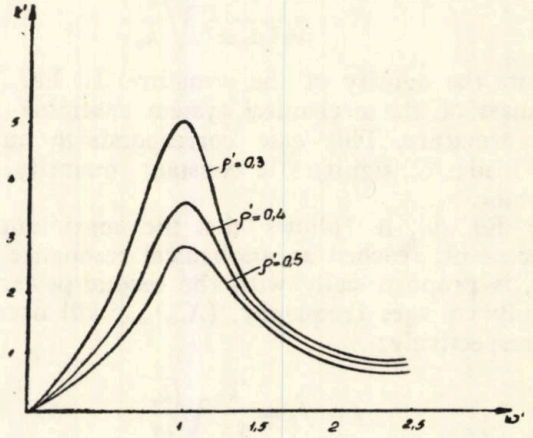


Fig. 1

3. Power Balance of the Oscillating Movable System of the Oscillomotor

It will be assumed that the oscillating system is a linear one, including only bilateral elements; the equivalent mechanical system, with the parameters m, β, k_r, defined in § 2, has a similar behaviour, in a steady-state operation, as that of a linear oscillator, harmonically perturbed [4]; the perturbing force f_{em} is a sinusoidal function, with a double angular frequency, as that of the supplying voltages.

The steady velocity of the armature is:

$$v_p = \frac{dx_p}{dt} = V_m \cos(2\omega t - \alpha_r), \tag{14}$$

the amplitude of this velocity being:

$$V_m = 2\omega X_{mr} = 2\omega X_s A_0 ; \tag{15}$$

thus, the steady velocity amplitude is proportionally to the amplitude of the armature oscillations and to the amplifying factor, multiplied by the double angular frequency of the supplying voltages.

The phase angle α_r being given in Eq. (1_2), it is easy to verify the equalities

$$V_m = \frac{F_m \cos \alpha_r}{\beta} = \frac{F_m \sin \alpha_r}{2m\omega - k_r/2\omega}. \tag{16}$$

Let e_c be the kinetic instantaneous energy of the equivalent movable mass; we get:

$$e_c = \frac{1}{2} m v_p^2 = \frac{m V_m^2}{4} [1 + \cos(2\omega t - \alpha_r)]. \tag{17}$$

The potential instantaneous energy, accumulated into the equivalent spring is:

$$e_p = \frac{1}{2} k_r x_p^2 = \frac{k_r X_{mr}^2}{4} [1 - \cos(2\omega t - \alpha_r)]. \tag{18}$$

We get the instantaneous power, due to the inertial element, differentiating the value of e_c with respect to time:

$$p_{in} = \frac{de_c}{dt} = -\frac{1}{2} m\omega V_m^2 \sin(2\omega t - \alpha_r). \tag{19}$$

The dissipated power, due to the mechanical resistance β, has the instantaneous expression:

$$p_d = \beta v_p^2 = \frac{1}{2} \beta V_m^2 [1 + \cos(2\omega t - \alpha_r)]. \tag{20}$$

Finally, the instantaneous mechanical power p may be written:

$$p = f_{em} v_p = \frac{1}{2} F_m V_m [\cos \alpha_r + \cos(4\omega t - \alpha_r)], \tag{21}$$

f_{em} being the electromagnetic instantaneous resulting force, acting axially on the movable armature:

$$f_{em} = F_m \cos 2\omega t, \tag{22}$$

with F_m given by Eq. (16), [1].

The medium values of these powers, deduced above, calculated in a whole periode, are:

$$\tilde{p}_{in} = 0, \quad \tilde{p}_d = \frac{1}{2}\beta V_m^2, \quad \tilde{p} = \frac{1}{2} F_m V_m \cos \alpha_r . \tag{23}$$

It will be noticed that, having in sight Eqs. (16),

$$\tilde{p} = \frac{1}{2} F_m V_m \cos \alpha_r = \frac{1}{2}\beta V_m^2 = \tilde{p}_d , \tag{23'}$$

i. e. the medium value of the perturbing electromagnetic force $\tilde{p}$, is equal to the medium value of the power dissipated into the equivalent mechanical resistance, $\tilde{p}_d$.

Observing that the maximum values of the kinetic and potential energies are, respectively:

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m V_m^2, \quad E_{pm} = \frac{1}{2} k_r X_{mr}^2 , \tag{24}$$

considering Eqs. (17), (18), we have:

$$\frac{E_{pm}}{E_{cm}} = \frac{k_r X_{mr}^2}{m V_m^2} = \frac{k_r}{4\omega^2 m} . \tag{25}$$

Since the angular resonance frequency of the mechanical system is given by

$$\Omega_0 = 2\omega_0 = \sqrt{\frac{k_r}{m}} = \sqrt{\gamma} ,$$

it follows:

$$\frac{E_{pm}}{E_{cm}} = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 . \tag{25'}$$

If the angular frequency ω of the supplying voltages are satisfying the inequality $\omega > \omega_0 = \Omega_0/2$, we obtain $E_{cm} > E_{pm}$, i. e. the maximum potential energy, accumulated into the equivalent spring, is smaller as the maximum kinetic energy of the equivalent mass in oscillating motion. The difference $\Delta E = E_{cm} - E_{pm} > 0$ proves that after the transformation of the potential energy into kinetic energy, the supply network must give the supplementary energy ΔE, necessary for reaching the maximum kinetic energy E_{cm} by the oscillating equivalent mass. If $\omega < \omega_0, E_{pm} > E_{cm}$, thus $E_{pm} - E_{cm} > 0$; in this case the equivalent spring may accumulate more potential energy as the maximum value of the kinetic energy.

In both cases $\omega \gtrless \omega_0$, between the ensemble formed by the equivalent mass and spring and the supplying network circulates periodically a certain reactive energy. The resistive element receives permanently active energy, which is irreversibly converted into heat or mechanical work. When $\omega = \omega_0$,

by resonance, the supplying network feeds exclusively the resistive element, the ensemble mass-spring providing, reciprocally and periodically, the energy from the mass to the spring.

The mechanical powers P_m, Q_m, S_m, respectively the active, reactive and apparent mechanical power are introduced in [4], [3], with their physical meanings. The mechanical instantaneous power (21) may be expressed also as it follows:

$$p = P_m(1 + \cos 4\omega t) + Q_m \sin 4\omega t. \tag{21'}$$

Noting

$$S_c = 2X_m, \tag{26}$$

we can write:

$$P_m = \frac{1}{2} F_m S_c \omega \cos \alpha_r. \tag{27}$$

The medium electromagnetic force is [2]:

$$\tilde{f}_{em} = \frac{P_m}{4fS_c} = \frac{\pi F_m \cos \alpha_r}{4}. \tag{28}$$

This equality indicates that the ratio between the amplitude F_m of the electromagnetic force and his medium value $\tilde{f}_{em}$ has the value:

$$\frac{F_m}{\tilde{f}_{em}} = \frac{4}{\pi \cos \alpha_r} = \frac{1{,}27}{\cos \alpha_r}, \tag{28'}$$

with a minimum when the mechanical resonance is reached.

4. Electrical Powers

The apparent electrical power, calculated for a phase, is:

$$S = UI = \frac{UI_{rm}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + A_r \sin \alpha_r + \frac{1}{2} A_r^2}, \tag{29}$$

the dimensionless factor A_r being defined in [1].

The electrical active power, also calculated for a phase, has the expression:

$$P = UI \cos \varphi = \frac{1}{2} A_r UI_{rm} \cos \alpha_r \sqrt{\frac{2 + 2A_r \sin \alpha_r + A_r^2}{4 + 4A_r \sin \alpha_r + A_r^2}}. \tag{30}$$

(s. also [1]).

The electrical active power of the oscillomotor will be a function of A_r and α_r, depending in this way on the mechanical load and the supplying frequency, for a given oscillomotor and a supplying effective voltage. In

the case of the mechanical resonance, $\alpha_r = 0$ and the active electrical power, for a phase, becomes:

$$(P)_{\alpha_r=0} = \frac{1}{2} UI_{rm} A_r \sqrt{\frac{2 + A_r^2}{4 + A_r^2}}. \tag{31}$$

The reactive electrical power, for a phase also, is:

$$Q = UI \sin \varphi = \frac{1}{2} UI_{rm} \sqrt{\frac{(2 + 2 \sin \alpha_r + A_r^2)(A_r^2 \sin^2 \alpha_r + 4 \sin \alpha_r + 4)}{A_r^2 + 4A_r \sin \alpha_r + 4}}, \tag{32}$$

which becomes by resonance:

$$(Q)_{\alpha_r=0} = \frac{1}{2} UI_{rm} \sqrt{\frac{8 + 4A_r^2}{4 + A_r^2}}. \tag{33}$$

The studied linear oscillomotor has a behaviour like as a deformant receiver; the electrical deformant power, for a phase, will be:

$$D = UI_d = UI_3; \tag{34}$$

because the applied voltage is harmonically, the deformant power is calculated multiplying his effective value by the deformant residuum I_d of the phase current. The requested deformant residuum is equal to the effective value of the third harmonic I_3 of the phase current, since, with the assumed hypothesis from [1], in the composition of the phase current there is only a third harmonic. Hence:

$$D = \frac{A_r I_{rm} U}{2\sqrt{2}} = \frac{A_r U^2 l_0}{2w^2 k_a \mu_0 S_f} = \frac{U^2 X_{mr}}{2w^2 k_a \mu_0 S_f}, \tag{35}$$

having in sight Eqs. (22_1), (28), [1].

Received the 10 III 1968

Polytechnic Institute, Brashov,
Department of Electrical Engineering

REFERENCES

1. Saal C., *Study of an Oscillating Biphase Synchronous Linear Motor* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*, pp. 345—362.
2. — *Contribuţii la studiul funcţionării oscilomotorului bifazat sincron.* St. cerc. energ. electr., 1967, **17**, *4*, pp. 721—739.
3. — *Power Behaviour of the Electromechanical Drive Devices with Oscillating Linear Motors.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1—2*, pp. 387—395.
4. Braier A., Rosman H., *Asupra bilanţului energetic în cazul oscilatorilor liniari perturbaţi periodic.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4*, pp. 69—74.
5. Hamburger L., Buzdugan Gh., *Teoria vibraţiilor şi aplicaţiile ei în construcţia de maşini.* Ed. tehn., Buc. 1958, pp. 61—64.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL FUNCŢIONĂRII OSCILOMOTORULUI BIFAZAT SINCRON (II)

(Rezumat)

Se studiază regimul permanent al armăturii mobile, stabilindu-se bilanţul de puteri.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D. C. 621.313.333.021.2

THE CAPACITANCE CALCULATION OF THE CAPACITOR SERVO-MOTOR WITH ASYMMETRICAL STATOR WINDINGS

BY

V. D. SAVIUC and M. T. LUCANU

1. Introduction

Capacitor motors with asymmetrical stator windings and symmetrical rotor present some advantages in comparison with those of symmetrical stator : they improve the operating characteristics and increase the starting torque, permitting to reduce the copper consumption to 33% and the ferromagnetic materials to 10...24%; the nominal voltage of the capacitor decreases twice, etc. [1]. For these reasons, they are used more and more in several electrical drives, especially those of small power [2].

Such motors being supplied from a monophase electric network, are employed to drive domestic and medical apparatus.

If at the drag-cup induction motor, which enjoys a large utilisation in automatic and telemechanic schemes, one sets a winding on the external stator and another one on the internal stator, there appears the possibility to vary the angle between the axes of the two windings, and to obtain easily an asymmetrical stator machine; by turning one stator in face of the other, one obtains a new way of controlling this motor, besides the ways already known [3].

The operating and starting characteristics of the capacitor motor being on a large degree dependent upon the capacitance value of the auxiliary winding, a rationally determination of this capacitance in function of the conditions imposed by the driving action is required.

Since the performances of the servo-motors depend on their behaviour at the start, a situation in which it find itself quite frequently, this paper gives the calculation relationships of the capacitance of the auxiliary winding, neglecting the small mutual leakage reactance between the stator windings, in one of following conditions: to get a circular revolving magnetic field; the losses in the windings should be equal; to get a maximum starting torque; to get a maximum ratio between the torque and the losses in the stator windings at the start.

2. Circular Revolving Magnetic Field

Usually the determination of the servo-motors capacitance with quadrature windings is made on condition to obtain a circular revolving magnetic field [4]...[6]. This condition involves the annulation of the negative sequence component of the stator currents.

The expression of this component, for the studied case, when the applied voltages to the windings A and B are $\underline{U}_A = \alpha \underline{U}_B = \alpha \underline{U}$, and $\underline{Z}_B = r_B + j(x_B - x_C)$, is the following [2]:

$$(1) \qquad \underline{I}_{A2} = \underline{U} \frac{\left(\alpha - \frac{1}{k} e^{-j\theta}\right)(\underline{Z}_{A11} + 2\underline{Z}_1 \sin^2\theta) - \left(\alpha - \frac{1}{k} e^{+j\theta}\right)\underline{Z}_{A21}}{(\underline{Z}_{A11} + 2\underline{Z}_1 \sin^2\theta)(\underline{Z}_{A22} + 2\underline{Z}_2 \sin^2\theta) - \underline{Z}_{A12}\underline{Z}_{A21}} .$$

The employed notations are given in the list of symbols at the end of the paper.

If we annule the really and imaginary part of the expression $\underline{I}_{A2} = 0$ and neglect the capacitor resistance, one obtains the relationships:

$$(2) \quad x_c = x_B + \frac{r_B[(r_1 + r_A)\sin\theta + x_A \cos\theta] + k^2 \sin\theta [r_1 r_A + x_1 x_A + \sin^2\theta (r_1^2 + x_1^2)]}{(x_1 + x_A)\sin\theta - r_A \cos\theta},$$

$$(3) \qquad \alpha = k \frac{(x_1 + x_A)\sin\theta - r_A \cos\theta}{r_B + k^2 (r_1 \sin\theta + x_1 \cos\theta)\sin\theta} .$$

For $\theta = \pi/2$ one obtains the well known relationships from [4]...[6]. It is to be noticed that for obtaining a circular revolving magnetic field, the above two conditions must be achieved, which cannot be satisfied only with a single slip. With servo-motors in the relationships (2) and (3) one takes usually $s = 1$. When the revolving magnetic field is circular, the currents in the two windings are symmetrical.

Fig. 1 represents by interrupted lines the variation of the quantity $1/\tilde{x}_c$, which is directly proportional to the capacitance of the auxiliary winding, as a function of the angle θ, for two drag-cup induction motors, the reported parameters given in Table 1, corresponding to two series of motors having a power of 0.5...1.0 W and of 5...15 W respectively [4], [5], [7].

The motor parameters and the capacity reactance are reported to the magnetizing reactance x_m; the reported parameters are noted with the sign $\sim$ above the corresponding symbols.

From this figure it results that the necessary capacitance for circular revolving magnetic field has a minimum in the interval [0°...180°], increasing sensibly towards the extremity of the interval.

Fig. 2 shows by a continous line the variation of the signal coefficient α as a function of θ, for the same motors. It has been ascertained that for $\theta > \pi/2$ the signal coefficient higly increases, that which is difficult to achieve.

Table 1

Reported parameters of the studied motors

Nr. motor	$\tilde{r}_A = \tilde{r}_B$	$\tilde{x}_A = \tilde{x}_B$	$\tilde{r}_m$	$\tilde{x}_m$	$\tilde{r}_r$	$\tilde{x}_r$	k
1	0.50	0.50	0	1	2.0	0	1
2	0.10	0.10	0	1	1.0	0	1

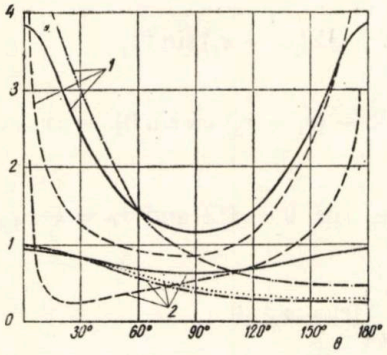


Fig. 1. — Variation of the quantity $1/\tilde{x}_c$ with the angle θ between the stator winding axes for the two motors presented in Table 1 : —— maximum starting torque, – – – circular revolving magnetic field, – · – · – equal losses in the stator windings, ... maximum ratio M_p/p_p .

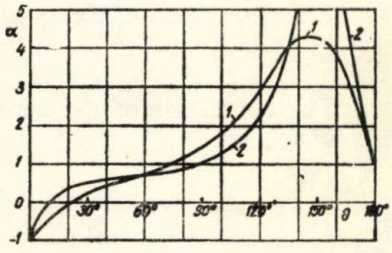


Fig. 2. — Variation of the signal coefficient α with the angle θ at the circular revolving magnetic field for the two motors presented in Table 1.

3. Equal Losses in the two Stator Windings

To obtain the same overheat of the two windings, in the hypothesis that they yield identical heat, it is necessary that the losses in the two windings should be equal, that is :

$$r_A I_A^2 = r_B I_B^2 . \tag{4}$$

The currents $\underline{I}_A$ and $\underline{I}_B$ being determined by the expressions [2] :

$$\underline{I}_A = \underline{U}\,\frac{\alpha \underline{Z}_{BB} - \underline{Z}_{AB}}{\underline{Z}_{AA}\underline{Z}_{BB} - \underline{Z}_{AB}\underline{Z}_{BA}}\,, \quad \underline{I}_B = \underline{U}\,\frac{\underline{Z}_{AA} - \alpha \underline{Z}_{BA}}{\underline{Z}_{AA}\underline{Z}_{BB} - \underline{Z}_{AB}\underline{Z}_{BA}}\,, \tag{5}$$

for x_c, if we utilise the condition (4), one obtains :

$$x_c = x_B + \frac{1}{\alpha}\left[B_1 \pm \sqrt{\frac{r_B}{r_A}(C_1^2 + D_1^2) - A_1^2}\right], \tag{6}$$

where :

$$\left\{\begin{aligned} A_1 &= \alpha r_B + \frac{k}{2}[(r_1 + r_2)(\alpha k - \cos\theta) - (x_1 - x_2)\sin\theta], \\ B_1 &= \frac{k}{2}[(r_1 - r_2)\sin\theta + (x_1 + x_2)(\alpha k - \cos\theta)] - x_{AB}, \\ C_1 &= r_A + \frac{1}{2}[(r_1 + r_2)(1 - \alpha k\cos\theta) + \alpha k(x_1 - x_2)\sin\theta], \\ D_1 &= x_A + \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)(1 - \alpha k\cos\theta) - (r_1 - r_2)\alpha k\sin\theta] - \alpha x_{AB}. \end{aligned}\right. \tag{6'}$$

The expression of the capacity reactance, for $\theta = \pi/2$ and $r_B = k^2 r_A$, $x_B = k^2 x_A$, is :

$$x_c = \frac{k^2}{2}(2x_A + x_1 + x_2) + \frac{k}{2\alpha}\left\{(r_1 - r_2) \pm \right. \tag{7}$$

$$\left. \pm\sqrt{[k\alpha(x_1 - x_2) + 2r_A + r_1 + r_2]^2 + 4[x_A + x_1 - k\alpha(r_A + r_1)][x_A + x_2 + k\alpha(r_A + r_2)]}\right\}.$$

This expression is identical with that one given in [8].

The obtaining of the same losses in the two windings implies the fulfilment of a single condition, which cannot be satisfied but for a slip; for servo-motor one usually takes the slip $s = 1$.

The pointed lines in Fig. 1 show the variation of the quantity $1/\tilde{x}_c$ as a function of θ for the two studied motors, when $\alpha = 1$. This quantity decreases monotonously with the angle θ.

4. Maximum Starting Torque

This condition is important for servo-motors, because the increasing of the starting torque leads to the diminution of the electromechanical time constant [5].

Taking into account that for $s = 1$, $r_1 = r_2 = r_0$ and $x_1 = x_2 = x_0$, the electromagnetical starting torque of the studied motors is given by a relationship which can be expressed as :

$$M_p = \frac{2kr_0 U^2 \sin\theta}{\omega_0} \cdot \frac{A_2 + B_2 x_c}{(C_2 + D_2 x_c)^2 + (E_2 - F_2 x_c)^2}; \tag{8}$$

where :

$$\begin{cases} A_2 = \alpha (x_A r_B - r_A x_B) + \alpha (1 - \alpha k \cos\theta)(r_B x_0 - x_B r_0) + \\ \qquad + k(\alpha k - \cos\theta)(r_0 x_A - x_0 r_A), \\ B_2 = \alpha [r_A + r_0 (1 - \alpha k \cos\theta)], \\ C_2 = (r_A + r_0)(r_B + k^2 r_0) - (x_A + x_0)(x_B + k^2 x_0) - k^2 (r_0^2 - x_0^2)\cos^2\theta, \\ D_2 = x_A + x_0, \\ E_2 = (r_B + k^2 r_0)(x_A + x_B) + (r_A + r_0)(x_B + k^2 x_0) - 2k^2 r_0 x_0 \cos^2\theta, \\ F_2 = r_A + r_0 . \end{cases} \tag{9}$$

Fig. 3 a and 3 b show the variations of the relative starting torque for $\alpha = 1$, in function of $\tilde{x}_c$, for the angles $\theta = 30°$, $60°$, $90°$, $120°$, $150°$ of the studied motors, using the notations of Table 1 ; the starting torque is reported to $U^2/\omega_0 x_m$.

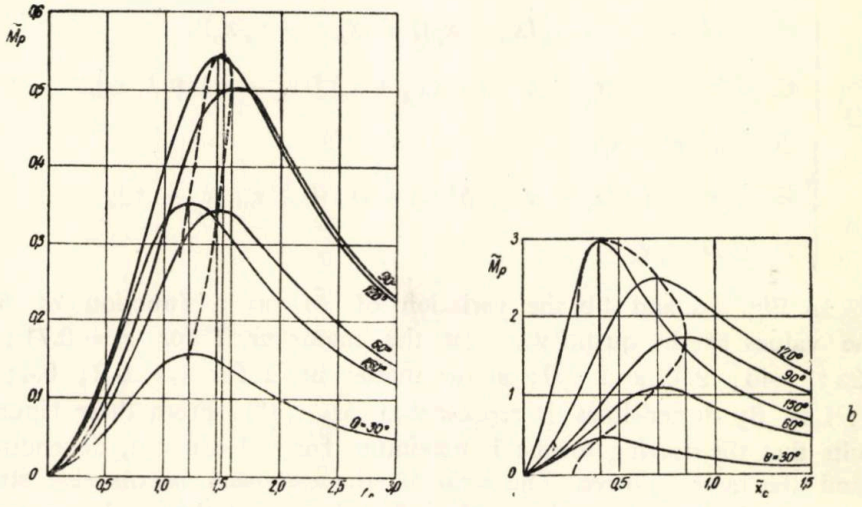


Fig. 3. — Variation of the relative starting torque with the capacity reactance for some values of the angle θ between the winding axes; by dotted line is represented the function $\tilde{M}_{p\max}(\tilde{x}_c)$: a—for motor nr. 1, b—for motor nr. 2.

If we analyse these figures it results that for a determined θ, the starting torque $\tilde{M}_p$ has a maximum. In these figures the variation of this maximum ($\tilde{M}_{p\max}$) with $\tilde{x}_c$ is represented by dotted lines.

The value of the capacity reactance, for which M_p is maximum, for a determined θ, is obtained from the condition $\partial M_p/\partial x_c = 0$, which leads to relation

$$x_c = -\frac{A_2}{B_2} \pm \frac{1}{B_2}\sqrt{\frac{(A_2 D_2 - B_2 C_2)^2 + (A_2 F_2 + B_2 E_2)^2}{D_2^2 + F_2^2}} \quad (10)$$

In Fig. 1 the variation of $1/\tilde{x}_C$ obtained from the relation (10) in function of θ, for the two studied motors, is represented by continuous lines. The curves are symmetrical with respect to $\theta = \pi/2$, having a minimum at this value of the angle θ. The variation of the capacitance with θ is the more important that the motor power grows.

The dependence of the starting torque upon the angle θ can be expressed as:

$$M_p = \frac{2U^2 r_0}{\omega_0} \cdot \frac{(A_2' - B_2' \cos\theta)\sin\theta}{(C_2' - D_2' \cos^2\theta)^2 + (E_2' - F_2' \cos^2\theta)^2}, \quad (11)$$

where

$$\begin{cases} A_2' = \alpha[x_A r_B - r_A(x_B - x_C)] + \alpha[r_B x_0 - r_0(x_B - x_C)] + \alpha k^2(r_0 x_A - x_0 r_A), \\ B' = k\{\alpha^2[r_B x - r_0(x_B - x_C)] + (x_A r_0 - r_A x_0)\}, \\ C_2' = (r_A + r_0)(r_B + k^2 r_0) - (x_A + x_0)[(x_B - x_C) + k^2 x_0], \\ D_2' = k^2(r_0^2 - x_0^2), \\ E_2' = (r_A + r_0)(x_B - x_C + k^2 x_0) + (r_B + k^2 r_0)(x_A + x_0), \\ F' = 2k^2 r_0 x_0 . \end{cases} \quad (11')$$

In Fig. 4 a and 4 b the variation of $\tilde{M}_p$ as a function of θ for some values of the quantity $\tilde{x}_c$ (at the motor nr. 1 for $\tilde{x}_c = 0.71$; 1.0; 1.225; 1.46; 2.33 and 3.0; at the motor nr. 2 for $\tilde{x}_c = 0.2$; 0.4; 0.7; 1.0; 1.5). By dotted-lines is represented $\tilde{M}_{p\max}(\theta)$. From these figures it results that the starting torque is maximum for $\pi/2 < \theta < \pi$, depending on x_c and the motor power. The ratio of the *maximum maximorum* starting torque, obtained at determined values θ and $\tilde{x}_c$, and the maximum starting torque at $\theta = \pi/2$, increases along with the motor power.

The values of x_c and θ for which the starting torque is *maximum maximorum* result from the solution of the system:

$$\frac{\partial M_p}{\partial x_c} = 0, \quad \frac{\partial M_p}{\partial \theta} = 0. \quad (12)$$

The second equation of the system being of degree six in $\cos\theta$, the solution of the system can be obtained only by computers or by proofs.

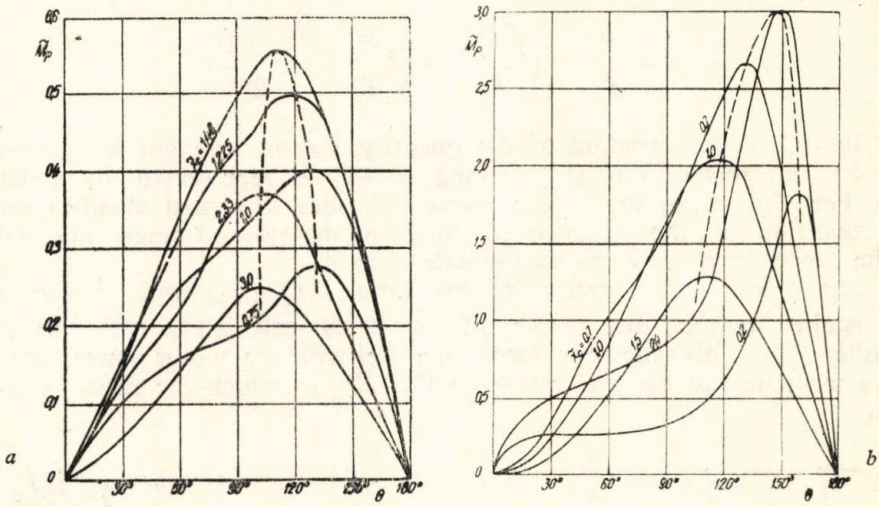


Fig. 4. — Variation of relative starting torque with the angle θ between the winding axes for some values of the relative capacity reactance; by dotted line is represented the function $\widetilde{M}_{p\max}(\theta)$: a—for motor nr. 1, b—for motor nr. 2.

5. Maximum Ratio of the Torque and the Losses in the Stator Windings at Start

The fulfilment of this condition leads to a minimum overheat for a determined starting torque. The ratio of the torque and the losses in stator windings at start, $p_p = r_A I_{Ap}^2 + r_B I_{Bp}^2$, can be expressed in the following manner:

$$\frac{M_p}{p_p} = \frac{2kr_0 \sin\theta}{\omega_0} \cdot \frac{A_3 + B_3 x_c}{C_3^2 + (D_3 - E_3 x_c)^2}, \tag{13}$$

where:

$$\begin{cases} A_3 = A_2, \\ B_3 = B_2, \\ C_3^2 = r_A [\alpha r_B + k r_0 (\alpha k - \cos\theta)]^2 + r_B [r_A + r_0 (1 - \alpha k \cos\theta)]^2 + \\ \qquad + r_B [x_A + x_0 (1 - \alpha k \cos\theta)]^2, \\ D_3 = \sqrt{r_A}\, [\alpha x_B + k x_0 (\alpha k - \cos\theta)], \\ E_3 = \sqrt{r_A}\, \alpha. \end{cases} \tag{14}$$

The value of the capacity reactance for which, at a determined θ, one has a maximum of this ratio, is drawn from the condition $\partial(M_p/p_p)/\partial x_C = 0$, leads to the relationship:

$$x_c = -\frac{A_3}{B_3} \pm \sqrt{\frac{A_3^2}{B_3^2} + 2\frac{A_3 D_3}{B_3 E_3} + \frac{C_3^2 + D_3^2}{E^2}} \,. \tag{15}$$

In Fig. 1 the variation of the quantity $1/\tilde{x}_c$ in function of θ, calculated by the relationship (15), taking $\alpha = 1$, is represented by pointed lines. For the motor nr. 2, the curve coincides with that obtained from the condition of the equality of losses in the two windings. The value of the capacitance decreases monotonous with θ.

Fig. 5 shows the variation of the ratio $(M_p/p_p)_{max}$ with θ for the two studied motors, the value of $\tilde{x}_c$ being calculated with the relationship (15). This ratio very much increases with the motor power, admitting a maximum in the interval $\theta = 60°...120°$, in which the ratio varies a little.

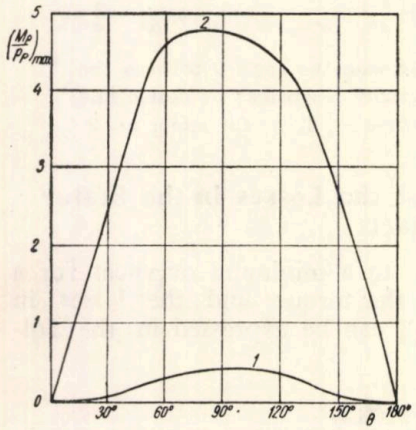


Fig. 5. — Variation of the ratio $(\tilde{M}_p/\tilde{p}_p)_{max}$ with the angle θ for the two motors presented in Table 1.

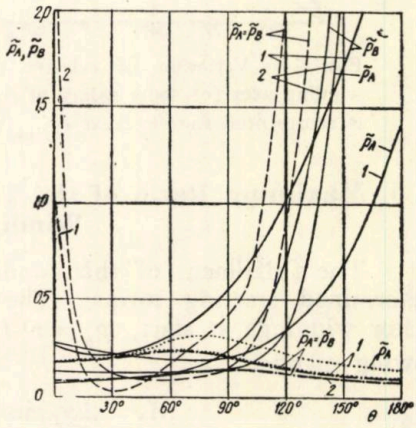


Fig. 6.—Variation of the relative losses in the stator windings A and B with the angle θ between winding axes for the two motors (Table 1) and the four studied condition for the capacitance determination; the curves are noted similarly as in Fig. 1.

At the choice of the capacitance from the auxiliary phase of the motor it is necessary to take into account that the admissible overheats of the windings should not be exceeded.

To follow the winding overheat, in Fig. 6 the variation of the losses in the two windings, $\tilde{p}_A$ and $\tilde{p}_B$, in function of θ, for the two stud-

ied motors and the four conditions of the capacitance determination is represented. To compare the suitable starting torques obtained, in Fig. 7 a and 7 b the variations of the starting torque with the angle θ for the four conditions of the capacitance determination at the motors nr. 1 and 2 are represented.

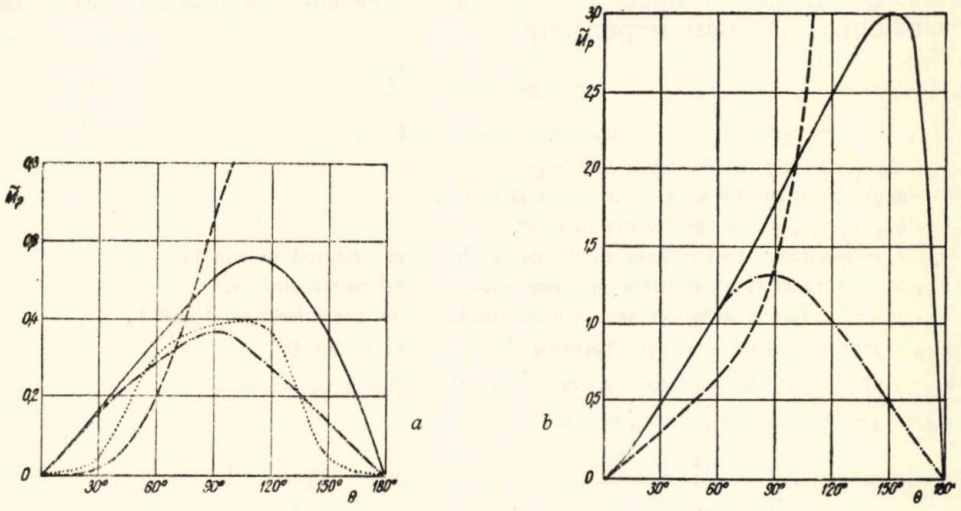


Fig. 7. — Variation of the relative starting torque with the angle θ for the four studied conditions ; the curves are noted similarly as in Fig. 1 : a—for motor nr. 1, b—for motor nr. 2.

6. Conclusions

1. In the case of the determination of the capacitance from the condition where a circular revolving magnetic field is obtained, the losses in the two windings are equal; for $\theta > \pi/2$ the starting torque sensibly increases, but both the signal coefficient α and the losses in the two windings sensibly increases, limiting the practical possibility to use this condition for certain values of the angle θ.

2. If one chooses the capacity reactance from the condition of equal losses in the two windings or from the condition of maximum ratio M_p/p_p for $\alpha = 1$, the losses in the windings remain relatively small, varying slightly with the angle θ but the starting torque obtained in this case admits a maximum at about the value $\theta = \pi/2$, its value being smaller than in the case of the aforesaid conditions. These conditions are sometimes imposed by heating reasons.

3. If one determine the capacitance from the condition for obtaining a maximum starting torque for $\alpha = 1$, the starting torques become bigger than those from the other conditions, at $\alpha = 1$ for $\pi/2 < \theta < \pi$, but at the same time the losses in the two windings are higher too. This condition

is obligatory for the outsized motors from the stand point of heating, in which big starting torques are required.

4. In the domain $\pi/2 < \theta < \pi$, which interests us owing to the starting torque obtained, the highest value of the capacitance is for the maximum starting torque, while the smallest value is for equal losses in the windings or the maximum ratio of the torque and the losses in the stator windings at the start respectively.

List of Symbols

$\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$ — voltages applied to stator windings A and B,

$\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$ — currents in the stator windings,

θ — angle between the axes of windings B and A,

$k = k_{wB} w_B / k_{wA} w_A$ — transformation ratio,

r_r, x_r — resistance and leakage reactance of the rotor referred to winding A,

r_m, x_m — magnetizing resistance and reactance referred to winding A,

r_A, x_A, r_B, x_B — resistances and leakage reactances of the windings A and B,

x_{AB} — mutual leakage reactance between the windings A and B,

x_c — reactance of the capacitor in series with the winding B,

$\underline{Z}_A = r_A + \mathrm{j}x_A$, $\underline{z}_B = r_B + \mathrm{j}(x_B - x_c)$.

$$\underline{Z}_1 = r_1 + \mathrm{j}x_1 = \frac{(r_r/s + \mathrm{j}x_r)(r_m + \mathrm{j}x_m)}{r_r/s + r_m + \mathrm{j}(x_r + x_m)},$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + \mathrm{j}x_2 = \frac{[r_r/(2-s) + \mathrm{j}x_r](r_m + \mathrm{j}x_m)}{r_r/(2-s) + r_m + \mathrm{j}(x_r + x_m)},$$

At start $r_1 = r_2 = r_0$, $x_1 = x_2 = x_0$,

s — slip,

$$\underline{Z}_{A_{11}} = \underline{Z}_{A_{22}} = \underline{Z}_A + \frac{1}{k^2}\underline{Z}_B - \mathrm{j}\frac{2}{k}x_{AB}\cos\theta,$$

$$\underline{Z}_{A_{12}} = \underline{Z}_A + \frac{1}{k^2}\underline{Z}_B\mathrm{e}^{+\mathrm{j}2\theta} - \mathrm{j}\frac{2}{k}x_{AB}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\theta},$$

$$\underline{Z}_{A_{21}} = \underline{Z}_A + \frac{1}{k^2}\underline{Z}_B\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta} - \mathrm{j}\frac{2}{k}x_{AB}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta},$$

$\alpha = \dfrac{U_A}{U_B}$ — signal coefficient,

$$\underline{Z}_{AA} = r_A + \mathrm{j}x_A + \frac{1}{2}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2),$$

$$\underline{Z}_{BB} = r_B + \mathrm{j}(x_B - x_c) + \frac{k^2}{2}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2),$$

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{k}{2}(\underline{Z}_1 e^{-j\theta} + \underline{Z}_2 e^{+j\theta}) + jx_{AB},$$

$$\underline{Z}_{BA} = \frac{k}{2}(\underline{Z}_1 e^{+j\theta} + \underline{Z}_2 e^{-j\theta}) + jx_{AB},$$

ω_0 — synchronous speed,

$\varphi_p = \varphi_{Bp} - \varphi_{Ap}$ — angle between start currents $\underline{I}_B$ and $\underline{I}_A$.

Received the 7 I 1969

Academy of the Socialist Republic of Romania,
Center of Technical Researches, Jassy

REFERENCES

1. Адаменко А. И., *Несимметричные асинхронные машины.* Изд. АН УССР, Киев, 1962.
2. Saviuc V. D., Lucanu M. T., *Maşina asincronă difazată cu înfăşurări nesimetrice pe stator.* Lucr. ICPE, 1969, *22.*
3. — *The Operating Characteristics of Two-phase Drag-cup Induction Motor Controlled by Variation of the Angle between the Axes of the Stator Windings.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3–4*, pp. 405–410.
4. Чечет Ю. С., *Управляемый асинхронный двигатель с полым ротором.* ГЭИ, М.—Л., 1955.
5. Каасик П. Ю., Несговорова Е. Д., *Управляемые асинхронные двигатели с беличьей клеткой на роторе в системах автоматики.* Изд. Энергия, М.—Л., 1965.
6. Fransua Al., Teodorescu D., *Servomotoare electrice în sistemele automate.* Ed. tehn., Buc., 1966.
7. Келим М. Ю., Карпова М. В., *Расчет рабочих характеристик двигателя с полым ротором при управлении пространственным сдвигом осей обмоток.* Электротехника, 1967, **39**, *3*, стр. 57—61.
8. Савюк В. Д., Лукану М. Т., *Характеристики управляемого асинхронного двигателя с массивным ферромагнитным ротором.* Бесконтактные электрические машины, 1968, *8*, Рига.

CALCULUL CAPACITĂŢII SERVOMOTORULUI ASINCRON CU CONDENSATOR CU ÎNFĂŞURĂRI NESIMETRICE PE STATOR

(Rezumat)

Se dau relaţiile de calcul ale capacităţii din faza auxiliară a servomotorului asincron cu condensator, cu înfăşurări nesimetrice pe stator, în una din următoarele condiţii: cîmp magnetic învîrtitor circular; pierderi egale în cele două înfăşurări ale statorului; moment de pornire maxim; raport maxim dintre moment şi pierderile din înfăşurările statorului la pornire, studiindu-se influenţa unghiului θ dintre axele înfăşurărilor şi a reactanţei capacitive x_c asupra unor indici de pornire, pentru două motoare cu rotor neferomagnetic în formă de pahar.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Variaţia mărimii $1/\widetilde{x_c}$ cu unghiul θ dintre axele înfăşurărilor statorului pentru cele două serii de motoare date în tabelul 1 : —— moment de pornire maxim, - - - cîmp magnetic învîrtitor circular, -·-·-· pierderi egale în înfăşurările statorului, ... raport maxim M_p/p_p.

Fig. 2. — Variaţia coeficientului de semnal α cu unghiul θ dintre axele înfăşurărilor în cazul cîmpului magnetic învîrtitor circular pentru cele două motoare date în tabelul 1.

Fig. 3. — Variaţia momentului relativ de pornire $\widetilde{M}_p$ cu reactanţa capacitivă pentru cîteva valori ale unghiului θ dintre axele înfăşurărilor; cu linie întreruptă este reprezentată funcţia $M_{p\max}(x_c)$: *a* — motorul 1, *b* — motorul 2.

Fig. 4. — Variaţia momentului relativ de pornire cu unghiul θ dintre axele înfăşurărilor pentru cîteva valori ale reactanţei capacitive relative; cu linie întreruptă este reprezentată funcţia $M_{p\max}(\theta)$: *a* — motorul 1, *b* — motorul 2.

Fig. 5. — Variaţia raportului $(\widetilde{M}_p/\widetilde{p}_p)_{\max}$ cu unghiul θ dintre axele înfăşurărilor pentru cele două motoare date în tabelul 1.

Fig. 6. — Variaţia pierderilor relative în înfăşurările *A* şi *B* ale statorului cu unghiul θ dintre axele înfăşurărilor pentru cele două motoare date în tabelul 1 şi cele patru criterii studiate de determinare a capacităţii; curbele sînt notate la fel ca în fig. 1.

Fig. 7. — Variaţia momentului de pornire $\widetilde{M}_p$ cu unghiul θ dintre axele înfăşurărilor pentru cele patru criterii studiate; curbele sînt notate la fel ca în fig. 1: *a* — motorul 1, *b* — motorul 2.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D. K. 621.313.36 ; 621-83

ERFAHRUNGSMÄSSIGES STUDIUM DES ELEKTRISCHEN ANTRIEBES MIT EINEM VON EINEM SELBSTERREGTEN DREHSTROM - STROMWENDERGENERATOR GESPEISTEN ASYNCHRONMOTOR (II)

VON

IOSIF BERGMAN

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

1. Vorwort

In den vorangehenden Arbeiten [1]...[4], hat der Verfasser einige Probleme des Betriebes des selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerators und dessen Anwendungsmöglichkeit im elektrischen Antrieb, mit steuerbarer Frequenz, erläutert.

Hier wird die Veröffentlichung des in [1] vorgelegten erfahrunsmässigen Studiums, die in [5] begonnen wurde, fortgesetzt. Es wird besonders die Arbeit der vom Asynchronmotor und den selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator gebildeten Gruppe, falls die Steuerung der Frequenz der erzeugten Spannung durch Veränderung des Übersetzungsverhältnisses K des Generators erziehlt wird, behandelt.

Das Schaltschema und das Arbeitsverfahren wurden in [5] beschrieben. Das Gesamtübersetzungsvehältnis K wurde durch Verschiebung der Anzapfungen der Sekundärwicklung des Zwischentransformators, verändert.

2. Der Betrieb des mit konstantem Moment belasteten Asynchronmotors der vom mit veränderlichem Übersetzungsverhältnis vorgesehenen selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator, gespeist ist

Um den Einfluss der Veränderung des Übersetzungsverhältnisses des Transformators K_t auf den Betriebsparametern des Generators und des Motors verfolgen zu können, werden hier die entspechenden erfahrungsmässig erziehlten Ergebnisse dargestellt.

Der Generator wurde mit der konstanten Drehzahl $n = 1\,500$ U/M angetrieben ; sein Bürstenverdrehwinkel wurde $\alpha = 32°$ gewählt.

Das Gesamtübersetzungsverhältnis wurde zwischen $K = 1{,}02$, wo man die grössten, aus thermischen Gründen zulässigen Werte der durch den Wicklungen des Generators fliessenden Ströme erziehlt, und $K = 2{,}03$, für welchen der stabile Betriebszustand am äussersten Fall sich aufrecht erhaltet, gesteuert. Für grössere Werte des Übersetzungsverhältnisses K, besteht die Selbsterregung des Generators für $\alpha = 32°$ nicht mehr.

Aus den theoretischen Studium [1]...[3] folgt, das für diese Werte des Übersetzungsverhältnisses K, die Frequenz durch die Verschiebung des Bürstenwinkels, in weiten Grenzen gesteuert werden kann.

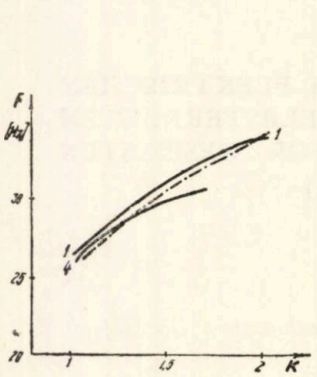


Abb. 1

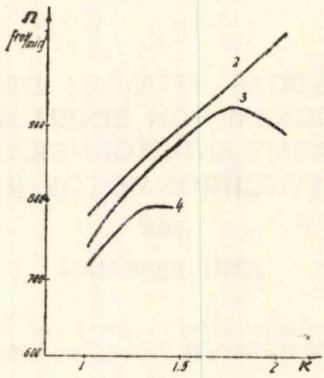


Abb. 2

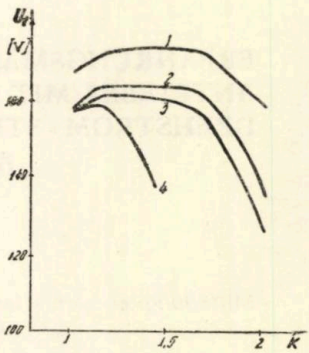


Abb. 3

In den vorliegenden Abbildungen werden mit *1* die Kurven die die Leerlaufparameter des Generators darstellen, mit 2 — die Parameter die falls der Generator den leerlaufenden Motor speist, während mit *3* und *4* — die bei der Arbeit des Motors mit den konstanten Drehmomenten $M = 2{,}2$ Nm, bzw. $M = 4{,}4$ Nm erziehlten, bezeichnet.

In Abb. 1 wurde der Verlauf der Frequenz der vom Generator erzeugten Spannung mit dessen Gesamtübersetzungsverhältnis K dargestellt. Mit Linie-Punkt wurden die mit der Gleichung (1) aus [5] berechneten Frequenzwerte und mit voller Linie die erfahrungsmässig erziehlten, gezeichnet. Hier wurden nur die Leerlauffrequenz (Kurve *1*) und die beim konstanten Lastmoment des Motors $M = 4{,}4$ Nm erziehlte Frequenz (Kurve *4*) gezeichnet, damit man die Verminderung der Generatorfrequenz mit der Vergrösserung des Schlupfes des Asynchronmotors [4], leicht bemerken können soll. Falls das Gesamtübersetzungsverhältnis K zwischen 1,02 und 2,03 gesteuert wird, vergrössert sich die Frequenz bei konstanter Drehzahl des Generators ($n = 1\,500$ U/M und $2p = 4$) von 26 bis 37 Hz. Der Grund der Vergrösserung der beim Leerlauf des Generators gemessenen Frequenz über der mit Gleichung (1) aus [5] berechneten, wird später erläutert werden.

Abb. 2 stellt den Verlauf der Drehzahl des Asynchronmotors mit den Gesamtübersetzungsverhältnis des Generators, dar. Die Leerlaufdrehzahl des Motors verläuft linear mit K, also mit der Frequenz. Bei grösseren Werten von K wird, weil die den Asynchronmotor aufgedrückte Spannung sich vermindert, seine Drehzahl kleiner.

Der Verlauf der Klemmenspannung des Generators, also die dem Asynchronmotor aufgedrückte Spannung U_1 wird, in den vier betrachteten Situationen, in Abb. 3 gezeichnet. Zu Beginn wird die Spannung U_1 zugleich mit den Übersetzungsverhältnis grösser, um dann bereits unverändert zu bleiben; endlich in der Nähe des Grenzwertes von K bei den der Generator erregt bleibt, sinkt die Spannung rasch ab. Das Anwachsen der Spannung U_1 mit den Übersetzungsverhältnis K wurde

theoretisch in [2] und [3] bewiesen. Für grössere Werte von K beginnt der Strom I_1 häftig zu sinken, was das Anwachsen der Spannung hemmt. Der bemerkenswerte Spannungsabfall beim Leerlauf des Asynchronmotors (Kurve 2 im Vergleich zu *1*), wurde in [4] erklärt. Für den Lastmoment $M = 4{,}4$ Nm (Kurve *4*) konnte die Selbsterregung des Generators nur bis $K = 1{,}45$ beibehalten werden.

In den folgenden Abbildungen werden die Kennlinien der in den Kreisen des Generators fliessenden Ströme, und zwar: die Ständerströme I_1 (Abb. 4), die in der Primärwicklung des Zwischentransformators fliessenden I_{1t} (Abb. 5) und die Sekundärströme I_2 (Abb. 6), als Funktion des Gesamtübersetzugsverhältnisses K, dargestellt.

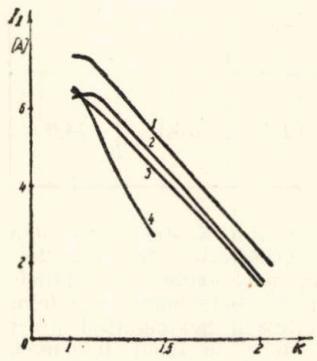


Abb. 4

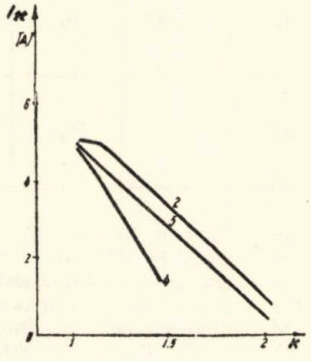


Abb. 5

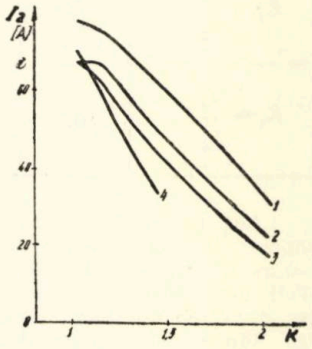


Abb. 6

Die Ströme I_1, I_{1t} und I_2 vermindern sich bereits linear mit der Vergrösserung von K. Diese Tatsache erklärt sich damit das die Vergrösserung von K durch das Anwachsen des Transformatorsübersetzungsverhältnisses K_t erziehlt wird. Natürlich führt das Anwachsen von K_t zur Schwächung der magnetischen Kopplung des Transformators, also zur Vergrösserung der Wirk- und Blindwiderstände des Ersatzschemas, $K_t^2 (r_2 + r_{2t})$ bzw. $K_t^2 (x_{2s} + x_{2t})$, zu. Das bei den kleinen Übersetzungsverhältnissen K bemerkte leichte Anwachsen der Ströme ist durch die Vergrösserung der Spannung zu erklären.

Die Zuschaltung des Asynchronmotors an den Klemmen des Generators und dessen Belastung bringt die Verkleinerung der Ströme I_1, I_{1t} und I_2 mit. Nur bei $K = 1{,}02$ wird die wichtigere Verminderung der Ströme I_1 und I_2 beim Leerlauf des Asynchronmotors (Kurve 2) im Vergleich zum Fall dessen Arbeit bei Belastung (Kurven *3* und *4*) wie in [5] bemerkt. Für den anderen Werten des Übersetzungsverhältnisses K, verkleinern sich die Ströme I_1 und I_2 bei der Zuschaltung der Last, weil die Arbeit des Generators sich zu seiner Selbsterregungsgrenze nähert.

Zwischen den Strömen I_1 und I_{1t} ist die Beziehung:

$$K_t = \frac{I_2}{I_{1t}}, \tag{1}$$

die in [1] und [2] gegeben wird, gültig.

Die Tabelle 1 stellt die Werte des Übersetzungsverhältnisses des Transformators K_t, die als Rapport der Windungszahlen der Primär- und Sekundärwicklung des Transformators (w_{1t} bzw. w_{2t}):

$$K_t = \frac{w_{1t}}{w_{2t}}, \tag{2}$$

berechnet worden sind und die als Rapport der erfahrungsmässig gemessenen Strömen I_2 und I_{1t} des leerlaufenden Generators, als Funktion des Gesamtübersetzungsverhältnisses K, dar.

Tabelle 1

$K_t = f(K)$

K	1,02	1,13	1,27	1,45	1,69	1,84	2,03
$K_t = \frac{w_{1t}}{w_{2t}}$	7,5	8,34	9,37	10,7	12,5	13,6	15
$K_t = \frac{I_2}{I_{1t}}$	10,2	10,3	11	11,3	12,3	13,1	14,8

Aus dieser Tabelle ist, das bei den kleinen Werten von K die durch den Rapport der gemessenen Ströme erziehlten Übersetzungsverhältnisse des Transformators K_t kleiner als die durch dessen Windungszahlen berechneten, ersichtlich. Weil der Strom I_2 grösser als der mit der Gleichung (1) berechnete ist, folgt das der Transformator seinen Magnetisierungsstrom über dessen Sekundärteil (über den Bürsten-Stromwendersystem) erziehlt. Diese Tatsache wird in einer folgenden Arbeit komplet erklärt werden.

Dadurch dass das erfahrungsmässig erhaltene Übersetzungsverhältnis K_t grösser als das mit den Windungszahlen des Transformators berechnete ist, ist die beim leerlaufenden Generator gemessene Frequenz grösser als die mit der Gleichung (1) aus [5] berechnete. Die beiden Werte von K_t sind bereits die selben bei $K=2{,}03$. In diesem Fall sinkt die gemessene Frequenz unter der berechneten (Abb. 1) weil bei der Berechnung das Glied τ, das die Streuflüsse berüksichtigt, vernachlässigt wurde.

In Abb. 7 wird der vom Motor abgenommene Strom I_d, bei dessen Leerlauf (Kurve 2) und bei Belastung mit den konstanten Moment $M = 2{,}2$ Nm (Kurve 3) und $M=4{,}4$ Nm (Kurve 4), als Funktion von K, dargestellt. Die Kurven 2 und 3 haben eine sinkende Form, was durch die Verminderung des Magnetisierungsstromes mit der Vergrösserung der Frequenz, bei gleichbleibender Spannung, sich erklärt. Bei den grösseren Lastmoment (Kurve 4) vermindert sich, zu Beginn, der Strom um dann beim weiteren Anwachsen des Gesamtübersetzungsverhältnisses K sich rasch zugleich mit dem Motorschlupf zu vergrössern, weil die Spannung sinkt. Man bemerkt auch die schnellere Verkleinerung des Leerlaufstromes des Asynchronmotors bei der Vergrösserung von K (Kurve 2) im Vergleich zum Strom bei $M=2{,}2$ Nm (Kurve 3). Diese Tatsache wird durch der Vergrösserung der Wirkkomponente des Stromes I_d, im zweiten Fall, erklärt. Für $K=2{,}03$, bei $M=2{,}2$ Nm, wird I_d grösser als I_1 (Kurve 3).

In der Abb. 8 sind die Kennlinien der Nutzleistung des Asynchronmotors P_u) und der vom Generator aufgenommenen Leistung (P_a) gezeichnet. Abb. 9 stellt die in der Ständerwicklung des Generators fliessende Leistung (P_1), Abb. 10, die Primärleistung des Zwischentransformators (P_{1t}) und Abb. 11, die vom Asynchronmotor aufgenommene Leistung (P_d), dar.

Aus der Analyse der in Abb. 8 ... 11 dargestellten Kennlinien werden die folgenden wichtigsten Bemerkungen entzogen :

a) Die Leistungen P_a, P_1 und P_{1t} werden sowie die Ströme I_1 und I_{1t} durch die Vergrösserung des Gesamtübersetzungsverhältnisses K, kleiner.

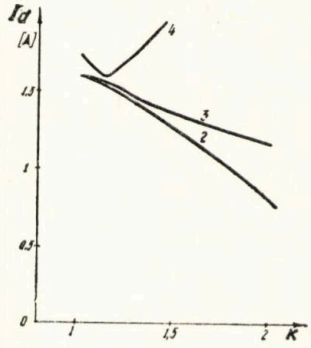


Fig. 7

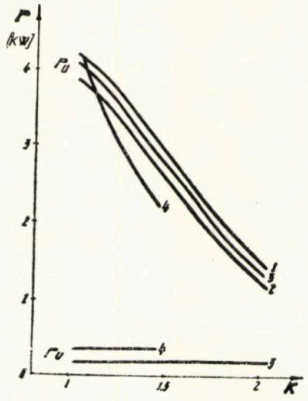


Fig. 8

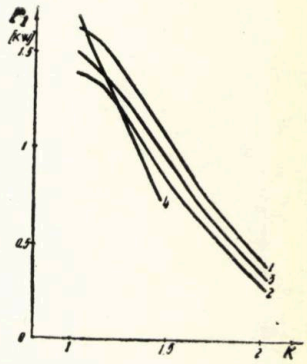


Fig. 9

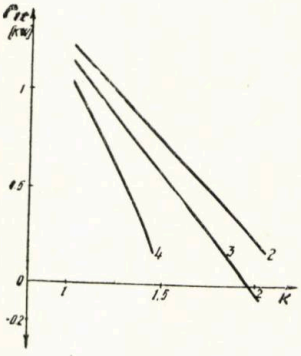


Fig. 10

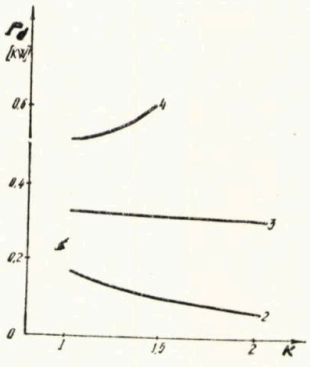


Fig. 11

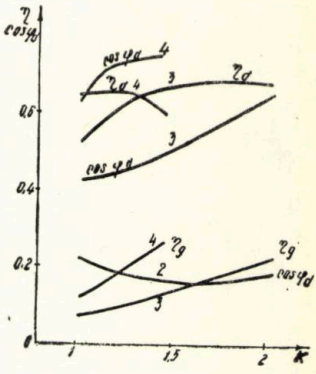


Fig. 12

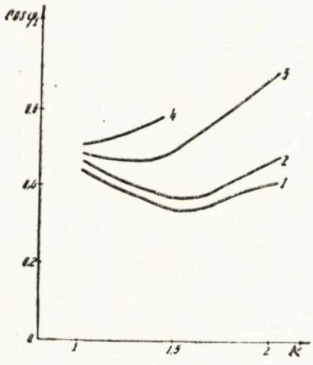


Fig. 13

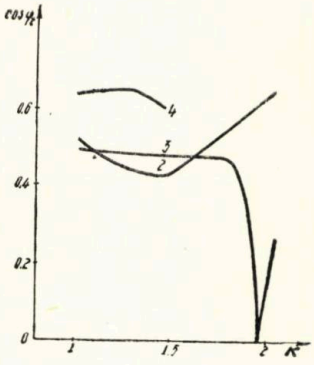


Fig. 14

b) Die Leistungen P_a und P_1 (Abb. 8 und 9) vermindern sich beim Zuschalten des leerlaufenden Asynchronmotors (Kurve 2 im Vergleich zu *1*), um dann zugleich mit dessen Lastmoment anzuwachsen, was durch die Verkleinerung der Spannungen und Ströme des selbsterregten Generators der eine Blindlast speist, erklärt wird. Diese Tatsache wurde zum ersten Mahl in [6] erfahrungsmässing bemerkt und ist in [1] theoretisch bewiesen worden.

c) Bei der Vergrösserung der Last des Asynchronmotors wird die von ihm aufgenommene Leistung P_d grösser, was zum Anwachsen der Leistungen P_a und P_1 des Generators führt. Die Kennlinie *4* stellt die Situation der Arbeit des Asynchronmotors in der Nähe seiner Stabilitätsgrenze, also bei relativ grossen Schlupf s_{rel} und Strom I_d dar; weil auch der Generator in der Nähe der Selbsterregungsgrenze arbeitet, werden dessen Spannung, Ströme und Leistungen kleiner.

d) Die in der Primärwicklung des Transformators fliessende Leistung P_{1t}, beim Lastmoment $M=2{,}2$ Nm (Kurve 3, Abb. 10) ändert ihren Zeichen für $K=1{,}96$. Die Änderungsmöglichkeit des Zeichens der in der Primärwicklung des Transformators fliessenden Leistung falls die Wirklast des Generators sich vergrössert und $I_d > I_1$ ist, wurde in [1] erläutert. Beim Lastmoment $M=4{,}4$ Nm (Kurve *4*) kommt die Entregung bevor der Änderung des Zeichens von P_{1t}, vor.

e) Die kleine Verminderung der vom leerlaufenden Asynchronmotor aufgenommenen Leistung beim Anwachsen des Gesamtübersetzungsverhältnisses K also der Frequenz, die in Abb. 11 ersichtlich ist, wird durch die Verminderung des Leerlaufstromes erklärt. Diese Leistungsverminderung ist im Fall der Kurve *3* von kleinerer Wichtigkeit, weil zugleich mit K die Frequenz also die Nutzleistung des Asynchronmotors sich vergrössern.

f) Bei grossen Lastmomenten (Kurve *4*) wird die vom Motor aufgenommene Leistung zugleich mit K, grösser.

In Abb. 12 wird der Verlauf des Leistungsfaktors ($\cos\varphi_d$) und des Wirkungsgrades (η_d) des Asynchronmotors und des Generators (η_g) mit den Gesamtübersetzungsverhältnis K, also mit der Frequenz, dargestellt.

Der Leistungsfaktor des leerlaufenden Asynchronmotors ($\cos\varphi_d$ hängt, wie bekannt ist, von der aufgedrückten Spannung ab; bei Last vergrössert sich derselbe. Beim belasteten Asynchronmotor, weil der aufgenommene Strom I_d sich vermindert und die Nutzleistung sich vergrössert (Abb. 7 und 11), wird dessen Leistungsfaktor mit der Frequenz grösser. Sein Wirkungsgrad (φ_d) vergrössert sich mit der Frequenz bei kleiner Last (Kurve 3) und wird kleiner bei grosser Last (Kurve *4*).

Die Verbesserung des Wirkungsgrades des Generators (η_g) beim Anwachsen von K wird durch die Verminderung der Ströme und Leistungen die in der Maschine fliessen, also durch die kleineren Verluste, erklärt.

In den Abb. 13 und 14 werden die Kennlinien des Leistungsfaktors der Ständerwicklung des Generators ($\cos\varphi_1 = f(K)$), und der Primärwicklung des Transformators ($\cos\varphi_t = f(K)$), gezeichnet.

Die Kennlinien $\cos\varphi_1 = f(K)$ und $\cos\varphi_t = f(K)$ haben eine ähnliche Form falls der Generator leer arbeitet (Kurve *1*) oder eine kleine Last trägt (Kurve 2). Mit der Vergrösserung der Last des Generators werden die Leistungsfaktoren $\cos\varphi_1$ und $\cos\varphi_t$ grösser.

Die Tatsache das $\cos\varphi_t$ meinsten Falls grösser als $\cos\varphi_1$ ist, wird dadurch das der Magnetisierungsstrom vom Sekundärkreis dem Transformator geliefert wird, erklärt.

Die Kurve $\cos\varphi_t = f(K)$ für $M=2{,}2$ Nm (Kurve 3) geht durch Null für $K=1{,}96$ vorbei, weil hier auch P_{1t} (Abb. 10) sich anulliert.

Die Kleinstwerte der Kennlinien $\cos\varphi_1 = f(K)$ werden durch die Verkleinerung des Magnetisierungsstromes beim Anwachsen der Frequenz erklärt. Mit der Vergrösserung von K wird die Spannung zuerst grösser und dann sinkt sie häftig (Abb. 3) was zur Vergrösserung von $\cos\varphi_1$ beiführt.

3. Die bei variabler Nutzleistung aufgenommenen Betriebskennlinien der vom selbsterregten Drehstromstromwendergenerator und einem Asynchronmotor gegründeten Gruppe

In [1] und [4] sind einige solche Betriebskennlinien für der bis hier benützten Gruppe vorgelegt und analysiert worden.

Weiter wird eine Reihe solcher Kennlinien für der Gruppe die an statt den Asynchronmotor von 0,6 kW einen Schleifringasynchronmotor von 7 kW, 380 V, 50 Hz, 970 U/M, besitzt, dargestellt. Dieser Motor wird durch einen fremderregten Gleichstromgenerator belastet.

Der selbsterregte Drehstrom-Stromwendergenerator wurde mit der Drehzahl $n=1500$ U/M angetrieben und für das Gesamtübersetzungsverhältnis $K=1{,}69$ und den Bürstenverdrehwinkel $\alpha=58°30'$ eingestellt. Für diesen Werten von n, K und α ist, wegen den unzulässig grossen Strömen, der Leerlauf des Generators unmöglich. Nach dessen Selbsterregung wurde der Asynchronmotor zugeschaltet und dann der Bürstenverdrehwinkel bis zum da oben angezeigten Wert gebracht. Der Sekundärstrom ist in diesem Fall schon zimlich gross.

Die Kennlinien werden als Funktion der vom Generator erzeugten Nutzleistung (P_d), die zwischen 0,6 und 2,9 kW geregelt wurde, dargestellt. Der Asynchronmotor kann nicht für diesen Bürstenverdrehwinkel eine grössere Leistung als 2,9 kW aufnehmen, weil der Generator sich entregt. Die Last des Motors kann, bei anderen Werten von n, K und α, noch vergrössert werden; natürlich würden diesmal der selbsterregte Generator und der Gleichstrommotor *MCC* [5] stark thermisch überlastet werden.

Abb. 15 stellt die Kennlinien der Drehzahl des Motors n, des relativen Schlupfes s_{rel}, der Klemmenspannung U_1, dessen Frequenz f und des Sekundärstromes des Generators I_2, als Funktion dessen Nutzleistung P_d dar. Mit der Vergrösserung des Schlupfes werden die Frequenz f und also die Drehzahl des Asynchronmotors kleiner. Diese Tatsache wurde theoretisch in [4] erläutert. Zugleich wird die Klemmenspannung U_1 kleiner und der Sekundärstrom des Generators grösser. Der Maximalwert des relativen Schlupfes der hier erziehlt wurde, ist 13%.

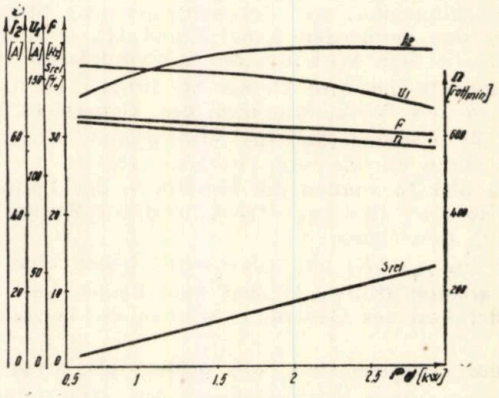


Abb. 15

Die Kennlinien der im Ständer des Generators fliessenden Strome (I_1) und Leistungen (P_1) sowie die in der Primärwicklung des Transformators fliessenden (I_{1t} und P_a) sind in Abb. 16 gezeichnet. Die selbe Abbildung enthält auch die Kennlinien des vom Motor aufgenommenen Stromes (I_d) sowie der dem Generator zugeführten mechanischen Leistung (P_u) und der Nutzleistung des Motors (P_d).

Der vom Motor M aufgenommene Strom I_d ist in diesem Fall grösser als der Ständerstrom des Generators I_1, während der in der Primärwicklung fliessende (I_{t_1}) viel kleiner als I_1 ist. Die Kennlinie des Stromes $I_1 = f(P_d)$ hat einen Höchstwert, während die $I_{1t} = f(P_d)$ einen Kleinstwert vorweist.

Die Leistungen P_a, P_1 und P_u vergrössern sich beim Anwachsen von P_d während die Leistung P_{1t} die in der Primärwicklung des Transformators fliesst sich verkleinert und auch ihren Zeichen ändert.

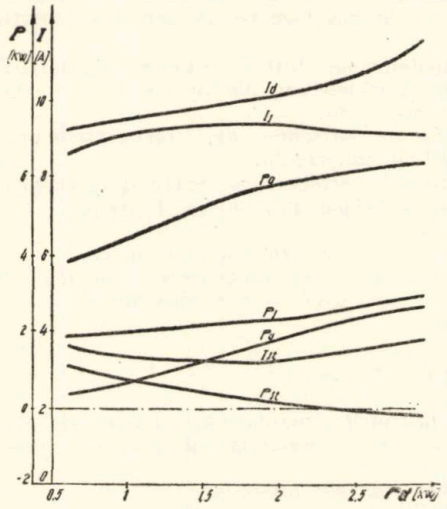


Abb. 16

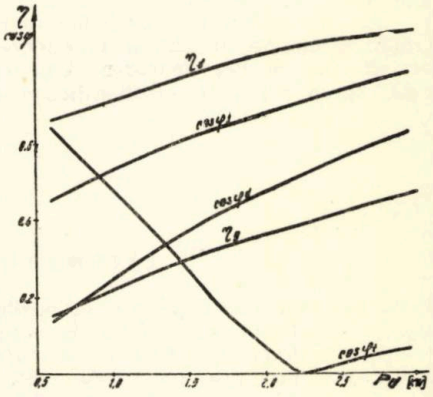


Abb. 17

Der Verlauf des Wirkungsgrades des Generators (η_g) und des Motors (η_d) sowie die der Leistungsfaktoren der Ständerwicklung des Generators $(\cos \varphi_1)$, der Primärwicklung des Transformators $(\cos \varphi_t)$ und des Asynchronmotors $(\cos \varphi_d)$ sind als Funktion der Nutzleistung des Generators in der Abb. 17 gezeichnet. Ausschliessend $\cos \varphi_t$, werden alle hier aufgezählten Parameter zugleich mit P_d grösser.

Von wesentlicher Wichtigkeit ist die Tatsache das hier der Wirkungsgrad des Generators bis auf 0,46 erhöht worden konnte. Natürlich kann dieser noch mehr gesteigert werden falls der Asynchronmotor in der Nähe seiner Nennlast arbeiten soll.

Der hohe Wirkungsgrad des Motors ist durch den kleinen Verlusten, bei geringer Frequenz, zu erklären.

4. Schlussfolgerungen

1. Die Parameter des vom Generator gespeisten Asynchronmotors bleiben in genehmigten Grenzen falls nur das Gesamtübersetzungsverhältnis des Generators verändert wird.

2. Die Frequenz der vom mit konstanter Drehzahl angetriebenen selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator erzeugten Spannung, wächst zugleich mit dessen Gesamtübersetzungsverhältnis K, falls sein Bürstenverdrehwinkel $(\alpha < 90°)$ unverändert bleibt, an.

3. Zur Erweiterung der Regelungsgrenzen der Frequenz muss der Bürstenverdrehwinkel des Generators zugleich mit dessen Gesamtübersetzungsverhältnis verändert werden.

4. Die Spannung wächst zusammen mit den Gesamtübersetzungsverhältnis des Generators an, während die in dessen Kreisen fliessenden Ströme sich vermindern.

5. Die Vergrösserung der Last des Asynchronmotors führt zur Verminderung der Frequenz zu.

6. Um die Verbesserung des Wirkungsgrades des Generators zu erlangen, empfehlt sich das die Differenz der Nennleistungen des Generators und des Motors den kleinst möglichen Wert haben soll.

7. Falls der vom Asynchronmotor aufgenommene Strom grösser als der im Ständer des Generators fliessende ist, kann die Wirkleistung die in der Primärwicklung des Transformators fliesst, ihren Zeichen wechseln.

8. Es werden die Ursachen der Differenzen zwischen den rechnerisch und erfahrungsmässig erziehlten Frequenzen gründlich untersucht.

9. Die in den früheren Arbeiten theoretisch erläuterten Schlussfolgerungen sind, durch die hier veröffentlichen erfahrungsmässigen Ergebnisse, bestätigt.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl der elektrischen Messen
und elektrischen Maschinen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Bergman I., *Cu privire la posibilitatea utilizării generatorului trifazat cu colector autoexcitat la acţionarea electrică reglabilă cu comanda prin frecvenţă.* Teză de doctorat, Iaşi, 1967.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 261—274.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3—4*, pp. 391—402.
4. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1—2*, pp. 409—416.
5. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3—4*, pp. 395—404.
6. Bergman I., Corlăţeanu V., Şerban Gh., Leonte P., Ştirbu V., St. şi cerc. şt., Fiz. şi şt. tehn., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1961, **XII**, 2, pp. 375—382.

STUDIUL EXPERIMENTAL AL ACŢIONĂRII ELECTRICE CU UN MOTOR ASINCRON ALIMENTAT DE LA UN GENERATOR TRIFAZAT CU COLECTOR AUTOEXCITAT (II)

(Rezumat)

Se demonstrează posibilitatea reglării vitezei motorului asincron alimentat de la un generator trifazat cu colector autoexcitat al cărui raport de transformare global este variabil. Frecvenţa tensiunii produse de generator creşte odată cu raportul de transformare global K, la $\alpha < 90°$. Tensiunea produsă are de asemenea tendinţa de creştere, în timp ce curenţii din circuitele generatorului scad.

Parametrii motorului asincron alimentat de la generatorul trifazat cu colector autoexcitat se menţin în limite acceptabile.

Se indică o posibilitate de creştere a randamentului generatorului.

Datele experimentale obţinute confirmă concluziile deduse teoretic de autor, în lucrările citate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 621.313.32

CONTRIBUŢII LA STUDIUL REGIMURILOR MAŞINILOR SINCRONE

DE

TRAIAN GIOSAN

1. Introducere

Adesea într-o reţea industrială sînt în conexiune la aceeaşi bară, maşini sincrone generatoare şi motoare. Pentru simplificarea schemelor şi considerarea regimurilor la un moment dat, se impune substituţia acestora prin echivalenţă. În acest caz trebuie ţinut cont de anumite situaţii specifice relative la schemă şi la regimurile de funcţionare supuse la perturbaţii.

Se consideră două maşini sincrone, funcţionînd în paralel pe aceleaşi bare şi se admite că iniţial maşinile nu prezintă mişcare relativă importantă, deci, pot fi înlocuite cu una echivalentă.

2. Tensiunea electromotoare şi impedanţa echivalentă

Au loc relaţiile

$$\underline{E}_1 = \underline{U}_1 + \underline{Z}_1\underline{I}_1, \quad \underline{E}_2 = \underline{U}_2 + \underline{Z}_2\underline{I}_2, \quad \underline{E} = \underline{U} + \underline{Z}\underline{I},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{U}}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{E} - \underline{U}}{\underline{Z}}.$$

Deoarece $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ rezultă

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_2} - \underline{U}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right) = \frac{\underline{E} - \underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} - \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}.$$

Tensiunea electromotoare şi impedanţa echivalentă sînt prin urmare:

$$\underline{E} = \frac{\underline{E}_1\underline{Z}_2 + \underline{E}_2\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

3. Puterile echivalente

La conectarea sau deconectarea bruscă a sarcinii *3* (fig. 1) au loc variaţii de putere. Se notează constantele de inerţie cu M, puterile mecanice cu P_m iar puterile electrice cu P.

Au loc relaţiile

$$\frac{d^2\delta_1}{dt^2} = \frac{\Delta P_1}{M_1}, \quad \Delta P_1 = P_{m1} - P_1,$$

$$\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = \frac{\Delta P_2}{M_2}, \quad \Delta P_2 = P_{m2} - P_2,$$

$$\frac{d^2\delta_{12}}{dt^2} = \frac{d^2\delta_1}{dt^2} - \frac{d^2\delta_2}{dt^2} = \frac{\Delta P_1}{M_1} - \frac{\Delta P_2}{M_2} = \frac{M_2\Delta P_1 - M_1\Delta P_2}{M_1 M_2}.$$

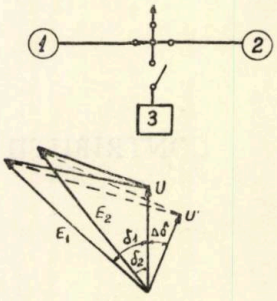


Fig. 1

Se multiplică cu $M_1 M_2/(M_1 + M_2)$ obţinînd:

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{d^2\delta_{12}}{dt^2} = \frac{M_2\Delta P_1 - M_1\Delta P_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 P_{m1} - M_1 P_{m2}}{M_1 + M_2} - \frac{M_2 P_1 - M_1 P_2}{M_1 + M_2},$$

adică

$$M_{12}\frac{d^2\delta_{12}}{dt^2} = \Delta P_{12} = P_{m12} - P_{12},$$

unde

$$M_{12} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad P_{m12} = \frac{M_2 P_{m1} - M_1 P_{m2}}{M_1 + M_2}, \quad P_{12} = \frac{M_2 P_1 - M_1 P_2}{M_1 + M_2}.$$

4. Constantele de inerţie echivalente

Se obţin cu ajutorul relaţiei

$$\frac{d^2\delta_{12}}{dt^2} = \frac{\frac{M_2}{M_1 + M_2}\Delta P_1 - \frac{M_1}{M_1 + M_2}\Delta P_2}{\frac{8M_1 M_2}{M_1 + M_2}} = \frac{m_2\Delta P - m_1\Delta P_2}{M_{12}}.$$

5. Frecvenţa oscilaţiilor

Se consideră procesul tranzitoriu electromecanic al unei maşini sincrone conectată la o reţea rigidă.

Se liniarizează ecuaţia regimului dinamic al maşinii sincrone, în care s-a aproximat $\sin\delta \cong \delta$ $(\delta \leqslant 30°)$:

$$M\frac{d^2\delta}{dt^2} + N\frac{d\delta}{dt} + P_M\delta = P_m. \tag{1}$$

De aici rezultă

$$\delta = \frac{P_m}{P_M} - \frac{M}{P_M}\cdot\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{N}{P_M}\cdot\frac{d\delta}{dt}. \tag{2}$$

Pentru regimul staţionar (3)

$$\delta_{staţ} = \frac{P_m}{P_M}. \tag{3}$$

Valoarea instantanee a derivaţiei relative este deci

$$\Delta\delta(t) = \delta - \delta_{staţ}. \tag{4}$$

Dacă se scade (3) din (2) se obţine

$$\Delta\delta(t) = \frac{M}{P_M}\cdot\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{N}{P_M}\cdot\frac{d\delta}{dt}.$$

Se scrie ecuaţia (1) sub forma echivalentă

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{N}{M}\cdot\frac{d\delta}{dt} + \frac{P_M}{M}\delta = \frac{P_m}{M}.$$

Introducînd notaţiile

$$\lambda = \frac{N}{2M}, \quad \omega_0^2 = \frac{P_M}{M}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_M}{M}} \tag{5}$$

se obţine

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\delta}{dt} + \omega_0^2\delta = \frac{P_m}{M},$$

a cărei soluţie are forma

$$\delta = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \frac{P_m}{M\omega_0^2},$$

unde A_1 şi A_2 se determină din condiţiile iniţiale, iar $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ sînt rădăcinile ecuaţiei caracteristice. Deoarece interesează cazul cînd $\lambda < \omega_0$ se obţine

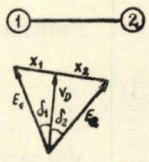
$$\delta = e^{-\lambda t}(C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t) + \frac{P_m}{M\omega_0^2},$$

unde $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ este viteza unghiulară a oscilaţiei.

a) Se consideră sistemul generator-motor sincron de puteri comparabile, cu diagrama fazorială indicată în fig. 2. Unghiurile δ_1 şi δ_2 sînt determinate în raport cu fazorul $\underline{V}_0$ al centrului electric al sistemului.

Dacă

$$P_{M1} = \frac{E_1 V_0}{X_1}, \quad P_{M2} = \frac{E_2 V_0}{X_2},$$



atunci în primă aproximaţie se poate scrie:

$$P_{M1} = P_{M1}\delta_1, \quad P_{m2} = P_{M2}\delta_2.$$

În particular se admite $P_{m1} = P_{m2} = P_{m12}$. Fig. 2

Cum

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 = \frac{P_{m1}}{P_{M1}} + \frac{P_{m2}}{P_{M2}} = \frac{P_{m1}P_{M2} + P_{m2}P_{M1}}{P_{M1}P_{M2}} = \frac{P_{m12}(P_{M1} + P_{M2})}{P_{M1}P_{M2}}$$

şi notînd

$$P_{ms} = \frac{P_{M1}P_{M2}}{P_{M1} + P_{M2}}$$

din (5) rezultă

$$f_s = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_{M1}P_{M2}}{(P_{M1} + P_{M2})M}}.$$

În cazul cînd $P_{M1} = P_{M2} = P_M$,

$$f_s = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_M}{2M}}.$$

Prin urmare, frecvenţa oscilaţiilor proprii ale sistemului în serie cu două maşini este de $\sqrt{1/2}$ ori mai mică decît frecvenţa sistemului echivalent cu o singură maşină.

b) Se consideră acum sistemul cu două maşini sincrone conectate în paralel la aceeaşi reţea (fig. 3). Evident,

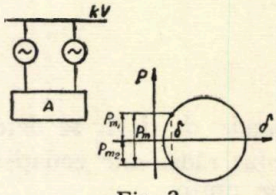


Fig. 3

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 = \frac{P_{m1}}{P_{M1}} = \frac{P_{m2}}{P_{M2}} = \frac{P_{m1} + P_{m2}}{P_{M1} + P_{M2}} = \frac{P_m}{P_{M1} + P_{M2}}.$$

Ţinînd cont de (5), pentru sistemul în paralel rezultă

$$f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_{M_1} + P_{M_2}}{M}}.$$

În cazul particular cînd $P_{M_1} = P_{M_2} = P_M$,

$$f_{p3} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2P_M}{M}}.$$

Prin urmare frecvenţa oscilaţiilor proprii ale sistemului în paralel este de $\sqrt{2}$ ori mai mare decît frecvenţa sistemului cu o maşină.

Pentru sistemul cu trei maşini în paralel

$$f_{p3} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_{M1} + P_{M2} + P_{M3}}{M}},$$

iar dacă $P_{M1} = P_{M2} = P_M$,

$$f_{p3} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3P_M}{M}}.$$

Generalizînd pentru sistemul cu n maşini se poate scrie:

$$f_s = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_M}{nM}}, \quad f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{nP_M}{M}}.$$

În practică nu se întîlnesc decît cazurile $n < 3$ pentru sistemul serie şi eventual $n > 3$ pentru sistemul paralel.

6. Concluzii

Frecvenţa oscilaţiilor sistemului serie este de $\sqrt{1/n}$ ori mai mare iar a sistemului paralel de $\sqrt{n}$ ori mai mare decît cea a sistemului avînd o singură maşină. Consideraţii similare se pot face şi pentru alte scheme, dintre care unele pot fi mai complicate.

Cu această ocazie s-au analizat condiţiile de care trebuie ţinut seama atunci cînd se cere a efectua o substituţie echivalentă a schemelor sau a parametrilor de regim.

Primită la 18 VII 1968

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electroenergetică

BIBLIOGRAFIE

1. Henriet P., *Fonctionnement et protection des réseaux de transport d'électricité*. Ed. Gauthiers-Villars, Paris, 1963.
2. Piotrovski L. M., *Maşini electrice*. EES, Buc., 1953, (trad. din l. rusă).
3. Кимбарк Е., *Синхронные машины и устойчивости электрических систем*. ГЭИ, М.-Л., 1960, (trad. din l. engleză).
4. Конкордия Ч., *Синхронные машины. Переходные и установившиеся процессы*. ГЭИ, М.-Л., 1959, (trad. din l. engleză).

STUDY CONCERNING THE BEHAVIOUR OF THE SYNCHRONOUS MACHINES SYSTEMS

(Summary)

In order to simplify the schemes and to consider the behaviour at a moment, it is necessary the equivalence substitution. We give explanations on the oscillation frequency of synchronous machines, working in series or in parallel.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. D. 621-523; 621.313.333.021.3

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE D'UN SYSTÈME DE COMMANDE RÉGLABLE DE MOTEURS ASYNCHRONES ALIMENTÉS AVEC DES TENSIONS ASYMÉTRIQUES

PAR

N. V. BOŢAN, SIMONA CABA, CORNELIU BOŢAN
et CLAUDIA CACIAUNOV

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 28—30 septembre 1967

1. Dans deux ouvrages antérieurs [1], [2] on a étudié la possibilité de réglage de la vitesse d'un système de commande électrique avec des moteurs asynchrones triphasés. Les études se rapportaient à l'alimentation du moteur avec des tensions asymétriques, obtenues par l'utilisation dans le stator du moteur d'un seul, ou de deux autotransformateurs de construction spéciale.

En étudiant les caractéristiques mécaniques pour de différents degrés d'asymétrie, on a établi quelques conclusions, en ce qui concerne le réglage de la vitesse du moteur, et la possibilité d'utiliser, dans des conditions stables, le moteur à des surcharges de courte durée. Les études respectives se rapportaient aux cas concrets, mettant en évidence particulièrement les aspects qualitatifs du problème, sans insister sur l'aspect quantitatif.

2. Ci-dessous, nous continuerons les études antérieures sous l'aspect quantitatif, et par leur extension à un grand nombre de situations pratiques possibles, on va formuler des conclusions quantitatives qui permettrons une orientation plus expéditive quant au choix du mode d'alimentation du moteur asynchrone avec des tensions asymétriques et le degré d'asymétrie des tensions d'alimentation du stator.

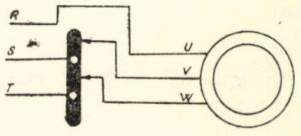


Fig. 1

En ce qui concerne le mode d'alimentation du moteur, sauf celui employé dans les ouvrages antérieurs (fig. 1), nous avons étudié aussi le système d'alimentation Cutler-Hammer [3], représenté en principe dans la fig. 2.

3. En partant de la construction des diagrammes phasoriels, on a établi pour chaque cas les expressions analytiques des tensions directes et inverses, en tenant compte des augmentations ou des chutes des

tensions sur les phases du stator du moteur, ce qui nous a permis à représenter les caractéristiques mécaniques du moteur asynchrone, en utilisant la relation connue [1] :

$$(1) \qquad M = \frac{2M_k}{V^2}\left[\frac{V_d^2}{s/s_k + s_k/s} - \frac{V_i^2}{(2-s)/s_k - s_k/(2-s)}\right].$$

Compte tenu que le diagramme phasoriel pour le cas représenté dans la fig. 1 a été étudié dans [1], on a passé à la représentation des diagrammes phasoriels correspondants aux cas de la fig. 2.

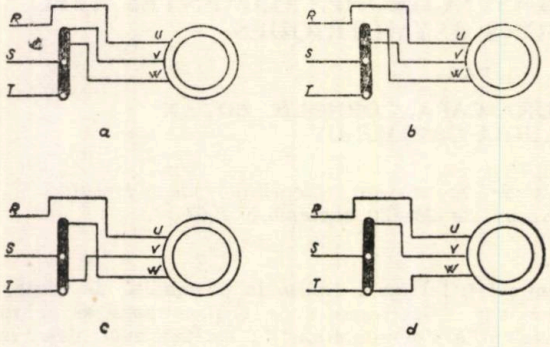


Fig. 2

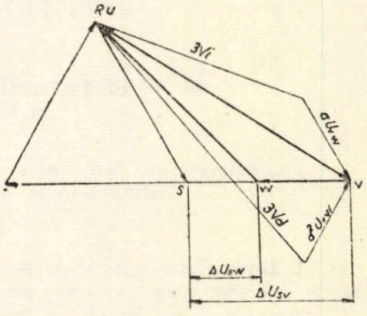


Fig. 3

Ainsi, en tenant compte que :

$$3\underline{V}_d = a^2\underline{U}_{vw} - \underline{U}_{uv}, \qquad 3\underline{V}_i = a\underline{U}_{vw} - \underline{U}_{uv}$$

il en résulte le diagramme véctoriel de la fig. 3.

De ce diagramme on déduit :

$$(3V_d)^2 = U_{uv}^2 + U_{vw}^2 - 2U_{uv}U_{vw}\cos\alpha,$$

où :

$$\alpha = 60° + \beta \text{ et } \cos\beta = \frac{\Delta U_{Sv}^2 + U_{uv}^2 - U^2}{2\Delta U_{Sv}U_{uv}} = \frac{U + 2\Delta U_{Sv}}{2\sqrt{U^2 + \Delta U_{Sv}^2 + U\Delta U_{Sv}}};$$

finalement il en résulte :

$$(3V_d)^2 = U^2 + 2U\Delta U_{Sv} + \Delta U_{Sw}^2 - \Delta U_{Sv}\Delta U_{Sw} - U\Delta U_{Sw} + \Delta U_{Sv}^2.$$

En procédant d'une manière analogue pour la tension inverse, on obtient :

$$(3V_i)^2 = \Delta U_{Sv}^2 + \Delta U_{Sw}^2 + U^2 + 2U\Delta U_{Sw} - \Delta U_{Sv}\Delta U_{Sw} - U\Delta U_{Sv}.$$

En notant avec x le rapport $\Delta U_{Sv}/U$ et avec y le rapport $\Delta U_{Sw}/U$, il résulte :

$$(2)\qquad \begin{cases} V_d^2 = \dfrac{U^2}{9}(x^2+y^2-xy+1+2x-y), \\ V_i^2 = \dfrac{U^2}{9}(x^2+y^2-xy+1+2y-x), \end{cases}$$

d'où l'on déduit que la valeur du degré d'asymétrie est donnée par l'expression :

$$(3)\qquad \varepsilon^2 = \frac{V_i^2}{V_d^2} = 1 - \frac{3(x-y)}{x^2+y^2-xy+1+2x-y}.$$

Dans ce cas, la relation (1) dévient :

$$(4)\qquad M = \frac{2}{3} M_k (x^2+y^2-xy+1+2x-y)\left[\frac{1}{s/s_k + s_k/s} - \frac{\varepsilon^2}{(2-s)/s_k + s_k/(2-s)}\right]$$

En procédant d'une manière analogue pour le cas de la fig. 2 b il en résulte :

$$(5)\qquad \begin{cases} V_d^2 = \dfrac{U^2}{9}(x^2+y^2-xy+1-x+2y), \\ V_i^2 = \dfrac{U^2}{9}(x^2+y^2-xy+1+2x-y). \end{cases}$$

En comparant les relations (2) et (5), on remarque que l'expression de la tension directe (2_1) est identique à celle de la tension (5_2), ce qui est normal, tenant compte que les cas de la fig. 2 a et 2 b diffèrent seulement par l'inversion de deux phases.

Dans ces conditions :

$$(6)\qquad \varepsilon^2 = \frac{V_i^2}{V_d^2} = 1 + \frac{3(x-y)}{x^2+y^2-xy+1-x+2y}$$

et :

$$(7)\qquad M = \frac{2}{3} M_k (x^2+y^2-xy+1-x+2y)\left[\frac{1}{s/s_k + s_k/s} - \frac{\varepsilon^2}{(2-s)/s_k + s_k/(2-s)}\right].$$

D'une façon analogue, on obtient pour le cas de la fig. 2 c :

$$(8)\qquad \begin{cases} V_d^2 = \dfrac{U^2}{9}(x^2+y^2+1+xy+x+2y), \\ V_i^2 = \dfrac{U^2}{9}(x^2+y^2+1+xy-2x-y), \end{cases}$$

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{3(x+y)}{x^2+y^2+1+xy+x+2y} \tag{9}$$

et :

$$M = \frac{2}{3} M_k (x^2+y^2+1+xy+x+2y) \left[\frac{1}{s/s_k + s_k/s} - \frac{\varepsilon^2}{(2-s)/s_k + s_k/(2-s)} \right]. \tag{10}$$

Enfin, pour le cas de la fig. 2 d il en résulte :

$$V_d^2 = \frac{U^2}{9}(y^2+3y+3), \quad V_i^2 = \frac{U^2}{9} y^2, \tag{11}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{y^2}{y^2+3y+3} \tag{12}$$

et :

$$M = \frac{2}{3} M_k (y^2+3y+3) \left[\frac{1}{s/s_k + s_k/s} - \frac{\varepsilon^2}{(2-s)/s_k + s_k/(2-s)} \right]. \tag{13}$$

Pour le cas de la fig. 1, en tenant compte des expressions de la tension directe et de celle inverse [1] et en adoptant les mêmes significations pour x et y, on obtient :

$$\varepsilon^2 = \frac{(x+y)^2 - xy}{(x+y)^2 - xy + 3(1+x+y)}. \tag{14}$$

4. Dans les fig. 4 ... 8 ont été tracées les variations du degré d'asymétrie ε^2 en fonction du rapport x, pour les différentes valeurs de y. La fig. 4 corespond au cas de la fig. 1, tandis que les fig. 5 ... 8 aux cas des fig. 2 a ... d.

L'étude des fig. 4...8 montre que, selon le degré d'asymétrie qu'on peut obtenir, les cas les plus favorables sont ceux qui correspondent aux fig. 2 a et 2 b. En effet, pour le cas de fig. 2 a, pour de petites valeurs du rapport x et pour $y = 1$, on peut aboutir jusqu'aux valeurs de $\varepsilon^2 = 4$. La valeur du degré d'asymétrie baisse avec l'augmentation du rapport x, d'autant plus que la valeur du rapport y est plus petite que 1.

De la fig. 6 on observe que pour le cas de la fig. 2 b la situation s'inverse : les valeurs maximum du degré d'asymétrie correspondent aux valeurs du rapport y qui s'approchent de 0, et aux valeurs du rapport x qui s'approchent de 1. Avec l'augmentation ou la diminution de la valeur du rapport x par rapport à 1 et avec l'augmentation de la valeur du rapport y, la valeur du degré d'asymétrie baisse.

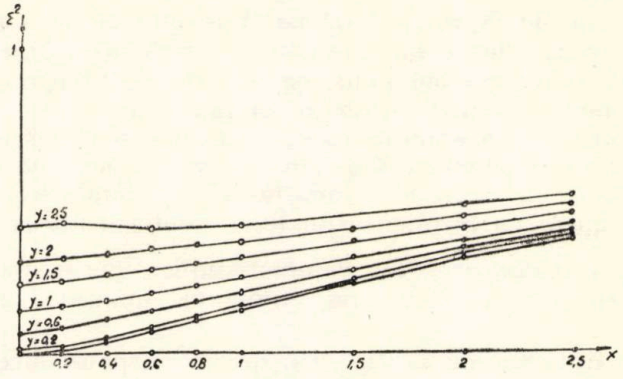


Fig. 4

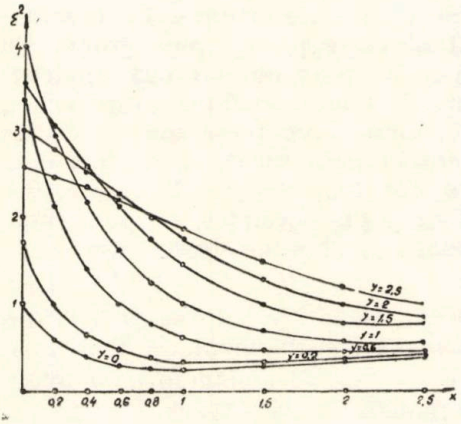


Fig. 5

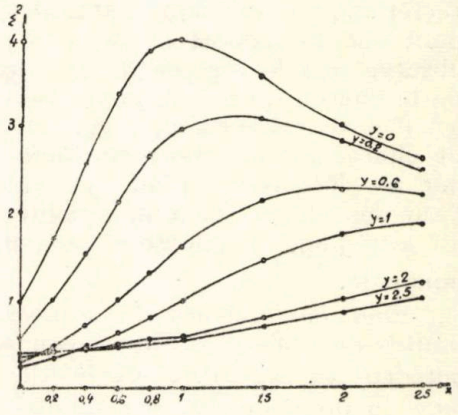


Fig. 6

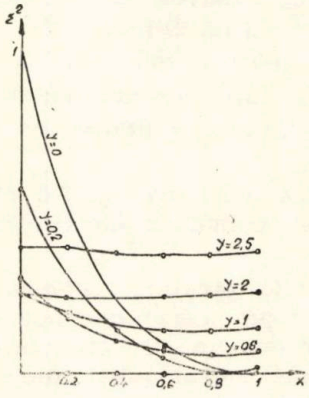


Fig. 7.

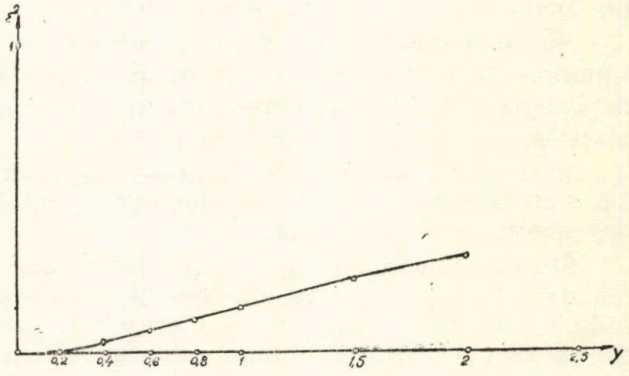


Fig. 8.

Pour le cas de la fig. 1, comme il résulte de la fig. 4, le degré d'asymétrie accuse des augmentations insignifiantes, tant pour x, que pour y. C'est-à-dire que au point de vue du degré d'asymétrie l'utilisation du schéma d'alimentation de la fig. 1 n'est pas justifiée. Aux mêmes conclusions on aboutit dans le cas des schémas des fig. 2 c et 2 d. Remarquons néanmoins que dans le cas du schéma de la fig. 2 c on peut obtenir un degré d'asymétrie $\varepsilon^2 = 1$ pour des valeurs $x = 0$ et $y = 0$, ce qui dans certaines situations peut constituer un avantage.

5. En ce qui concerne les caractéristiques mécaniques du moteur asynchrone (fig. 9...12) si les on étudie on aboutit aus conclusions ci-dessous.

Pour la situation de la fig. 2 a, qui correspond aux caractéristiques mécaniques de la fig. 9, on obtient le fonctionnement dans un régime de moteur sur des caractéristiques situées au-dessous de la caractéristique mécanique naturelle, avec un couple critique d'autant plus petit que le rapport x est plus petit et le rapport y plus grand. On observe que le réglage de la vitesse qu'on peut obtenir aux environs de la charge nominale, pour une chute du couple critique jusqu'à 50% est d'aproximativement 32%. En effet, dans l'hypothèse que le couple de charge est maintenu constant le moteur peut fonctionner sans danger de décrochage pour des valeurs des rapports $y = 0$ et $x > 0{,}4$. Pour des valeurs de x plus petites et de y plus grandes, on peut obtenir le réglage de vitesse seulement pour des charges situées sous celle nominale.

Pour des valeurs croissantes de x, dans l'hypothèse $y = 0$, les limites de réglage de la vitesse diminuent sensiblement. Si l'on compare ce cas avec celui de la fig. 1, il en résulte néanmoins un avantage du point de vue des limites de réglage de la vitesse.

Pour la situation de la fig. 2 b les conclusions restent les mêmes que pour le cas précédent, sauf une observation, à savoir on obtient un foctionnement du moteur dans le sens inverse (fig. 10).

En comparant les deux cas précédents, on observe que dans ces situations le réglage de la vitesse qu'on peut obtenir dans un régime de couplage inverse (contre-courant) est situé dans des limites plus grandes que dans le régime de moteur.

Il résulte donc que les schémas représentés dans les fig. 2 a et 2 b sont avantageuses d'être employés pour la commande électrique des mécanismes de levage.

Si l'on examine la fig. 11, qui correspond à la situation représentée dans la fig. 2 c, il résulte que la caractéristique mécanique naturelle est obtenue lorsque $x = 0$ et $y = 1$. Pour des valeurs croissantes de x et y, on peut obtenir des caractéristiques mécaniques situées au-dessus de la caractéristique mécanique naturelle et par conséquent

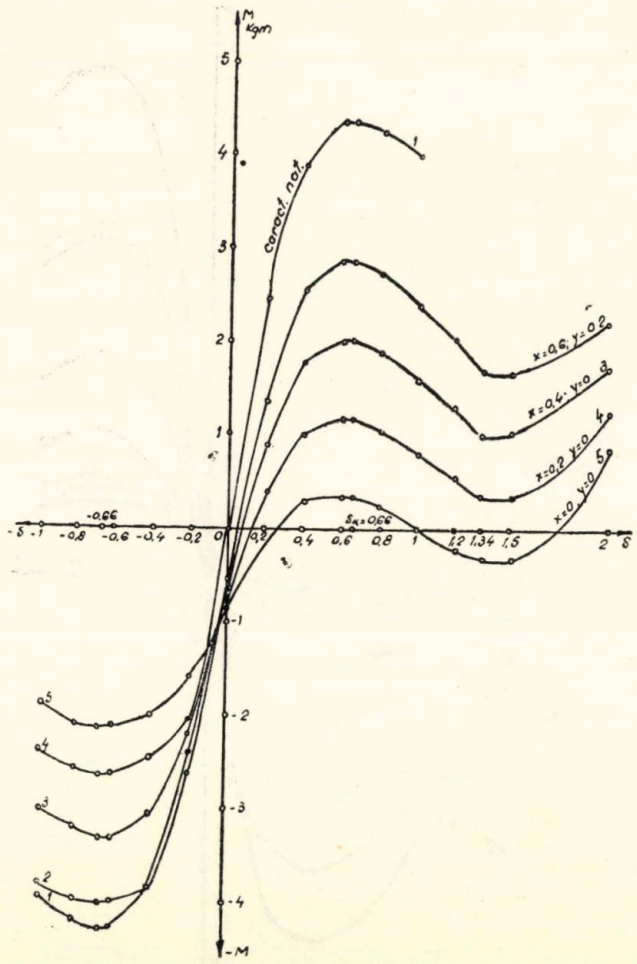


Abb. 9

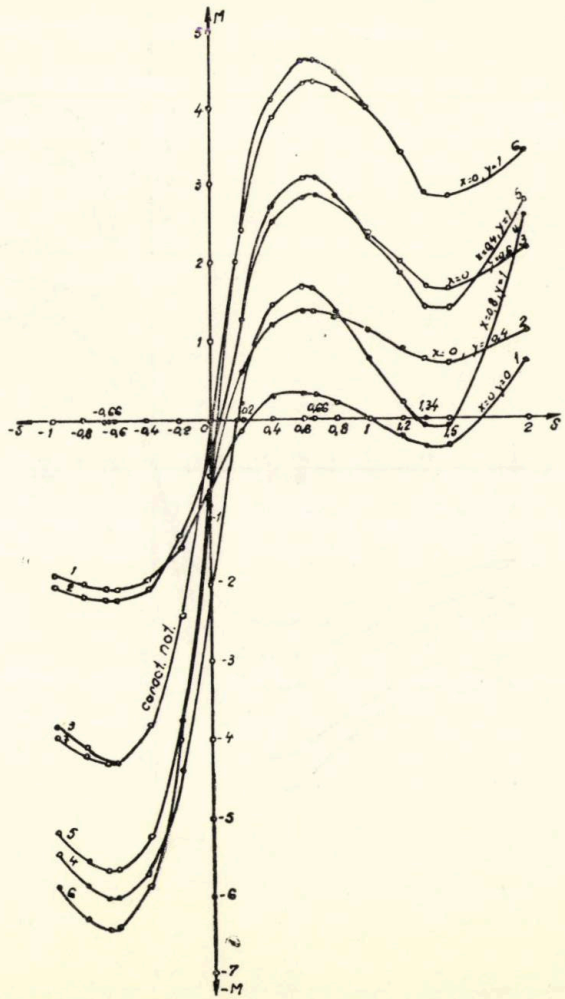


Abb. 10

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

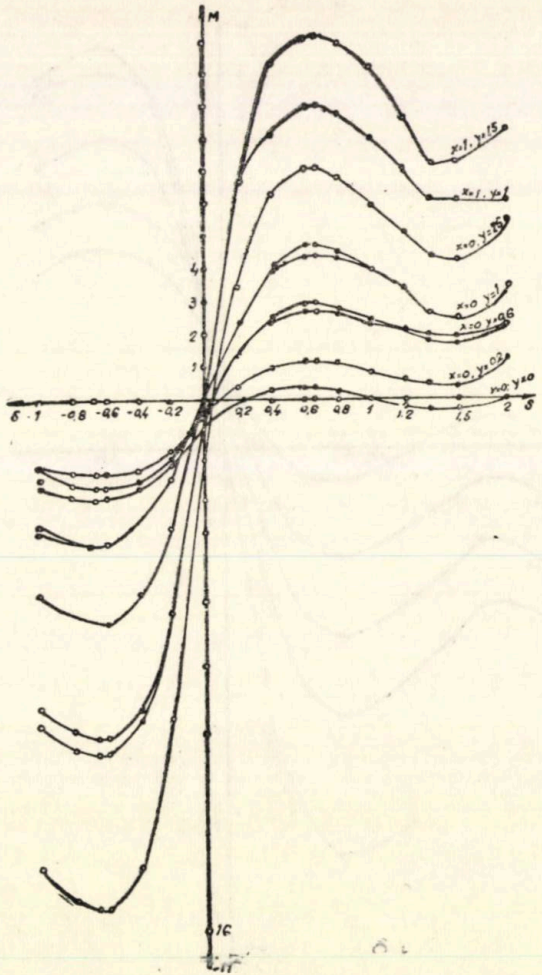

M
x=1, y=1,5
x=1, y=1
x=0, y=1,5
x=0, y=1
x=0, y=0,6
x=0, y=0,2
x=0, y=0
S

Abb. 11

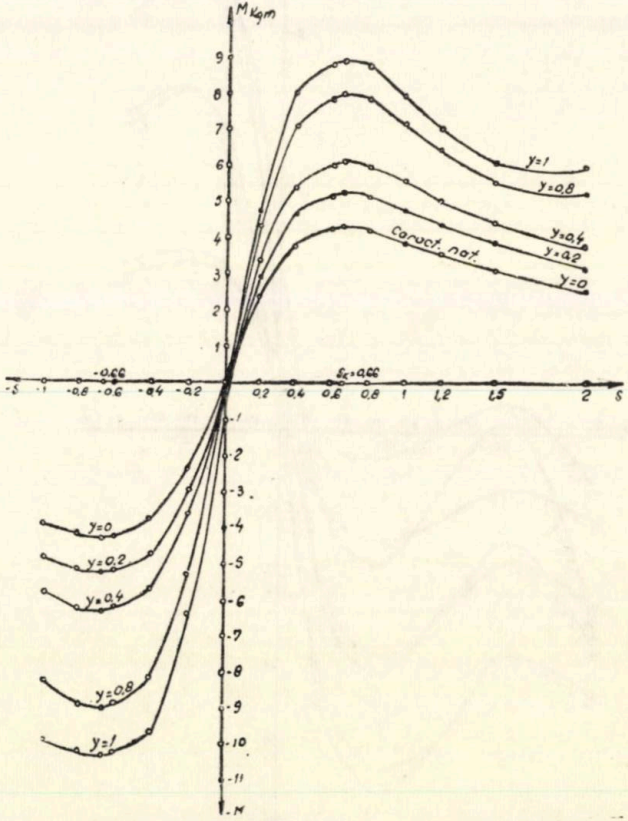

M kgm
y=1
y=0,8
y=0,4
y=0,2
y=0
Caract. nat.
-0,66
S_c=0,66
S
y=0
y=0,2
y=0,4
y=0,8
y=1
-M

Abb. 12

un couple critique plus grand, pouvant atteindre la valeur double du couple critique nominal, (pour $x = 1$ et $y = 1$). Le couple critique peut dépasser cette valeur, mais pour des valeurs du rapport y plus grandes que 1, par conséquent pratiquement inutilisables.

Il résulte, de même, que dans ce cas on peut obtenir pour des charges correspondant à la charge nominale du moteur, des vitesses qui dépassent la vitesse nominale avec 15%.

Ce cas présente par conséquent l'avantage d'un champ de réglage de la vitesse plus grand par rapport aux cas précédents.

Comme dans les cas précédents le réglage de la vitesse dans le régime de couplage inverse peut être effectué dans des limites plus larges que dans le régime de moteur.

De la fig. 12, qui correspond à la situation représentée dans la fig. 2 d, il résulte que par l'augmentation du rapport y on obtient seulement des caractéristiques situées au-dessus de la caractéristique mécanique naturelle, les limites du réglage restent les mêmes comme dans le cas précédent (fig. 2 c).

Conclusions

Les principales conclusions qu'on peut obtenir de l'étude effectuée ci-dessus sont les suivantes :

1. Pour obtenir toutes les possibilités de réglage de la vitesse des moteurs asynchrones par alimentation avec des tensions asymétriques il est nécessaire de considérer aussi les cas représentés dans la fig. 2.

2. Par l'utilisation des schémas de la fig. 2 a et 2 b on obtient des degrés d'asymétrie élevés, pour des valeurs relativement réduites des surtensions sur une, ou deux des phases, pour les deux sens de rotation de moteur.

3. Le champ de réglage de la vitesse d'un moteur, lorsqu'on utilise les schémas de la fig. 2, est plus large que dans le cas du schéma de la fig. 1.

4. Les schémas de la fig. 2 présentent de plus l'avantage qu'elles offrent, dans certaines situations, la possibilité d'obtenir des caractéristiques mécaniques plus rigides que la caractéristique mécanique naturelle, et par conséquent des vitesses plus élevées que celle nominale.

5. En général les limites de réglage de la vitesse par la méthode étudiée sont plus étroites, la méthode donnant des résultats plus avantageux dans le cas du régime de couplage inverse.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire d'Utilisations électriques
et d'Automations

BIBLIOGRAPHIE

1. Boţan N. V., Sebastian L., Poeată N., *Consideraţiuni teoretice asupra frînării subsincrone*, Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, 3—4.
2. Sebastian L., Boţan N. V., *Concluzii asupra unui mod de alimentare a motorului asincron cu tensiuni asimetrice*. Bul. Inst. polit., Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, 3—4.
3. Heumann G. W., *Magnetic Control of Industrial Motors*. Vol. **II**, John Wiley and Sons., Inc., New York-London.

STUDIUL SINTETIC AL UNUI SISTEM DE COMANDĂ REGLABIL CU MOTOARE ASINCRONE, ALIMENTATE CU TENSIUNI NESIMETRICE

(Rezumat)

Se studiază problema reglajului vitezei motorului asincron prin alimentarea cu tensiuni asimetrice, după metoda Cutler-Hammer.

Se stabilesc expresiile analitice ale tensiunilor directe şi inverse pentru fiecare mod de alimentare şi, calculînd gradele de nesimetrie, se scriu ecuaţiile caracteristicilor mecanice.

Trasînd caracteristicile de variaţie ale gradelor de nesimetrie şi caracteristicile mecanice, se stabilesc avantajele şi dezavantajele fiecărui mod de alimentare în parte, din punct de vedere al indicilor reglajului şi al stabilităţii de funcţionare a motorului.

În final sînt făcute recomandări cu privire la alegerea modului de alimentare cu tensiuni asimetrice, pentru obţinerea caracteristicilor necesare în diverse situaţii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secția III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. D. 535.241.431.001.24 ; 628.94

SUR LE CALCUL DE L'ÉCLAIREMENT DES APPAREILS D'ÉCLAIRAGE ASYMÉTRIQUES AVEC LUMIÈRE DIRECTE

PAR

V. PRISĂCARU, LAURIAN PREDA et DAN IOACHIM

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 28—30 septembre 1967

1. Les appareils d'éclairage asymétriques, utilisés pour l'éclairement extérieur, ont habituellement du point de vue de la distribution spatiale du flux lumineux un ou deux plans de symétrie. On peut caractériser cette distribution spatiale, soit par une famille de courbes photométriques tracées sous diverses angles d'azimut par rapport à un plan de référence, soit par une famille de courbes isocandelles tracées sur la surface d'une sphère de rayon donné, au centre de laquelle est située la source d'éclairage. Pour les appareils d'éclairage à lumière directe, les courbes isocandelles se tracent seulement sur la surface de l'hemisphère inférieur.

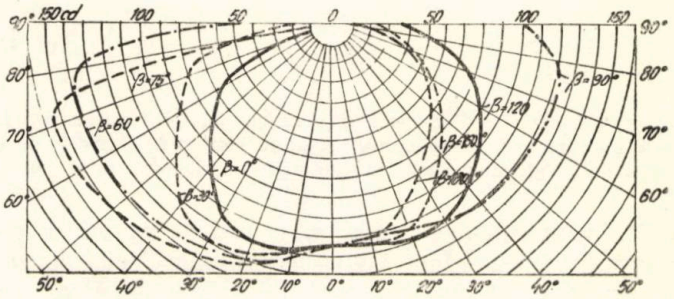


Fig. 1

Pour les appareils d'éclairage asymétriques avec lumière directe, qui admettent un seul plan de symétrie on trace la famille de courbes photométriques pour des valeurs de l'angle d'altitude α, comprises entre 0° et 90°, et pour des valeurs de l'angle d'azimut β, comprises entre 0° et 180° (fig. 1). On trace les courbes isocandelles sur une moitié de la surface de l'hémisphère, determinée par l'intersection du plan de référence (ou de symétrie) avec l'hémisphère (fig. 2).

Pour les appareils qui admettent deux plans de symétrie, perpendiculaires entre eux, il suffit de tracer les courbes photométriques pour un seul cadran, les limites de variation des angles α et β étant $0° \ldots 90°$ (fig. 3). On trace les courbes isocandelles sur la surface d'un quart d'hémisphère, determiné par l'intersection de ces deux plans de symétrie avec la surface de l'hémisphère (fig. 4). Dans les deux cas on choisit comme plan de référence celui qui contient l'axe longitudinal et l'axe de l'appareil d'éclairage (fig. 5), tandis que la sphère se divise dans les deux hémisphères à l'aide d'un plan perpendiculaire sur l'axe de l'appareil d'éclairage, qui passe par le centre de la source d'éclairage.

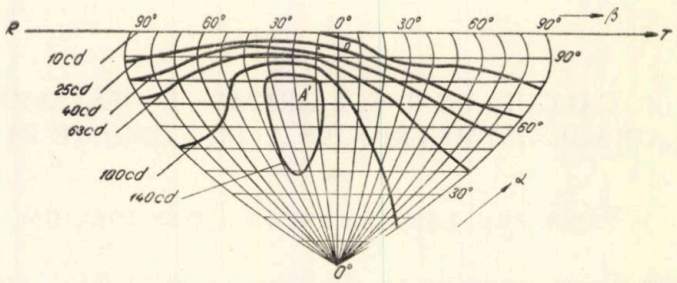


Fig. 2

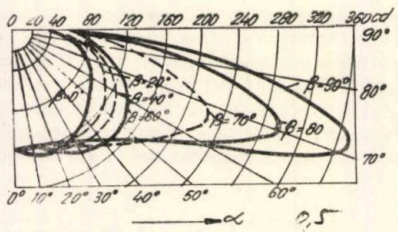


Fig. 3

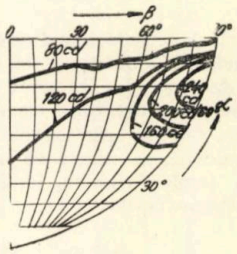


Fig. 4

Par rapport au plan util, l'apppareil d'éclairage peut être placé en position normale (lorsque l'axe de l'appare.l est perpendiculaire sur le plan d'éclairement) ou en position inclinée. Dans ce dernier cas entre l'axe longitudinale de l'appareil et le plan d'éclairement il y a l'angle θ.

2. Si l'on veut calculer l'éclairage extérieur en utilisant des appareils d'éclairage asymétriques, il faut savoir déterminer l'éclairement en un point donné, qui appartient à un plan orienté d'une manière arbitraire dans l'espace, lorsqu'on connaît soit les courbes photométriques (ou les courbes isocandelles), soit les courbes isolux, pour un appareil placé en position normale ($\theta = 0$) et equipé d'une lampe conventionnelle de 1 000 lm.

Pour solutionner le problème il faut établir une relation de correspondence biunivoque entre les coordonnées du point du plan incliné Q qui fait l'angle θ avec l'axe longitudinal de l'appareil et les coordonnées du même point qui appartient à un plan horizontal H pour lequel $\theta = 0$.

Soit P (fig. 5) le point de calcul situé sur la ligne d'intersection des plans H et Q. Les coordonnées du point P dans le plan Q sont p' et a (le système de référence est $M'xyz$) et dans le plan H sont p et a (le aystème de référence est $OXYZ$). La distance entre l'appareil et les plans Q et H est h', respectivement h. L'angle des plans Q et H est θ.

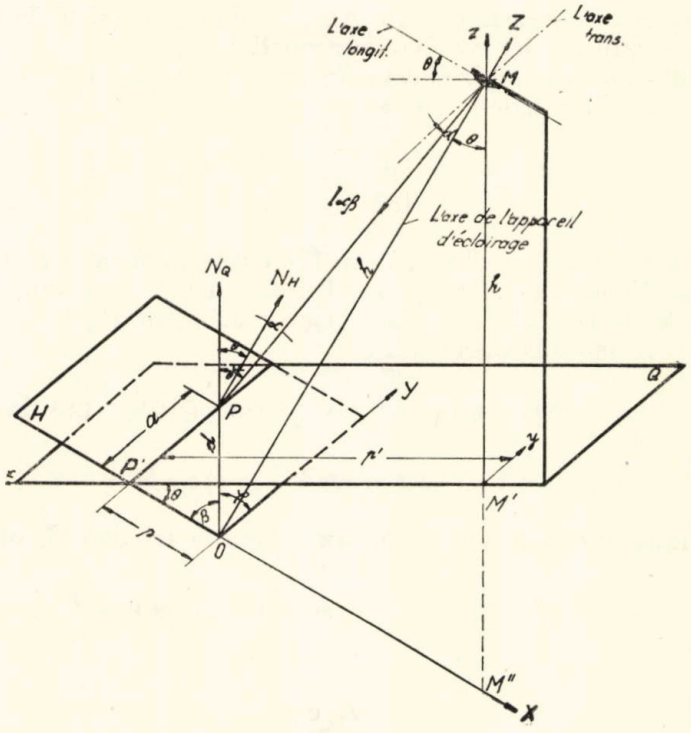


Fig. 5

Les origines des deux systèmes de référence se trouvent dans les points M' et O, où les perpendiculaires menées du centre de la source d'éclairage intersectent les deux plans Q et H. Les axes $M'x$ et OX coïncident avec la direction de la projection de l'axe longitudinal sur les deux plans; $M'z$ et OZ ont la direction des perpendiculaires h' et h; $M'y$ et OY sont perpendiculaires sur les deux autres.

Compte tenu que $\Delta P'M'M'' \sim \Delta MOM''$ il résulte:

$$h = p' \sin\theta + h' \cos\theta, \qquad p = p' \cos\theta - h' \sin\theta. \tag{1}$$

Si le point O est situé au-dessus du plan Q, on obtient:

$$h = p' \sin\theta + h' \cos\theta, \qquad p = h' \sin\theta - p' \cos\theta. \tag{2}$$

Si l'on suppose que les courbes photométriques ou isocandelles sont connues, on peut déterminer la valeur de l'intensité lumineuse dans la direction donnée ($I_{\alpha\beta}$) ; à savoir, du triangle MOP il résulte la grandeur de l'angle d'altitude, $\alpha = \text{arc tg}\,(d/h) = \text{arc tg}\,(\sqrt{p^2 + a^2}/h)$, et du triangle $PP'O$ la grandeur de l'angle d'azimut par raport au plan de référence, $\beta = \text{arc tg}\,(a/p)$.

On obtient la valeur de l'intensité lumineuse $I_{\alpha\beta}$ dans la direction du point P, en utilisant les courbes isocandelles.

On observe que l'éclairement du point P qui appartient au plan Q sera donné par la relation connue :

$$e_Q = \frac{I_{\alpha\beta}\cos\gamma}{MP^2} = \frac{I_{\alpha\beta}\cos^2\alpha}{h^2}\cos\gamma, \tag{3}$$

où : γ — l'angle entre la direction de l'intensité lumineuse et la normale du plan Q élevée au point $P(N_Q)$, α — l'angle entre la direction de l'intensité lumineuse et la normale du plan H élevée au point $P(N_H)$.

On voit immédiatement que :

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\cos\beta = \cos\alpha\,(\cos\theta - \text{tg}\,\alpha\sin\theta\cos\beta)$$

ou

$$\cos\gamma = \cos\alpha\,[\cos\theta - (p/h)\sin\theta].$$

En introduisant la valeur du $\cos\gamma$ dans la relation (3) on obtient :

$$e_Q = \frac{I_{\alpha\beta}\cos^3\alpha}{h^2}\left(\cos\theta - \frac{p}{h}\sin\theta\right) = e\left(\cos\theta - \frac{p}{h}\sin\theta\right), \tag{4}$$

où

$$e = \frac{I_{\alpha\beta}\cos^3\alpha}{h^2}.$$

D'autre part en tenant compte des relations (1) et (3), la relation (4) devient

$$e_Q = e\frac{h'}{h}. \tag{5}$$

Les grandeurs a, p', h' et θ sont connues étant imposées ou mesurées sur le terrain, ce qui permet de déterminer $I_{\alpha\beta}$, p, h et respectivement e_Q.

3. On peut solutionner plus facilement le même problème si l'on connaît les courbes isolux tracées sur un plan conventionnel, perpendiculaire sur l'axe de l'appareil d'éclairage situé à la distance de 1 m et muni d'une lampe conventionelle de 1000 lm (fig. 6).

Les courbes isolux de l'éclairement relatif sont tracées en fonction des coordonnées a/h et p/h du point P_1 se trouvant dans le plan conventionnel. Le point P_1 est situé sur la direction PM $(I_{\alpha\beta})$. Il reste à déterminer ces coordonnées en fonction de p' et a.

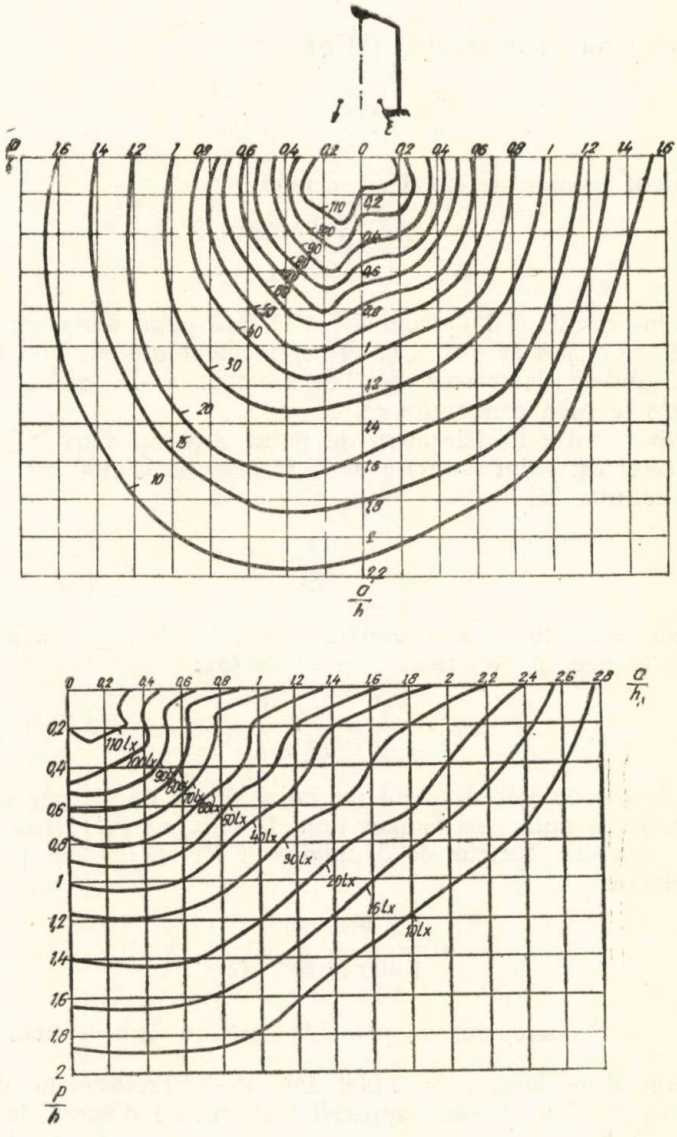


Fig. 6

En analysant les expressions (1) et (2) il en résulte que l'on peut tracer les courbes de variation de $h/h' = f(p'/h')$ et $p/h = f(p'/h')$ pour $\theta = \text{const.}$, où

$$\frac{h}{h'} = \cos\theta + \frac{p'}{h'}\sin\theta. \tag{6}$$

Compte tenu de la relation (1) on a :

$$\frac{p}{h} = \frac{(p'/h')\operatorname{ctg}\theta - 1}{\operatorname{ctg}\theta + p'/h'} \tag{7}$$

et si l'on tient compte de (2) il en resulte

$$\frac{p}{h} = \frac{1-(p'/h')\operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{ctg}\theta - 1}. \tag{7'}$$

Par conséquent, si l'on connait p'/h' on peut déterminer pour un certain θ (fig. 7) p/h et $h/h' = k$, respectivement $a/h = a/kh'$. Des fig. 6 a et 6 b on obtient la valeur de l'éclairement ε du point $P_1\,(a/h,\ b/h)$ contenu dans le plan conventionnel.

La liaison entre l'éclairement du point contenu dans le plan conventionnel et celui du point contenu dans le plan horizontal est donnée par la relation connue [2]

$$e = \frac{\varepsilon}{h^2}. \tag{8}$$

L'éclairement du point P contenu dans le plan Q sera pour un seul appareil d'éclairage, si l'on tient compte de (5) :

$$e_Q = e\frac{h'}{h} = \frac{\varepsilon}{h^2}\cdot\frac{1}{h/h'}. \tag{9}$$

Dans le cas òu l'éclairement du point P est donné par plusieurs appareils d'éclairage munis de lampes dont le flux est différent de 1 000 lm, et compte tenu du facteur de dépréciation K, on obtient pour l'éclairement la relation

$$E_Q = \frac{\Phi}{1\,000\,K}\sum_1^n e_i\frac{1}{(h/h')_i}, \tag{10}$$

où : $e_i\dfrac{1}{(h/h')_i}$ — l'éclairement du point P, contenu dans le plan Q, par l'appareil i muni d'une lampe de 1 000 lm, e_i — l'éclairement du point P, contenu dans le plan H, par l'appareil i et calculé d'après la formule (4) ou (8), c'est-à-dire :

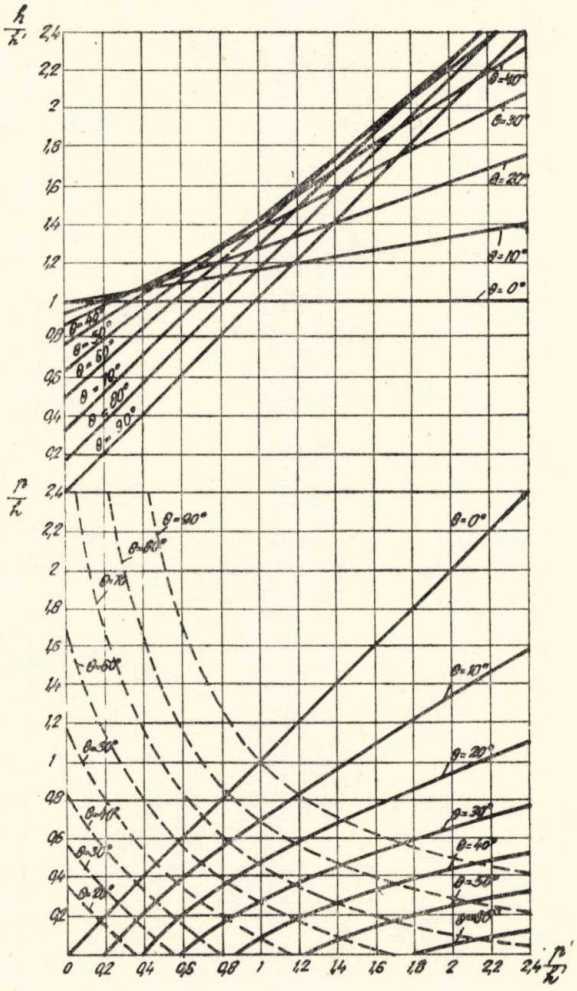

h/h'
p/h
p'/h'
θ=40°
θ=30°
θ=20°
θ=10°
θ=0°
θ=50°
θ=60°
θ=70°
θ=80°
θ=90°
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1 1,2 1,4 1,6 1,8 2 2,2 2,4

Fig. 7

$$e_i = \frac{I_{\alpha_i \beta_i} \cos^3 \alpha_i}{h_i^2} \quad \text{ou} \quad e_i = \frac{\varepsilon_i}{h_i^2}.$$

En résolvant l'équation (10) par rapport au flux Φ, on obtient:

$$\Phi = \frac{1\,000\, K\, E_Q}{\sum_1^n e_i \frac{1}{(h/h')_i}},$$

où: Φ — le flux d'une seule lampe, E_Q — l'éclairement imposé dans le point P.

4. L'ordre de calcul est donné ci-dessous: a) on établit les valeurs de l'altitude de suspension de l'appareil d'éclairage h et de l'angle d'inclinaison θ; b) on établit les coordonnées a et p' du point de calcul; c) on trouve la valeur du rapport p'/h'; d) en utilisant les graphiques (fig. 7) il résulte p/h et h'/h, pour θ et p'/h' donnés; e) on trouve la valeur de l'altitude h; f) on trouve la grandeur du rapport a/h; g) on détermine l'éclairement ε dans le plan conventionnel si l'on connaît a/h et p/h; h) on trouve la valeur de la somme $\sum_1^n \frac{\varepsilon}{h_i^2} \cdot \frac{1}{(h/h')_i}$; i) on trouve la grandeur de l'éclairement E dans le point considéré, ou, en connaissant E on obtient le flux Φ necéssaire pour réaliser l'éclairement imposé.

5. *Observations.* Dans la fig. 7, les courbes $p/h = f(p'/h')$ présentent deux branches, selon que cette variation est realisée conformément à la relation (7) (les courbes à tracé continu) ou (7') les courbes à tracé interrompu). Elles ont un point commun sur l'axe p'/h' qui correspond au cas où le point commun de calcul P coïncide avec le point où l'axe de l'appareil intersecte le plan Q.

Les courbes sont valables pour chaque type d'appareil d'éclairage.

6. *Exemple de calcul.* On donne un poteau (fig. 8) sur lequel on fixe sur des bras, trois appareils d'éclairage du type H.R.F. (*1, 2, 3*) munis de lampes fluorescentes à vapeurs de Hg à haute pression HP-400 ($\Phi = 20\,000$ lm). La longueur du bras de la console est de 2 m, l'angle entre deux consoles voisines étant de 30° (fig. 8). Compte tenu que $h'_1 = h'_3 = 12$ m. $h'_2 = 13$ m, $\theta_1 = \theta_3 = 20°$ et $\theta_2 = 10°$, on demande à déterminer l'éclairement du point P appartenant au plan utile en considérant le facteur de dépréciation $K = 1{,}3$ (l'échelle du dessin 1 : 200).

a) Pour résoudre le problème on utilise les relations (1), (4), (9), (10) et les graphiques de la fig. 7, l'appareil ayant un seul plan de symétrie.

On obtient :

1° pour le premier bras :

$$a_1 = 4{,}6 \text{ m}, \; p'_1 = 11 \text{ m}, \; h_1 = 15{,}06 \text{ m}, \; p_1 = 6{,}2 \text{ m}, \; \alpha_1 = 27°10', \; \beta_1 = 36°30',$$
$$I_{\alpha\beta} = 130 \text{ cd et } e_1 = 0{,}326 \text{ lx};$$

2° pour le deuxième bras :

$$a_2 = 3 \text{ m}, \; p'_2 = 11{,}6 \text{ m}, \; h_2 = 14{,}82 \text{ m}, \; p_2 = 9{,}14 \text{ m}, \; \alpha_2 = 33°, \; \beta_2 = 18°10',$$
$$I_{\alpha\beta} = 120 \text{ cd et } e_2 = 0{,}284 \text{ lx};$$

3° pour le troisième bras :

$a_3 = 9{,}6$ m, $p'_3 = 8{,}2$ m, $h_3 = 14{,}1$ m, $p_3 = 3{,}6$ m, $\alpha_3 = 36°$,

$\beta_3 = 69°20'$, $I_{\alpha\beta} = 136$ cd et $e_3 = 0{,}316$ lx.

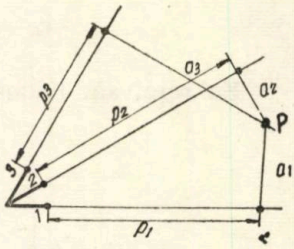


Fig. 8

L'éclairement au point donné, d'après la variante a), résulte :

$$E_a = \frac{20\,000}{1{,}3.1000}\,(0{,}326 + 0{,}284 + 0{,}316) = 14{,}3 \text{ lx.}$$

b) On utilise les relations (8), (9), (10) et les graphiques des fig. 5 a et 7, en obtenant :

1° pour le premier bras :

$$\frac{p'_1}{h'_1} = 0{,}92,\ \frac{p_1}{h_1} = 0{,}42,\ \frac{h_1}{h'_1} = 1{,}25,\ h_1 = 15 \text{ m},\ \frac{a_1}{h_1} = 0{,}307,\ \varepsilon_1 = 92 \text{ lx et } e_1 = 0{,}328 \text{ lx};$$

2° pour le deuxième bras :

$$\frac{p'_2}{h'_2} = 0{,}89,\ \frac{p_2}{h_2} = 0{,}64,\ \frac{h_2}{h'_2} = 1{,}15,\ h_2 = 15 \text{ m},\ \frac{a_2}{h_2} = 0{,}2,\ \varepsilon_2 = 70 \text{ lx et } e_2 = 0{,}27 \text{ lx};$$

3° pour le troisième bras :

$$\frac{p'_3}{h'_3} = 0{,}685,\ \frac{p_3}{h_3} = 0{,}26,\ \frac{h_3}{h'_3} = 1{,}17,\ h_3 = 14 \text{ m},\ \frac{a_3}{h_3} = 0{,}685,\ \varepsilon_3 = 77 \text{ lx et } e_3 = 0{,}336 \text{ lx.}$$

L'éclairement au point P, d'apres la variante b), résulte :

$$E_b = \frac{20\,000}{1{,}3 \cdot 1000}\,(0{,}328 + 0{,}27 + 0{,}336) = 14{,}4 \text{ lx.}$$

On remarque que $E_a \simeq E_b$, c'est-à-dire les deux méthodes de calcul conduisent aux mêmes résultats.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire d'Utilisations électriques
et d'Automations

BIBLIOGRAPHIE

1. Федоров Б. Ф., *Общий курс светотехники*. ГЭИ, М.-Л., 1944.
2. Knorring G. M., *Proiectarea iluminatului electric*. EES, Buc., 1950, (trad. du russe).
3. Băilescu A., Savopol C., *Iluminatul electric. Îndreptar*. Ed. Tehn., Buc., 1962.
4. Elenbaas W., *Les lampes fluorescentes et l'éclairage*. Bibliotèque Technique Philips, 1963.

ASUPRA CALCULULUI ILUMINĂRII DE LA APARATE DE ILUMINAT NESIMETRICE CU LUMINĂ DIRECTĂ

(Rezumat)

Metoda expusă permite cu uşurinţă calculul iluminării de la aparate de iluminat cu lumină directă, nesimetrice, înclinate arbitrar faţă de planul util, precum şi de la stîlpi echipaţi cu mai multe aparate de acest tip (cazul iluminării pieţelor, intersecţiilor principale, spaţiilor verzi etc.).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 628.971.6

METODĂ SIMPLIFICATĂ DE PROIECTARE A ILUMINĂRII UNEI STRĂZI FOLOSIND LĂMPI H. R. F.

DE

LAURIAN PREDA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a C.N.C.S, Iaşi, noiembrie 1967

1. Iluminarea într-un punct al unei suprafeţe plane, măsurată în lucşi, se calculează cu relaţia [1]:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha, \tag{1}$$

unde: I — mărimea vectorului intensităţii luminoase pe direcţia dintre izvorul de lumină şi punctul de calcul (OA), [candele], $r = \overline{OA}$ — distanţa, [m], (conform fig. 1), α — unghiul format de dreapta $\overline{OA}$ cu normala la suprafaţa considerată în punctul A.

Pentru a calcula iluminarea unei străzi se foloseşte metoda punct cu punct, care se bazează pe relaţia (1). Pentru proiectare, calculul iluminării prin această metodă este dificil, necesitînd un volum mare de muncă. Calculul se complică atunci cînd se folosesc aparate de iluminat nesimetrice.

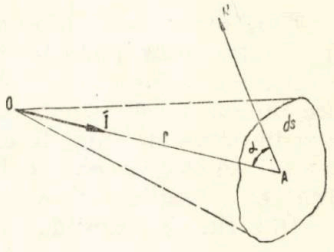


Fig. 1

2. În cele ce urmează se propune o metodă pentru determinarea iluminării în planul străzii, folosind direct grafice în care iluminarea variază în limite restrînse. Suprapunerea acestor grafice permite determinarea rapidă a distanţei optime dintre corpurile de iluminat ce urmează a fi amplasate.

Se consideră o stradă pe marginea căreia se amplasează un stîlp echipat cu un aparat de iluminat asimetric (de exemplu, o lampă H.R.F., fig. 2). Curbele izocandele pentru lampa convenţională de 1 000 lm sînt trasate pe o sferă cu rază de 1 m în cen-

trul căreia este plasat aparatul de iluminat asimetric. În fig. 3 sînt reprezentate curbele izocandele corespunzătoare unui sfert de sferă pentru corpul de iluminat tip H.R.F., înclinat la 10° faţă de orizontală.

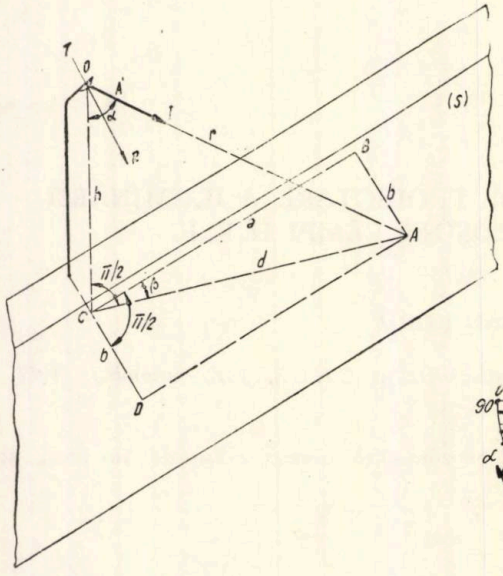


Fig. 2.

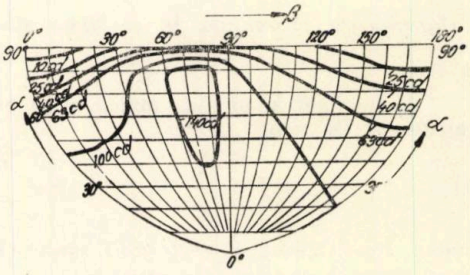


Fig. 3.

Unghiurile α şi β corespund celor din fig. 2.

Se trasează curbele izocandele în planul străzii. În acest scop se determină punctul A funcţie de α, β şi h, astfel încît acestea să corespundă unui punct oarecare A' de pe una din curbele izocandele. Punctul A' (fig. 3) este determinat de coordonatele α şi β. Deci punctul A va avea aceleaşi coordonate α şi β deoarece A' este situat pe dreapta OA şi va depinde de h.

Din fig. 2 rezultă:

$$d = h\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad d = a/\cos\beta$$

şi deci

$$h\,\mathrm{tg}\,\alpha = a/\cos\beta \quad \text{cu} \quad a = h\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Dar

$$b = a\,\mathrm{tg}\,\beta = h\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha = h\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

încît

(2) $$a = h\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad b = h\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

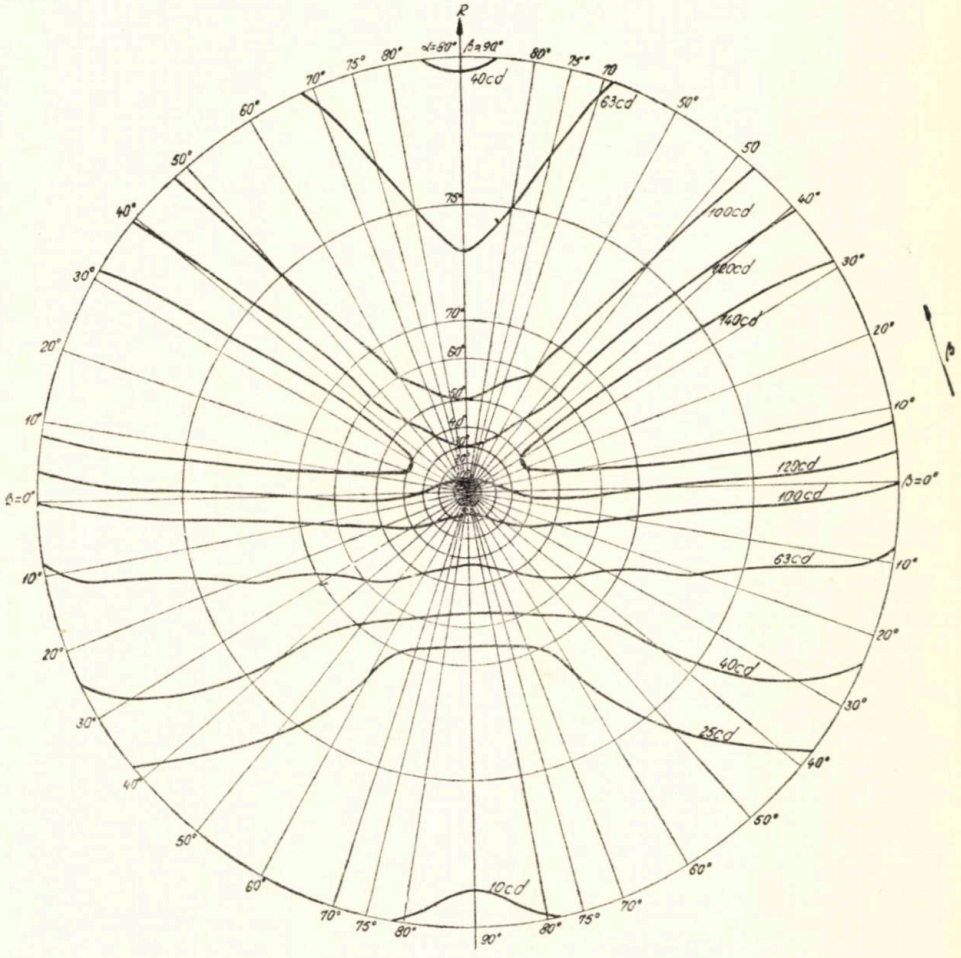
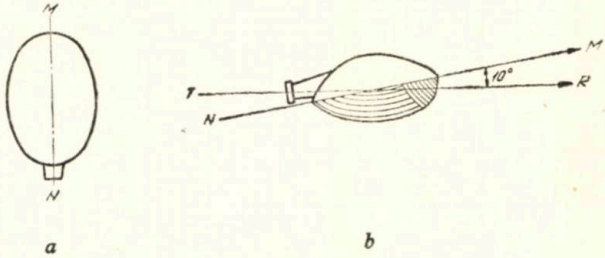

R
α=90°
β=90°
40cd
63cd
100cd
120cd
140cd
120cd
110cd
63cd
40cd
25cd
10cd
β=0°
β=0°
P

Fig. 5.


M
N
T
N
10°
M
R

a *b*

Fig. 6.

Dacă $h = 1$, planul *(P)* pe care se proiectează curbele izocandele este situat la distanţa de 1 m de centrul corpului de iluminat, deci este chiar planul tangent la sfera pe care sînt trasate curbele izocandele. fiind paralel cu planul străzii.

Relaţiile (2) au fost deduse pentru cazul cînd proiecţia axei longitudinale a aparatului de iluminat pe planul *(P)* paralel cu planul *(S)* al străzii (dreapta *RT* din fig. 3), corespunde liniei *CD* (fig. 2), deci unei drepte transversale pe stradă. Dacă corpul de iluminat nu are proiecţia axei longitudinală transversală pe stradă, ci înclinată faţă de aceasta cu un unghi oarecare γ dreptele *CD* şi *CB* (fig. 2) se vor roti în sens corespunzător cu acest unghi, devenind *C'D'* şi *C'B'* (fig. 4); totodată se va roti şi dreapta *CA*, devenind *C'A'*. Consideraţiile făcute corespund cazului general.

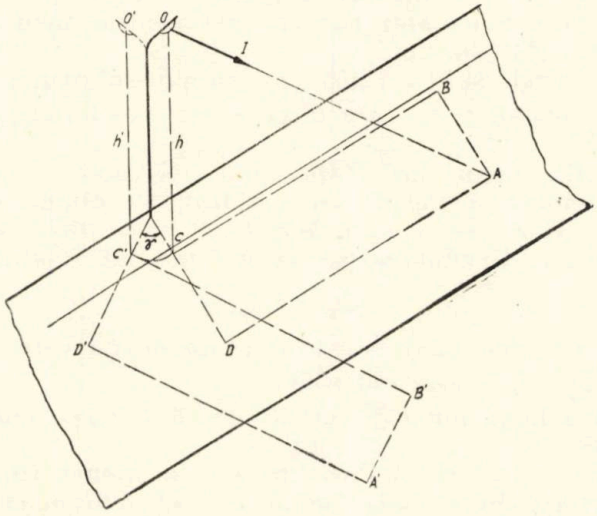


Fig. 4.

3. Avînd trasate curbele izocandele într-un plan paralel cu planul străzii, situat la distanţa de 1 m de centrul aparatului de iluminat *(P)*, pot fi trasate imediat şi în planul străzii *(S)* calculînd coordonatele oricărui punct *(a, b)* prin înmulţirea coordonatelor punctelor din planul *P* cu *h*, conform relaţiilor (2).

Ca aplicaţie, în fig. 5 sînt trasate curbele izocandele în planul *(P)*, situat la 1 m de centrul aparatului de iluminat tip H.F.R., echipat cu o lampă convenţională de 1 000 lm. Axa longitudinală a aparatului de iluminat (*MN*, fig. 6 a) face un unghi de 10° cu planul *(P)*, respectiv cu *RT* (fig. 6 b).

Echipînd corpul de iluminat cu o lampă cu un flux luminos Φ_k, a cărui intensitate este diferită de 1 000 lm, trebuie să se multiplice

valorile corespunzătoare curbelor izocandele din planul *(S)* cu raportul $\Phi_k/1\,000$.

În acest mod se trasează curbele izocandele în planul străzii *(S)*, funcție de înălțimea stîlpului, tipul aparatului de iluminat asimetric, poziția sa față de planul străzii și puterea izvorului de lumină (fig. 7).

Punctul de referință reprezintă intersecția perpendicularei dusă din centrul aparatului de iluminat cu planul *(S)* (punctul c).

4. Din relația (1) rezultă $E = (I/r^2)\cos\alpha$; dar ținînd seama de fig. 2 : $\cos\alpha = h/r$, $r = \sqrt{h^2 + d^2}$, deci,

$$E = I\frac{h}{r^3} = I\frac{h}{\sqrt{(h^2 + d^2)^3}}, \tag{3}$$

unde d reprezintă distanța dintre punctul de calcul și punctul de intersecție a perpendicularei ridicată din centrul aparatului de iluminat cu planul *(S)* (fig. 2).

Dacă h = const. și d = const., se obține, în planul *(S)*, un cerc cu centrul în punctul c, de rază d. Pe acest cerc termenul $h/\sqrt{(h^2 + d^2)^3}$ este constant.

Dînd diferite valori lui d (păstrînd h = const., deoarece înălțimea de suspendare a lămpii nu variază), se obține o familie de cercuri concentrice $(1, 2, \ldots n, n + 1, \ldots)$ cu centrul în C (fig. 7). Pe aceste cercuri iluminarea se va calcula cu relația :

$$E_n = IK_n,$$

unde : E_n — iluminarea unui punct oarecare de pe cercul de rază d_n, $K_n = h/\sqrt{(h^2 + d_n^2)^3}$, d_n — raza cercului n.

Se trasează în planul *(S)* cercuri de rază d_i, pe care se notează valorile K_i (fig. 7).

Între două curbe izocandele trasate în planul *(S)*, intensitatea luminoasă variază între două limite perfect determinate.

Suprapunînd peste curbele izocandele cercurile concentrice cu centrul în C, se pun în evidență, în planul *(S)*, o serie de suprafețe S_1, S_2, ..., S_i..., delimitate de una sau două curbe izocandele și de două arce de cerc de rază d_i și d_{i+1}. În cele patru puncte de intersecție dintre curbele izocandele și cercurile concentrice (d_i și d_{i+1}) iluminarea se calculează imediat cu relația :

$$E(\alpha_i, \beta_i, h) = I(\alpha_i, \beta_i)K_i,$$

unde : $I(\alpha_i, \beta_i)$ — valoarea intensității luminoase luată direct din curba izocandelă dusă în planul *(S)*, $K_i = h/\sqrt{(h^2 + d_i^2)^3}$ — valoare citită direct din grafic.

Comparînd cele patru valori ale iluminării calculate exact în cele patru puncte ale suprafeței S_i, se cunosc imediat limitele între care poate varia iluminarea în interiorul suprafeței S_i (fig. 7). Cu

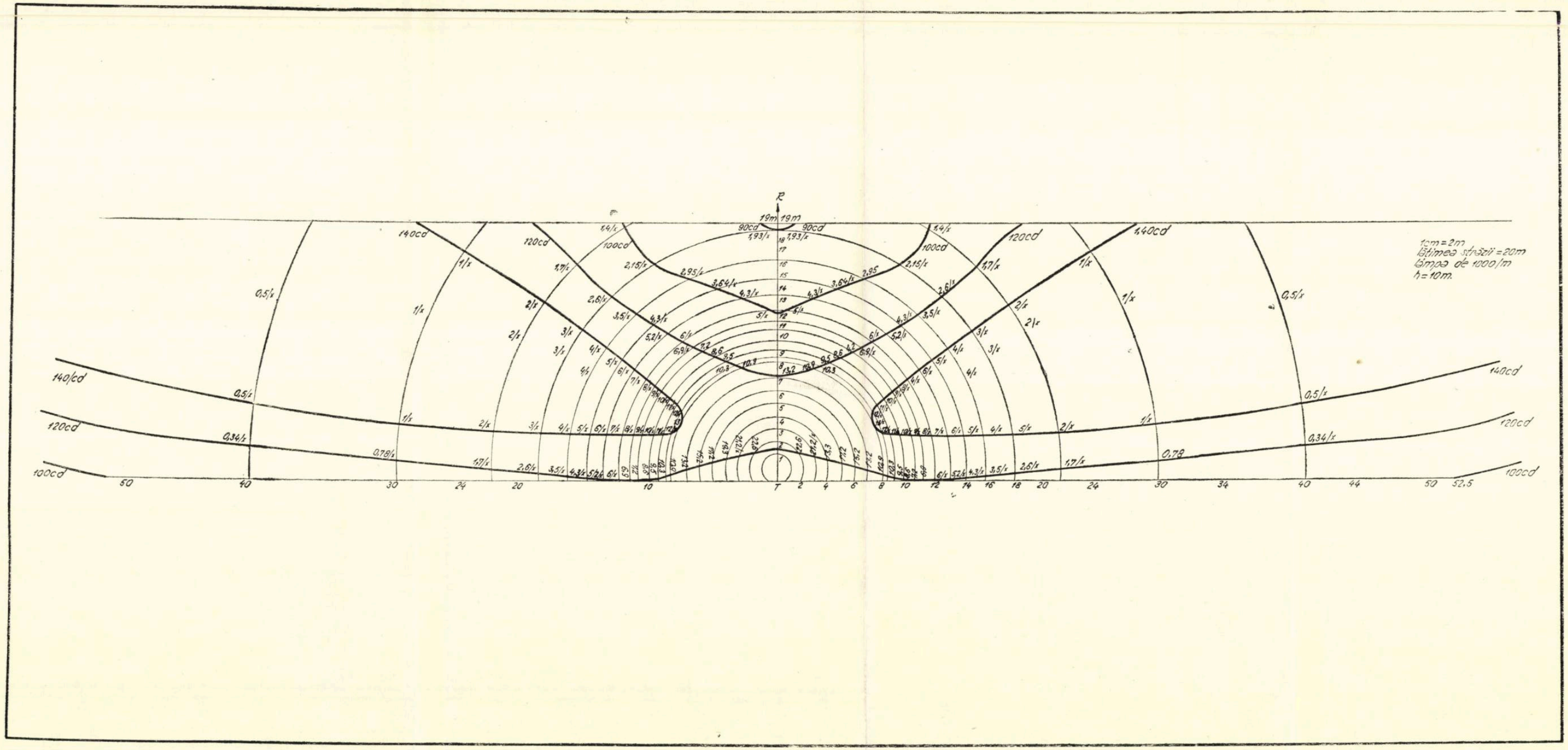

R
19m 19m
90cd
140cd
120cd
100cd
1cm=2m
lățimea străzii=20m
lămpa de 1000/m
h=10m.

Fig. 7

cît numărul de cercuri este mai mare, se obţin suprafeţe S_i mai mici, în interiorul cărora iluminarea variază din ce în ce mai puţin. Dacă se urmăreşte ca variaţia iluminării în interiorul suprafeţei S_i să aibă aceeaşi valoare maximă (de exemplu 1 lx), cercurile vor fi cu atît mai rare, cu cît ne depărtăm de centrul lor. Razele cercurilor ce se trasează pot fi deci astfel alese, încît variaţia iluminării în interiorul suprafeţei să fie de maximum 1 lx, ceea ce este satisfăcător din punct de vedere aplicativ.

5. Pentru întocmirea proiectului de iluminat al unei străzi se aleg, în funcţie de caracteristicile străzii, tipurile corpurilor de iluminat, înălţimea lor de suspendare (obişnuit aceeaşi), iluminarea medie necesară şi raportul E_{min}/E_{max}. În funcţie de aceste date trebuie stabilite distanţele dintre stîlpi, modul lor de aşezare, puterea lămpilor cu care se vor echipa aparatele de iluminat, tipul, numărul şi poziţia lor pe fiecare stîlp. În acest scop se alege tipul aparatului ce urmează a fi utilizat, puterea lămpii, numărul de aparate de iluminat pe fiecare stîlp, poziţia lor în raport cu strada şi modul de aşezare a stîlpilor. Funcţie de aceasta trebuie însă stabilită de obicei distanţa dintre doi stîlpi. Dacă poziţia stîlpilor este impusă trebuie să se determine numărul de aparate de iluminat necesare echipării fiecărui stîlp, poziţia lor şi puterea lămpilor. Toate aceste probleme pot fi rezolvate mai uşor decît prin metoda punct cu punct, cu ajutorul metodei expuse mai sus.

Avînd întocmit un astfel de grafic pe calc (fig. 7), în mai multe exemplare, se fixează în planul străzii punctele de amplasare a lămpilor şi poziţia lor. Se pot deci imediat suprapune, în poziţia corespunzătoare, pentru fiecare lampă în parte, graficele trasate. Se citeşte astfel imediat, în întreaga porţiune de stradă considerată, iluminarea în oricare punct, prin sumarea aritmetică a iluminărilor date de fiecare aparat de iluminat în parte, iluminări trecute direct în grafice. Astfel se găsesc imediat zone de iluminare maximă şi minimă, precum şi modul de variaţie a iluminării pe întreaga porţiune de stradă considerată şi deci se verifică imediat faptul dacă stîlpii au fost judicios amplasaţi, dacă puterea lămpilor, numărul şi poziţia lor este corespunzătoare. Lucrînd direct cu graficele se găseşte imediat varianta optimă (de exemplu, distanţa optimă între doi stîlpi).

În lucrare se prezintă în continuare un exemplu de aplicare a metodei de mai sus pentru cazul unei străzi de 20 m lăţime, iluminată cu aparate de iluminat tip H.R.F. (deci nesimetrice), lămpi cu vapori de mercur de înaltă presiune, de 400 W, cu flux luminos de 20 000 lm), amplasate pe stîlpi dispuşi în zigzag de-a lungul străzii, avînd $h = 10$ m. Fiecare stîlp are cîte o singură lampă înclinată la 10° faţă de orizontală şi orientată perpendicular pe direcţia străzii.

În fig. 7 este prezentat graficul de lucru corespunzător acestei situaţii. Întocmirea sa în mai multe exemplare permite stabilirea distanţei optime dintre stîlpi.

Concluzii

1. Cunoscînd curbele izocandele ale unui corp de iluminat asimetric, trasate pe o sferă de rază unitate, în centrul căreia se găsește izvorul de lumină, se pot trasa curbele izocandele într-un plan paralel cu acesta (planul străzii) cu ajutorul relațiilor (2).

2. Trasînd cercuri concentrice cu centrul în punctul în care perpendiculara dusă din centrul izvorului de lumină înțeapă planul străzii, se obțin diverse valori ale lui K_i.

3. Iluminarea în planul străzii se determină cu relația:

$$E = IK_i.$$

Trasînd pe același grafic curbele izocandele în planul străzii și cercurile K_i, se obțin suprafețele (S_i) în interiorul cărora iluminarea variază între limite apropiate.

4. Utilizînd un astfel de grafic în mai multe exemplare se determină imediat iluminarea oricărui punct al străzii, la care participă mai multe aparate de iluminat asimetrice. Se poate apoi imediat determina distanța optimă dintre stîlpi, puterea lămpilor și poziția lor, deci varianta optimă economică.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electroenergetică

BIBLIOGRAFIE

1. Băilescu A., Savopol D., *Iluminatul electric. Îndreptar.* Ed. Tehn., Buc. 1962.
2. Knorring G. M., *Proiectarea iluminatului electric.* EES, Buc., 1950, (trad. din l. rusă).
3. Prisăcaru, V., Preda, L., Ioachim, D., *Sur le calcul de l'éclairement des appareils d'éclairage asymétriques avec lumière directe.* Bul. Inst. polit. Iași, 1969, **XV (XIX)**, *1*—2, s. III, pp. 121—128.

METHODE SIMPLIFIÉE POUR ÉTABLIR L'ÉCLAIRAGE D'UNE RUE EN EMPLOYANT DES LAMPES H.R.F.

(Résumé)

À l'aide des courbes isocandelles d'un corps éclairant asymétrique on peut tracer les courbes isocandelles dans le plan de la rue; on obtient une famille de surfaces à l'intérieur desquelles l'éclairage varie entre des limites restreintes. L'utilisation d'un pareil graphique en plusiuers exemplaires permet de déterminer immédiatement l'éclairage en n'importe quel point de la rue, la distance optimum entre les poteaux, la puissance des lampes et leur position et par conséquent la variante optimum du point de vue économique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 621-52

ASUPRA POSIBILITĂŢILOR DE FOLOSIRE A MODULATORULUI MAGNETIC CA ELEMENT LOGIC

DE

GHERGHINA BALABAN şi I. BEJAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1] s-au expus cercetările efectuate asupra unui modulator magnetic cu ieşire la frecvenţă dublă, în regim de releu (fig. 1).

Faza mărimii de ieşire se inversează la schimbarea polarităţii semnalului de intrare. La mersul la gol, mărimea de ieşire este nulă. Pentru o capacitate dată C regimul de releu se poate obţine la anumite valori ale permeabilităţii magnetice şi ale frecvenţei curentului alternativ.

Modulatorul magnetic se poate folosi ca element logic ţinînd seama de următoarele posibilităţi de a comanda regimul său de releu :

a) comanda prin valoarea cîmpului continuu ($x_i = I_c$),
b) comanda prin valoarea cîmpului alternativ de frecvenţă f, ($x_i = I_a$)
c) comanda prin valoarea frecvenţei cîmpului alternativ ($x_i = f$),
d) comanda prin valoarea capacităţii ($x_i = C$).

Celelalte trei mărimi care caracterizează funcţionarea modulatorului în afară de mărimea de intrare x_i au valori determinate.

La comanda prin cîmpul continuu se obţin două tipuri de caracteristici intrare-ieşire : cu zonă de insensibilitate de tipul celei din fig. 2 şi cu buclă de revenire (fig. 3), funcţie de valoarea cîmpului alternativ de excitaţie.

La comanda prin capacitate, mărimea de intrare este capacitatea ; curentul continuu ser-

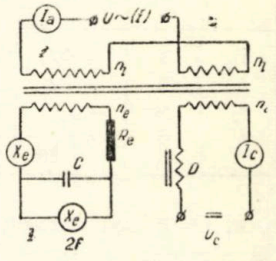


Fig. 1

veşte drept mărime de polarizare cu ajutorul căreia se determină faza mărimii de ieşire. Funcţie de valoarea cîmpului de excitaţie, caracteristicile au forma din fig. 2 sau 3.

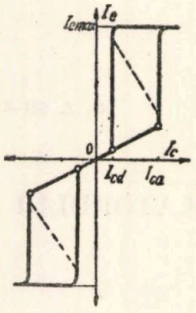


Fig. 2.

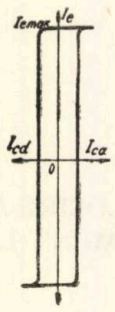


Fig. 3.

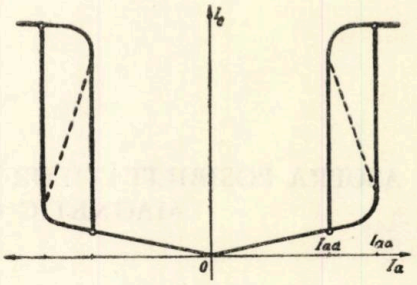


Fig. 4.

Comanda prin valoarea cîmpului alternativ de frecvenţă f, ca şi comanda prin frecvenţă conduc la caracteristici intrare-ieşire ca în fig. 4. Cîmpul continuu serveşte de asemenea drept cîmp de polarizare cu ajutorul căruia se determină faza mărimii de ieşire.

În lucrare sînt prezentate funcţiile logice pe care le poate realiza modulatorul magnetic în cele patru cazuri de comandă arătate mai sus.

2. Comanda prin cîmpul continuu

În cazul comenzii prin mărimea şi sensul cîmpului continuu, cu ajutorul modulatorului magnetic se pot obţine funcţiile logice: „şi", „sau", „interdicţie", „sau exclusiv", „echivalenţă materială", funcţiile lui Sheffer, după cum se va dovedi mai jos.

a) Pentru I_a=const., f=const., C=const. şi I_c—mărime de comandă, mărimea de ieşire este o funcţie de curentul de comandă (fig. 2). Dacă se consideră iniţial trei înfăşurări de comandă, cărora le corespund curenţii I_{c1}, I_{c2}, I_{c3}, atunci $I_e=f(I_{c1}, I_{c2}, I_{c3})$. Pentru a lărgi posibilitatea de realizare a unor funcţii logice cu expresii mai generale, combinaţii ale funcţiilor logice elementare de mai sus, pentru curenţii I_{c1}, I_{c2}, I_{c3} s-au ales valorile din tabelul 1, corespunzător fig. 5. Această figură reproduce în mod idealizat caracteristica reală de funcţionare reprezentată în fig. 2. Se atribuie valorile 0, 1, 2 mărimii de ieşire ale celor trei curenţi de comandă, conform tabelului 1.

Tabelul 1

	0	1	2
I_{c1}	0	$+\Delta I_c$	$+I_{ca}$
I_{c2}	0	$+\Delta I_c$	$+I_{ca}$
I_{c3}	0	$-I_{ca}$	$-(2I_{ca}+\alpha\Delta I_c)$
I_c	0	$+I_{emax}$	$-I_{emax}$

La trecerea în regim de releu, între parametrii ce caracterizează funcționarea acestuia (curentul de anclanșare I_{ca}, curentul de declanșare I_{cd} și lățimea buclei ΔI_c etc.) există anumite relații, determinate de condițiile concrete ale modulatorului.

Se alege valoarea de anclanșare a curentului continuu de comandă funcție de ΔI_c, conform relației:

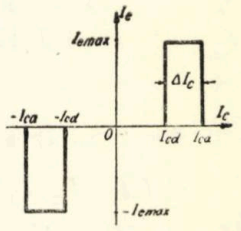


Fig. 5.

$$I_{ca} = 2\Delta I_c + \varepsilon\Delta I_c, \tag{1}$$

unde termenul $\varepsilon\Delta I_c$ ia în considerație siguranța de funcționare ca releu.

Valoarea lui ΔI_c, pentru un modulator dat, este practic constantă. Dacă se ia $\varepsilon = 0{,}2$ și $\Delta I_c = 7{,}5$ mA [1], atunci $I_{ca} = 2{,}2\,\Delta I_c = 16{,}5$ mA.

Din caracteristica de variație a coeficientului de multiplicitate funcție de curentul de excitație [1], se găsește $k_m = I_{emax}/I_{e0med} = 6{,}3$, unde $I_{e0med} = (I_{e0a} + I_{e0d})/2$.

Pentru altă valoare a lui ε, de exemplu $\varepsilon = 0{,}1$, cu relația (1) se obține $I_{ca} = 2{,}1.7{,}5 = 15{,}75$ mA și din [1] rezultă $k_m \cong 6{,}4$.

Pentru mărirea siguranței de funcționare, valoarea lui ε trebuie aleasă relativ importantă, ceea ce nu înrăutățește însă condiția de multiplicitate, după cum rezultă din calculele efectuate pentru cele două valori ale lui ε.

Ținînd seama de toate combinațiile posibile ale mărimilor de intrare, se obțin următoarele situații în funcționarea modulatorului magnetic [2]:

$$\begin{array}{lll}
f(0,0,0)=0, & f(1,0,0)=0, & f(1,2,2)=0,\\
f(0,0,1)=2, & f(2,0,0)=1, & f(2,2,2)=0,\\
f(0,0,2)=2, & f(1,0,1)=0, & f(2,0,1)=0,\\
f(0,1,0)=0, & f(1,0,2)=2, & f(2,0,2)=2,\\
f(0,2,0)=1, & f(1,1,0)=0, & f(2,1,0)=1,\\
f(0,1,1)=0, & f(1,2,0)=1, & f(2,1,1)=0,\\
f(0,1,2)=2, & f(1,1,1)=0, & f(2,1,2)=0,\\
f(0,2,1)=0, & f(1,1,2)=2, & f(2,2,0)=1,\\
f(0,2,2)=2; & f(1,2,1)=0; & f(2,2,1)=1.
\end{array}$$

Aplicînd formula de interpolare a lui Lagrange [2], unde

$$L_0(I_c) = 2I_c^2 + 1, \quad L_1(I_c) = 2I_c^2 + 2I_c \text{ și } L_2(I_c) = 2I_c^2 + I_c,$$

după efectuarea operațiilor mod 3, se obține:

$$I_e = f(I_{c1}, I_{c2}, I_{c3}) = I_{c3}^2(I_{c1}^2 + I_{c2}^2 + 2I_{c1} + 2I_{c2}) + I_{c3}[2I_{c1}I_{c2}(I_{c1}I_{c2} + 2I_{c1} +$$
$$+ 2I_{c2} + 1)] + 2I_{c1}^2 I_{c2}^2 + I_{c1}^2 I_{c2}^2 + I_{c1} I_{c2}^2 + 2I_{c1} + 2I_{c2} + 2I_{c1} I_{c2} + I_{c1} + I_{c2} +$$
$$(2) \quad + 2[I_{c3}^2(2I_{c1}^2 I_{c2}^2 + 2I_{c1} I_{c2}^2 + 2I_{c1}^2 I_{c2} + 2I_{c1} I_{c2} + I_{c1}^2 + I_{c2}^2 + 1) +$$
$$+ I_{c3}(2I_{c1}^2 I_{c2}^2 + I_{c1}^2 I_{c2} + I_{c1} I_{c2}^2 + I_{c1} I_{c2} + I_{c1}^2 + I_{c2}^2)] =$$
$$= f_1(I_{c1}, I_{c2}, I_{c3}) + f_2(I_{c1}, I_{c2}, I_{c3}).$$

Dacă nu interesează faza mărimii de ieşire, atunci:

$$f(I_{c1}, I_{c2}, I_{c3}) = I_{c3}^2(2I_{c1}^2 I_{c2}^2 + 2I_{c1} I_{c2}^2 + 2I_{c1}^2 I_{c2} + 2I_{c1} I_{c2} + 2I_{c1}^2 +$$
$$(3) \quad + 2I_{c2}^2 + 2I_{c1} + 2I_{c2} + 1) + I_{c3}(I_{c1}^2 I_{c2}^2 + 2I_{c1}^2 I_{c2} + 2I_{c1} I_{c2}^2 + I_{c1}^2 + I_{c2}^2) +$$
$$+ 2I_{c1}^2 I_{c2}^2 + I_{c1}^2 I_{c2} + I_{c1} I_{c2}^2 + 2I_{c1}^2 + 2I_{c2}^2 + 2I_{c1} I_{c2} + I_{c1} + I_{c2}.$$

Pentru obţinerea stării 1 a mărimii de ieşire ($+I_{emax}$, fig. 5), mărimea de ieşire se studiază cu funcţia $f_1(I_{c1}, I_{c2}, I_{c3})$, relaţia (2), iar pentru obţinerea stării 2 ($-I_{emax}$) — cu funcţia $f_2(I_{c1}, I_{c2}, I_{c3})$, relaţia (2); dacă nu se ţine seama de fază, mărimea de ieşire se studiază cu funcţia $f(I_{c1}, I_{c2}, I_{c3})$, relaţia (3).

Pentru a urmări toate posibilităţile de obţinere a funcţiilor logice, se vor considera pe rînd I_{c1} sau I_{c2} (tabelul 2) şi I_{c3} (tabelul 3) drept curent de polarizare. Funcţiile logice obţinute pentru diversele combinaţii ale valorilor celorlalţi doi curenţi de comandă sînt date în tabelele 2 şi 3. Cu I_{e1} s-a notat mărimea de ieşire corespunzătoare stării 1, cu I_{e2} — mărimea de ieşire corespunzătoare stării 2 şi cu I_0 — mărimea de ieşire corespunzătoare cazului în care nu interesează faza.

Aşa cum rezultă din tabelele 2 şi 3, modulatorul magnetic comandat prin cîmp continuu, pentru valori ale cîmpului alternativ care determină o caracteristică corespunzătoare fig. 2, permite obţinerea oricărei funcţii logice elementare prin alegerea în mod potrivit a variabilelor independente şi a curentului de polarizare. Tabelele 2 şi 3 oferă în plus toate posibilităţile de realizare a unei funcţii logice, (în condiţiile din tabelul 1), dintre care se poate alege cea mai convenabilă.

b) Modulatorul cu o caracteristică intrare-ieşire de forma celei reprezentate în fig. 3 se poate considera ca un element basculant cu două poziţii, care rămîne în poziţia în care se află pînă la o nouă comandă. În acest caz se admite că se realizează comanda printr-o singură mărime de intrare (o înfăşurare). Mărimea de ieşire depinde de curentul de intrare ale cărui valori semnificative sînt 0, I_{ca}, I_{cd} (notate 0, 1, 2) şi de starea anterioară $+I_{eT}$ sau $-I_{eT}$ (notate 1 şi respectiv 0) [3]. Mărimea de ieşire $I_{eT+1} = f(I_c, I_{eT})$ poate lua numai două valori, 0 şi 1.

Tabelul 2

I_{c2}	I_{c3}	I_{e1}				I_{e2}				I_e			
		Expr. gen.	$I_{c1}=0$	$I_{c1}=1$	$I_{c1}=2$	Expr. gen.	$I_{c1}=0$	$I_{c1}=1$,	$I_{c1}=2$	Expr. gen.	$I_{c1}=4$	$I_{c1}=1$	$I_{c1}=2$
0	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1	0	0	0	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1
0	1	0	0	0	0	$2I_{c1}^2+1$	2	0	0	$2I_{c1}^2+1$	1	0	0
1	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1	0	0	0	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			$f_1=0$		$\bar{I}_{c3}$		$f_2=\bar{I}_{c2}\ I_{c3}$,	0,	0		$f=\bar{I}_{c2}\ \bar{I}_{c3}$,	0,	$\bar{I}_{c3}$
0	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1	0	0	0	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1
0	2	0	0	0	0	0	2	2	2	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	2	0	0	0	0	$2I_{c2}^2+1$	2	0	0	$2I_{c1}^2+1$	1	0	0
			$f_1=I_{c2}\ \bar{I}_{c3}$,		$\bar{I}_{c3}$		$f_2=I_{c3}$,		$\bar{I}_{c2}\ I_{c3}$		$f=I_{c2}\ UI_{c3}$,	$I_{c2}\ \bar{I}_{c3}\ U\bar{I}_{c2}\ I_{c3}$,	$\bar{I}_{c2}\ U\bar{I}_{c3}$
0	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1	0	0	0	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1
0	2	0	0	0	0	2	2	2	2	1	1	1	1
1	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1	0	0	0	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1
1	2	0	0	0	0	$I_{c1}^2+2I_{c1}+1$	2	2	0	$I_{c1}^2+2I_{c1}+1$	1	1	0
			$f_1=0$,		$\bar{I}_{c3}$		$f_2=I_{c3}$		$\bar{I}_{c2}\ I_{c3}$		$f=I_{c3}$,		$\bar{I}_{c2}\ U\bar{I}_{c3}$
0	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1	0	0	0	0	$2I_{c1}^2+I_{c1}$	0	0	1
0	1	0	0	0	0	$2I_{c1}^2+1$	2	0	0	$2I_{c1}^2+1$	1	0	0
2	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			$f_1=I_{c2}\ \bar{I}_{c3}$,	$I_{c1}\ \bar{I}_{c3}$,	$\bar{I}_{c3}$		$f_2=\bar{I}_{c2}\ I_{c3}$,	0	0		$f=I_{c2}\ \bar{I}_{c3}\ U\bar{I}_{c2}\ I_{c3}$,	$I_{c2}\ \bar{I}_{c3}$,	$\bar{I}_{c3}$

Tabelul 3

I_{c1}	I_{c2}	I_{e1}				I_{e2}				I_e			
		Expr. gen.	$I_{c3}=0$	$I_{c3}=1$	$I_{c3}=2$	Expr. gen.	$I_{c3}=0$	$I_{c3}=1$	$I_{c3}=2$	Expr. gen.	$I_{c3}=0$	$I_{c3}=1$	$I_{c3}=2$
0	0	0	0	0	0	I_{c3}^2	0	2	2	I_{c3}^2	0	1	1
0	1	0	0	0	0	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	2	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	1
1	0	0	0	0	0	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	2	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	1
1	1	0	0	0	0	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	2	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	1
			$f_1=0$				$f_2=0,$	$\bar{I}_{c1}\bar{I}_{c2},$	2		$f=0$,	$\bar{I}_{c1}\bar{I}_{c2},$	1
0	0	0	0	0	0	I_{c3}^2	0	2	2	I_{c3}^2	0	1	1
0	2	$2I_{c3}^2+1$	1	0	0	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	2	$I_{c3}^2+I_{c3}+1$	1	0	1
2	0	$2I_{c3}^2+1$	1	0	0	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	2	$I_{c3}^2+I_{c3}+1$	1	0	1
2	2	$I_{c3}^2+2I_{c3}+1$	1	1	0	0	0	0	0	$I_{c3}^2+2I_{c3}+1$	1	1	0
			$f_1=I_{c1}VI_{c2}, I_{c1}I_{c2},$		0		$f_2=0,$	$\bar{I}_{c1}\bar{I}_{c2},$	$\bar{I}_{c1}V\bar{I}_{c2}$		$f=I_{c1}VI_{c2}, \bar{I}_{c1}\bar{I}_{c2}VI_{c1}I_{c2}, \bar{I}_{c1}V\bar{I}_{c2}$		
0	0	0	0	0	0	I_{c3}^2	0	2	2	I_{c3}^2	0	1	1
0		$2I_{c3}^2+1$	1	0	0	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	2	$I_{c3}^2+I_{c3}+1$	1	0	1
1	0	0	0	0	0	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	2	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	1
1	2	$2I_{c3}^2+1$	1	0	0	0	0	0	0	$2I_{c3}^2+1$	1	0	0
			$f=I_{c2},$	0,	0		$f_2=0,$	$\bar{I}_{c1}\bar{I}_{c2},$	$\bar{I}_{c1}V\bar{I}_{c2}$		$f=I_{c2},$	$\bar{I}_{c1}\bar{I}_{c2}$	$\bar{I}_{c1}V\bar{I}_{c2}$
0	0	0	0	0	0	I_{c3}^2	0	2	2	I_{c3}^2	0	1	1
0	1	0	0	0	0	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	2	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	1
2	0	$2I_{c3}^2+1$	1	0	0	$2I_{c3}^2+I_{c3}$	0	0	2	$I_{c3}^2+I_{c3}+1$	1	0	1
2	1	$2I_{c3}^2+1$	1	0	0	0	0	0	0	$2I_{c3}^2+1$	1	0	0
			$f_1=I_{c1},$	0,	0		$f_2=0,$	$\bar{I}_{c1}\bar{I}_{c2},$	$\bar{I}_{c1}V\bar{I}_{c2}$		$f=I_{c1},$	$\bar{I}_{c1}\bar{I}_{c2}$	$\bar{I}_{c1}V\bar{I}_{c2}$

Conform cu cele stabilite în [3], funcția logică corespunzătoare caracteristicii din fig. 3 este:

$$I_{eT+1} = 2(I_c + I_{eT})(I_c + 1)(I_{eT} + 1). \tag{4}$$

3. Comanda prin valoarea cîmpului de excitație, frecvență și capacitate

În cazul comenzii prin valoarea cîmpului alternativ, prin valoarea frecvenței și prin valoarea capacității din circuitul modulatorului, pentru I_c = const., faza mărimii de ieșire nu se modifică. Caracteristica intrare-ieșire a modulatorului în acest caz este dată în fig. 4. În toate aceste cazuri se observă ușor că funcția mărimii de ieșire este egală cu variabila considerată.

4. Concluzii

Din cele arătate mai sus se desprind următoarele concluzii:

a) Prin alegerea potrivită a mărimilor ce caracterizează regimul de releu al modulatorului magnetic se poate realiza o funcție logică generală de la care, prin particularizare, se obțin funcțiile logice de bază.

b) Dat fiind stabilitatea relativ ridicată a modulatorului magnetic la semnale, utilizarea acestuia ca element logic prezintă avantajul simplității față de cazul în care aceleași funcții se realizează prin combinarea mai multor elemente.

c) Deoarece modulatorul magnetic se poate realiza și cu amplificări mari, folosirea lui poate conduce la eliminarea etajului de amplificare în scheme logice, cînd este necesar. În acest caz se obțin însă viteze de lucru reduse, ceea ce poate constitui un neajuns.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electroenergetică

BIBLIOGRAFIE

1. Boțan N. V., Bejan I., *Asupra funcționării modulatorului magnetic în regim de releu.* St. și cerc. de energ. și electrot., 1965, **5**, 3.
2. Moisil Gr., *Teoria algebrică a mecanismelor automate.* Ed. tehn., Buc., 1959.
3. Boțan N. V., Balaban E., *Asupra unor posibilități de aplicare a algebrei logicii la scheme de comandă cu amplificatoare magnetice.* Comunicare prezentată în ses. șt. a Inst. polit. Iași, 5—7 febr. 1965.

ON THE POSSIBILITIES OF UTILISATION OF THE MAGNETICAL MODULATOR AS LOGICAL ELEMENT

(Summary)

In this work are studied the possibilities of utilisation of the magnetical modulator as logical element.

The relay service of a commande by double frequency output magnetical modulator is considered. The logical expressions of the output quantity as functions of the input commande are derived for the four commande conditions. For the d.c. commande was obtained a general logical expression, allowing, trough particularisation, to obtain the elementary logical functions and the practical possibilities of their realisation.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. D. 512.9; 621-52

MISE EN OEUVRE D'UN ANALYSEUR DIFFÉRENTIEL NUMÉRIQUE BASÉ SUR LE CALCUL INCRÉMENTAL

PAR

H. LECOCQ

1. L'analyseur différentiel numérique incrémental

1.1. *Principe de l'analyseur différentiel numérique incrémental*

Un analyseur différentiel est un calculateur *spécialisé* dans le résolution de systèmes *d'équations différentielles.* L'opération d'intégration constitue la base d'un tel calculateur.

Il existe essentiellement trois types d'analyseur différentiel caractérisés par la nature des intégrateurs qui les composent: a) l'analyseur différentiel analogique, b) l'analyseur différentiel mécanique [2], c) l'analyseur différentiel numérique incrémental.

L'analyseur différentiel numérique incrémental (en abrégé A.D.N.I.) est constitué d'un ensemble d'intégrateurs-sommateurs numériques incrémentaux tels qu'ils ont été décrits dans notre précédent article, *Application du calcul incrémental à l'opération d'intégration.*

1.2. *Domaine d'application des analyseurs différentiels numériques incrémentaux*

Nous allons examiner, dans ce paragraphe, quelques applications importantes des A.D.N.I. Pour une étude exhaustive de leur domaine d'application, nous renvoyons le lecteur à la bibliographie [4], [8], [9].

1.2.1. Génération de fonction

Avec un A.D.N.I., on peut engendrer toutes les fonctions sauf les hypertranscendantales (la fonction Γ par exemple) [10]. Cette intéressante propriété résulte du fait que la variable d'intégration des I.S.N.I. peut être une fonction quelconque. Nous donnons ci-dessous quelques exemples. On y a fait usage de la représentation symbolique idéalisée de l'I.S.N.I.

I. *Multiplication par une constante*

On désire engendrer la fonction $z = ax$.

Écrite sous forme incrémentale, cette relation devient $dz = a\,dx$. Il suffit alors d'utiliser un I.S.N.I. dans le registre Y duquel on introduit la constante a (fig. 1 a). À la sortie de l'I.S.N.I., on a $di = a\,dx = dz$.

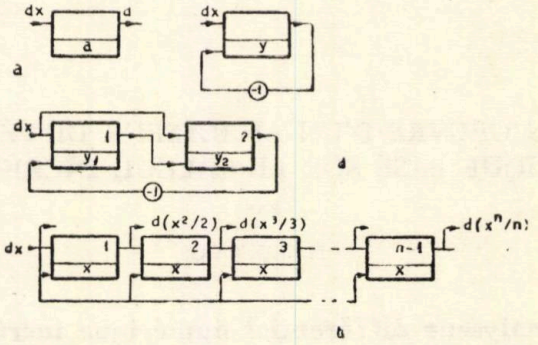


Fig. 1. — Génération de fonction par A.D.N.I.: a — multiplication par une constante, b — générateur de polynômes, c — fonction exponentielle, d — fonction sinus et cosinus.

II. *Polynômes*

La fig. 1 b donne le schéma d'un générateur de polynômes.

Aux sorties des I.S.N.I. on a:

$$di_1 = x\,dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right), \quad di_2 = x\,di_1 = x^2\,dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right),$$

$$di_3 = x\,di_2 = x^3\,dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right), \ldots, di_{n-1} = d\left(\frac{x^n}{n}\right).$$

Pour engendrer un polynôme quelconque de degré n

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

sous forme incrémentale

$$dz = a_1\,dx + a_2\,d(x^2) + a_3\,d(x^3) + \cdots + a_n\,d(x^n)$$

il suffit donc de multiplier dx et les sorties des I.S.N.I. par les constantes convenables (respectivement a_1, $2a_2$, $3a_3$, ..., na_n) et d'effectuer la somme.

III. *Fonction exponentielle*

On désire engendrer la fonction $y = y_0\,e^x$.

On sait que cette fonction est solution de l'équation différentielle $dy/dx + y = 0$ ou, sous forme incrémentale, $dy = -y\,dx$.

La programmation du calcul se fait alors comme il est montré à la fig. 1 c.

Avant de commencer le calcul, on introduira la valeur initiale $y = y_0$ dans le registre y.

IV. *Fonctions trigonométriques : sinus et cosinus*

On désire engendrer les fonctions $\sin x$ et $\cos x$.

On sait que ces fonctions sont solutions de l'équation différentielle $d^2y/dx^2 + y = 0$. Posons $y = y_1$ et $dy_1/dx = -y_2$; on obtient ainsi le système d'équations différentielles:

$$dy_1 = -y_2\,dx, \quad dy_2 = y_1\,dx.$$

Pour résoudre ce système, on utilise deux I.S.N.I. dont l'interconnexion est donnée par la fig. 1 d.

Avant de commencer le calcul, on introduira la valeur initiale y_0 dans le registre Y du premier I.S.N.I. Dans ce cas, on aura:

$$y_1 = y_0 \cos x, \quad y_2 = y_0 \sin x.$$

V. *Fonctions trigonométriques inverses : arc tangente*

On désire engendrer la fonction $z = \operatorname{arc\,tg} x$. Dans ce but on se basera sur les relations suivantes: $z = \operatorname{arc\,tg} x$ donc $x = \operatorname{tg} z$.

En dérivant par rapport à z, $dx = \sec^2 z\,dz$, soit enfin $dz = \cos^2 z\,dx$.

On procède alors comme suit (fig. 2 a). Supposons que l'on dispose de dz. Les I.S.N.I. n° 2 et n° 3 engendrent alors les fonctions $\sin z$ et $\cos z$; on a $di_3 = d(\cos z)$.

L'I.S.N.I. n° 4 fournit, quant à lui, $di_4 = 2\cos z\,d(\cos z) = d(\cos^2 z)$. À l'aide de cette dernière fonction, l'I.S.N.I. n° 1 calcule enfin

$$di_1 = \cos^2 z\,dx = dz,$$

ce qui permet de boucler le système.

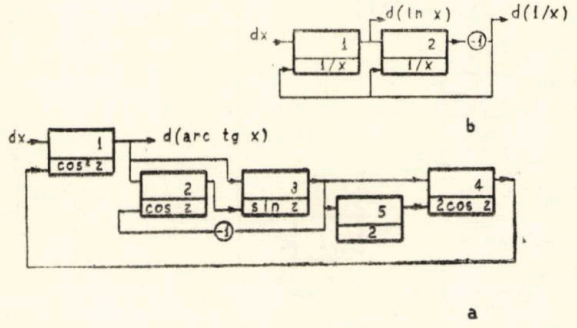


Fig. 2. — Génération de fonction par A.D.N.I.: *a* — fonction arc tg x, *b* — fonctions $\ln x$ et $1/x$.

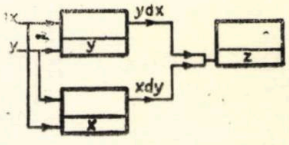


Fig. 3. — Produit de deux fonctions.

VI. *Fonction logarithme et fonction inverse*

On désire engendrer les fonctions $z_1 = \ln x$ et $z_2 = 1/x$.

Si l'on note que $z_1 = \ln x$ il en résulte $dz_1 = (1/x)\,dx$ et si $z_2 = 1/x$ on a $dz_2 = -(1/x^2)\,dx = -(1/x)\,dz_1$.

On pourra procéder comme suit (fig. 2 b). Supposons que l'on dispose de $d(1/x) = dz_2$. L'I.S.N.I. n° 1 fournit alors directement $di_1 = (1/x)\,dx = dz_1$. À partir de cette fonction dz, l'I.S.N.I. n° 2 calcule

$$di_2 = (1/x)\,dz_1 = -dz_2.$$

Il suffit alors d'inverser le signe de di_2 pour obtenir dz_2 et boucler le système.

VII. *Multiplication*

On désire engendrer la fonction $z = x \cdot y$
Ceci peut se faire à l'aide de deux I.S.N.I. (fig. 3) en se référant à l'expression:

$$dz = d(x.y) = dy + ydx$$

1.2.2. Résolution de systèmes d'équations différentielles

Nous nous limiterons, dans ce paragraphe, au cas des systèmes d'équations différentielles linéaires.

De tels systèmes peuvent être décrits d'une manière générale par l'équation matricielle:

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y,$$

où x est la variable d'intégration et Y est un vecteur

$$Y = \begin{vmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{vmatrix},$$

A est la matrice des coefficients

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}(x) \dots a_{1n}(x) \\ a_{n1}(x) \dots a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

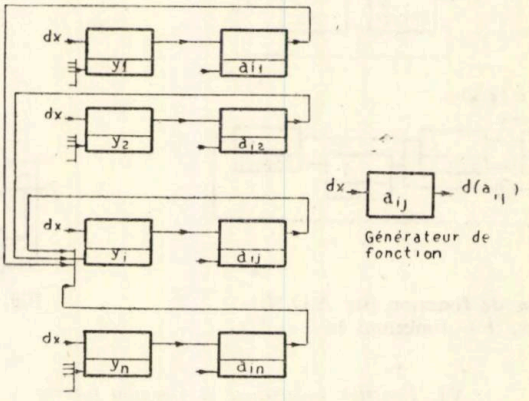


Fig. 4. — Résolution d'un système d'équations différentielles; programmation de la i-ème équation.

Réécrit sous forme incrémentale, la système devient:

$$dY = AYdx.$$

On aura ainsi, pour la $i^{ème}$ équation,

$$dy_i = a_{i1} y_1 dx + a_{i2} y_2 dx + \dots + a_{ii} y_i dx + \dots + a_{in} y_n dx.$$

Il lui correspond le schéma de programmation de la fig. 4.

Les coefficients $a_{ij}(x)$ sont élaborés sous forme incrémentale par des générateurs de fonction du type de ceux qui ont été décrits au § **1.2.1.**

Remarquons que si les coefficients a_{ij} sont constants, il est malgré tout nécessaire d'utiliser chaque fois un I.S.N.I. par coefficient.

1.3. *Modes de fonctionnement des analyseurs différentiels numériques incrémentaux*

Jusqu'ici nous avons considéré des I.S.N.I. idéalisés. En fait, on est en présence des opérateurs numériques qui ont été décrits dans notre précédent article. Ces opérateurs ont une vitesse de calcul finie ce qui, comme on sait, impose un échantillonnage dans le temps des grandeurs ; les nombres contenus dans les registres ne peuvent être interprétés qu'à des instants bien déterminés (instants d'échantillonnage) où l'on est sûr que les opérations internes nécessaires au calcul en cours sont achevées.

Il résulte de ceci qu'une certaine coordination doit être prévue entre les diverses opérations d'intégrations réalisées par les I.S.N.I. d'un A.D.N.I. Ceci peut se faire de plusieurs manières.

Pour fixer les idées, supposons qu'on ait à résoudre un problème faisant intervenir n I.S.N.I. (intégrateurs on multiplicateurs par des constantes) que l'on numérote arbitrairement de 1 à n.

Le temps de calcul d'un I.S.N.I. se compose des temps nécessaires pour effectuer la somme $Y + \Delta Y$, le transfert du résultat dans le registre Y, la somme $R + Y$, ΔX, le transfert du résultat dans le registre R, et, finalement, la formation de l'incrément de sortie ΔI.

On représentera symboliquement le temps de calcul, TC_i, de l'I.S.N.I. n° i comme il est montré à la fig. 5 a.

1.3.1. Fonctionnement parallèle

Dans ce mode de fonctionnement, à chaque instant d'échantillonnage on donne un ordre de calcul à tous les I.S.N.I. simultanément. La représentation symbolique en est donnée dans la fig. 5 b.

Le temps de calcul TC, de l'A.D.N.I., est égal au temps de calcul de chaque I.S.N.I.

La valeur minimale possible de la période d'échantillonnage du calcul, T, est égale à TC.

1.3.2. Fonctionnement série

Dans ce mode de fonctionnement, à chaque instant d'échantillonnage, on commence une séquence d'ordres de calcul dont le but est de faire fonctionner successivement les n I.S.N.I. dans un ordre prescrit, par exemple $1, 2, \ldots, n$.

La représentation symbolique en est donnée dans la fig. 5 c.

Le temps de calcul, *TC*, de l'A.D.N.I., est au moins égal à la somme des temps de calcul de chaque I.S.N.I.

La valeur minimale possible de la période d'échantillonnage *T* est ainsi considérablement supérieure à celle qui est liée au fonctionnement parallèle. Elle dépend d'ailleurs du nombre d'I.S.N.I. intervenant dans le calcul.

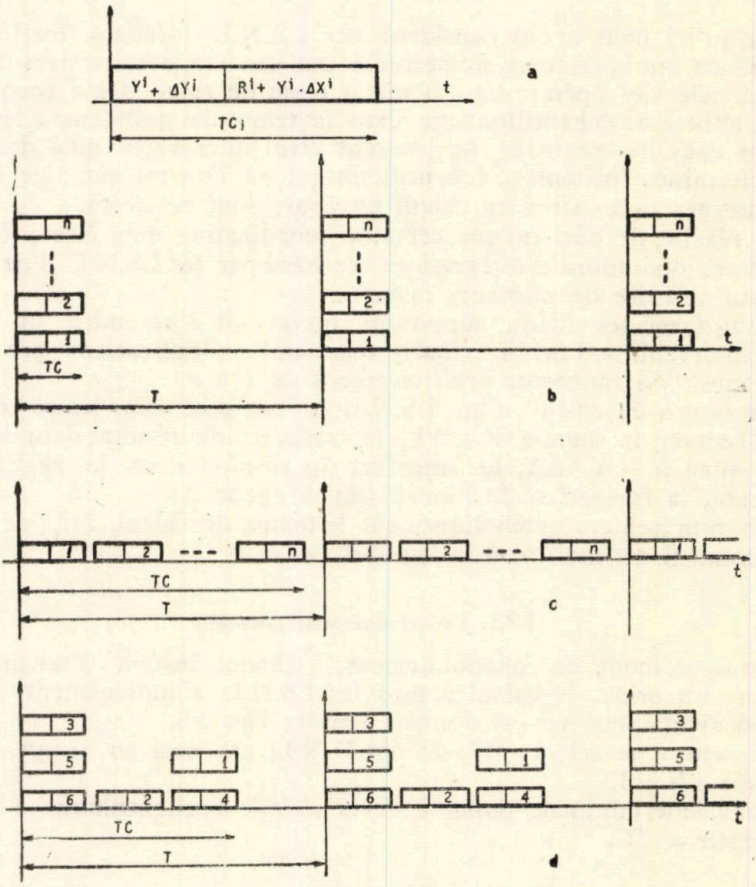


Fig. 5. — Modes de fonctionnement des A.D.N.I.: *a* — représentation symbolique du temps de calcul d'un I.S.N.I., *b* — fonctionnement parallèle, *c* — fonctionnemene série, *d* — fonctionnement série-parallèle.

Remarque. L'ordre dans lequel on fait fonctionner les I.S.N.I. n'est pas sans avoir une certaine influence sur la précision des résultats.

1.3.3 Fonctionnement série-parallèle

Il s'agit évidemment d'une combinaison des deux modes de fonctionnement précédents: certains I.S.N.I. fonctionnent simultanément, d'autres séquentiellement (fig. 5 d).

Le temps de calcul *TC* de l'A.D.N.I. sera, dans ce cas, compris entre le temps de calcul du fonctionnement parallèle et celui du fonctionnement série.

1.4. *Structure des analyseurs différentiels numérique incrémentaux*

1.4.1. Structure parallèle

L'A.D.N.I. à structure parallèle est constitué d'un certain nombre d'I.S.N.I. autonomes que l'on peut interconnecter directement.

1.4.1.1. Codage des incréments

Les échanges entre I.S.N.I. ne font intervenir que des incréments unitaires (ΔI, ΔX, ΔU,..., ΔW) valant $+1$, 0 ou -1.

Il s'agit là d'une information ternaire que l'on peut représenter, moyennant un certain codage, par deux signaux binaires. Chaque connexion entre I.S.N.I. pourra dès lors se faire à l'aide de deux fils.

Exemples de codage:

a) *Module et signe des incréments*

incrément $+1$ . . . signal 1 sur le premier fil (module = 1),
signal 1 sur le second fil (signe positif);
incrément 0 . . . signal 0 sur le premier fil (module = 0),
signal quelconque sur le second fil;
incrément -1 . . . signal 1 sur le premier fil (module = 1),
signal 0 sur le second fil (signe négatif).

b) *Séparation des incréments positifs et négatifs*

incrément $+1$ . . . signal 1 sur le premier fil,
signal 0 sur le second fil;
incrément 0 . . . signal 0 sur les deux fils;
incrément -1 . . . signal 0 sur le premier fil,
signal 1 sur le second fil.

Remarquons qu'avec ce dernier mode de codage, on peut réaliser une *inversion de signe* en croisant simplement les deux fils d'une connexion.

1.4.1.2. Programmation des calculs

Pour la facilité de la programmation, les bornes d'entrées et de sorties des divers I.S.N.I. composant l'A.D.N.I. seront, le plus souvent, rassemblées sur un panneau de câblage. Une unité de contrôle est chargée d'engendrer la séquence (fig. 6) d'ordres de calcul nécessaire lors des fonctionnements série ou série-parallèle. Cette séquence s'obtient très simplement à l'aide d'un sélecteur commandé par une horloge *h*.

Dans le cas du fonctionnement série, par exemple, les ordres de calcul h_T^1, h_T^2,..., h_T^n sont envoyés successivement aux I.S.N.I. 1, 2,..*n*.

La période de l'horloge *h* doit être au moins égale au temps de calcul d'un I.S.N.I.

En fin de séquence, l'horloge *h* est bloquée.

Le séquence est réinitialisée par l'horloge h_T.

La periode *T* de cette horloge constitue donc *la période d'échantillonnage du calcul.*

Dans le cas du fonctionnement parallèle, les signaux de l'horloge h_T sont directement envoyés à tous les I.S.N.I.

Remarque. L'A.D.N.I. à structure parallèle s'apparente très étroitement à l'analyseur différentiel analogique.

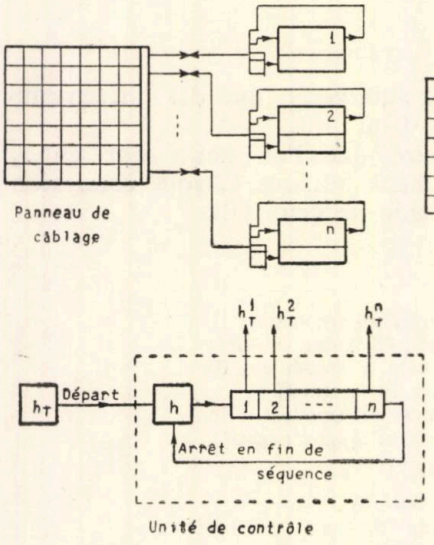


Fig. 6. — Schéma de principe de l'A.D.N.I. à structure parallèle.

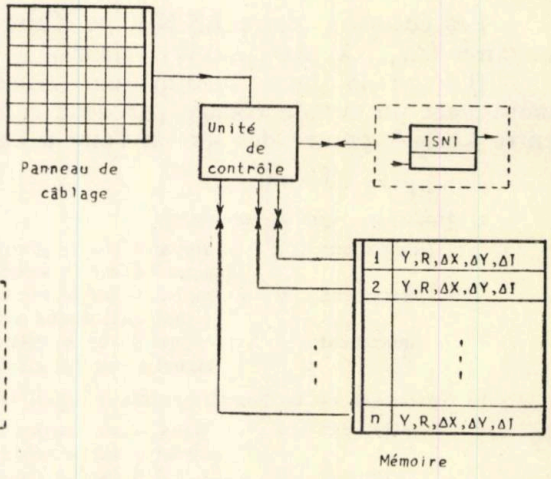


Fig. 7. — Schéma de principe de l'A.D.N.I. à structure série.

1.4.2. Structure série

1.4.2.1. Principe

Dans le cas du fonctionnement série (§ **1.3.2**), on a vu qu'il n'y avait jamais qu'un seul I.S.N.I. à la fois en fonctionnement. Dès lors, au lieu d'utiliser l'un après l'autre *n* I.S.N.I., comme dans le cas de l'A.D.N.I. à structure parallèle, rien ne nous empêche d'utiliser, séquentiellement, *un seul et même I.S.N.I.*, en liaison avec une *mémoire.*

Les grandeurs Y, R, ΔX, ΔY, ΔI relatives à chaque opération d'intégration seront placées dans cette mémoire. Elles en seront extraites séquentiellement et placées dans l'I.S N.I.

Les nouvelles valeurs de ces grandeurs, après traitement (c'est-à-dire, après les opérations $(Y + \Delta Y)$, $(R + Y.\Delta X)$, et la formation de ΔI) seront replacées en mémoire tandis que l'I.S.N.I. sera regarni par les grandeurs relatives à une autre opération d'intégration. Ainsi de suite jusqu'à ce que les n opérations d'intégration aient été effectuées, dans l'ordre prescrit.

À chaque instant d'échantillonnage, on recommencera cette même séquence.

1.4.2.2. Programmation des calculs

Pour la facilité de la programmation, les liaisons entre intégrateurs seront programmées par le truchement d'un panneau de câblage analogue à celui de l'A.D.N.I. à structure parallèle. Pour chaque intégrateur, on trouvera également des bornes d'entrées ΔX, ΔV,..., ΔW, et de sortie ΔI, (fig. 7).

Toutefois, dans ce cas-ci, une connexion entre une sortie et une entrée ne représente plus une liaison physique, mais une instruction donnée à l'unité de contrôle.

Il en résulte que ces connexions pourront se faire avec un seul fil, exactement comme dans un calculateur analogique.

Remarque. L'A.D.N.I. à structure série s'apparente au calculateur universel. L'I.S.N.I. joue le même rôle que l'unité arithmétique de ce dernier. Une unité de contrôle relativement élaborée est nécessaire.

1.4.3. Tableau récapitulatif des structures et modes de fonctionnement des A.D.N.I.

Le Tableau 1 rassemble les différents cas possibles de fonctionnement et de structure des A.D.N.I. et indique les incompatibilités.

Tableau 1

Tableau récapitulatif des structures et modes de fonctionnement de A.D.N.I.

Str. / Fonct.	Parallèle	Série
Parallèle	OUI	NON
Série	OUI	OUI
Série–Parallèle	OUI	NON

1.5. *Programmation des analyseurs différentiels numériques incrémentaux*

Au § **1.2.** on a montré comment on pouvait établir des organigrammes de calcul pour la résolution de problèmes à l'aide d'I.S.N.I. Ces organigrammes sont directement transposables sur les panneaux de câblage des A.D.N.I. Il reste, toutefois, à déterminer *les échelles* des diverses représentations numériques ainsi que la *longueur* (nombre de bits) de chacun des registres *Y*.

1.5.1. Conditions sur les échelles

1.5.1.1. Conditions de non-saturation des registres

De telles conditions doivent être introduites pour les registres *Y* des I.S.N.I.

Pour l'I.S.N.I. n° *i*, par exemple, la condition de non-saturation s'écrit :

$$|y^i| \max < (2^{l^i})\, Q_y^i .$$

On posera $Q_y^i = 2^{q_y^i}$; la condition précédente s'écrira alors

$$q_y^i + l^i > \log_2 (|y^i|_{\max}). \tag{1}$$

1.5.1.2. Conditions spécifiques des I.S.N.I.

I. *Relation entre les échelles des grandeurs d'entrée et de sortie*

On a vu que dans un I.S.N.I., les quanta des grandeurs d'entrée et de sortie étaient liés par la relation

$$Q_I^i = (2^{l^i})\, Q_x^i\, Q_y^i .$$

En posant, comme ci dessus, $Q_x^i = 2^{q_x^i}$ et $Q_I^i = 2^{q_I^i}$, la relation précédente peut s'érire :

$$q_I^i = q_x^i + q_y^i + l^i . \tag{2}$$

II. *Conditions aux entrées des registres Y*

On sait aussi que les différentes grandeurs qui se présentent aux entrées d'un I.S.N.I. en vue d'y être sommées, doivent toutes être représentées avec *une même échelle.*

Supposons que les entrées du registre *Y* de l'intégrateur n° *i* proviennent des sorties des intégrateurs *k*, *l*, *m*.

On aura les conditions

$$q_y^i = q_I^k = q_I^l = q_I^m . \tag{3}$$

III. *Conditions aux entrées* dx *des I.S.N.I.*

De même que ci-dessus, si l'entrée dx de l'I.S.N.I. n° i provient de la sortie de l'intégrateur n° v, on aura la condition

$$q_x^i = q_I^v. \tag{4}$$

1.5.1.3. Conditions technologiques

I. *Longueur maximale des registres*

Des raisons d'économie et de rapidité de calcul limitent supérieurement la longueur des registres (existence de $l_{\max}$). Les longueurs choisies pour les registres Y devront donc être telles que

$$l^i \leqslant l_{\max}. \tag{5}$$

II. *Vitesse maximale de calcul*

Dans le cas où le temps apparaît comme une des variables du problème étudié, on posera $T = 2^q t$. La vitesse de calcul maximale possible de l'A.D.N.I. limite inférieurement la période d'échantillonnage T qui peut être choisie (existence de $q_{t\,\min}$).

Il s'introduit donc une nouvelle condition

$$q_t \geqslant q_{t\,\min}. \tag{6}$$

1.5.2. Critère de choix des échelles

Pour que la précision des calculs soit la meilleure possible, il importe d'adopter, pour les quanta des diverses représentations numeriques, *les valeurs minimales* compatibles avec l'ensemble des conditions énoncées ci-dessus.

Remarque. On notera que toutes les conditions relatives aux quanta sont *linéaires*. La détermination des échelles peut dès lors se faire à l'aide des méthodes utilisées en *programmation linéaire* et pour lesquelles il existe des programmes pour traitement par ordinateur [5], [7].

1.5.3. Exemple

Considérons le système suivant, mis sous forme incrémentale,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y_1 &= y_2\,\mathrm{d}t, & & -16 < y_1 < 16, \\ \mathrm{d}y_2 &= 6y_1\,\mathrm{d}t + 5y_2\,\mathrm{d}t & \text{avec} & -\ 8 < y_2 < \ 8. \end{aligned}$$

La programmation sur A.D.N.I. s'en déduit sans peine (fig. 8).

1.5.3.1. *Conditions sur les échelles*

Conditions (1) (§ **1.5.1**):

$$q_y^1 + l^1 > \log_2 (|\, y_1 \,|_{\max}) \quad \text{soit} \quad q_y^1 + l^1 \geqslant 4,$$

$$q_y^2 + l^2 > \log_2 (|\, y_2 \,|_{\max}) \quad \text{soit} \quad q_y^2 + l^2 \geqslant 3,$$

$$q_y^3 + l^3 > \log_2 1 \quad \text{soit} \quad q_y^3 + l^3 \geqslant 0,$$

$$q_y^4 + l^4 > \log_2 5 \quad \text{soit} \quad q_y^4 + l^4 \geqslant 3,$$

$$q_y^5 + l^5 > \log_2 6 \quad \text{soit} \quad q_y^5 + l^5 \geqslant 3.$$

Remarque. Pour ne pas alourdir inutilement les calculs, nous avons remplacé, dans les deux dernières conditions, les valeurs des logarithmes par les nombres *entiers* immédiatement supérieurs.

Conditions (2) (§ **1.5.1**):

$$q_I^1 = q_x^1 + q_y^1 + l^1, \quad q_I^2 = q_x^2 + q_y^2 + l^2, \quad q_I^3 = q_x^3 + q_y^3 + l^3,$$

$$q_I^4 = q_x^4 + q_y^4 + l^4, \quad q_I^5 = q_x^5 + q_y^5 + l^5.$$

Conditions (3), (§ **1.5.1**):

$$q_y^2 = q_I^4 = q_I^5, \quad q_y^1 = q_I^3.$$

Conditions (4) (§ **1.5.1**):

$$q_x^1 = q_x^2 = q_t, \quad q_x^3 = q_I^2, \quad q_x^4 = q_I^2, \quad q_x^5 = q_I^1.$$

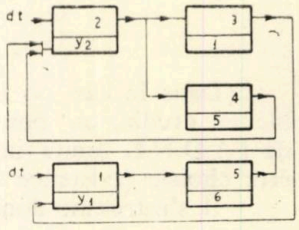


Fig. 8. — Exemple de programmation.

Conditions (5) (§ **1.5.1**; on impose $l_{\max} = 10$):

$$l^1 \leqslant 10, \quad l^2 \leqslant 10, \quad l^3 \leqslant 10, \quad l^4 \leqslant 10, \quad l^5 \leqslant 10.$$

Conditions (6) (§ **1.5.1**; on impose $q_{t\min} = -15$):

$$q_t \geqslant -15.$$

1.5.3.3. *Détermination des échelles*

Les grandeurs qui nous intéressent sont les q_y^i, les l^i et q_t. Éliminons donc les q_I^i et q_x^i des relations (2), (3) et (4). Il vient ainsi

$$-q_y^1 + q_y^2 + q_y^3 + l^2 + l^3 + q_t = 0, \quad q_y^4 + l^2 + l^4 + q_t = 0, \quad q_y^1 - q_y^2 + q_y^5 + l^1 + l^5 + q_t = 0.$$

Prenons, par exemple, $l^1 = l^2 = l^3 = l^4 = l^5 = 10$ et les valeurs minimales $q_y^1 = -6$ et $q_y^2 = -7$, compatibles avec les conditions (1). Il reste alors

$$q_y^3 + q_t + 19 = 0, \quad q_y^4 + q_t + 20 = 0, \quad q_y^5 + q_t + 21 = 0.$$

En faisant usage des conditions (1) relatives à q_y^3, q_y^4, q_y^5, on obtient

$$-19-q_t>-10,\quad -20-q_t\geqslant -7,\quad -21-q_t\geqslant -7$$

$$\text{soit } q_t<-9,\quad q_t\leqslant -13,\quad q_t\leqslant -14.$$

On adoptera $q_t=-14$ et l'on aura, par suite,

$$q_y^3=-5,\quad q_y^4=-6,\quad q_y^5=-7.$$

La méthode utilisée dans ce paragraphe est euristique et ne conduit certainement pas à un optimum.

En particulier, on notera que la valeur de q_y^3 est assez éloignée du minimum permis (-10).

2. Étude comparative des calculateurs électroniques

2.1. *A.D.N.I. et calculateur numérique universel*

Conçu spécialement pour résoudre des systèmes d'équations différentielles, l'A.D.N.I. est évidemment mieux adapté *à ce type de problème* que le calculateur universel.

2.1.1. Prix. Encombrement. Fiabilité

Le nombre d'éléments constitutifs d'un calculateur universel est extrêmement élevé et pratiquement *indépendant* de la complexité du problème traité.

Au contraire, dans le cas de l'A.D.N.I., le nombre d'I.S.N.I. à utiliser résulte directement de la complexité du problème. Pour l'A.D.N.I. à structure parallèle, le volume de matériel à mettre en oeuvre est *quasi proportionnel* à cette complexité. Pour l'A.D.N.I. à structure série, un nombre croissant d'I.S.N.I. se traduit par des accroissements successifs de la mémoire. La fig. 9. schématise cette situation.

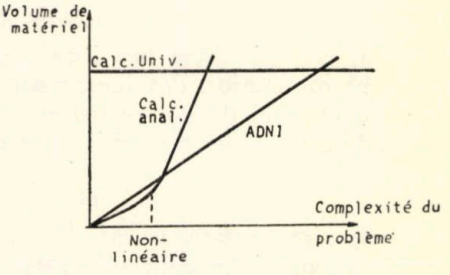


Fig. 9. — Étude comparative des calculateurs électroniques.

On y a porté le volume de matériel à mettre en oeuvre en fonction de la complexité du problème, pour un calculateur universel, un A.D.N.I. à structure parallèle, et un calculateur analogique.

On constate l'existence d'un domaine favorable à l'utilisation de l'A.D.N.I. Dans ce domaine, l'A.D.N.I. sera avantageux du point de vue du *prix*, de *l'ecombrement*, de *la fiabilité*.

2.1.2. Vitesse de calcul

La spécialisation de l'A.D.N.I., d'une part, le mode de calcul incrémental qu'on y emploie d'autre part, permettent d'accroître de manière considérable la vitesse de calcul, rendant ainsi possible *le travail en temps réel*, indispensable pour la commande automatique des processus industriels.

2.1.3. Programmation

La programmation d'un calcul (résolution d'un système d'équations diffférentieles) sur un A.D.N.I. est notablement plus simple que sur un calculateur universel du fait même de la spécialisation de l'A.D.N.I. qui contient, en fait, un programme câblé.

Cette programmation se fait généralement *comme sur un calculateur analogique*.

On bénéficie ainsi des avantages majeurs de ce dernier, à savoir la visualisation directe du système d'équations différentielles étudié et l'accès aisé aux paramètres du système.

2.1.4. Liaison avec un calculateur analogique

L'association d'un A.D.N.I. à un calculateur analogique peut se faire de manière très *directe*, étant donné les structures voisines de ces deux calculateurs (A.D.N.I. à structure parallèle).

Il en va tout autrement quand il s'agit de lier un calculateur analogique à un calculateur universel; des „interfaces" assez complexes sont nécessaires dans ce cas.

La même facilité se retrouve, d'ailleurs, pour les liaisons de l'A.D.N.I. avec le monde extérieur.

Liaisons A.D.N.I. → extérieur

a) emploi direct des incréments (moteur pas à pas),
b) sommation des incréments dans un *intégrateur analogique*,
c) emploi de convertisseurs fréquences-tension,
d) emploi de convertisseurs digitaux-analogiques.

Liaison extérieur → A.D.N.I.

a) directe dans le cas de capteurs à impulsions,
b) emploi de convertisseurs tension-fréquence,
c) emploi de convertisseurs analogiques-digitaux.

2.2. *L'A.D.N.I. et le calculateur analogique*

2.2.1. Précision. Dérive

La *précision* que l'on peut atteindre avec un A.D.N.I. n'est limitée, comme dans tout calculateur numérique, que par des considérations d'économie de matériel et pas du tout, comme dans les calculateurs analogiques, par la précision des éléments constitutifs.

De plus, les *dérives*, si gênantes en calcul analogique lors d'opération de longue durée, n'existent pas dans le cas d'un A.D.N.I.

2.2.2. Vitesse de calcul

La vitesse de calcul d'un calculateur analogique est infinie. Au contraire, elle est finie dans le cas d'un A.D.N.I. et, qui pis est, elle est inversément proportionnelle à la *précision* du calcul.

Pour chaque problème traité, un *compromis rapidité-précision* doit être établi.

2.2.3. Variable d'intégration

Dans un calculateur analogique, la variable d'intégration est *obligatoirement* le temps. Au contraire, dans un A.D.N.I. cette variable peut être une *fonction quelconque*. Cela permet, entre autres, d'engendrer, sans *éléments spéciaux*, nombre de fonctions non linéaires, importantes.

Il en résulte que l'A.D.N.I. est beaucoup mieux adapté à la résolution des systèmes d'équations différentielles *non-linéaires* que l'analyseur différentiel analogique.

2.2.4. Liaison avec des éléments de calcul logique et numérique

De par la nature numérique de l'A.D.N.I., il est beaucoup plus aisé de lui associer des opérations logiques et numériques qu'au calculateur analogique.

On n'aura aucune peine à réaliser des *modifications conditionnelles* du programme d'un calcul, de *faire varier des paramètres*, de *procéder à des itérations*, à des *mises en mémoire* de longue durée, etc.

3. Conclusions

Les réalisations récentes dans le domaine de l'automatique ont mis en évidence le grand intérêt des techniques de calcul hybride, analogique, logique et numérique.

À la lumière du présent article, il apparaît que le remplacement d'opérateurs analogiques par des opérateurs incrémentaux, est susceptible d'accroître considérablement la puissance et la souplesse du calcul hybride, principalement dans le domaine non-linéaire.

De plus, les problèmes d'interface (passage d'un mode de calcul à un autre) sont infiniment plus simples à résoudre dans le cas du calcul numérique incrémental.

Ce sont de telles raisons qui ont conduit à l'emploi systématique de cette technique de calcul en astronautique.

Étant donné les exigences de cette science, le calcul incrémental a pu bénéficier des plus récents progrès technologiques ; il existe déjà, notamment, des intégrateurs-sommateurs numériques incrémentaux, complètement intégrés [1].

Reçue le 20 II 1969

Université Libre de Bruxelles, Belgique

BIBLIOGRAPHIE

1. Callan J. D., *MOS Integrated Digital Differential Analyzer.* General Instrument Application Notes, 1966.
2. Crank J., *The Differential Analyzer.* Longmans, Green and Co., London, 1947.
3. Florine J., Lecocq H., *Introduction au calcul incrémental. Étude de l'opération d'intégration.* Revue A, 1968, **X**, *2.*
4. Forbes G. E., *Digital Differential Analyzers.* G. F. Forbes Publication, Pacoima, Calif., 1957.
5. Gill A., *Systematic Scaling for Digital Differential Analyzers.* IRE Trans. on Electronic Computers, December, 1959.
6. Hills F. B., *A Study of Incremental Computation by Difference Equations.* Report, No 7849 R–1–Contract AF–33 (616)—5477—May 1958–MIT, Cambridge 39, Massachusetts.
7. Knudsen H. K., *The Scaling of Digital Differential Analyzers.* IEEE Trans. on Electronic Computers, August 1965.
8. Mayorov F. V., *Electronic Digital Integrating Computers. Digital Differential Analyzers.* London Iliffe Books Ltd., 1964, (trad. du russe).
9. Monroe A. J., *Digital Processes for Sampled Data Systems.* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.
10. Shannon C. E., *Mathematical Theory of the Differential Analyzer.* J. of Math. a. Phys., 1941, **20**, *4.*
11. Shileiko A. V., *Digital Differential Analyzers.* Pergamon Press, London, 1964, (trad. du russe).

REALIZAREA UNUI ANALIZOR DIFERENȚIAL BAZAT PE CALCUL INCREMENTAL

(Rezumat)

Prima parte a articolului descrie *analizorul diferențial numeric incremental*: domeniu de aplicație, mod de funcționare, structuri, programare.

În partea a doua se prezintă un studiu comparativ al diferitelor calculatoare electronice utilizate în industrie. Se pune în evidență interesul prezentat de tehnica de calcul hibridă, asociind la calculatorul numeric universal operatori logici și incrementali specializați.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Generarea de funcții cu ajutorul unui analizor diferențial numeric incremental: a — multiplicarea cu o constantă, b — generator de polinoame, c — funcția exponențială, d — funcțiile sinus și cosinus.

Fig. 2. — Generarea de funcții cu ajutorul unui analizor diferențial numeric incremental: a — funcția arctg x, b — funcțiile ln x și $1/x$.

Fig. 3. — Produsul a două funcții.

Fig. 4. — Rezolvarea unui sistem de ecuații diferențiale; programarea ecuației de ordinul i.

Fig. 5. — Moduri de funcționare ale unui analizor diferențial numeric incremental: a — reprezentarea simbolică a timpului de calcul al unui I.S.N.I., b — funcționarea paralel, c — funcționarea serie, d — funcționarea serie-paralel.

Fig. 6. — Schema de principiu a unui analizor diferențial numeric incremental cu structura paralel.

Fig. 7. — Schema de principiu a unui analizor diferențial numeric incremental cu structura serie.

Fig. 8. — Exemplu de programare.

Fig. 9. — Studiu comparativ al calculatorilor electronici.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia III : ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. D. 512,9 ; 621-52

MÉTHODE PRATIQUE DE SYNTHÈSE SIMULTANÉE DES FONCTIONS LOGIQUES QUADRATIQUES

PAR

AL. VALACHI

1. Introduction

Dans l'article [1], les auteurs ont défini la notion de fonction logique quadratique de n variables logiques (a_i) et de m variables logiques (b_j). Cette fonction est de la forme

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} f_{ij}\, a_i\, b_j\ .$$

On peut écrire cette fonction sous une forme matricielle

$$F = a^{\star}\, Q^{\star} b',$$

avec : $a = [a_1 \ldots a_i \ldots a_n]$, $b = [b_1 \ldots b_j \ldots b_m]$, $Q = [f_{ij}]$.

En considérant N fonctions logiques quadratiques, dans [2] on a étudié la synthèse simultanée de celles-ci.

Ces fonctions peuvent s'écrire

$$F^k = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} f_{ij}^k\, a_i\, b_j, \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

ou sous une forme matricielle

$$F^k = a^{\star}\, Q^{k\star}\, b', \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

On a désigné par Q^k la matrice $[f_{ij}^k]$.

En utilisant l'algorithme [2] de synthèse simultanée des N fonctions logiques quadratiques on calcule $(2^N - 1)$ parties communes des fonctions données. En réalité peuvent exister tout au plus mn parties communes.

Donc, dans le cas de l'inégalité $2^N - 1 > mn$, il y a certainement des parties communes nulles. L'application de l'algorithme [2] devient difficile, même en utilisant une machine à calculer.

Le problème consiste dans la détermination des parties communes nulles par un calcul simple.

Dans cet article on propose une méthode pratique de synthèse.

Le théorème (1.1) sera très utile pour l'élaboration de la méthode. On désigne par matrice nulle une matrice qui a tous les éléments nuls.

1.1. Théorème. *Il suffit que le produit logique des matrices correspondantes aux fonctions logiques quadratiques F^i, F^j soit nul, pour que les parties communes de ces fonctions avec les autres soient aussi nulles.*

Ce théorème est une conséquence de l'expression de la partie commune des fonctions logiques quadratiques [2]

$$Z^{\cdots i \cdots j \cdots} = \ldots Q^i \ldots Q^j \ldots$$

2. Principe de la méthode

Dans les cas pratiques de synthèse simultanée des fonctions logiques quadratiques les relations $Q^i . Q^j = 0$ se vérifient souvent pour des groupes entières de fonctions.

On divisera les fonctions données en classes définies ci-dessous:

a) pour une fonction F^i, il y a au moins une autre fonction F^j de la même classe telle que $Q^i . Q^j \neq 0$;

b) l'egalite $Q^i . Q^j = 0$ est realisée pour les fonctions F^i, F^j des classes distinctes.

Après une classification des fonctions données, on peut appliquer l'algorithme [2] en chaque classe. Mais dans le cadre de la même classe, le nombre de fonctions peut être assez grand pour faire impossible l'application de l'algorithme établi en [2].

On va exposer dans ce qui suit une méthode qui permet à réaliser une économie importante du temps de calcul. Considérons N fonctions logiques quadratiques. Au commencement on calculera les produits logiques des matrices correspondantes $Q^i . Q^j$. On désignera par $i: (k_{i,1}; k_{i,2}; \ldots)$ le fait que $Q^i . Q^{k_{i,l}} \neq 0$.

2.1 *Pas 1* $1: (k_{1,1}; k_{1,2}; \ldots), k_{1,r} \neq 1.$

On détermine les parties communes de la fonction F^1 avec celles indiquées en parenthèses. Les matrices correspondantes $Q^{1,k_{1,r}}$ qui seront utilisées dans les pas suivants sont les restes du pas 1. Dans ce pas on détermine la partie propre de la fonction F^1.

2.2 *Pas 2* $2: (k_{2,1}; k_{2,2}; \ldots), k_{2,r} \neq 1, 2.$

On applique l'algorithme [2] en déterminant les parties communes de la fonction F^2 avec celles indiquées. Les matrices correspondantes $Q^{2,k_{2,r}}$, les restes du pas 2, seront utilisées dans le pas 3.

2.3 *Pas* i $i:(k_{i,1}; k_{i,2}; \ldots)$, $k_{i,r} \neq 1, 2, \ldots, i$.

Dans ce pas on détermine les parties communes de la fonction F_i avec celles indiquées en parenthèses. On détermine les données pour le pas $i+1$. Le calcul continue jusqu'à la résolution définitive de la synthèse.

3. Exemple

Soit à réaliser la synthèse simultanée de six fonction logiques quadratiques F^i, $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, définies par les matrices ;

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}, \quad Q^2 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 1&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad Q^3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 1&1&0&0 \end{bmatrix},$$

$$Q^4 = \begin{bmatrix} 1&1&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}, \quad Q^5 = \begin{bmatrix} 1&1&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&1&0 \end{bmatrix}, \quad Q^6 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

On déterminera les produits du type $Q^i \cdot Q^j$:

$Q^1 \cdot Q^2 = Q^1 \cdot Q^3 = Q^1 \cdot Q^6 = 0$, $Q^1 \cdot Q^4 \neq 0$, $Q^1 \cdot Q^5 \neq 0$;
$Q^2 \cdot Q^3 = Q^2 \cdot Q^4 = Q^2 \cdot Q^5 = 0$, $Q^2 \cdot Q^6 \neq 0$;
$Q^3 \cdot Q^4 = Q^3 \cdot Q^6 = 0$, $Q^3 \cdot Q^5 \neq 0$;
$Q^4 \cdot Q^5 \neq 0$, $Q^4 \cdot Q^6 = Q^5 \cdot Q^6 = 0$.

En analysant les dernières relations on peut classifier les fonctions données dans les classes (1, 3, 4, 5) et (2, 6).

3.1 Synthèse simultanée des fonctions logiques de la classe (1, 3, 4, 5)

Pas 1 1 : (4,5)

$$B^{145} = Q^1 \cdot Q^4 \cdot \overline{Q^5} = \begin{bmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}, \quad B^{14} = Q^1 \cdot Q^4 \cdot \overline{Q^5} = [0], \quad B^{15} = Q^1 \cdot \overline{Q^4} \cdot Q^5 = [0],$$

$$A^1 = \overline{B^{145}} \cdot \overline{B^{14}} \cdot \overline{B^{15}} = \begin{bmatrix} 0&1&1&0 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 1&1&0&1 \end{bmatrix}.$$

On détermine les restes du pas 1:

$$Q^{1,1} = Q^1 \cdot A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B^1 \text{ (la partie propre de la fonction } F^1),$$

$$Q^{1,4} = Q^4 \cdot A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^{1,5} = Q^5 \cdot A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pas 2 3:(5)

$$B^{35} = Q^3 \cdot Q^{1,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les restes

$$Q^{2,3} = Q^3 \cdot \overline{B}^{35} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B^3 \text{ (la partie propre de } F^3),$$

$$Q^{2,5} = Q^{1,5} \cdot \overline{B}^{35} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pas 3 4:(5)

$$B^{15} = Q^{1,4} \cdot Q^{2,5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q^{3,4} = Q^{1,4} \cdot \overline{B}^{45} = [0] = B^4, \quad Q^{3,5} = Q^{2,5} \cdot \overline{B}^{45} = [0] = B^5.$$

On pourra écrire

$$F^1 = Z_{145} + Z_1, \quad F^3 = Z_{35} + Z_3, \quad F^4 = Z_{145} + Z_{45}, \quad F^5 = Z_{145} + Z_{35} + Z_{45}.$$

3.2. Synthèse simultanée des fonctions logiques de la classe (2,6)

Pas 1 2 : (6)

$$B^{26} = Q^2 \cdot Q^6 = \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}, \quad B^2 = Q^2 \cdot \overline{B}^{26} = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix},$$

$$B^6 = Q^6 \cdot \overline{B}^{26} = [0], \quad F^2 = Z_{26} + Z_2, \quad F^6 = Z_{26}.$$

On a désigné par $Z_{k_1},\ldots, {}_{k_j},\ldots$ la partie commune des fonctions $F^{k_1},\ldots,F^{k_j},\ldots$ avec la matrice correspondante $B^{k_1}\ldots{}^{k_j}\ldots$

Reçue le 18 VIII 1969

Institut Polytechnique de Jassy,
Laboratoire de Calculatrices
automatiques et de Programmation

BIBLIOGRAPHIE

1. Valachi Al., Lecocq H., *Considérations sur la synthèse des fonctions logiques quadratiques.* Revue *A*, 1969, **XI**, *2.*
2. — *Synthèse simultanée des fonctions logiques quadratiques.* Revue A, 1969, **XI**, *4,* (sous presse).

METODĂ PRACTICĂ DE SINTEZĂ SIMULTANĂ A FUNCŢIILOR LOGICE PĂTRATICE

(Rezumat)

Algoritmul de sinteză simultană a unui grup de N funcţii logice pătratice stabilit în [2] necesită calcularea a 2^N-1 părţi comune ale funcţiilor date. Pentru un număr mare de funcţii, situaţie frecventă în tehnologia sistemelor logice, algoritmul respectiv necesită un timp de calcul excesiv.

În lucrarea prezentată se stabileşte o metodă practică de sinteză, metodă ce reduce sensibil timpul de calcul.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECŢIA IV

MECANICĂ TEHNICĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 1—2, 1969

СЕКЦИЯ IV

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECTION IV

MECHANICAL ENGINEERING

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 517.946.6 : 536.01

LA TECHNIQUE COMPUTATIONELLE POUR L'ÉTUDE DES PROBLÈMES DE L'INGÉNIEUR MODERNE

I. QUELQUES PROBLÈMES POSÉS PAR LA THERMOTECHNIQUE [1])

PAR

D. MANGERON, ARSENIE OPREA et FLORIN POTERAŞU

À M. Mauro Picone, membre honoraire de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, pour le 60-e anniversaire de sa Thèse d'Agrégation.

1. Les auteurs ont étudié nombre de problèmes concernant les potentiels, la propagation de la chaleur *généralisée* et la Mécanique non linéaire des vibrations [1]...[3].

Dans ce que suit nous donnerons deux schèmes mathématiques concernant la thermotechnique et en écrivant l'analogue aux différences finies du second d'eux nous exposérons une méthode de résolution, cristallisée dans le théorème 1 énoncé ci-dessous.

2. Le premier schème, déjà résolu par l'un de nous [1], [2], en est le suivant :

$$P[u(x,t)] - \sum_{i=0}^{1} A_i(x,t)\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x^i} = f(x,t) + \tag{1}$$

$$+\int_0^t \sum_{i=0}^{1} K_i(x,t,\tau)\frac{\partial^i u(x,\tau)}{\partial x^i}\,d\tau,$$

$$u(0,t) = \varphi_2(t), \qquad u(a,t) = \varphi_3(t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \tag{3}$$

---

[1]) Extrait d'une communication présentée lors du VII-e Congrès des Mathématiciens Autrichiens (Linz, 16—21 septembre 1968).

où $\varphi_1(x)$, $A_i(x,t)$, $K_i(x,t,\tau)$ $(i=1,2)$, $f(x,t)$ sons des fonctions données continues, $\varphi_i(t)$ $(i=2,3)$ sont des fonctions données régulières pour tous (x,t), $(x,\tau) \in D[0,a] \times [0,T]$ et

$$P[u(x,t)] \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Le second problème est cet autre:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$T(x,y,0) = f(x,y), \tag{5}$$

$$T(0,y,t) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{6}$$

$$T(x,0,t) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant C_1, \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} T(x,y,t)\right]_{y=0} = 0, \quad c_1 \leqslant x \leqslant a, \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} T(x,y,t)\right]_{x=a} = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} T(x,y,t)\right]_{y=b} = 0, \quad c_2 \leqslant x \leqslant a, \tag{10}$$

$$T(x,b,t) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant c_2, \tag{11}$$

où l'on a choisit pour simplifier la température prescrite et la température gradient égales à 0.

L'analogue aux différences finies du système (4)...(11) peut être écrit sous la forme suivante:

$$T_{h,k,n+1} = \beta T_{h,k-1,n} + \alpha T_{h-1,k,n} + (1-2\alpha-2\beta) T_{h,k,n} + \alpha T_{h+1,k,n} + \beta T_{h,k+1,n}, \tag{12}$$
$$(h = 1,2,\ldots,M;\ k = 1,2,3,\ldots,N),$$

$$T_{h,k,0} = f(h\Delta x, k\Delta y), \tag{13}$$

$$T_{0,k,n} = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \tag{14}$$

$$T_{h,0,n} = 0, \quad 1 \leqslant h \leqslant \frac{c_1}{\Delta x}, \tag{15}$$

$$T_{h,1,n} = T_{h,0,n}, \quad \frac{c_1}{\Delta x} \leqslant h \leqslant \frac{a}{\Delta x}, \tag{16}$$

$$T_{M+1,k,n} = T_{M,k,n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \tag{17}$$

$$T_{h,N+1,n} = T_{h,N,n}, \quad \frac{c_2}{\Delta x} \leqslant h \leqslant \frac{a}{\Delta x}, \tag{18}$$

$$T_{h,N+1,n} = 0, \quad 1 \leqslant h \leqslant \frac{c_2}{\Delta x}, \tag{19}$$

où l'on a mis

$$T_{h,k,n} = T(h\Delta x, k\Delta y, n\Delta t), \quad \alpha = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad \beta = \frac{k\Delta t}{(\Delta y)^2},$$

$$\Delta x = \frac{a}{M+1}, \quad \Delta y = \frac{b}{N+1},$$

ou bien sous la forme matricielle vectorielle [2])

$$\vec{T}_{n+1} = A\vec{T}_n. \tag{20}$$

Des systèmes linéaires associés aux systèmes différentiels de la Physique Mathématique, tel le système (12)...(19), ont attiré depuis longtemps l'attention des chercheurs. Les méthodes élaborées dans cet ordre d'idées, telle la méthode des itérations proposée par L. F. Richardson en 1910, ont connues un rapide essor dès l'avénement des calculatrices électroniques.

3. Soit

$$[A][X] = [B] \tag{21}$$

un système linéaire de n équations à n inconnues. Le problème de la résolution du système (20) par approximations successives appliquées au système auxiliaire

$$[X] = [P_p(A)][X] - [Q_{p-1}(A)][B], \tag{22}$$

où $P_p(A)$ et $Q_{p-1}(A)$ sont deux polynômes matriciels, le polynôme $P_p(A)$ étant choisi de façon à rendre convergente la suite (22), peut-être cristallisé dans le théorème suivant:

Théorème 1. *Si* $p_p(x)$ *et* $q_{p-1}(x)$ *sont deux polynômes liés par la relation* $q_{p-1}(x) = (p_p(x) - 1)/x$, *avec* $p_p(0) = 1$, *la suite matricielle de terme général*

$$[X_k] = [P_p(A)][X_{k-1}] - [Q_{p-1}(A)][B] \tag{23}$$

converge vers la solution du système $[A][X] = [B]$ *si, et seulement si,* $\rho(P(A)) = \max_i |p_p(\lambda_i)| < 1$, *où* $\rho(A)$ *est le rayon spectral de* $[A]$ *et on a toujours* $\rho(A) \leqslant \| A \|$.

4. Dans notre Note à suivre, nous procéderons, en appliquant (23) et ayant en vue quelques résultats tout à fait récents dûs à l'un de nos collaborateurs, M. Ph. Noël [5], [6], à la résolution de certains problèmes d'élasticité thermique, tel le problème de la lingotière, dont la mise en équation a été réalisée dans [5]. Le problème proposé sera résolu si nous réussissons à trouver une fonction telle que

---

[2]) A. Lowan [4], tout en faisant une due mention aux recherches du premier des auteurs, a démontré la stabilité du système [20], au moins pour certaines A.

$$\Delta\Delta\varphi = \frac{E}{1-\sigma}\Delta\varphi$$

et satisfaisant aux conditions aux limites

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \forall y \quad \text{pour} \quad x = 0 \text{ et } x = a,$$

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \forall x \quad \text{pour} \quad y = 0 \text{ et } y = b.$$

Reçue le 19 VIII 1968

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique
et
Chaire de Mathématiques II

BIBLIOGRAPHIE

1. Mangeron D., *Théorie unitaire des systèmes différentiels intéressant la Physique Mathématique.* IV-e Congrès des Math. Roumains, C. r. des commun. reçues, Bucarest, 1956.
2. Mangeron D., Krivoscein L. E., *Problemi integro-differenziali con operatori esterni calorici.* Rend. Accad. Naz. Lincei, s. 8, 1964, **XXXVI**, *4*, pp. 451—456.
3. — *Neue graphisch-analytische Methoden zum Studium der nichtlinearen Schwingungen.* Abh. der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Kl. für Math., Phys. u. Technik, 1965, *1*, S. 76—90.
4. Lowan A.,*On the Picone Treatment of Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations of Various Type.* Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI** (**XV**), *3—4*, pp. 19-22.
5. Noël Ph., *Suritération des grands systèmes linéaires. Quelques applications aux équations aux dérivées partielles.* Thèse, Université de Nancy, Faculté des Sciences, Févr. 1967.
6. Mangeron D., Noël Ph., *Su alcuni problemi concernenti il metodo di collocazione.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, 1966, **XL**, *2*, pp. 201—206.
7. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., Krivoshein L. E., *A Theorem concerned with generalized Heat Transfer Phenomena.* Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII** (**XVII**), *3—4*, pp. 419—422.
8. Chaléat R., Mangeron D., *Analyse numérique des petites oscillations en fonction de leur amplitude.* Rev. Roumaine Sci. Techn., sér. Méc. appl. (sous presse).

TEHNICA COMPUTAȚIONALĂ ÎN TRATAREA PROBLEMELOR DE INGINERIE MODERNĂ

Nota I. Asupra unor probleme de termotehnică

(Rezumat)

Autorii au studiat singuri sau în colaborare serii de probleme interesînd teoria potențialului *generalizat*, propagarea căldurii și mecanica neliniară tehnică a vibrațiilor [1]...[3] [7], [8].

În această Notă, luîndu-se ca punct de plecare sistemul ce schematizează o clasă de fenomene de propagare a căldurii [4]...[11], tradus apoi în sistemul de diferențe finite (12)...(19), se expune o teoremă relativă la calculul numeric al sistemelor liniare de forma (21), urmînd ca, într-o Notă imediat următoare, elaborată în colaborare cu Philippe Noël [5], [6], să se rezolve unele probleme de elasticitate termică, ca de exemplu acea a lingotierei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 513.1 : 621.01

UNE EXTENSION DES PROPRIÉTÉS DU PLANIMÈTRE AMSLER

PAR

ŞTEFANIA RUSCIOR et AMEDEO ORĂNESCU

Comunication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Galatzi, avril 1966

1. On connaît le principe du planimètre Amsler : l'aire du domaine plan balayé par un segment constant dont les extrémités décrivent des courbes lisses fermées est égale à la différence des aires des domaines plans délimités par ces courbes. Dan Hulubei [1] a démontré que cette propriété est conservée même dans le cas où le segment qui se déplace est d'une longueur variable. Dans cette Note nous nous proposons de généraliser la propriété mentionnée aussi bien dans le plan que dans l'espace.

Dans le plan nous avons considéré l'aire d'un domaine balayé par un arc de courbe $\overset{\smile}{AB}$ de longueur variable qui se déplace de sorte que ses extrémités décrivent deux courbes lisses fermées. En imposant des conditions de régularité du premier ordre aux fonctions qui interviennent dans le problème, nous obtenons la

Proposition I. *L'aire d'un domaine plan balayé par un arc de courbe* $\overset{\smile}{AB}$ *de longueur variable dont les extrémités décrivent deux courbes lisses fermées, est égale à la différence des aires des domaines plans délimités par ces courbes.*

Demonstration. Supposons que l'arc $\overset{\smile}{AB}$ de longueur variable se déplace de telle manière qu'une extrémité parcourt la courbe (γ_1) et l'autre la courbe (γ_2) tel qu'après que ces courbes sont complètement parcourues, l'arc $\overset{\smile}{AB}$ prenne sa position initiale. Considérons une partition de l'arc $\overset{\smile}{AB}$ et la ligne polygonale corespondante inscrite dans l'arc $\overset{\smile}{AB}$ ayant comme sommets les pointes $M_i \in \overset{\smile}{AB}$, où $i = 0,1,\ldots,n$ (M_0 coïncide avec A et M_n avec B).

Des conditions de régularité imposées aux fonctions qui caractérisent les courbes (γ_1), (γ_2) et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ il s'ensuit que la longuer de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ peut être définie par l'expression

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \overline{M_iM_{i+1}}. \tag{1}$$

L'aire du domaine balayé par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est définie comme la limite de la somme des aires des domaines plans balayés par chaque corde $\overline{M_iM_{i+1}}$, séparément. L'aire du domaine plan balayé par un segment orienté est positive ou négative suivant le sens du déplacement.

L'aire $\Delta\sigma_i$ du domaine plan balayé par la corde $\overline{M_iM_{i+1}}$ est égale, conformément au théorème de [1], à la différence des aires $\sigma(M_{i+1})$ et $\sigma(M_i)$ des domaines plans délimités par les courbes décrites par les extrémités M_{i+1}, respectivement M_i. Par conséquent, nous avons l'aire élémentaire

$$\Delta\sigma_i = \sigma(M_{i+1}) - \sigma(M_i). \tag{2}$$

En considérant la somme de ces aires élémentaires lorsque $n \to \infty$, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \Delta\sigma_i = \sigma(M_n) - \sigma(M_0); \tag{3}$$

donc l'aire $\sigma(\overset{\frown}{AB})$ du domaine plan balayé par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est donnée par

$$\sigma(\overset{\frown}{AB}) = \sigma(B) - \sigma(A). \tag{4}$$

Mais $\sigma(B)$ et $\sigma(A)$ représentent les aires des domaines délimités par les courbes (γ_2), respectivement (γ_1) ; ce qui établit le théorème.

La propriété reste vraie lorsque l'arc $\overset{\frown}{AB}$ a une longueur constante.

2. Dans l'espace nous avons considéré une surface dévelopable rapportée à une famille de géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales. L'élément d'arc d'une courbe tracée sur cette surface est défini par $ds^2 = du^2 + dv^2$ et l'élément d'aire, $d\sigma = du\,dv$, s'exprime par l'élément d'aire plane. Par conséquent, la propriété démontrée dans le plan se conserve même pour ces surfaces. Il en résulte la

Proposition II. *Si un arc $\overset{\frown}{AB}$ d'une géodésique appartenant à une surface développable se déplace sur cette surface de sorte que ses extrémités décrivent deux courbes fermées situées sur la surface, l'aire du domaine superficiel balayé par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égale à la différence des aires des domaines superficiels délimités par ces courbes.*

En particulier, sur une surface conique, lorsque un segment de longueur constante $\overline{AB} = l$ de la génératrice se déplace de manière à ce que ses extrémités décrivent des courbes fermées homothétiques (γ) et (γ_1) situées sur cette surface, l'aire du domaine superficiel balayé par le segment est donnée par

$$\sigma(\overline{AB}) = \frac{k^2 + l^2}{d^2}\sigma(\gamma), \tag{5}$$

où d est la distance entre le sommet du cône et l'extrémité A, et k est le rapport d'homothétie.

Dans le cas des surfaces de révolution

$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = f(u), \end{cases} \tag{6}$$

pour lesquelles $d\sigma = du\ dv$, nous avons $(1 + f'^2)u^2 = 1$ et, en intégrant, nous obtenons

$$f(u) = \sqrt{1 - u^2} + \frac{1}{2}\ln C\frac{\sqrt{1 - u^2} - 1}{\sqrt{1 - u^2} + 1}. \tag{7}$$

Moyennant un changement de paramètres sur les surfaces, nous obtenons une famille de surfaces de révolution caractérisée par

$$f(U) = U + \frac{1}{2}\ln C\frac{U - 1}{U + 1}, \tag{7'}$$

pour lesquelles la propriété démontrée plus haut est vraie.

Sur une sphère, cette propriété est conservée pour l'aire d'un domaine balayé par un arc d'un grand cercle dont les extrémités décrivent des courbes fermées. Ce résultat peut être utilisé dans la construction de mécanismes spatiaux sphériques ayant des éléments constitués d'arcs de grands cercles, destinés à la mesure des aires sphériques.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I
et
Institut Polytechnique, Galatzi

BIBLIOGRAPHIE

1. Hulubei D., *L'aire balayée par un segment constant.* Communication presentée lors de la session stientifique de l'Institut Polytechnique de Galatzi, 1963.
2. Hulubei D., Orănescu A., *L'aire balayée par un segment variable.* Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Galatzi, 1964.

3. Boiangiu D., Nicolau E., Niţă C., *Instrumente, dispozitive şi maşini matematice*. Ed. tehn., Buc., 1963.

O EXTINDERE A PROPRIETĂŢILOR PLANIMETRULUI AMSLER

(Rezumat)

În această notă se arată că aria domeniului măturat de un arc de curbă plană de lungime variabilă este egală cu diferenţa ariilor domeniilor delimitate de curbele descrise de extremităţile acelui arc. Aceeaşi proprietate se păstrează pe unele suprafeţe de curbură constantă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

D. K. 531.381

ANGEFACHTE NUTATIONSSCHWINGUNGEN BEI HOCHLAUFENDEN KARDANKREISELN

VON

WALTER SCHMID

1. Einführung

Der läufer eines Kreiselgerätes muss vor dessen Einsatz in einem Bergwerk, einem Schiff, einem Flugzeug oder einer Rakete in eine schnelle Drehbewegung versetzt werden. Das dabei erforderliche Antriebsmoment um die Laufachse des Kreiselrotors kann in einfachen Fällen mittels Schnurantrieb aufgebracht werden. Kreisel für Fluggeräte werden jedoch i. a. von Synchron- oder Asynchronmotoren aufgezogen und bei Raketen schiesst man den Kreiselrotor mit einer Pulverladung oder einer vorgespannten Feder hoch.

Diese Vorgänge erfordern eine gewisse Zeitspanne. Ausserdem muss anschliessend die Laufachse des Kreisels ausgerichtet werden. Um nun diese Wartezeit zu verkürzen, beginnt man mit dem Ausrichtvorgang schon, bevor der Kreiselrotor seine Enddrehzahl erreicht hat. Dabei nützt man zwei Effekte aus. Einmal trägt das Aufziehmoment zur Stützung bei und zum anderen verlaufen wegen des geringen Eigendralles des Kreisels die Stütz- bzw. Führungspräzessionen schneller.

Setzt der Ausrichtvorgang jedoch zu früh ein bzw. wird die Arretierung des Kreisels zu früh entfernt, dann neigt ein kardanisch gelagertes Kreiselgerät zu angefachten Nutationsschwingungen. Solche Nutationsschwingungen werden im folgenden untersucht.

2. Die Bewegungsgleichungen

Wir betrachten ein Kreiselgerät, dessen Läufer kardanisch gelagert ist. Die Lage des Kreiselrotors sei durch in Abb. 1 eingeführten Winkel α, β und γ gekennzeichnet.

Zur Vereinfachung der Betrachtung sei angenommen, dass das Trägheitsellipsoid des Rotors symmetrisch sei. Die Symmetrieachse falle mit der Laufachse zusammen. Der Schwerpunkt des Rotors liege im Schnittpunkt der Rahmenachsen. Der Rotor und die Rahmen seien starr und die Drehmassen der Rahmen seien gegenüber der des Rotors vernachlässigbar.

Die Bewegungsgleichungen werden mit der Lagrangeschen Methode aufgestellt. Da bei Drehbewegungen der Kardanringe und bei den getroffenen Voraussetzungen die potentielle Energie des Rotors nicht geändert wird, muss lediglich die kinetische Energie bekannt sein.

Mit

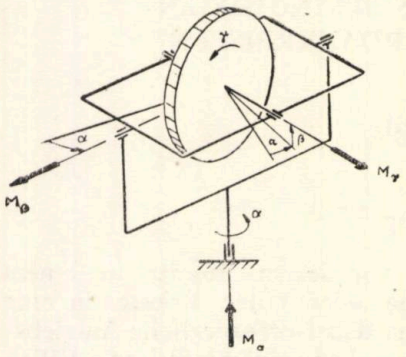


Abb. 1. — Kreisel in kardanischer Aufhängung.

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}\cos\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\bar{\theta}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

wird

$$2T = \bar{\omega} \cdot \bar{\bar{\theta}}\bar{\omega} = A(\dot{\alpha}^2\cos^2\beta + \dot{\beta}^2) + B(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})^2 .$$

Nach Lagrange ergeben sich die Bewengungsgleichungen aus

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = M_q, \quad (q = \alpha, \beta, \gamma),$$

wo mit M_q die äusseren Momente um die einzelnen Achsen bezeichne werden.

Dann gilt

$$(1) \qquad A(\ddot{\alpha}\cos^2\beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta) + B\frac{d}{dt}[(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\sin\beta] = M_\alpha ,$$

$$(2) \qquad A(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta) - B(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\dot{\alpha}\cos\beta = M_\beta ,$$

$$(3) \qquad B\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}\sin B + \dot{\gamma}) = M_\gamma .$$

Mit der Abkürzung

$$(4) \qquad B(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}) = B\omega_e = H$$

wird aus (1), (2) und (3)

$$(5) \qquad A(\ddot{\alpha}\cos^2\beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta) + \dot{H}\sin\beta + H\dot{\beta}\cos\beta = M_\alpha ,$$

$$(6) \qquad A(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta) - H\dot{\alpha}\cos\beta = M_\beta ,$$

(7) $$\dot{H} = M_\gamma .$$

Zur Untersuchung der Parametergebiete mit aufschaukelnden Nutationsschwingungen ist es erlaubt, diese Gleichungen in den als klein angenommenen Winkeln α und β zu linearisieren. Die Ausdrücke $\dot{\alpha}\dot{\beta}\beta$ bzw. $\dot{\alpha}^2\beta$ müssen zwar bei der Berechnung von Auswanderungserscheinungen [3], auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, berücksichtigt werden, hier können sie gegenüber $\ddot{\alpha}$ bzw. $\ddot{\beta}$ vernachlässigt werden. Die in α und β linearisierten Näherungsgleichungen lauten

(8) $$A\ddot{\alpha} + \dot{H}\beta + H\dot{\beta} = M_\alpha ,$$

(9) $$A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = M_\beta ,$$

(10) $$\dot{H} = M_\gamma .$$

Im allgemeinen ist M_γ von der Eigendrehgeschwindigkeit ω_e in (4) abhängig. Für kurze Zeitspannen, z. B. die Zeit für eine Nutationsschwingung, kann man den Kurvenverlauf $\gamma = \gamma(t)$ durch eine Tangente ersetzen, indem man in dieser Zeitspanne $M_\gamma = M_{\gamma 0}$ als konstant ansieht. Im Zeitpunkt T, etwa in der Mitte der Zeitspanne, sei $H_0 = H(T)$. Dann gilt innerhalb der Zeitspanne näherungsweise

(11) $$A\ddot{\alpha} + M_{\gamma 0}\beta + H_0\dot{\beta} = M_\alpha ,$$

(12) $$A\ddot{\beta} - H_0\dot{\alpha} = M_\beta .$$

Das so enstandene lineare Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten lässt sich mit den Hurwitz-Kriterien untersuchen. Sie geben an, bei welchen Parameterkombinationen der Realteil einer Wurzel negativ wird und sich die entsprechenden Schwingungen aufschaukeln.

3. Reibungsfreie Kardanlager

Bei reibungsfreien Kardanlagern und abgeschalteten Momentengebern auf den Rahmenachsen ist $M_\alpha = M_\beta = 0$. Die charakteristische Gleichung ist dann

(13) $$A^2\lambda^4 + H_0^2\lambda^2 + H_0 M_{\gamma 0}\gamma = 0.$$

Die Wurzel $\lambda_1 = 0$ deutet auf die Wiltkür der Lage bei Drehungen um die Achse des äusseren Kardanrahmens hin. Der Winkel α erscheint in den Ausgangsgleichungen (1), (2) und (3) nur in seinen Ableitungen.

Das restliche Polynom dritten Grades kann aufgelöst werden. Man erhält die in Abb. 2 ge-

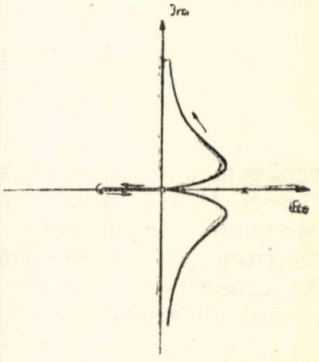


Abb. 2. — Wurzelortkurve bei reibungsfreier Kardanlagerung.

zeichnete Wurzelortkurve, wenn man im Zeitpunkt $T = 0$ mit $H_0 = 0$ beginnt, den Kreisel hochlaufen lässt, und den Beobachtungszeitpunkt T variiert. Das Trägheitsmoment A wird dabei als konstant vorausgesetzt.

In jedem Zeitpunct T sind Wurzeln in der rechten Halbebene vorhanden. Die zugehörigen Lösungen des Differentialgleichungssystems [11], (12) werden Nutationsschwingungen gennant, deren Amplituden ständig anwachsen.

Kreisel mit reibungsfreien Kardanlagern können daher nicht freigegeben werden, solange der Rotor hochläuft.

4. Viskose Reibung in den Kardanlagern

4.1. Ungeführte Rotorachse

Es seien $M_\alpha = -D_\alpha \dot{\alpha}$ und $M_\beta = -D_\beta \dot{\beta}$ Momente, die in den Lagern der Kardanrahmen durch dissipative Kräfte entstehen. Die Bewegungsgleichungen des Rotors lauten damit

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + D_\alpha \dot{\alpha} - H_0 \dot{\beta} + M_{\gamma 0} \beta = 0, \\ -H_0 \dot{\alpha} + A\ddot{\beta} + D_\beta \dot{\beta} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Mit den Abkürzungen

$$d_\alpha = \frac{D_\alpha}{A}, \quad d_\beta = \frac{D_\beta}{A}, \quad h = \frac{H_0}{A}, \quad a = \frac{M_{\gamma 0}}{A} \tag{15}$$

gewinnt man die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 + (d_\alpha + d_\beta)\lambda^3 + (d_\alpha d_\beta + h^2)\lambda^2 + h\alpha\lambda = 0. \tag{16}$$

Momente, die der Beziehung

$$M_\alpha^* = c_\alpha \beta \tag{17}$$

genügen, und um die Achse des äusseren Kardanrahmens wirksam sind, können in (14) mit dem Glied $M_{\gamma 0}\beta$ zusammengefasst werden. Solche Momente dienen beim Kurskreisel der Stützung und beim künstlichen Horizont der Führung. Diese Dinge lassen sich demnach bei entsprechender Änderung von a in die Betrachtung einschliessen. Andererseits sieht man, dass die Stützung bzw. Führung durch das Aufziehmoment M_γ verstärkt wird.

In (16) tritt wie in (13) die Wurzel $\lambda_1 = 0$ auf. Im Polynom

$$\lambda^3 + (d_\alpha + d_\beta)\lambda^2 + (d_\alpha d_\beta + h^2)\lambda + ha = 0 \tag{18}$$

ist das erste Hurwitzkriterium erfüllt. Alle koeffizienten sind vorhanden und haben dasselbe Vorzeichen. Bei einem charakterischen Polynom dritten Grades ist zur Stabilität ausserden erforderlich, dass die zweite Hurwitzdeterminante positiv ist.

Aus

$$H_2 = \begin{vmatrix} d_\alpha + d_\beta & ha \\ 1 & d_\alpha d_\beta + h^2 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

folgt

(19) $$h \leqslant h_1 , \quad h \geqslant h_2$$

mit

(20) $$h_1 = \frac{a}{2(d_\alpha + d_\beta)} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4(d_\alpha + d_\beta)^2 d_\alpha d_\beta}{a^2}} \right)$$

und

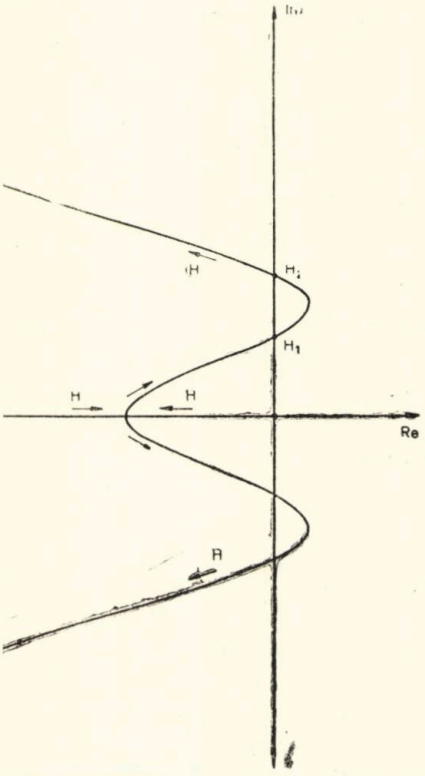


Abb.3. —Vurzelortkurve bei viskoser Reibung in den Kardanlagern.

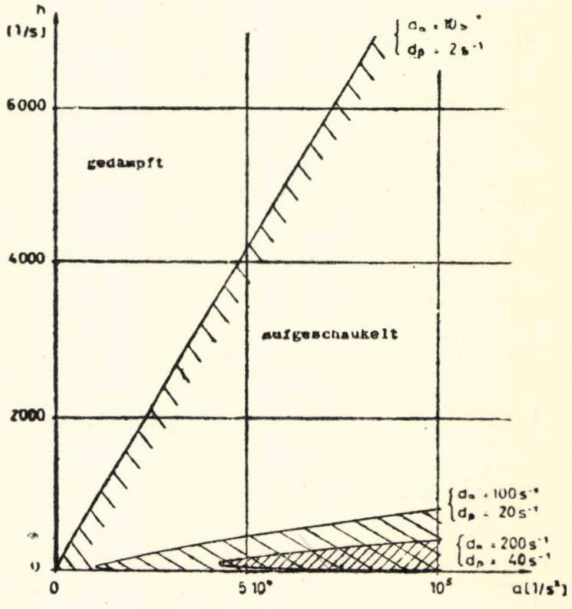


Abb. 4. — Die Grenze der aufgeschaukelten Nutationschwingungen beim ungeführten Lagekreisel und bei verschieden grosser Reibung in den Kardanlagern.

$$h_2 = \frac{a}{2(d_\alpha + d_\beta)}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4(d_\beta + d_\alpha)^2 d_\alpha d_\beta}{a^2}}\right). \tag{21}$$

Die Wurzelortkurve hat den in Abb. 3 dergestellten Verlauf. Läuft der Kreisel aus der Ruhelage heraus hoch, dann sind seine Nutationsschwingungen zunächst gedämpft. Sobald H_0 den i. a. relativ kleinen Wert $H_1 = h_1 A$ überschreitet, werden Nutationsschwingungen angefacht und oberhalb $H_2 = h_2 A$ wieder gedämpft. Bei grösseren Momenten M_γ läuft der Kreisel schneller hoch. Dann wird aber auch der Bereich $\Delta H = H_2 - H_1$ grösser. Verkleinert man M_γ, so rücken die beiden Werte H_1 und H_2 dichter zusammen und bei

$$M_\gamma \leqslant 2(D_\alpha + D_\beta)\sqrt{\frac{D_\alpha D_\beta}{A}} \tag{22}$$

verschwindet der Bereich. Die Nutationsschwingungen sind dann für jedes H gedämpft.

In Abb. 4 ist das Gebiet der aufgeschaukelten Nutationen für verschiedene Kombinationen von d_α und d_β schraffiert eingezeichnet. Es wird davon ausgegangen, dass das Reibungsmoment un die Achse des äusseren Kardanrahmens grösser als dasjenige um die Achse des inneren ist, da am inneren Kardanrahmen Punktkontaktsätze gebräuchlich sind, deren Reibungswerte wesentlich unter denen von Schleifringübertragern liegen. Diese sind zum Durchdrehen das Aussenrahmens erforderlich.

4.2. Geführte Rotorachse

Beim gestützten und geführten Kurskreisel und beim Horizont mit zweiachsiger Führung wirken an den Kardanrahmen die Momente

$$\begin{cases} M_\alpha = -D_\alpha \dot{\alpha} - C_\alpha \beta, \\ M_\beta = -D_\beta \dot{\beta} + C_\beta \alpha. \end{cases} \tag{23}$$

Mit den Abkürzungen

$$h = \frac{H_0}{A},\quad a = \frac{C_\alpha + M_\gamma}{C},\quad b = \frac{C_\beta}{A},\quad d_\alpha = \frac{D_\alpha}{A},\quad d_\beta = \frac{D_\beta}{A} \tag{24}$$

entsteht aus (11), (12) und (23) das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + d_\alpha \dot{\alpha} + h\dot{\beta} + a\beta = 0, \\ \ddot{\beta} + d_\beta \dot{\beta} - h\dot{\alpha} - b\alpha = 0, \end{cases} \tag{25}$$

dessen charakteristische Gleichung des Polynom

(26) $$\lambda^4 + (d_\alpha + d_\beta)\lambda^3 + (d_\alpha d_\beta + h^2)\lambda^2 + (a+b)h\lambda + ab = 0$$

vierten Grades ist. Sind die Koeffizienten a, b, d_α, d_β, h alle positiv, was im weiteren angenommen wird, dann ist das erste Hurwitz-Kriterium erfüllt. Von den vier Hurwitzdeterminanten ist lediglich die dritte nachzuprüfen, da bei erfülltem 1. Kriterium die erste, zweite und vierte automatisch positiv sind, falls die dritte dies ebenfalls ist [2].

Die dritte Hurwitzdeterminante

(27) $$(a+b)h[(d_\alpha d_\beta + h^2)(d_\alpha + d_\beta) - (a+b)h] - ab(d_\alpha + d_\beta)^2 \geqslant 0$$

enthält fünf Variable.

Man kann zunächst versuchen, die Grössen a und b bzw. d_α und d_β durch andere sinnvolle Variable auszudrücken. Die neuen variablen können z. B. die Grössenordnung die Verschiedenheit (Unsymmetrie) der beiden ursprünglichen Grössen festlegen. Dies kann durch die Bildung von Mittelwerten geschehen. Gebräuchliche Mittelwerte von a und b sind: das harmonische Mittel, $\mathrm{HM} = 2ab/(a+b)$; das geometrische Mittel, $\mathrm{GM} = \sqrt{ab}$, und das arithmetische Mittel, $\mathrm{AM} = (a+b)/2$.

Ist $a = b$, so ist $\mathrm{HM} = \mathrm{GM} = \mathrm{AM}$. Für $a \neq b$ $(a, b > 0)$ gilt stets $\mathrm{HM} < \mathrm{GM} < \mathrm{AM}$. Man kann also

(28) $$c = \mathrm{GM} = \sqrt{ab}$$

als Mass für die Grössenordnung von a und b, und

(29) $$v_c = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{HM}} = \frac{(a+b)^2}{4ab} \geqslant 1$$

als Mass für die Verschiedenheit (Ansymmetrie) von a und b werwenden.

Bildet man auf diese Weise d und v_d aus d_α und d_β, so kann mit

(30) $$x = \sqrt{\frac{v_c}{v_d}} = \frac{a+b}{d_\alpha + d_\beta}\frac{d}{c}$$

die Anzahl der Variablen in (27) um eine gesenkt werden. Der Aufbau der Grösse x ist zwar etwas kompliziert, dafür wird die nun folgende Untersuchung wesentlich vereinfacht.

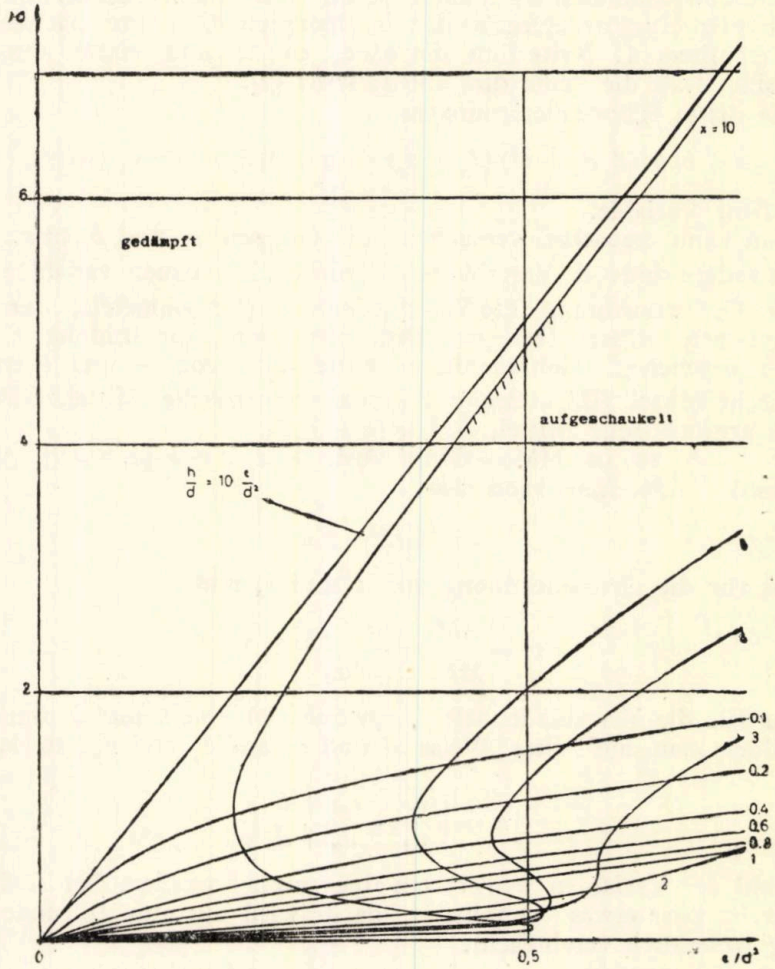
Aus (27) entsteht

(31) $$h^3 - \frac{cx}{d}h^2 + d^2 h - \frac{cd}{x} \geqslant 0$$

und daraus

(32) $$\left(\frac{h}{d}\right)^3 - \frac{c}{d^2}x\left(\frac{h}{d}\right)^2 + \frac{h}{d} - \frac{1}{x}\frac{c}{d^2} \geqslant 0.$$

Der Bereich mit aufschaukelnden Nutationsschwingungen lässt sich jetzt in einer Ebene darstellen, wie dies in Abb. 5 geschehen ist. Dabei ist c/d^2 als Abszisse, h/d als Ordinate und x als Parameter verwendet worden.



Abb, 5. — Die Grenze der aufgeschaukelten Nutationsschwingungen beim gestützten und geführten Lagekreisel, in dessen kardanischer Lagerung viskose Reibungsmomente auftreten.

Variable, die rechts von den in Abb. 5 eingezeichneten Stabilitätsgrenzen entnommen werden, ergeben aufgeschaukelte, [solche, die links davon liegen, gedämpfte Nutationsschwingungen. Liegen die Grössen c, d und x bei einem gegebenen Kreiselgerät fest, so ist für $h = 0$ und damit

$H=0$ stets mit aufgeschaukelten Nutationen des Kreisels zu rechnen. Es gibtk eine Parameterkombination, bei der $c \neq 0$ ist, und bei der der geführte Kreisel aus der Ruhelage heraus stabil hochlaufen könnte wie dies beim ungeführten Kreisel möglich ist.

Beim Hochlaufen wird die Grenze zwischen aufgeschaukelten und gedämpften Nutationsschwingungen überschritten. Man kommt in den Bereich der gedämpften Schwingungen und bleibt in diesem, wenn $x \leqslant 3$ ist. Für $x > 3$ werden innerhalb eines gewissen Bereiches der Grösse c/d^2 Nutationen wieder aufgeschaukelt, um erst bei wesentlich höherem Eigendrall H wieder gedämpft zu werden.

Betrachten wir (32) als Bestimmungsgleichung für h/d, dann können wir auf bekannte Weise den Bereich der Grössen c/d^2 und x bestimmen, in dem 3 reelle Wurzeln h/d existieren, in dem also der wiederholte Wechsel von aufgeschaukelten und gedämpften Nutationen stattfindet.

Die Grösse h/d hat 3 Wurzeln, wenn gilt

$$f - g < \frac{c^2}{d^4} < f + g \tag{33}$$

mit

$$f = \frac{1}{8x^4}(x^4 + 18x^2 - 27), \tag{34}$$

und

$$g = \frac{1}{8x^4}\sqrt{(x^4 + 18x^2 - 27)^2 - 64x^6}. \tag{35}$$

Die Werte für c/d^2 sind reell, wenn g reell ist und $f+g$ und $f-g$ positiv sind. Die Diskriminante in (35)

$$x^8 - 28\,x^6 + 270\,x^4 - 972\,x^2 + 729 = 0 \tag{36}$$

hat die Lösungen $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$.

Die Funktion g ist also reell, wenn $x > 3$ oder $x < 1$ ist. Fur $x < 1$ wird jedoch f negativ und dem Betrage nach grösser als der Betrag von g, so dass lediglich bei Geräten, bei denen

$$x > 3 \tag{37}$$

ist, der wiederholte Wechsel von gedämpften und aufgeschaukelten Nutationen beim Hochlaufen des Kreisels zu erwarten ist.

Die Beziehung (33) lässt sich in einem Diagramm darstellen, wie dies in Abb. 6 geschehen ist. Der Parameterbereich, in dem aufgeschaukelte und gedämpfte Schwingungen sich mehrmals ablösen, ist schraffiert.

Wenn die einzelnen *Koeffizienten nicht genau bekannt* sind, wird man stets mit einem gewissen Sicherheitsabstand arbeiten. Der Kreisel wird erst

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

dann freigegeben, wenn mit Sicherheit Nutationsschwingungen gedämpft werden. In solchen Fällen genügt eine ungefähre Kenntnis der Grenze zwischen anfgeschaukelten und gedämpften Nutationsschwingungen. Aus (32) lassen sich Abschätzungen herleiten, die stets einem Sicherheitsabstand enthalten.

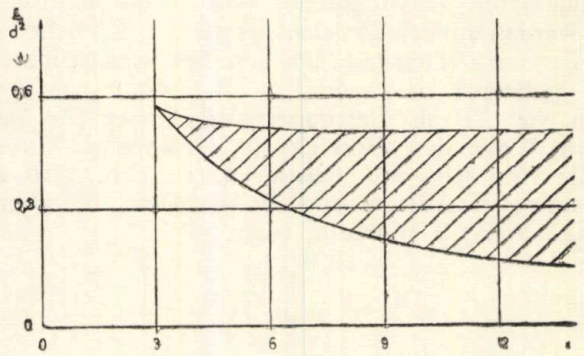


Abb. 6. — Parameter, mit denen ein Lagekreisel zunächst aufgeschaukelte, dann gedämpfte, aufgeschaukelte und wieder gedämpfte Nutationschwingungen beim Hochlaufen ausführt.

Ist $x > 1$, so kann als Näherung

$$h \geqslant x\frac{c}{d} = \frac{a+b}{d_\alpha + d_\beta} \tag{38}$$

verwendet werden. Für $x = 1$ stimmt diese Beziehung mit der Lösung von (32) genau überein. Für $x \geqslant 3$ und Parameter, die oberhalb der schraffierten Fläche von Abb. 6 liegen, ist die Gerade (38) nur wenig oberhalb der exakten Grenze. Liegen die Parameter jedoch unterhalb der schraffierten Fläche von Abb. 6, so ist die Grenze nach (32) weit unterhalb der Geraden. Die Näherung enthält dann eine zu grosse Reserve. Ähnlich einfach kann eine Näherungsbeziehung für $x < 1$ angegeben werden

$$h \geqslant \frac{c}{xd} = \frac{2ab}{a+b}\,\frac{d_\alpha + d_\beta}{2\,d_\alpha d_\beta} \tag{39}$$

die für grössere c-Werte jedoch ebenfalls einen zu grossen Sicherheitsabstand enthält.

In Abb. 5 ist die Gerade $h/d = 10\,c/d^2$ stets oberhalb der Kurven nach (32) fur $x = 10$ und $x = 0{,}1$.

5. Zusammenfassung

Bei der theoretischen Betrachtung eines kardanisch aufgehängten Kreisels wird oft [1], [3] ... [7] angenommen, dass die Antriebsmomente des Kreiselrotors den Reibungsmomenten entgegenwirken und gleich gross wie diese sind. Es wird $M_\gamma = 0$ gesetzt. Beim Hochlaufen des schweren Kreisels ändert sich dessen Verhalten durch ein Moment $M_\gamma \neq 0$ nicht, wie Rumiantsev [8] nachgewiesen hat. In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass bei reibungsfreier astatischer Kardanlagerung ein angetriebener Lagekreisel angefachte Nutationsschwingungen ausführt. Diese Nutationsschwingungen können durch Reibungsmomente in den Kardanlagern gedämpft werden, wenn der Eigendrall einen bestimmten Wert übersteigt. Dieser Wert hängt vom Kreiselantrieb, von der Reibung und von eventuell wirkenden Stutz- und Führungsmomenten ab.

Eingegangen am 21 III 1969

Universität Stuttgart,
Bundesrepublik
Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

1. Briggs R. W., IEEE Trans. on Aut. Control, 1965, p. 244.
2. Effertz F. H., ZAMM, 1957, **37**, S. 486.
3. Magnus K., *Advances in Aeronautical Science*. Vol. **I**, 1959, p. 507.
4. — J. appl. Math. Mech., 1958, **22**, p. 237.
5. Мархасов Л. М., Изв. АН СССР, ОТН, 1959, **5**, стр. 79.
6. Prentis J. M., J. Mech. Eng. Sci., 1961, *3*, p. 1.
7. Пумянцев В. В., ПММ, 1958, **22**, стр. 694.
8. — ПММ, 1958, **22**, стр. 449.

OSCILAŢII DE NUTAŢIE EXCITATE LA GIROSCOAPE CARDANICE ÎN MIŞCARE RAPIDĂ

(Rezumat)

Se studiază condiţiile în care se amortizează mişcările de nutaţie produse de cuplul motor al unui giroscop cu suspensie cardanică.

Explicaţia figurilor

Fig. 1—Giroscop cu suspensie cardanică.
Fig. 2—Curba loc al rădăcinilor în cazul unui lagăr cardanic fără frecare.
Fig. 3—Curba loc al rădăcinilor în cazul unui lagăr cardanic cu frecare vîscoasă.
Fig. 4—Limita oscilaţiilor de nutaţie excitate în cazul giroscopului necondus şi prezenţa diferitelor frecări în lagărele cardanice.
Fig. 5—Limita oscilaţiilor de nutaţie excitate în cazul giroscopului sprijinit şi condus şi în prezenţa momentelor de frecare vîscoase în lagăre.
Fig. 6—Parametrul datorită căruia un giroscop în mişcare rapidă are oscilaţii de nutaţie excitate, apoi amortizate, excitate şi din nou amortizate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 512.99 : 531.133

UN ASPECT DE LA DÉRIVATION DES VERSEURS PERPENDICULAIRES ET SES APPLICATIONS DANS LA CINÉMATIQUE

PAR

ALFRED BRAIER, I. IBĂNESCU et M. STANCU

Extrait de la communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, de 28–30 septembre 1967

1. Dans l'analyse vectorielle on insiste couramment sur la dérivation des vecteurs ayant l'intensité constante (verseurs, en particulier) et qui sont variables dans un plan. L'investigation de l'opération de dérivation au niveau de trois verseurs qui gardent en permanence leur position relative, en restant par exemple réciproquement perpendiculaires, conduit à un résultat unique, qui présent aussi un certain interêt méthodologique pour la cinématique.

On peut introduire ainsi d'une manière extrêmement simple la notion de vitesse angulaire instantanée dans le mouvement du corps solide, le vecteur de Darboux et indiquer des applications dans l'étude des systèmes de coordonnées courvilignes.

2. Soit $\mathbf{i}_k(\lambda)$, $(k = 1, 2, 3)$ trois verseurs variables, qu'on suppose fonctions vectorielles dérivables de l'argument scalaire λ et qui sont en permanence réciproquement perpendiculaires, c'est-à-dire

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \begin{cases} 1, \text{ si } k = l, \\ 0, \text{ si } k \neq l, \end{cases} \quad (k, l = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Le vecteur $\mathrm{d}\mathbf{i}_k/\mathrm{d}\lambda$ étant perpendiculaire à $\mathbf{i}_k$, on peut évidemment écrire

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}_k}{\mathrm{d}t} = \mathbf{w}_k \times \mathbf{i}_k, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{2}$$

où les $\mathbf{w}_k$ sont encore inconnus. Ayant en vue que dans les conditions présentes (1) les verseurs sont déterminés seulement par trois scalaires indépendants, il en résulte que les trois vecteurs $\mathbf{w}_k$ ne peuvent être complétement distincts.

Pour $k=1$, $l=2$, on obtient de (1) et (2) que $0=(\mathrm{d}\mathbf{i}_1/\mathrm{d}\lambda)\cdot\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_1\cdot(\mathrm{d}\mathbf{i}_2/\mathrm{d}\lambda)=(\mathbf{w}_1\times\mathbf{i}_1)\cdot\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_1\cdot(\mathbf{w}_2\times\mathbf{i}_2)=(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)\cdot\mathbf{i}_3$ (parce que $\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_2=\mathbf{i}_3$). Donc $\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2$ est contenu dans le plan déterminé par les directions de $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$, c'est-à-dire $\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2=-\mu_1\mathbf{i}_1+\mu_2\mathbf{i}_2$ avec μ_1, μ_2 des scalaires arbitraires.

En notant avec $\mathbf{w}$ la valeur commune qui en résulte, $\mathbf{w}=\mathbf{w}_1+\mu_1\mathbf{i}_1=\mathbf{w}_2+\mu_2\mathbf{i}_2$, en déduit à l'aide de (2) que $\mathrm{d}\mathbf{i}_1/\mathrm{d}\lambda=(\mathbf{w}-\mu_1\mathbf{i}_1)\times\mathbf{i}_1=\mathbf{w}\times\mathbf{i}_1$, et de même que $\mathrm{d}\mathbf{i}_2/\mathrm{d}\lambda=\mathbf{w}\times\mathbf{i}_2$. Avec ces résultats on obtient de $\mathbf{i}_3=\mathbf{i}_1\times\mathbf{i}_2$, à la suite d'un calcul banal, que $\mathrm{d}\mathbf{i}_3/\mathrm{d}\lambda=\mathbf{w}\times\mathbf{i}_3$.

Donc, dans toutes les trois dérivées (2) intervient un même vecteur, qu'on va appeler *vecteur type Darboux* du groupe de verseurs perpendiculaires variables. Les relations (2) s'écrivent

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}_k}{\mathrm{d}\lambda}=\mathbf{w}\times\mathbf{i}_k,\quad (k=1,2,3) \tag{3}$$

et on va les appeler *formules type Poisson.*

Pour déterminer l'expression de $\mathbf{w}$, considérons le produit vectoriel de deux relations (3), par exemple $(\mathrm{d}\mathbf{i}_1/\mathrm{d}\lambda)\times(\mathrm{d}\mathbf{i}_2/\mathrm{d}\lambda)=(\mathbf{w}\times\mathbf{i}_1)\times(\mathbf{w}\times\mathbf{i}_2)=\mathbf{w}[(\mathbf{w}\times\mathbf{i}_1)\cdot\mathbf{i}_2]-\mathbf{i}_2[(\mathbf{w}\times\mathbf{i}_1)\cdot\mathbf{w}]=\mathbf{w}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{i}_3)$. Mais $(\mathrm{d}\mathbf{i}_1/\mathrm{d}\lambda)\cdot\mathbf{i}_2=(\mathbf{w}\times\mathbf{i}_1)\cdot\mathbf{i}_2=\mathbf{w}\cdot\mathbf{i}_3$, donc

$$\mathbf{w}=\frac{(\mathrm{d}\mathbf{i}_k/\mathrm{d}\lambda)\times(\mathrm{d}\mathbf{i}_l/\mathrm{d}\lambda)}{(\mathrm{d}\mathbf{i}_k/\mathrm{d}\lambda)\cdot\mathbf{i}_l},\quad (k\neq l,\ k,l=1,2,3). \tag{4}$$

3. Si les verseurs (1) sont fonctions de λ par l'intermédiaire d'un nombre discret de variables

$$\mathbf{i}_k=\mathbf{i}_k(q_1,q_2,\ldots,q_s),\quad q_j=q_j(\lambda),\quad (k=1,2,3;\ \ j=1,2,\ldots,s), \tag{5}$$

alors

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}_k}{\mathrm{d}\lambda}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathbf{i}_k}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}\lambda},\quad \text{où}\quad \frac{\partial\mathbf{i}_k}{\partial q_j}=\mathbf{u}_j\times\mathbf{i}_k; \tag{6}$$

donc il y a pour chaque variable intermédiaire un vecteur type Darboux. On obtient pour le $\mathbf{w}$ nécessaire (v. (3))

$$\mathbf{w}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{u}_j, \tag{7}$$

avec

$$\mathbf{u}_j=\frac{(\partial\mathbf{i}_k/\partial q_j)\times(\partial\mathbf{i}_l/\partial q_j)}{(\partial\mathbf{i}_k/\partial q_j)\cdot\mathbf{i}_l},\quad (k\neq l,\ k,l=1,2,3;\ j=1,2,\ldots,s). \tag{8}$$

4. *Applications dans la cinématique du corps solide.* Si le scalaire indépendant est le temps, le vecteur $\mathbf{w}$ (4) est déterminé par $\mathbf{i}_k=\mathbf{i}_k(t)$, $(k=1,2,3)$, c'est-à-dire par la variation de la position du système d'axes mobiles, fixé dans le corps solide. Il caractérise donc la rapidité avec laquelle

se produit ce changement de position (rotation) et il est tout à fait naturel de l'appeler vecteur vitesse angulaire instantanée[1]).

a) Soit un corps solide avec l'axe fixe caractérisé par le verseur $\mathbf{n}$, qu'on choisit comme $O'x_3'$, avec le système mobile $x_1Ox_2x_3$ suivant: $O \equiv O'$, Ox_3 confondu avec Ox_3', les axes Ox_1, Ox_2 dans le plan $x_1'O'x_2'$, 0 étant l'angle $x_1'Ox_1$. Alors $\mathbf{i}_1 = \cos 0\, \mathbf{i}_1' + \sin 0\, \mathbf{i}_2'$, $\mathbf{i}_2 = -\sin 0\, \mathbf{i}_1' + \cos 0\, \mathbf{i}_2'$, d'où $\partial \mathbf{i}_1/\partial 0 = \mathbf{i}_2$ et $\partial \mathbf{i}_2/\partial 0 = -\mathbf{i}_1$. À l'aide de (8) on déduit que $\mathbf{u}_0 = \mathbf{i}_3 (= \mathbf{n})$ et la relation (7) conduit au résultat bien connu $\mathbf{w} = \dot{0}\mathbf{n}$ (qui, évidemment est indépendant du choix particulier du système d'axes).

b) Si q_j, $(j = 1,2,...,s)$ qui interviennent dans (5) représentent des angles de rotation autour des axes permanentes ou instantanés, ayant les verseurs $\mathbf{n}_j$ $(j = 1,2,...,s)$, alors en tenant compte aussi de (7)

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \mathbf{n}_j \left(= \sum_{j=1}^{s} \mathbf{w}_j \right). \tag{9}$$

On démontre ainsi un résultat important quant à la composition et la commutativité des rotations instantanés (infinitésimaux).

c) Soit un corps solide avec un ponit fixé, ayant la position précisée par les angles d'Euler [2]. On peut obtenir l'expression bien connue de la vitesse angulaire instantanée, soit en utilisant le résultat (9), soit en la calculant directement à l'aide de (7), qui devient içi $\mathbf{w} = \dot{\psi}\mathbf{u}_\psi + \dot{\varphi}\mathbf{u}_\varphi + \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$. Un calcul relatif simple, que nous omettons et qui utilise (8) conduit à $\mathbf{u}_\psi = \mathbf{i}_3'$, $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{i}_3$ et $\mathbf{u}_\theta = \mathbf{n}$ ($\mathbf{i}_3'$ — verseur de l'axe fixe $O'x_3'$, $\mathbf{i}_3'$ — verseur de l'axe mobile $O'x_3$ et $\mathbf{n}$ — verseur de la ligne des noeuds).

Le second procédé est plus important du point de vue théorique parce qu'il offre, par des opérations simples de calcul vectoriel, l'expression de la vitesse angulaire instantanée du corps solide ayant un point fixé, en dehors de toutes considérations relatives à la composition des rotations.

5. *Applications dans la cinématique du point.* 1. Pour les verseurs $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ du trièdre de Frenet, qui correspondent au directions tangente à la courbe, normale principale et binormale, ont lieu les relations $\mathrm{d}\mathbf{t}/\mathrm{d}s = \mathbf{n}/R$, $\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}s = -\mathbf{t}/R + \mathbf{b}/T$, où R est la courbure, T — la torsion et s — la longueur de l'arc. Alors (8) conduit à

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{t}}{T} + \frac{\mathbf{b}}{R}. \tag{10}$$

Si $s = s(t)$, à l'aide de (7) on obtient le vecteur de Darboux [3] $\mathbf{w} = \dot{s}\mathbf{u}$.

2. Soit $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ le rayon vecteur du point M, où q_k, $(k = 1,2,3)$ sont des coordonnés courvilignes orthogonales. Les respectifs verseurs s'obtiennent à l'aide de

$$\mathbf{i}_k = \frac{1}{H_k}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{11}$$

1) Dans [1] on l'avait obtenu exprimé par les vitesses de deux points du corps solide sous une forme au fond similaire à celle présentée içi.

où H_k représentent les coefficients de Lamé [3]. En utilisant (8) avec $s=3$ on peut obtenir les vecteurs $\mathbf{u}_j$, qui permettent à déterminer un vecteur Darboux inédit, qui correspond au mouvement du trièdre (11) quand $q=q(t)$. On va supposer $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, où $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sont les verseurs d'un système fixe.

a) Coordonnées cylindriques. Maintenant $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$ et $H_\rho=1$, $H_\theta=\rho$, $H_z=1$. On obtient sans difficultés $\mathbf{u}_\rho=0$, $\mathbf{u}_\theta=\mathbf{i}_3$, $\mathbf{u}_z=0$, donc $\mathbf{w}=\dot{\theta}\mathbf{i}_3$.

b) Coordonnées sphériques. Içi $x=r\cos\theta\sin\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\varphi$, avec $H_r=1$, $H_\theta=r\sin\varphi$, $H_\varphi=r$. Il en résulte $\mathbf{u}_r=0$, $\mathbf{u}_\theta=\mathbf{k}$, $\mathbf{u}_\varphi=\mathbf{i}_2$, donc $\mathbf{w}=\dot{\theta}\mathbf{k}+\dot{\varphi}\mathbf{i}_2$.

c) Coordonnées paraboloïdales [4]; ils sont $x=2mn\cos p$, $y=2mn\sin p$, $z=m^2-n^2$, avec $H_m=H_n=2\sqrt{m^2+n^2}$, $H_p=2mn$. On obtient

$$(12)\qquad \mathbf{u}_m=\frac{n}{m^2+n^2}\mathbf{i}_2,\ \mathbf{u}_n=-\frac{m}{m^2+n^2}\mathbf{i}_2,\ \mathbf{u}_p=\mathbf{k},\ \text{donc}\ \mathbf{w}=\frac{\dot{m}n-\dot{n}m}{m^2+n^2}\mathbf{i}_2+\dot{p}\mathbf{k}.$$

d) Coordonnées toroïdales [4]. Maintenent $x=\operatorname{sh}m\cos p/(\operatorname{ch}m-\cos n)$, $y=\operatorname{sh}m\sin p/(\operatorname{ch}m-\cos n)$, $z=\sin n/(\operatorname{ch}m-\cos n)$, avec les coefficients de Lamé $H_m=H_n=(\operatorname{ch}m-\cos n)^{-1}$, $H_p=\operatorname{sh}m/(\operatorname{ch}m-\cos n)$. On trouve

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathbf{u}_m=\dfrac{\sin n}{\operatorname{ch}m-\cos n}\ \dfrac{(1-\cos n\operatorname{ch}m)^2+\operatorname{sh}^2 m\,(1-\cos n\cos p)}{(1-\cos n\operatorname{ch}m)(1-\cos p\operatorname{ch}m)+\operatorname{sh}^2 m\sin^2 n}\mathbf{i}_2, \\ \mathbf{u}_n=\dfrac{(1-\operatorname{ch}m\cos p)\operatorname{sh}m\cos n}{(1-\operatorname{ch}m\cos n)(1-\operatorname{ch}m\cos p)+\operatorname{sh}^2 m\sin^2 n}\mathbf{i}_2,\quad \mathbf{u}_p=-\dfrac{\mathbf{k}}{\sin p}. \end{cases}$$

6. Le vecteur type Darboux et les formules type Poisson (3) qu'on a introduit peuvent être incluses dans les chapitres de calcul vectoriel qui précèdent les exposés de la Mécanique théorique. De cette manière on reusit à unifier et à simplifier toute une série d'aspects importants concernant la cinématique.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Braier A., Antoniu M., *Asupra unui aspect al distribuţiei vitezelor şi acceleraţiilor în mişcarea solidului rigid.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *3—4*, pp. 43—48.
2. Vâlcovici V., Bălan Şt., Voinea R., *Mecanică teoretică.* Ed. tehn., Buc., 1959.
3. Лоицианский Л. Г., Лурье А. И., *Курс теоретической механики.* Т. **1**, ГИТТЛ, М., 1954.
4. Бермант А. Ф., *Отображения. Криволинеиные координаты. Преобразования. Формулы Грина.* ГИТТЛ, М., 1958.

UN ASPECT AL DERIVĂRII VERSORILOR TRIORTOGONALI CU APLICAŢII ÎN CINEMATICĂ

(Rezumat)

Se consideră consecinţele operaţiei de derivare a trei versori triortogonali obţinîndu-se un rezultat unic, care interesează şi din punct de vedere metodologic. El permite introducerea pe o cale simplă a noţiunii de vector viteză unghiulară istantanee, a vectorului lui Darboux, avînd aplicaţii şi în studiul mişcării în coordonate curbilinii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 531.8 : 621.01

COUPLER COGNATES OF EIGHT-LINK MECHANISM WITH TERNARY LINKS AND DOUBLE JOINTS

BY

A. H. SONI

1. Introduction

Recent study by Profesor Bernard Roth of Stanford [1] on the multiple generation of coupler curves led the author to investigate cognates of plane and space four and five-link mechanisms [2], [3]. Further investigation of coupler cognates led the author to propose the existence of cognates of Watt's six-link mechanism [4], [5], and of planar eight-link mechanisms with ternary and quaternary links [6].

In this paper, the existence of coupler cognates of eight-link mechanisms with ternary links and double joint, shown in Fig. 1, is investigated. The two mechanisms shown in Figs. 1 a and 1 b, have each three loops consisting of four-links. The coupler cognates of these mechanisms are investigated under special condition that two of the three loops, different from the loop described by the base four-bar, are built of parallelograms, and that a double joint exists at A of both mechanisms. This condition of parallelogram is found necessary because the coupler cognates of eight-link mechanisms are constructed using the principle of stretch rotation, described by Roth [1] and the principle of similarly varying triangle, described by Hall [7]. The proof of the existence of coupler cognate is based on the approach, first proposed by Cayley [8] and later popularized by Hartenberg and Denavit [9].

Importance of this paper lies in establishing the existence of two additional stationary pivots (fixed pivots). Furthermore, each of these stationary pivots yields an infinite number of cognate mechanisms. The results of this investigation are different from those for coupler cognates of four-link mechanism, first reported by Roberts [10] and Chebychev [11].

2. Cognates of Eight-Link Mechan sm Shown in Fig. 1 a

The eight-link mechanism, shown in Fig. 1 a, is redrawn in Figs. 2 and 3 with the condition that $AG = EF$, $AF = GE$; $FD = BC$, $FB = DC$ and at the joint A, there is a double joint. Let $< CBQ = \beta_1$, $< EFD = \beta_2$, $< FAB = \alpha_1$ and

$$\frac{AF}{AB} = l_1, \quad \frac{BC}{BQ} = l_5, \quad \frac{FE}{FD} = l_6.$$

A coupler point H is located in the plane of the coupler link GE such that $GH/GE = l_2$ and $< HGE = \alpha_2$.

Corresponding to the coupler point H, there are two coupler cognates eight-link mechanisms obtained by locating two additional stationary pivots P_1 and P_2. The cognate construction and the existence of cognate for each of these pivots will be described in different sections.

2.1. Construction to Locate Stationary Pivot P_1 (Fig. 2)

1. Select ratios l_3, l_4, l_7, l_8 such that $l_1 l_2 l_3 l_4 = l_5 l_6 = l_7 l_8$.
2. Select angles α_2, α_3, α_4, γ_1 and γ_2 such that $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2$.
3. Construct parallelograms $GAMI$ and $HGIJ$.
4. On JH construct triangle KJH such that $JK/JH = l_7$ and $< KJH = \gamma_1$.
5. Construct parallelogram $KJIL$.
6. On LI construct triangle LIR such that $IR/IL = l_8$ and $< RIL = \gamma_2$.
7. On KL construct triangle XLK such that $XL/LK = l_3$.
8. Construct parallelogram $XLRN$.
9. On RN construct triangle P_1RN such that $RP_1/RN = l_4$.
10. If revolute pairs are placed at joints I, J, K, L, R, N, X, and P_1, (double joints at I), then the eight-link mechanism $MIJKLXNRP_1$ functions as coupler cognate to the source eight-link mechanism $MAGEFDCBQ$, both mechanisms have common coupler point H. Note that the link IG is a redundant link.

2.2. Proof for the Existence of Coupler Cognate with Stationary Pivot P_1

In order to establish that the eight-link mechanism $MIJKLXNRP_1$ functions as a coupler cognate to the source eight-link mechanism, it must be established that the located point P_1 is a stationary pivot. That is, the vector $\overline{MP_1}$, is in fixed relationship with the fixed vector $\overline{MQ}$. The vector $\overline{MP_1}$ is expressed as $\overline{MP_1} = \overline{MI} + \overline{IR} + \overline{RP_1}$. But

$$MI = AG = FE = l_6 FD = l_6 BC = l_5 l_6 BQ,$$

$$IR = l_8 IL = l_8 JK = l_7 l_8 JH = l_7 l_8 IG = l_7 l_8 MA$$

and

$$RP_1 = l_4 RN = l_4 LX = l_4 l_3 LK = l_3 l_4 IJ = l_3 l_4 GH = l_2 l_3 l_4 GE = l_2 l_3 l_4 AF = l_1 l_2 l_3 l_4 AB.$$

If links MA, AB, and BQ make angles φ_1, φ_2 and φ_3 with MQ, then

$$\overline{MP_1} = l_7 l_8 MA\, e^{i(\varphi_1+\gamma_1+\gamma_2)} + l_1 l_2 l_3 l_4 AB\, e^{i(\varphi_2+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)} + l_5 l_6 BQ\, e^{i(\varphi_3+\beta_1+\beta_2)}.$$

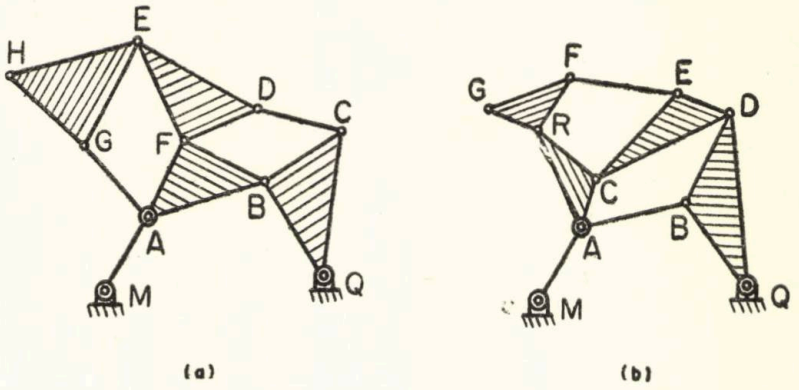


Fig. 1. — Eight-link mechanism with binary and ternary links. Note the double joint at *A*. *a*—Coupler cognates are investigated, under special geometric condition, by locating a coupler point *H* in the plane of the coupler link *GE*. The special geometric conditions are that loops *AFEG* and *FBCD* are parallelograms. *b*—Couple rcognates are investigated, under special condition, by locating a coupler point *G* in the plane of the coupler link *RF*. The special geometric conditions are that loops *ACDB* and *RFEC* are parallelograms.

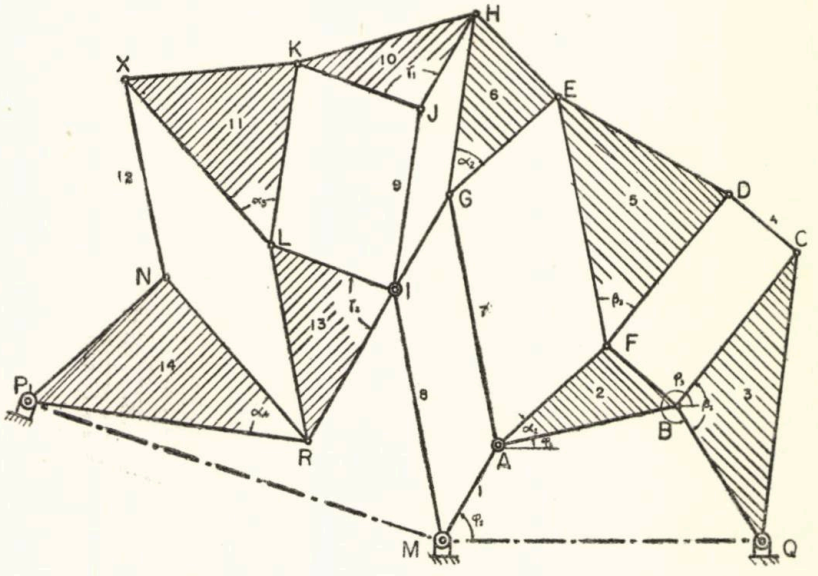
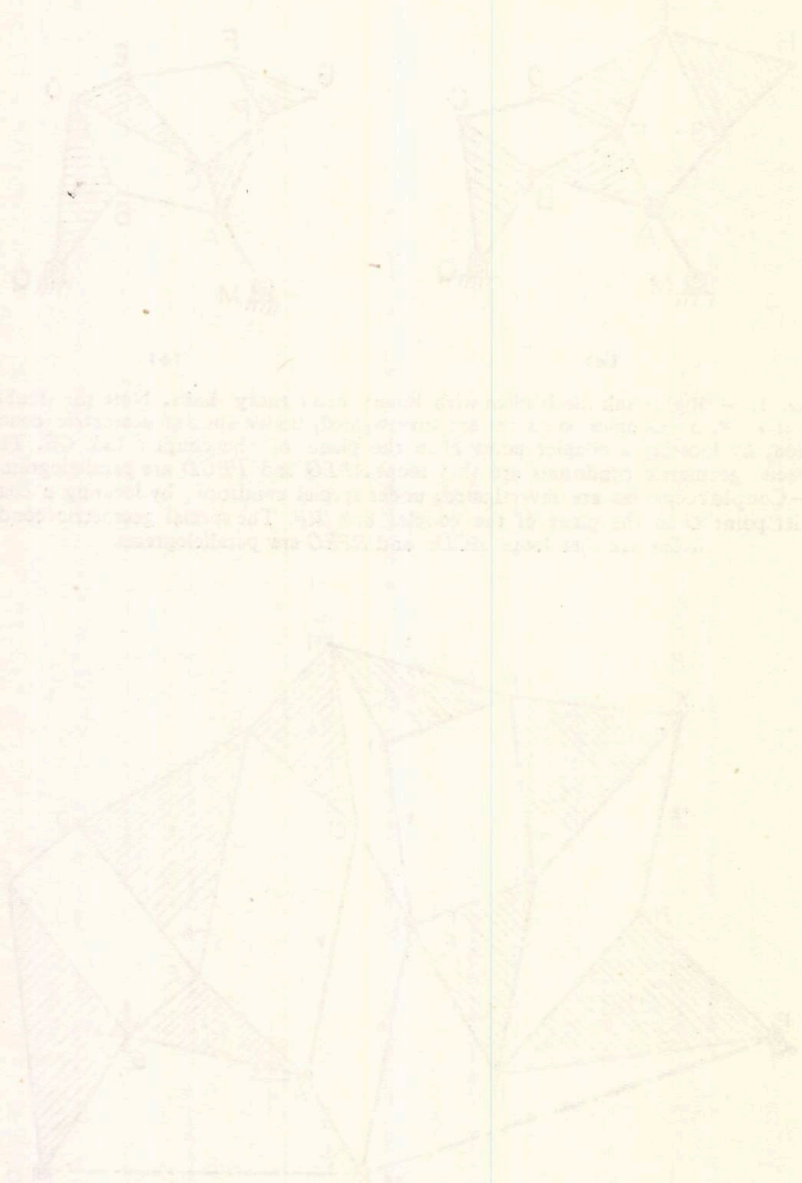


Fig. 2. — Cognate and source eight-link mechanisms with binary and ternary links. (Cognate construction locates stationary pivot P_1 and the source mechanism is described in Fig. 1 a).



Since cognate construction satisfies $l_1 l_2 l_3 l_4 = l_5 l_6 = l_7 l_8$ and $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2$,

$$\overline{MP_1} = l_1 l_2 l_3 l_4 e^{i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)} [MA e^{i\varphi_1} + AB e^{i\varphi_2} + BQ e^{i\varphi_3}],$$

i.e.,

$$\overline{MP_1} = l_5 l_6 e^{i(\beta_1+\beta_2)} \overline{MQ}.$$

That is, the vector $\overline{MP_1}$, is in fixed relationship with the fixed vector MQ. That is, the located point P_1 is a stationary pivot.

2.3. Properties of Coupler Cognate with Stationary Pivot P_1

1. The stationary pivot point P_1 lies on a triangle P_1MQ where $P_1M = l_1 l_2 l_3 l_4 MQ$ and $< P_1MQ = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$.

2. Because of the conditions $l_1 l_2 l_3 l_4 = l_5 l_6 = l_7 l_8$ and $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2$, there are infinite number of cognate mechanisms for a given source eight-link mechanism.

3. If links of cognate and source mechanisms are numbered, as shown in Fig. 2, then following angular velocity relationships hold true:

$$\omega_1 = \omega_{10} = \omega_{13}, \quad \omega_2 = \omega_6 = \omega_9 = \omega_{11} = \omega_{14}, \quad \omega_3 = \omega_5 = \omega_7 = \omega_8.$$

2.4. Construction to Locate Stationary Pivot P_2 (Fig. 3)

1. Select ratios l_3, l_4, l_7, and l_8 such that $l_1 l_2 = l_5 l_6 l_7 l_8 = l_3 l_4$.

2. Select angles β_3, β_4, γ_1 and γ_2 such that $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \gamma_1 + \gamma_2$.

3. Construct parallelograms *HGAR* and *RAMI*.

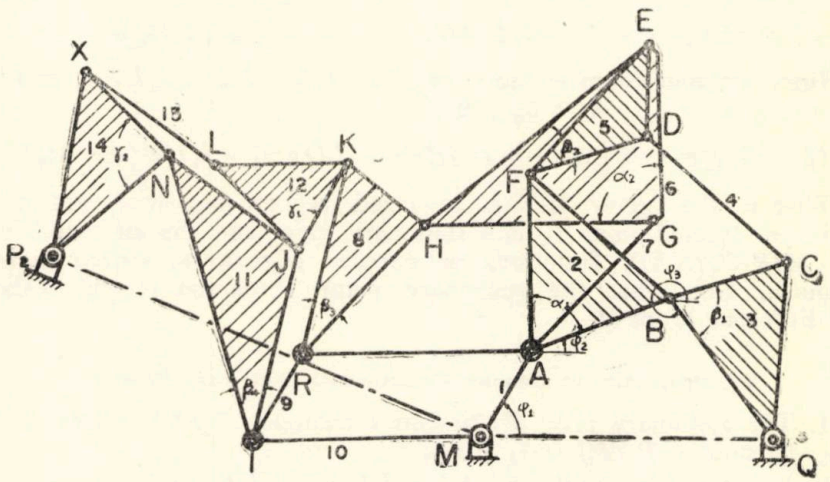


Fig. 3. — Cognate and source eight-link mechanisms with binary and ternary links. (Cognate construction locates stationary pivot P_2 and the source mechanism is described in Fig. 1 a)

4. On HR construct triangle KRH such that $RK/RH = l_7$ and $< KRH = \beta_3$.

5. Construct parallelogram $KRI\mathcal{J}$.

6. On $\mathcal{J}K$ construct triangle $L\mathcal{J}K$ such that $\mathcal{J}L/\mathcal{J}K = l_3$ and $< K\mathcal{J}L = \gamma_1$.

7. On $I\mathcal{J}$ construct triangle $NI\mathcal{J}$ such that $IN/I\mathcal{J} = l_8$ and $< NI\mathcal{J} = \beta_4$.

8. Construct parallelogram $L\mathcal{J}NX$.

9. On NX construct triangle XNP_2 such that $NP_2/NX = l_4$ and $< P_2NX = \gamma_2$.

10. If revolute pairs are placed at joints M, I, (double joints at I), R, K, $\mathcal{J}$, L, X, N, and P_2, then the eight-link mechanism $MIRKL\mathcal{J}NXP_2$ functions as a coupler cognate to the source eight-link mechanism $MAGEFDCBQ$, both mechanisms have common coupler point H. Note that the link RA is a redundant link.

2.5. Proof for the Existence of the Cognate Mechanism with Stationary Pivot P_2

The existence of the eight-link cognate is established by showing that the located point P_2 is a stationary pivot. That is, the vector $\overline{MP_2}$ is in fixed relationship with the fixed vector $\overline{MQ}$. The vector $\overline{MP_2}$ is expressed as $\overline{MP_2} = \overline{MI} + \overline{IN} + \overline{NP_2}$. But $MI = AR = GH = l_2 GE = l_2 AF = l_1 l_2 AB$, $IN = l_8 I\mathcal{J} = l_8 RK = l_7 l_8 RH = l_7 l_8 AG = l_7 l_8 FE = l_6 l_7 l_8 FD = l_6 l_7 l_8 BC = l_5 l_6 l_7 l_8 BQ$ and $NP_2 = l_4 NX = l_4 \mathcal{J}L = l_3 l_4 \mathcal{J}K = l_3 l_4 IR = l_3 l_4 MA$.

If links MA, AB and BQ make angles φ_1, φ_2, and φ_3 with MQ, as shown in Fig. 3, then

$$\overline{MP_2} = l_3 l_4 MA\, e^{i(\varphi_1+\gamma_1+\gamma_2)} + l_1 l_2 AB\, e^{i(\varphi_2+\alpha_1+\alpha_2)} + l_5 l_6 l_7 l_8 BQ\, e^{i(\varphi_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4)}.$$

Since cognate construction satisfies $l_1 l_2 = l_3 l_4 = l_5 l_6 l_7 l_8$ and $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$,

$$\overline{MP_2} = l_1 l_2\, e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} [MA\, e^{i\varphi_1} + AB\, e^{i\varphi_2} + BQ\, e^{i\varphi_3}] = l_1 l_2\, e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}\, \overline{MQ}.$$

That is, the vector MP_2 is in fixed relationship with vector $\overline{MQ}$. That is, the located point P_2 is a stationary pivot and the eight-link mechanism $MIRKL\mathcal{J}NXP_2$ functions as coupler cognate to source eight-link mechanism. Note that the stationary point P_2 is the second stationary pivot different from P_1.

2.6. Properties of Coupler Cognate with Stationary Pivot P_2

1. The stationary pivot P_2 lies on a triangle P_2MQ where $P_2M = l_1 l_2 MQ$ and $< P_2MQ = \alpha_1 + \alpha_2$.

2. Because of conditions $l_1 l_2 = l_3 l_4 = l_5 l_6 l_7 l_8$ and $\alpha_1 + \alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ there are infinite number of cognate mechanisms with stationary pivot P_2.

3. If links of cognate and source mechanism are numbered, as shown in Fig. 3, then following angular velocity relationships hold true:

$$\omega_1 = \omega_9 = \omega_{12} = \omega_{14}\,,\quad \omega_2 = \omega_6 = \omega_{10}\,,\quad \omega_3 = \omega_5 = \omega_7 = \omega_8 = \omega_{11}\,.$$

3. Cognates of Eight-Link Mechanism Shown in Fig. 1 b

The eight-link mechanism, shown in Fig. 1b, is redrawn in Figs. 4 and 5 with condition that the loops $ACDB$ and $RFEC$ describe parallelograms. A double joint exists at the joint A. Let $< DBQ = \alpha_1$, $< RAC = \alpha_2$, $< ECD = \beta_1$ and

$$\frac{BD}{BQ} = l_1\,,\quad \frac{AR}{AC} = l_2\,,\quad \frac{CE}{CD} = l_3\,.$$

A coupler point G is located in the plane of the coupler-link RF such that $RG/RF = l_4$ and $< GRF = \beta_2$.

Corresponding to the coupler point G, there are two coupler cognate eight-link mechanisms obtained by locating two additional stationary pivots P_1 and P_2. The cognate construction and the existence of cognate for each of these pivots will be described in different sections.

3.1. Construction to Locate Stationary Pivot P_1 (Fig. 4)

The following cognate construction refers to the eight-link mechanism shown in Fig. 4.

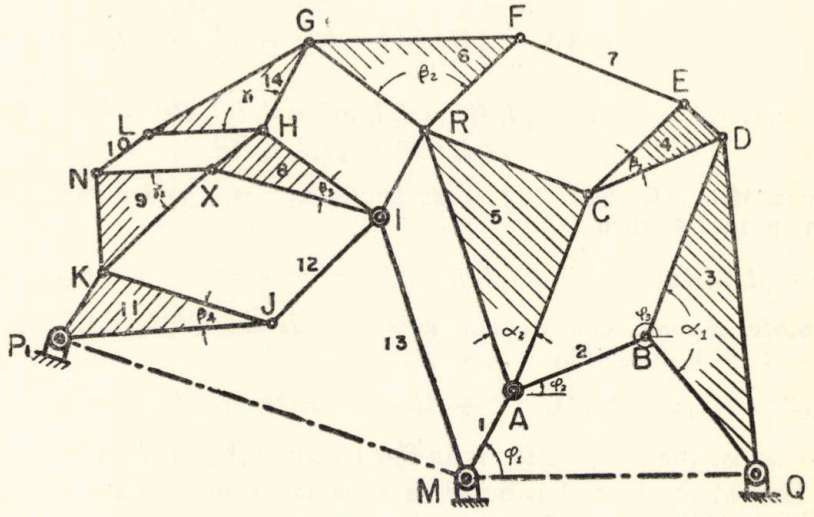


Fig. 4. — Cognate and source eight-link mechanisms with binary and ternary links. (Cognate construction locates stationary pivot P_1 and the source mechanism is described in Fig. 1 b).

1. Select ratios l_5, l_6, l_7, and l_8 such that $l_1 l_2 = l_3 l_4 l_5 l_6 = l_7 l_8$.
2. Select angles β_3, β_4, γ_1, and γ_2 such that $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \gamma_1 + \gamma_2$.
3. Construct parallelograms *RAMI* and *GRIH*.
4. On *GH* construct triangle *LHG* such that $HL/HG = l_7$ and $< GHL = \gamma_1$.
5. On *IH* construct triangle *XIH* such that $IX/IH = l_6$ and $< XIH = \beta_3$.
6. Construct parallelogram *HXNL*.
7. On *XN* construct triangle *KXN* such that $XK/XN = l_8$ and $< KXN = \gamma_2$.
8. Construct parallelogram *KXIJ*.
9. On *JK* construct triangle $P_1 JK$ such that $JP_1/JK = l_8$ and $< P_1 JK = \beta_4$.
10. If revolute pairs are placed at the joints *M*, *I*, (double joint at *I*), *H*, *L*, *N*, *X*, *K*, *J* and P_1, then the eight-link mechanism $MIHLNXKJP_1$ functions as a coupler cognate to the source eight-link mechanism *MAC RGFEDBQ*, both mechanisms have common coupler point *G*. Note that link *IR* is a redundant link.

3.2. Proof for the Existence of Cognate Mechanism with Stationary Pivot P_1

In order to establish the existence of the coupler cognate, it will be shown that the vector $\overline{MP_1}$ is in fixed relationship with fixed vector $\overline{MQ}$. The vector $\overline{MP_1}$ is expresed as $\overline{MP_1} = \overline{MI} + \overline{IJ} + \overline{JP_1}$. But

$$MI = AR = l_2 AC = l_2 BD = l_1 l_2 BQ,$$
$$IJ = XK = l_8 XN = l_8 HL = l_7 l_8 HG = l_7 l_8 IR = l_7 l_8 MA$$

and

$$JP_1 = l_6 JK = l_6 IX = l_5 l_6 IH = l_5 l_6 RG = l_4 l_5 l_6 RF = l_4 l_5 l_6 CE = l_3 l_4 l_5 l_6 CD = l_3 l_4 l_5 l_6 AB.$$

If links *MA*, *AB*, and *BQ* make angles φ_1, φ_2, and φ_3 with *MQ*, as shown in Fig. 4, then

$$\overline{MP_1} = l_7 l_8 MA\, e^{i(\varphi_1+\gamma_1+\gamma_2)} + l_3 l_4 l_5 l_6 AB e^{i(\varphi_2+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4)} + l_1 l_2 BQ e^{i(\varphi_3+\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Since cognate construction satisfies $l_1 l_2 = l_3 l_4 l_5 l_6 = l_7 l_8$ and $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \gamma_1 + \gamma_2$,

$$\overline{MP_1} = l_1 l_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} [MA\, e^{i\varphi_1} + AB\, e^{i\varphi_2} + BQ\, e^{i\varphi_3}] = l_1 l_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} \overline{MQ}.$$

That is, the vector $\overline{MP_1}$ is in fixed relationship with the fixed vector $\overline{MQ}$. That is, the located point P_1 is a stationary pivot and the eight-link mechanism $MIHGLNXKJP_1$, functions as a coupler cognate to the source eight-link mechanism *MARFECDBQ*, both mechanisms have common coupler point *G*.

3.3. Properties of Cognate Mechanism with Stationary Pivot P_1

1. The stationary pivot P_1 lies on a triangle P_1MQ, where $P_1M = l_1 l_2 MQ$ and $< P_1MQ = \alpha_1 + \alpha_2$.

2. Because of conditions $l_1 l_2 = l_3 l_4 l_5 l_6 = l_7 l_8$ and $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \gamma_1 + \gamma_2$ there are infinite number of cognate eight-link mechanisms to the given source eight-link mechanism.

3. If links of cognate and source mechanisms are numbered, as shown in Fig. 4, then following angular velocity relationships hold true:

$$\omega_1 = \omega_{14} = \omega_9 = \omega_{12}, \quad \omega_2 = \omega_4 = \omega_6 = \omega_8 = \omega_{11}, \quad \omega_3 = \omega_5 = \omega_{13}.$$

3.4. Construction to Locate Stationary Pivot P_2 (Fig. 5)

1. Select ratios l_5, l_6, l_7 and l_8 such that $l_1 l_2 l_5 l_6 = l_3 l_4 = l_7 l_8$.

2. Select angles α_3, α_4, γ_1 and γ_2 such that $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2$.

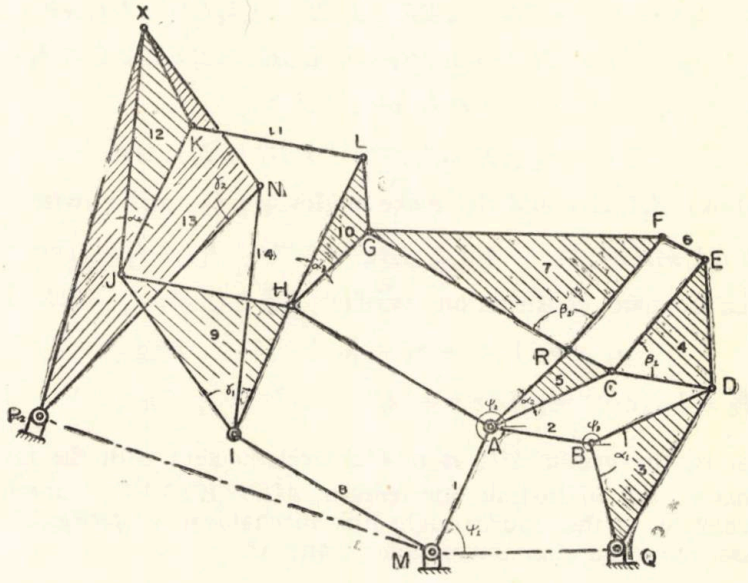


Fig. 5. — Cognate and source eight-link mechanisms with binary and ternary links. (Cognate construction locates stationary pivot P_2 and the source mechanism is described in Fig. 1 b).

3. Construct parallelograms *GRAH* and *HAMI*.
4. On *HG* construct triangle *LHG* such that $HL/HG = l_5$ and $< GHL = \alpha_3$.
5. On *IH* construct triangle $\mathcal{J}HI$ such that $I\mathcal{J}/IH = l_7$ and $< \mathcal{J}IH = \gamma_1$.
6. Construct parallelogram $\mathcal{J}HLK$.

7. On $\mathcal{J}K$ construct triangle $X\mathcal{J}K$ such that $\mathcal{J}X/\mathcal{J}K = l_6$ and $< X\mathcal{J}K = \alpha_4$.

8. Construct parallelogram $X\mathcal{J}IN$.

9. On XN construct triangle P_2NX such that $NP_2/NX = l_8$ and $< P_2NX = \gamma_2$.

10. If revolute pairs are placed at joints M, I, (double joints at I), H, L, K, $\mathcal{J}$, X, N, and P_2, then the eight-link mechanism $MIHLK\mathcal{J}XNP_2$ functions as a coupler cognate to the source eight-link mechanism $MARFECDBQ$, both mechanisms have common coupler point G. Note that the link AH is a redundant link.

3.5. Proof for the Existence of Cognate Mechanism with Stationary Pivot P_2

In order to establish the existence of the coupler cognate, it is necessary to show that the vector $\overline{MP_2}$ is in fixed relationship to the fixed vector $\overline{MQ}$. The vector $\overline{MP_2}$ is expressed as $\overline{MP_2} = \overline{MI} + \overline{IN} + \overline{NP_2}$. But

$$MI = AH = RG = l_4 RF = l_4 CE = l_3 l_4 CD = l_3 l_4 AB,$$

$$IN = \mathcal{J}X = l_6 \mathcal{J}K = l_6 HL = l_5 l_6 HG = l_5 l_6 AR = l_2 l_5 l_6 AC = l_2 l_5 l_6 BD = l_1 l_2 l_5 l_6 BQ$$

and

$$NP_2 = l_8 NX = l_8 I\mathcal{J} = l_7 l_8 IH = l_7 l_8 MA.$$

If links MA, AB, and BQ make angles φ_1, φ_2, and φ_3 with MQ, then

$$\overline{MP_2} = l_7 l_8 MA\, e^{i(\varphi_1+\gamma_1+\gamma_2)} + l_3 l_4 AB\, e^{i(\varphi_2+\beta_1+\beta_2)} + l_1 l_2 l_5 l_6 BQ\, e^{i(\varphi_3+\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)}.$$

Since cognate construction satisfies $l_1 l_2 l_5 l_6 = l_3 l_4 = l_7 l_8$ and

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2,$$

$$\overline{MP_2} = l_3 l_4 e^{i(\beta_1+\beta_2)} [MA\, e^{i\varphi_1} + AB\, e^{i\varphi_2} + BQ e^{i\varphi_3}] = l_3 l_4 e^{i(\beta_1+\beta_2)} \overline{MQ}.$$

That is, the vector $\overline{MP_2}$ is in fixed relationship with the fixed vector $\overline{MQ}$. That is, the eight-link mechanism $MIHLK\mathcal{J}XNP_2$ functions as a coupler cognate to the source eight-link mechanism $MARFECDBQ$, both mechanisms have the common coupler point G.

3.6. Properties of Cognate Mechanisms with Stationary Pivot P_2

1. The stationary pivot P_2 lies on a triangle P_2MQ where $P_2M = l_3 l_4 MQ$ and $< P_2MQ = \beta_1 + \beta_2$.

2. Because of conditions $l_1 l_2 l_5 l_6 = l_3 l_4 = l_7 l_8$ and $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2$ there are infinite number of cognate eight-link mechanisms to a source eight-link mechanism.

3. If links are numbered, as shown in Fig. 5, then following angular velocity relationships hold true:

$$\omega_1 = \omega_9 = \omega_{11} = \omega_{13}, \quad \omega_2 = \omega_4 = \omega_7 = \omega_8, \quad \omega_3 = \omega_5 = \omega_{10} = \omega_{12} = \omega_{14}.$$

4. Conclusion

Using the principle of stretch rotation, the existence of the coupler cognates of eight-link mechanisms with ternary links and double-joint is established for the special case of eight-link mechanism. The special case is described by parellelogram of two of the three loops of the eight-link mechanisms..

It is shown that there are two additional stationary pivots. Each of these stationary pivots yields an infinite number of cognate mechanisms. It is observed that these stationary pivots do not necessarily lie on a triangle similar to coupler triangle.

It should be noted that coupler cognates are investigated for coupler points selected in one of the three coupler links. The present approach of stretch rotation however, can be extended to propose the existence of the cognate mechanisms corresponding to these other coupler-links.

The importance of this investigation lies in establishing the existence of two stationary pivots. The results of planar four bar cognates, however exhibit the existence of only one stationary pivot for a given coupler.

Received the 15 IV 1969

Oklahoma State University, USA

REFERENCES

1. Roth B., *On the Multiple Generation of Coupler Curves.* J. of Eng. for Industry, Trans. ASME, Series **B**, No. *3,* May 1965, pp. 177–183.
2. Soni A. H., Harrisberger L., *Roberts' Cognates of Space Four-Bar Mechanisms with Two General Constraints.* 10-th ASME Mechanism Conference, paper no. 68-MECH-22. (In print in Trans. of ASME, J. of Eng. for Industry).
3. Soni A. H., Pamidi P. R., *Roberts' Cognates of Space Five-Bar Mechanism with Two General Constraints.* (In print in Industrie Anzeiger).
4. Soni A. H., *Coupler Cognates of Watt's Six-Link Mechanism with Double Joints.* National Applied Mechanics Conference, Bucarest, June 1969.
5. — *Coupler Cognates of Watt's Six-Link Mechanism.* (Submitted for publication consideration in J. of Mechanism).
6. — *Coupler Cognates of Eight-Link Mechanisms with Ternary and Quarternary Links.* J. of Inst. of Mech. Eng., 1969.
7. Hall A. S., *Kinematics and Linkage Design.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961, pp. 35–36 and 49–51.
8. Cayley A., *On Three-Bar Motion.* Proc. of London Math. Soc., 1876, **7**, pp. 136–166.
9. Hartenberg R. S., Denavit J., *Cognate Linkages.* Machine Design, 1959, April 15, pp. 149–152.
10. Roberts S., *On Three-Bar Motion in Plane Space.* Proc. of the London Math. Soc., 1875, **7**, pp. 14–23.

11. Chebychev P. L., *Les plus simples systèms de tiges articulées.* 1878 (Oeuvres de P. L. Tchebychef, publiées par les soins de MM. A. Markoff et N. Sonin), St. Pétersburg, Tomez, 1907, pp. 273–282.

PERECHI DE MECANISME ÎNRUDITE CU MECANISMELE CU OPT ELEMENTE AVÎND ORGANE TERNARE ŞI ARTICULAŢII DUBLE

(Rezumat)

Autorul, continuîndu-şi seria de studii anterioare proprii [2]...[6], cel mai recent fiind prezentat la Conferinţa Naţională de Mecanică Aplicată din Bucureşti, iunie 1969, şi folosind rezultatele lui B. Roth [1], demonstrează existenţa perechilor de mecanisme octalatere cu elemente ternare şi articulaţii duble (fig. 1).

Explicaţia figurilor

Fig. 1 a şi 1 b. — Mecanism cu opt elemente avînd elemente binare şi ternare. Articulaţia dublă se află în *A*.

Fig. 2...5. — Mecanismul cu opt elemente şi înruditul său cu elemente binare şi ternare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 532,032

RECHERCHE D'UNE LOI DE COMPORTEMENT D'UN MATÉRIAU VISCOÉLASTIQUE

PAR

MICHEL LUCIUS

1. Introduction

Le problème envisagé est la détermination d'une loi de comportement qui traduit certaines des caractéristiques essentielles d'un fluïde viscoélastique, l'arochlore, dont le comportement rhéologique est analogue à celui du verre fondu.

Un tel fluïde présente des différences fondamentales par rapport aux fluïdes newtoniens: existence de temps de relaxation des contraintes et des taux de déformation, apparition de contraintes normales, variation de la viscosité apparente en fonction du gradient de vitesse. Certaines de ces particularités sont mises en évidence dans deux modèles simples d'écoulement: écoulement de Couette (entre cylindres coaxiaux) et dispositif plan-cône.

L'étude expérimentale de ces deux mouvements et les calculs théoriques conduisent à relier les phénomènes de relaxation de contraintes et les variations de viscosité apparente au second invariant du tenseur des taux de déformation.

Notations : τ_{ij}, tenseur des contraintes; $\dot{e}_{ij}$, tenseur des taux de déformation; ω_{ij}, tenseur des rotations; p, pression statique au sein du fluïde; ρ, masse volumique; g, accélération de la pesanteur; I_1, Y_1, I_2, Y_2 $(\alpha_n r)$ fonctions de Bessel de 1-ère et 2-ème espèce d'ordre *1* et *2*; α_n, racines de l'équation $Y_1(\alpha_n R_2) I_1(\alpha_n R_1) - Y_1(\alpha_n R_1) I_1'(\alpha_n R_2)$.

Si la plupart des fluïdes usuels satisfont aux équations de Navier-Stockes

$$\tau_{ij} = 2\mu \dot{e}_{ij} + 3\lambda \dot{e}_{kk}, \tag{1}$$

la grande variété des hauts polymères que l'on rencontre actuellement a un comportement que n'explique pas l'équation (1). En effet le caractère dissymétrique de leurs molécules confère au milieu fluïde en mouvement des propriétés anisotropes et créent ainsi des phénomènes de relaxation de contraintes, de diminution de viscosité apparente en fonction du gradient de vitesse etc.

De très nombreuses recherches se poursuivent actuellement afin de formuler une généralisation de l'équation (1); nous citerons en particulier les travaux de W. Noll [1], J. G. Oldroyd [2], A. J. de Vries [3] et R. S. Rivlin [4].

Dans cette étude nous avons proposé l'équation générale

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\mu\left(\dot{e}_{ij} + \lambda_2 \frac{D\dot{e}_{ij}}{Dt}\right), \tag{2}$$

où

$$\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = \frac{d\tau_{ij}}{dt} + \tau_{ik}\,\omega_{jk} + \omega_{im}\,\tau_{mj}\,.$$

Cette dérivée, appelée dérivée matérielle, généralise la notion de dérivée particulaire pour un repère en mouvement quelconque. Nous supposerons que les trois paramètres λ_1, λ_2 et μ sont des fonctions du second invariant du tenseur des taux de déformation π_2.

La résolution complète du système (2) est extrêmement délicate et dans un premier temps nous ne nous sommes préoccupés que de l'évolution des contraintes tangentielles (τ_{12} pour le mouvement de Couette, τ_{13} et τ_{23} pour le mouvement plan-cône). L'équation qui régit leurs variations au cours du temps, déduite de (2) s'écrit

$$\lambda_0\,\tau_{12} + \lambda_1 \frac{d\tau_{12}}{dt} = 2\mu_0\left(\dot{e}_{12} + \lambda_2 \frac{d\dot{e}_{12}}{dt}\right), \tag{2'}$$

où λ_0, μ_0 sont des fonctions inconnues de (ω_{ij}), $(\dot{e}_{ij})$ et λ_1, λ_2 fonctions de π_2

2. Analyse du mouvement de Couette

Le fluïde remplit l'espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux infiniment longs de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$).

Le mouvement est de révolution autour de Ox^3 et l'emploi des coordonnées cylindriques conduit à résoudre les équations du mouvement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tau_{11}}{\partial r} + \dfrac{\tau_{11} - \tau_{22}}{r} = \dfrac{\partial p}{\partial r} - \rho\dfrac{V^2}{r}, \\ \dfrac{\partial\tau_{12}}{\partial r} + \dfrac{2}{r}\tau_{12} = \rho\dfrac{dV}{dt}\ ^{1)}, \\ \dfrac{\partial\tau_{13}}{\partial x^3} = \dfrac{\partial p}{\partial x^3} + \rho g, \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter l'équation de compor-

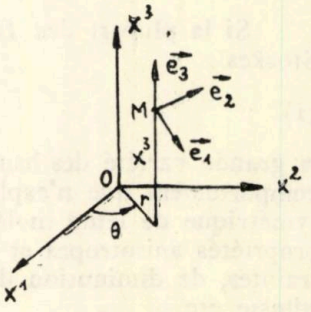


Fig. 1

1) V est le vitesse circonférentielle.

tement

$$\tau_{12} + a\frac{d\tau_{12}}{dt} = b\left(\dot{e}_{12} + c\frac{d\dot{e}_{12}}{dt}\right), \quad \text{où} \quad a = \frac{\lambda_1}{\lambda_0},\ b = \frac{2\mu_0}{\lambda_0},\ c = \lambda_2, \tag{3}$$

le repère cylindrique $(\mathbf{e}_i)_{i=1,2,3}$ étant animé d'un mouvement de rotation autour de Ox^3, les dérivées particulaires s'identifient aux dérivées partielles par rapport au temps. De plus, le tenseur des taux de déformation n'a, dans ce système de référence, qu'une composante non nulle

$$\dot{e}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\right).$$

Pour déterminer les contraintes tangentielles $\tau_{12}(r,t)$ ainsi que la vitesse $V(r,t)$ il faut donc résoudre

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial r} + \dfrac{2}{r}\tau_{12}, \\ b\left[\dfrac{\partial V}{\partial r} - \dfrac{V}{r} + c\,\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial V}{\partial r} - \dfrac{V}{r}\right)\right] = \tau_{12} + a\dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial t}, \end{cases} \tag{4}$$

avec pour conditions initiales $\tau_{12}(r,0) = V(r,0) = 0$ et pour conditions aux limites $V(R_1,t) = V_0$, $V(R_2,t) = 0$.

2.1. Cas des coefficients constants

La résolution du système (4) par la transformation de Carson-Laplace conduit à

$$V(r,t) = V_0\frac{R_1}{r}\left(\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2}\right) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+c\lambda_n)(1+a\lambda_n)}{ac\lambda_n^2 + 2a\lambda_n + 1} \times$$

$$\times\left\{\frac{I_1(\alpha_n R_1)\,I_1(\alpha_n R_2)}{I_1^2(\alpha_n R_2) - I_1^2(\alpha_n R_1)}\left[Y_1(\alpha_n R_2)I_1(\alpha_n r) - Y_1(\alpha_n r)I_1(\alpha_n R_2)\right]\right\}e^{\lambda_n t},$$

$$\tau_{12}(r,t) = -2V_0 b\left\{\frac{R_1R_2^2}{r^2(R_2^2 - R_1^2)}\left[1 - \left(1 - \frac{c}{a}\right)e^{-\frac{t}{a}}\right] + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha_n(1+c\lambda_n)^2}{ac\lambda_n^2 + 2a\lambda_n + 1} \times\right.$$

$$\left.\times\left\{\frac{I_1(\alpha_n R_1)\,I_1(\alpha_n R_2)}{I_1^2(\alpha_n R_2) - I_1^2(\alpha_n R_1)}\left[Y_1(\alpha_n R_2)\,I_2(\alpha_n t) - Y_2(\alpha_n t)\,I_1(\alpha_n R_2)\right]\right\}\right\}e^{\lambda_n t}.$$

Cette solution se simplifie considérablement lorsque t est supérieur à 10 s car la règle d'Abel permet de majorer les deux séries qui apparaissent dans la solution ; on démontre ainsi que leurs contributions sont dix mille fois plus faibles que celles dûes aux deux termes

$$(5)\qquad \begin{cases} V(r,t) = V_0 \dfrac{R_1}{r}\left(\dfrac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2}\right), \\ \tau_{12}(r,t) = -2V_0 b \left\{\dfrac{R_1 R_2^2}{r^2(R_2^2 - R_1^2)}\left[1 - \left(1 - \dfrac{c}{a}\right)e^{-\frac{t}{a}}\right]\right\}. \end{cases}$$

Ce résultat est extrêmement important car il signifie que *pour certains fluïdes viscoélastiques le milieu peut se trouver en régime cinématique établi sans toutefois être en équilibre dynamique.* Ce phénomène se trouve d'ailleurs confirmé par l'expérience.

2.2. Cas des coefficients variables au cours du temps

Pour résoudre le système (4) il faut alors distinguer entre la phase qui correspond au régime d'établissement des vitesses, de durée très limitée ($t < 10$ s) et celle du régime d'établissement des tensions qui peut durer plusieurs heures et dont la solution est donnée par (5).

2.3. Résultats expérimentaux

Nous avons utilisé pour nos expériences un haut polymère, l'arochlore, dont le comportement rhéologique est analogue à celui du verre fondu. Les fig. 2, 3 et 4 représentent les variations, en fonction du temps, du

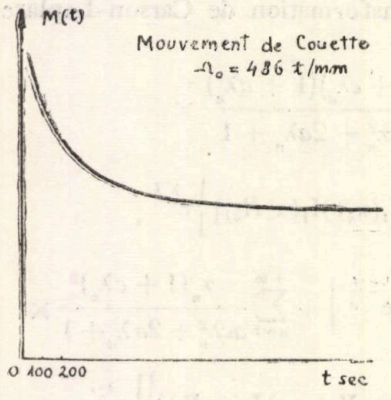


Fig. 2

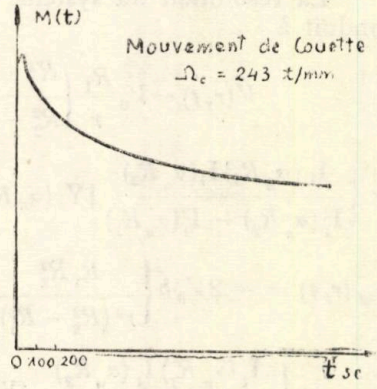


Fig. 3

couple résistant sur une hauteur h du cylindre intérieur, dû aux contraintes tangentielles. La durée du régime d'établissement des vitesses est effectivement très réduite (elle correspond au temps d'établissement du couple $M(t)$ à sa valeur maximale).

2.4. Détermination des coefficients a, b, c

Les formules (5) permettent d'obtenir une expression analytique du couple résistant et s'il y a accord entre la théorie et l'expérience la quantité

$$I = \sum_{i=1}^{n} [\tau_{12}(R_1, t_i) - \tau^*_{12}(R_1, t_i)]^2$$

est rendue minimale, c'est-à-dire que $\partial I/\partial a = \partial I/\partial b = \partial I/\partial c = 0$; la résolution numérique de ce système, proposée par J. Legras [5] permet de déterminer les coefficients a, b, c.

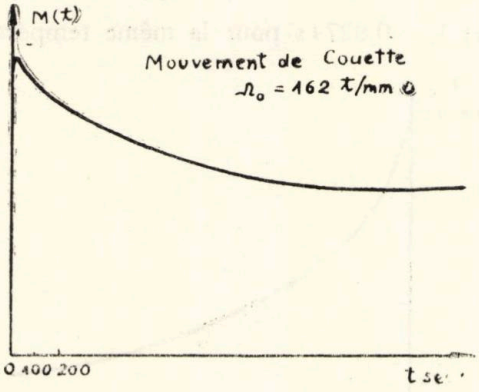


Fig. 4

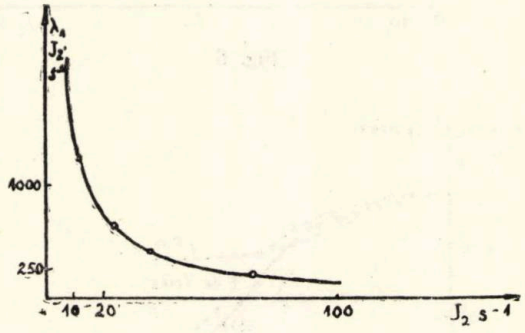


Fig. 5

2.5. Variation des coefficients a, b, c en fonction de π_2

La formule $[M(\infty) - M(0)]/e = M(\infty) - M(a)$, déduite de (5), exprime que a caractérise le temps de relaxation des contraintes. Les variations de a en fonction de $\mathcal{J}_2 = (-\pi_2)^{1/2}$ sont portées sur la fig. 5; les différentes valeurs obtenues obéissent à la loi de variation

(6) $$a = \frac{\lambda_1}{\mathcal{J}_2},$$

où λ_1 est une constante indépendante des conditions aux limites. Pour l'arochlore porté à 90° C, $\lambda_1 = 15\,300\ s^{-2}$. b représente la viscosité limite, c'est-à-dire la limite du rapport $\tau_{12}/\dot{e}_{12}$ lorsque tous les phénomènes dépendant du temps ont disparu; les variations en fonction de $\mathcal{J}_2$ sont portées sur la fig. 6 et semblent obéir à la loi

(7) $$b = \frac{2h_0}{1 + \lambda_2 \mathcal{J}_2},$$

où $2h_0 = 142{,}8$ p et $\lambda_2 = 0{,}0274$ s pour la même température.

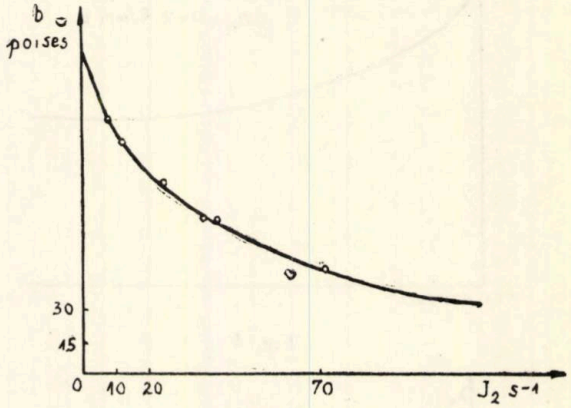


Fig. 6

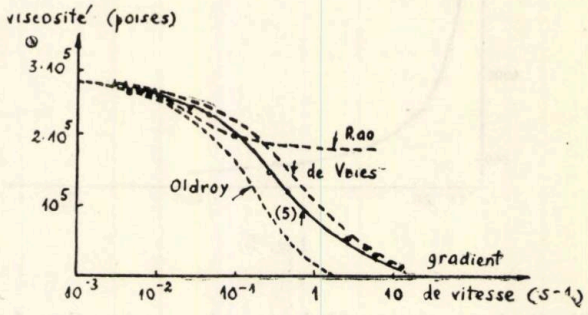


Fig. 7

La formule (7) s'applique à d'autres fluïdes comme le montre la fig. 7 qui représente les variations, avec la vitesse d'écoulement, de la viscosité limite d'un échantillon de polystyrène à 200°. Sur cette même figure

sont portées les courbes théoriques d'après Pao[6], Oldroyd et de Vries-Tochon [7] (basés sur la théorie d'Eyring (8)).

Le coefficient c, temps de relaxation des taux de déformation obéit à une loi de variation analogue à a mais ne présente que peu d'intérêt.

3. Analyse du mouvement plan-cône

Le fluïde est placé entre un plan horizontal fixe et un cône d'ouverture θ_0 qui tourne autour de son axe vertical et dont le sommet repose sur le plan.

Les coordonnées utilisées dans ce type d'écoulement sont les coordonnées sphériques (fig. 8).

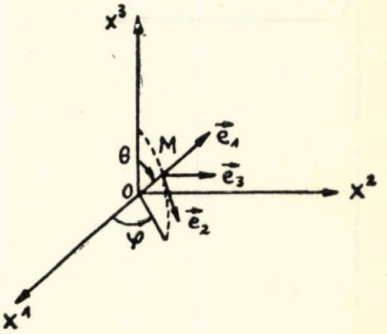


Fig. 8

3.1. Cas des coefficients constants

Les équations de comportement

$$(8)\quad \begin{cases} \tau_{13} + a\dfrac{\partial \tau_{13}}{\partial t} = b\left(\dot{e}_{13} + c\dfrac{\partial \dot{e}_{13}}{\partial t}\right), \\ \tau_{23} + a\dfrac{\partial \tau_{23}}{\partial t} = b\left(\dot{e}_{23} + c\dfrac{\partial \dot{e}_{23}}{\partial t}\right), \end{cases}$$

jointes à l'équation du mouvement

$$(9)\quad \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta\, \tau_{13}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin\theta\, \tau_{23})\right] + \frac{\tau_{13}}{r} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{r}\tau_{23} = \rho\frac{\partial U}{\partial t^3}$$

permettent de déterminer les champs des vitesses et des contraintes tangentielles pour ce type de mouvement.

Les conditions initiales sont ici $\tau_{13}(r,\theta,0) = \tau_{23}(r,\theta,0) = U_3(r,\theta,0) = 0$ et les conditions aux limites $U_3(r,\pi/2,t) = 0$, $U_3(r,\theta_0,t) = r\Omega_0 \sin\theta_0$. La résolution de ces équations faite à l'aide de la transformation de Carson-Laplace, conduit à l'expression de $U_3(r,\theta,t)$.

Une majoration analogue à celle effectuée pour le mouvement entre cylindres coaxiaux permet d'écrire pour $t > 2$ s

$$(10)\quad \begin{cases} U_3'(r,\theta) = r\Omega_0 \sin\theta_0 \dfrac{\operatorname{Log}\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\sin\theta - \operatorname{cotg}\theta}{\operatorname{Log}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_0}{2}\sin\theta_0 - \operatorname{cotg}\theta_0}, \\ \tau_{23}(r,\theta,t) = \dfrac{b\Omega_0 \sin\theta_0}{\sin^2\theta\left[\operatorname{Log}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_0}{2}\sin\theta_0 - \operatorname{cotg}\theta_0\right]}\left[1 - \left(1 - \dfrac{c}{a}\right)e^{-\frac{t}{a}}\right], \\ \tau_{13}(r,\theta,t) = 0. \end{cases}$$

3.2. Cas des coefficients variables au cours du temps

Comme pour le mouvement de Couette, la résolution de (8) et (9) doit se faire en distinguant le cas où $t \leqslant 2$ s, régime durant lequel le champ des vitesses s'établit et le cas où $t > 2$ s qui conduit à des résultats identiques à (10).

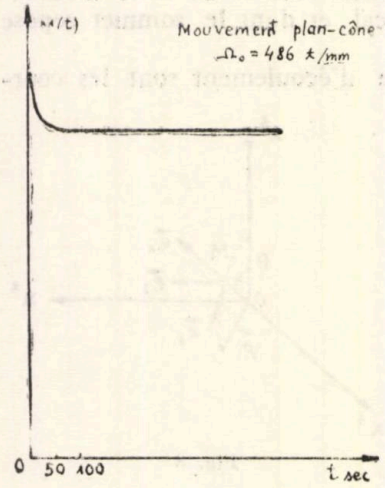


Fig. 9

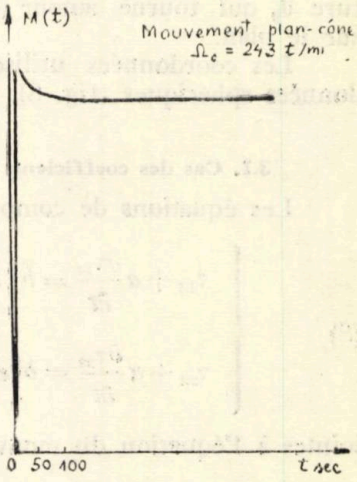


Fig. 10

Le mode de détermination des coefficients est analogue à celui exposé précédemment; les fig. 9 et 10 représentent les variations, en fonction du temps, du couple résultat sur le cône dû aux contraintes tangentielles qui naissent au sein de l'arochlore porté à 90°.

4. Comparaison des résultats obtenus dans les deux types d'écoulement

4.1. Temps de relaxation des contraintes

Nous avons porté sur la fig. 11 les valeurs de Log a en fonction de. Log $\mathcal{J}_2$ pour les deux séries d'expériences, la droite de pente -1 sur laquelle s'alignent les points montre que le produit $a\mathcal{J}_2$ reste constant, cette constante ayant la même valeur dans les deux types d'écoulement.

Il apparait donc que *la formule (6) a une valeur intrinsèque*, du moins dans les deux types d'écoulement considérés.

4.2. Viscosité limite

Le dispositif plan-cône confirme la loi de variation de viscosité limite (7) dans la plage de variation de $\mathcal{J}_2$ commune aux deux séries d'expériences. Lorsque $\mathcal{J}_2$ prend des valeurs supérieures les résultats obtenus avec le dispositif plan-cône font apparaître un palier pour la courbe $b = f(\mathcal{J}_2)$ (fig. 12) qui correspond à une viscosité de l'ordre de 30 poises, ce qui traduirait l'arrangement optimum des molécules d'arochlore dans le sens de l'écoulement.

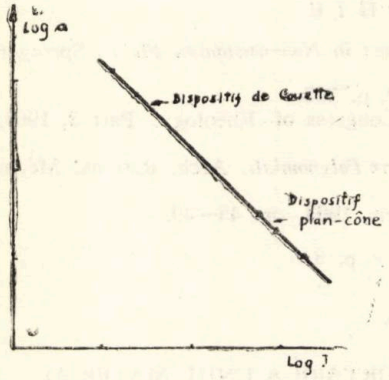


Fig. 11

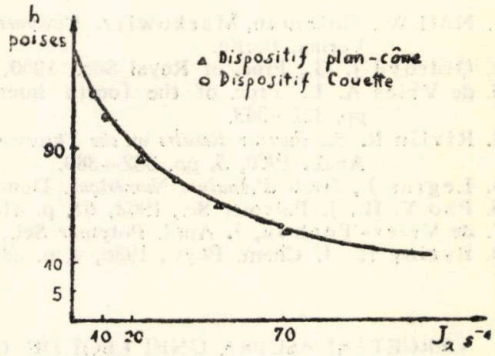


Fig. 12

Pour $\mathcal{J}_2 > 700\,s^{-1}$ la diminution de b constatée expérimentalement s'explique par la dissipation d'énergie provoquée par frottement visqueux.

5. Conclusions

1. L'équation de comportement choisie, represénte bien, moyennant un ajustement des coefficients, l'évolution des contraintes tangentielles au sein du matériau.

Cet ajustement permet de déterminer un ensemble de lois de variation semi-empiriques des coefficients, valable dans les deux types de mouvement. De plus, l'évolution de la viscosité limite b, en fonction du second invariant du tenseur des taux de déformation est en accord avec les résultats expérimentaux de de Vriès qui concernent d'autres matériaux tels que le polystyrène et le polyéthylène.

2. La détermination des paramètres caractéristiques de l'écoulement a permis par la suite: a) de prévoir le comportement du matériau au repos; b) d'étudier le caractère rhéopectique de l'arochlore sous certaines conditions d'utilisation.

Ces résultats sont d'autant plus intéressants que l'expérience n'a servi qu'à confirmer les calculs théoriques.

3. L'étude du mouvement plan-cône confirme que c'est à $\mathcal{J}_2$ qu'il faut rapporter les variations des coefficients.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur J. Legras, Directeur de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique, ainsi qu'à Monsieur J. Gosse, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique, qui m'ont prodigué d'utiles conseils.

Reçue le 5 X 1968

Université de Nancy, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Noll W., Coleman, Markowitz, *Viscometric Flows in Non-newtonian Fluids*. Springer Verlag, Berlin.
2. Oldroyd J. G., Proc. of Royal Soc., 1950, **A 200**, p. 523.
3. de Vries A. J., Proc. of the fourth internat. Congress of Rheology. Part *3*, 1963, pp. 321—343.
4. Rivlin R. S., *Further Results on the Theory of Matrix Polynomials*. Arch. Rational Mech. Anal., 1960, *5*, pp. 382—389.
5. Legras J., *Précis d'Analyse Numérique*. Dunod, Paris, 1963, pp. 45—49.
6. Pao Y. H., J. Polymer Sc., 1962, *61*, p. 413.
7. de Vries-Tochon, J. Appl. Polymer Sci., 1963, *7*, p. 315.
8. Eyring H., J. Chem. Phys., 1936, *4*, p. 283.

CERCETĂRI ASUPRA UNEI LEGI DE COMPORTARE A UNUI MATERIAL VÎSCOELASTIC

(Rezumat)

Autorul, plecînd de la rezultatele stabilite în teza sa de doctorat, determină o lege de comportare care traduce unele catacteristici esenţiale ale unui fluid vîscoelastic, aroclorul, a cărui comportare reologică este analogă aceleia a sticlei topite.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 532.51

ON THE PLANE FLOW THROUGH INHOMOGENEOUS POROUS MEDIA OF THE SECOND TYPE

BY

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ

1. The plane steady liniar flow of fluids in isotropic inhomogeneous porous media of the second type is studied in several papers. From the mathematical point of view the problem is to determine functions of complex variables when certain junction conditions are to be satisfied on the common frontier of two domains having different filtration coefficients. Denoting by

$$k(M) = k_j\ (= \text{const.}), \quad M \in D_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

the filtration coefficients of the media from the domain D_j ($D_c \cap D_e = \varnothing$, $c \neq e$; $c, e = 1, 2, \ldots, n$; $\bigcup_1^n D_i = D$) and by $f(z) = \varphi_j(x, y) + i\psi_j(x, y)$, where $z = x + iy$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), the complex potentials of flow on the common frontier C_{js} of the domains D_j and D_s the following conditions must be satisfied :

$$\mathcal{R}e\{k_s f_j - k_j f_s\} = 0, \quad \mathcal{I}m\{f_j - f_s\} = 0, \quad (j \neq s;\ j, s = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Here we shall point out how the solution of some problems for inhomogeneous media of the second type having a special structure can be obtained by means of the semi-inverse method proposed in [1] and developed in several papers (e. g. [2]), and with the help of an extension of the circle theorem [3]. The method can be applied also to similar problems of mathematical physics, for instance to problems of heat conduction or electromagnetic theory.

2. We shall suppose that the frontiers arising in the problem have a common axis of symmetry, which will be taken as the real axis of the plane $z = x + iy$. The frontiers are C_1^*, $C_2^*, \ldots, C_p^*$, which delimit imper-

vious domains and C, which separates the domain D_1 filled by the porous medium having filtration coefficient k_1 from the domain where the same coefficient is k_2; the points of C_j^* on the real axis will be denoted by A_j and B_j, D_1 contains the point at infinity, D_2 has all the points at finite distance, but C can have the ends E and F on the real axis, or only one end on this axis and, at last, no end on the real axis; then for instance, the ends towards the negative abscissas which are on a curve C_j^* will be denoted by E_j' and E_j'', where $y_{E_j'} > 0$ but $y_{E_j''} = -y_{E_j'}$. Besides the geometrical symmetry, we shall assume also a mechanical symmetry with respect to the same axis, the singularities of the flow being situated in symmetrical points with respect to the real axis, but $w(z) = \overline{w}(\overline{z})$ (w is the complex velocity); let N_1, N_2,..., N_{2m} be the points in which are situated flow singularities. In these conditions we can consider only the medium over the real axis and the singularities N_1, N_2,..., N_m in the uper half-plane.

Now we apply the semi-inverse method, trying by succesive conformal mappings to represent the porous medium above the real axis from the physical plane, on the upper half-plane of the variable $t = t_1 + it_2$, but to C to correspond the half-circle $|t| = R$, $t_2 > 0$. By a first conformal mapping

$$z = H_1(z_1) \tag{3}$$

in the plane of the variable $z_1 = x_1 + iy_1$ to $C_j^{*'}$, the part of C_j^* placed over the real axis will correspond a curve $A_{j1} C_{j1}^{*'} B_{j1}$ placed in the half-plane $y_1 > 0$. Further we map conformally the domain delimited by the radii $-\infty A_{11}$, $B_{p1}\infty$, the segments of the real axis $B_{11} A_{21}$, $B_{21} A_{31}$,..., $B_{p-1,1} A_{p1}$ and the arcs $A_{11} C_1^{*'} B_{11}$, $A_{21} C_2^{*'} B_{21}$,..., $A_{p1} C_{p1}^{*'} B_{p1}$ on the upper half-plane of the variable $z_2 = x_1 + iy_2$ by the function

$$z_1 = H_2(z_2), \tag{4}$$

and so on. By the function

$$t = H_n(z_n) \tag{5}$$

in the plane t to the frontiers C_1^*, C_2^*,..., C_n^* will correspond segments of the real axis but to C it will correspond the pointed out half-circle. Then we can apply a theorem proved by Caius Iacob and we have, denoting by F_1 and F_2 the analytic functions defined in the whole plane, the first having singularities in $D_1(|t| > R)$ but the second in $D_2(|t| < R)$ and by f_1 and f_2 the complex potential in the two domains:

$$\begin{cases} f_1(t) = F_1(t) + \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \overline{F_1\left(\dfrac{\overline{R^2}}{\overline{t}}\right)} + \dfrac{2k_1}{k_1 + k_2} F_2(t), & t \in D_1 + C, \\ f_2(t) = F_2(t) - \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \overline{F_2\left(\dfrac{\overline{R^2}}{\overline{t}}\right)} + \dfrac{2k_2}{k_1 + k_2} F_1(t), & t \in D_2 + C. \end{cases} \tag{6}$$

If we can find t in terms of z from (3)...(5), therefore

$$t = H(z), \tag{7}$$

then from (6) we obtain the complex potentials in the physical plane:

$$\begin{cases} f_1 = F_1[H(z)] + \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\overline{F_1\left(\dfrac{R^2}{H(z)}\right)} + \dfrac{2k_1}{k_1 + k_2} F_2[H(z)], & z \in D_1 + C, \\ f_2 = F_2[H(z)] - \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\overline{F_2\left(\dfrac{R^2}{H(z)}\right)} + \dfrac{2k_2}{k_1 + k_2} F_1[H(z)], & z \in D_2 + C. \end{cases} \tag{8}$$

If (7) cannot be obtained, then (3)...(6) give the parametric solution of the problem.

In the following we give several examples. In [4] it was considered a particular example when C has an end on the real axis but the other one in the end of a rectiliniar cut which normal to that axis.

3. First, let an impervious domain be delimited by the circle $C^*(|z| = a)$, but by the conformal reppresentation of C^* on the cut $z_1 = x_1$, $-a < x_1 < a$, in the plane z_1, the frontier C becomes the circle $|z_1| = a$. In the physical plane C will be represented by the parametric equations

$$\begin{cases} x = a[\cos\theta + 2^{-1/2}(2\sin\theta + \cos 2\theta - 1)^{1/2}], \\ y = a[\sin\theta + 2^{-1/2}(2\sin\theta - \cos 2\theta + 1)^{1/2}], \end{cases} \tag{9}$$

n the first quadrant, when $\theta \in [0, \pi/2]$. When at great distances there is a uniform stream, i. e. $\lim_{z\to\infty} w = V_0$, applying (8) we will have

$$\begin{cases} f_1 = V_0[z + a^2 z^{-1} + (k_1 - k_2)(k_1 + k_2)^{-1} z a^2 (z^2 + a^2)^{-1}], \\ f_2 = 2k_2 V_0 (z + a^2 z^{-1})(k_1 + k_2)^{-1}, \end{cases} \tag{10}$$

therefore the complex velocities will be

$$\begin{cases} w_1 = V_0[1 - a^2 z^{-2} + (k_1 - k_2)(k_1 + k_2)^{-1}(a^2 - z^2)(a^2 + z^2)^{-2}], \\ w_2 = 2k_2 V_0 (1 - a^2 z^{-2})(k_1 + k_2)^{-1}. \end{cases} \tag{11}$$

From (10) the velocity potentials and the stream currents can be easily derived.

The velocity of the fluid particles which are moving along the real axis is, from (11),

$$u_1 = V_0[1 - a^2 x^{-2} + (k_1 - k_2)(k_1 + k_2)^{-1}(a^2 - x^2)(a^2 + x^2)^{-2}] = u_{10} + u_{1^*},$$

where u_{10} is the velocity when the onhomogeneity is missing, but u_{1^*} is the correction which must be added to u_{10} in order to have the real velocity. First, let us suppose that $k_2 < k_1$, therefore the medium in contact

with the impervious inclusion presents a greater resistance to the flow with respect to the other porous medium. Then, as $|x| > a$, it follows that $u_1 < u_{10}$, and vice vesa, if $k_2 > k_1$, then $u_1 > u_{10}$, as it was to be expected.

On the axis Oy the velocity of the particles is

$$\begin{cases} u_1 = V_0[1 + a^2 y^{-2} + (k_1 - k_2)(k_1 + k_2)^{-1}(a^2 + y^2)(a^2 - y^2)^{-2}], & y > a(1 + \sqrt{2}), \\ u_2 = 2k_2 V_0 (1 + a^2 y^{-2})(k_1 + k_2)^{-1}, & a < y < a(1 + \sqrt{2}). \end{cases}$$

For w_1 then we can make a discussion similar to the previous one, but w_2 can be written in the form

$$u_2 = 2(1 + k_1 k_2^{-1}) u_{20} = K u_{20}, \tag{12}$$

and as k_2 is $>$ or $<$ k_1, we have $u_2 >$ or $< u_{20}$, results which are easily justified. Evidently that u_1 in general can be put in the same form.

The curve C is plotted in Fig. 1.

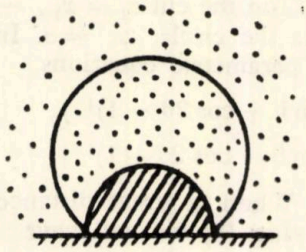


Fig. 1

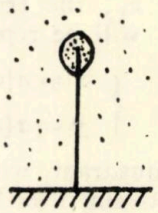


Fig. 2

4. The second example is relative to the case when the both ends of C are on C^*, represented in the physical plane by a cut $x = 0$, $0 < y < b$. Using the transformation

$$z_1 = (z^2 + b^2)^{1/2}, \quad z = (z_1^2 - b^2)^{1/2}, \tag{13}$$

the real axis and the cut are represented in the plane z_1 on the real axis. In the plane z_1 let C be represented by the half-circle $|z_1| = a\,(< b)$, so that the ends of C are defined by $z = i(b^2 - a^2)^{1/2}$ and the most distant point from the real axis is $z = i(b^2 + a^2)^{1/2}$.

Writing $b = na$, $(n > 1)$, the parametric equations of C^* will be

$$\begin{cases} x = 2^{-1/2} a [(1 + n^4 - 2n^2 \cos 2\theta)^{1/2} + \cos 2\theta - n^2]^{1/2}, \\ y = 2^{-1/2} a [(1 + n^4 - 2n^2 \cos 2\theta)^{1/2} - \cos 2\theta + n^2]^{1/2}, \end{cases}$$

and the complex potentials in D_1 and D_2 have the expressions

$$(14)\qquad \begin{cases} f_1 = V_0[(z^2+b^2)^{1/2} + a^2(z^2+b^2)^{-1/2}(k_1-k_2)(k_1+k_2)^{-1}], \\ f_2 = 2k_2 V_0 (z^2+b^2)^{1/2}(k_1+k_2)^{-1}. \end{cases}$$

The debit of the fluid passing through the porous medium is therefore

$$(15)\qquad Q^* = 2ak_2 V_0 (k_1+k^2)^{-1},$$

but the complex velocities could be written

$$w_1 = w_0[1 - a^2(z^2+b^2)^{-1/2}(k_1-k_2)(k_1+k_2)^{-1}], \quad w_2 = 2k_2(k_1+k_2)^{-1} w_0,$$

where w_0 is the complex velocity when $k_1 = k_2$.

The curve C for $n=2$ is plotted in Fig. 2.

5. Let C^* be now the half-circle $|z| = a$, $y>0$, but in the upper half-plane z_1 obtained by the transformation

$$(16)\qquad 2z_1 = z + a^2 z^{-1}, \quad z = z_1 + (z_1^2 - a^2)^{1/2}.$$

C is represented by the half-circle of radius c having its centre in the point $z_1 = b$, where $c > b - a$. The parametric equations of C can be written

$$(17)\qquad x = b + X + U, \quad y = Y + V,$$

where

$$2^{1/2}U = [(A^2+B^2)^{1/2} + A]^{1/2}, \quad 2^{1/2}V = [(A^2+B^2)^{1/2} - A]^{1/2},$$

$$A = (X+b)^2 + Y^2 - a^2,$$

$$A^2 + B^2 = X^4 + Y^4 + b^4 + a^4 + 6b^2X^2 + 6Y^2(X+b)^2 + 4bX(X^2+b^2) - 2a^2(X^2+Y^2) - 2a^2 b(b+2X),$$

$$Z = X + iY = ce^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

In particular, for $b = c = 2a$, these parametric equations are

$$\begin{cases} \dfrac{x}{c} = 1 + \cos\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\dfrac{89}{16} + 7\cos\theta + \dfrac{3}{2}\cos\theta\right)^{1/2} + \dfrac{3}{4} + 2\cos\theta + \cos 2\theta\right]^{1/2}, \\ \dfrac{y}{c} = \sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\dfrac{89}{16} + 7\cos\theta + \dfrac{3}{2}\cos 2\theta\right)^{1/2} - \dfrac{3}{4} - 2\cos\theta - \cos 2\theta\right]^{1/2} \end{cases}$$

and in Fig. 3 the corresponding frontier is plotted.

The complex potentials can then be written

$$(18)\qquad \begin{cases} f_1 = V_0[z + a^2 z^{-1} - 2b + 4c^2(k_1-k_2)(z + a^2 z^{-1} - 2b)^{-1}(k_1+k_2)^{-1}], \\ f_2 = 2k_2 V_0 (z + a^2 z^{-1} - 2b)(k_1+k_2)^{-1}. \end{cases}$$

From (18) all the elements of motion can be deduced. In particular on the real axis the complex velocities in D_1 and D_2 will be, respectively,

$$(19)\quad \begin{cases} w_1 = [1 - 4c^2 (k_1 - k_2) (k_1 + k_2)^{-1} (x + a^2 x^{-1} - 2b)^{-2}] w_{10}, \\ w_2 = 2k_2 (k_1 + k_2)^{-1} w_{10}, \end{cases}$$

w_{10} being the velocity of the stream when the inhomogeneity is missing ($w_{10} = V_0 (1 - a^2 x^{-2})$).

6. If C^* is the cut $x = 0$, $0 < y < b$, in the plane z_1 in which we passed by the transformation (13), let by the transformation (16), let us take C to be the half-circle

$$z_1 = a + ce^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi], \quad c \geqslant b + a, \quad a > b,$$

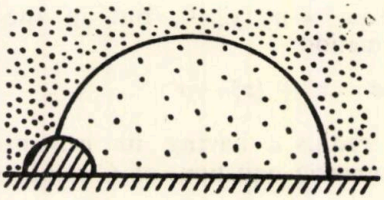


Fig. 3

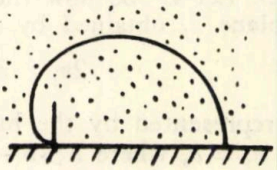


Fig. 4

therefore we are in the case when the ends of C are not on C^*, or the left end is on C^*. Then in parametric form C will be given by the formula

$$z = [a^2 - b^2 + c (c \cos 2\theta + 2a \cos \theta) + ic (c \sin 2\theta + 2a \sin \theta)]^{1/2},$$

the radical having the arithmetic value for $\theta = 0$. In particular for $c = b + a$, $a = nb$ $(n > 1)$, the parametric equations of C^* will be

$$x/b = [(n + 1)/2]^{1/2} \{[6n^2 + 2 + 8n^2 \cos \theta + 2 (n^2 - 1) \cos 2\theta]^{1/2} + n - 1 + 2n \cos \theta + (n + 1) \cos 2\theta\}^{1/2},$$

$$y/b = [(n + 1)/2]^{1/2} \{[6n^2 + 2 + 8n^2 \cos \theta + 2 (n^2 - 1) \cos 2\theta]^{1/2} + 1 - n - 2n \cos \theta - (n + 1) \cos 2\theta\}^{1/2}.$$

The complex potentials are similar like the complex potentials of the fourth paragraph:

$$(20)\quad \begin{cases} f_1 = V_0 \{(z^2 + b^2)^{1/2} - a + c^2 [(z^2 + b^2)^{1/2} - a]^{1/2} (k_1 - k_2) (k_1 + k_2)^{-1}\}, \\ f_2 = 2k_2 V_0 [(z^2 + b^2)^{1/2} - a]^{1/2} (k_1 + k_2)^{-1}. \end{cases}$$

When $n = 2$, in Fig. 4 the curve C is plotted.

7. The last example will be for the case when the ends of C are on the real axis. Using (16), here we shall assume that $c < b - a$, and the parametric equations (17) are valid but, for a uniform stream at great dist-

ance we have also (18). Let us take other singularities in the plane z, when the impervious cylinder and the inhomogeneity are missing, namely

$$f_0(z) = \frac{q}{2\pi} \log [(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})],$$

where the point $z = \alpha$ is in the exterior of the impervious cylinder and of the inhomogeneity. When we consider the impervious domain $|z| = a$, then

$$f_0(z) = \frac{q}{2\pi} \log \left\{ \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \alpha' \right] \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \bar{\alpha}' \right] \right\},$$

where

$$2\alpha' = \alpha + a^2 \alpha^{-1}.$$

In order to obtain the complex potentials in the presence of the inhomogeneity $|Z - b| = c$, where $2Z = z + a^2 z^{-1}$, we can denote $\zeta = Z - b$, and then apply the circle theorem; we obtain the desired expressions of $f_1(z)$ and $f_2(z)$, involving α, a, b and c.

Received the 30 III 1968 *University of Bucarest*

REFERENCES

1. Gheorghiţă Şt. I., *A semi-inverse Method in Plane Hydrodynamics.* Arch. Mech. Stosowanej, 1959, **XI**, *6*, p. 631.
2. — *Połodorotna metoda w hydrodynamice płaskiej.* Rozprawy Inzynierskie, 1965, **13**, *3*, p. 447.
3. Iacob C., *Asupra unei extinderi a teoremei cercului.* Com. Ac. RPR., 1959, **IX**, *8*, p. 759.
4. Gheorghiţă Şt. I., *On the Analytical Solution of some Problems for Inhomogeneous Media of the Second Type.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 1967, **XII**, *9*, p. 1247.

ASUPRA CURGERII PLANE PRIN MEDII POROASE NEOMOGENE DE TIPUL AL DOILEA

(Rezumat)

Se aplică metoda semi-inversă şi o extindere a teormei cercului pentru soluţionarea unor probleme relative la curgerea permanentă a fluidelor prin medii poroase neomogene de tipul al doilea. Se analizează apoi un număr de exemple.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 532.522

SUR L'ÉCOULEMENT PAR DES ORIFICES EN PAROIS CYLINDRIQUES

PAR

C. CIOBANU et M. RĂDULESCU

1. On poursuit la détermination théorique et expérimentale du coefficient du débit μ pour les orifices rectangulairas à arrête vive et contraction complète.

On considère une fente rectangulaire practiquée dans une parois cylindrique de rayon unitaire, la largeur d'orifice étant définie par l'angle au centre $2\theta_1$ (fig. 1).

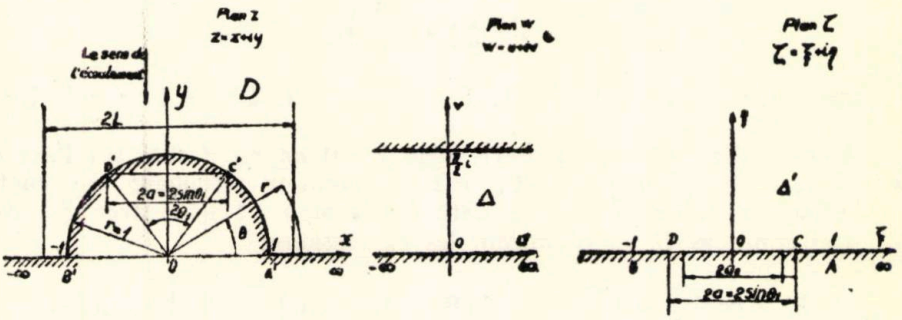


Fig. 1

Pour la détermination des éléments de l'écoulement, il faut représenter conformément le domaine D (le demiplan supérieur Z), sur le demiplan supérieur ζ, c'est-à-dire le cas d'un réservoir infinit. La fonction de représentation du domaine D sur le demiplan supérieur ζ (le domaine Δ'), sera trouvée par des transformations intermédiaires. En premier lieu on observe que le domaine D sera représenté sur le domaine $v = 0$, $v = \pi/2$ du plan W, par la fonction

$$w = \ln \frac{z-1}{z+1}. \tag{1}$$

Pour le demicercle à rayon r (plan Z), la fonction (1) prend l'expression:

$$w = \frac{1}{2} \ln \frac{r^2 + 1 - 2r\cos\theta}{r^2 + 1 + 2r\cos\theta} + \mathrm{i}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2r\sin\theta}{r^2 - 1}. \tag{2}$$

Pour $r=1$, elle sera $w = \ln \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire une droite parrallèle à l'axe u, vue que $v = \pi/2$.

Tous les cercles à $r = \text{const.}$, du domaine D, sont représentés dans le domaine Δ, sur le plan W ($v = 0$, $v = \pi/2$), par les courbes (2).

Puis, le domaine $v = 0$, $v = \pi/2$ peut être représenté par la fonction $\zeta = \coth w$, qui peut recevoir l'expression:

$$\zeta = \frac{e^{2w} + 1}{e^{2w} - 1} = \frac{e^{2u} e^{2iv} + 1}{e^{2u} e^{2iv} - 1}; \tag{3}$$

pour $0 < v < \frac{\pi}{2}$, $\sin 2v > 0$. En conclusion, chaque droite $v = \text{const.}$ du domaine Δ est représentée sur le demiplan supérieur ζ.

En considérent les equations (1) et (3), on peut établir la fonction de représentation du domaine donné, du plan physique Z, sur le demiplan supérieur ζ:

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \tag{4}$$

avec les correspondences: $z = 1$, $\zeta = 1$; $z = -1$, $\zeta = -1$; $z = \mathrm{i}$, $\zeta = 0$; $z = \pm\infty$. $\zeta = \pm\infty$.

L'intérvalle $x \in [(\infty, -1) \cup (1, \infty)]$; $y = 0$ est représenté sur l'axe réel $\xi \in [(-\infty, -1) \cup (1, \infty)]$; $\eta = 0$, mais le contour circulaire $z = \cos\theta = +\mathrm{i}\sin\theta$ se représente sur l'axe ξ, dans l'intérvale $(-1, +1)$ avec $\xi = \cos\theta$.

Les contours D' et C' auront les expressions:

$$\xi_D = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right) = -\sin\theta_1, \quad \xi_C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \sin\theta_1.$$

En conséquence, dans le plan ζ l'orifice a une largeur $2\sin\theta_1$, égale à la corde correspondante de la paroi courbe.

Le potentiel complex de l'écoulement, dans le plan ζ, a l'expression:

$$f(\zeta) = -\mathrm{i}\,q \arccos\frac{\zeta}{a_0} = \varphi + \mathrm{i}\psi, \tag{5}$$

ce que, dans l'intérieur de l'orifice ($\eta = 0$), devient $\psi = q \arccos(\xi/a_0)$. En même temps on observe que dans le point C ($\xi = a_0$), on a $\psi_C = 0$, et

en $D(\xi = -a_0)$, $\psi_D = \pi q$; les lignes (C, ∞) et $(D, -\infty)$, étant des lignes de courant, le débit sera $Q = \psi_D - \psi_C = \pi q$.

Le potentiel de vitesse dans un point en dehors de la fente $|\xi| > a_0$, est exprimé par

$$\varphi = -iq \arccos\frac{\xi}{a_0} = q \operatorname{arc\,ch}\frac{\xi}{a_0};$$

il est nul en D et C.

Le potentiel et la fonction du courant sont les même dans les deux plans Z et ζ: donc en C et en C' sera $\varphi = \psi = 0$, et en D et D': $\varphi = 0$, $\psi = \pi q = Q$.

La vitesse complexe dans le plan ζ est donnée par

$$v_\zeta = \frac{df(\zeta)}{d\zeta} = iq\frac{1}{\sqrt{a_0^2 - \zeta^2}} = \frac{q}{\sqrt{\zeta^2 - a_0^2}},$$

et sur le contour $\zeta = \xi$ sera $v = q/\sqrt{\xi^2 - a^2}$. En considérant l'équation (4), sur le contour circulaire elle sera $\xi = \cos\theta = x$ et sur le reste du contour $(A', \infty;\ B', -\infty)$, $\xi = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Ainsi, dans les points homologues du plan Z, sur le contour circulaire

$$v = \frac{q}{\sqrt{x^2 - a_0^2}} \tag{6}$$

et sur le reste du contour

$$v = \frac{q}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]^2 - a_0^2}}. \tag{7}$$

Il résulte que dans le point $|x| = a_0$, la vitesse prend, théoriquement, une valeur infinie (fig. 2). En réalité, toutes les conditions collaborent dans le sens de la limitation de la vitesse, ce que permet de considérer qu'à la sortie elle a la valeur $v = \sqrt{2gh}$. Avec cette hypothèse et en considérant $2a$ la largeur de la fente on peut écrire

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 - a_0^2}} = \sqrt{2qh}. \tag{8}$$

Le débit total est donc

$$Q = \pi q = \mu_c 2a\sqrt{2gh}, \tag{9}$$

où μ_c est le coefficient de contraction. Avec (8) et (9), il résulte

$$a_0 = a\sqrt{1 - 4\mu_c^2/\pi^2},$$

qui pour $a = \sin\theta_1$ et $f(\mu_c) = \sqrt{1 - 4\mu^2/\pi^2}$ prend l'expression

(10) $$a_0 = f(\mu_c)\sin\theta_1 .$$

La dépendance $f(\mu_c)$ peut être obtenue en utilisant le théorème de l'impulsion

(11) $$F_i = F_s + F_d ,$$

avec

(12) $$F_i = \rho Q v = 4\mu_c \sin\theta_1 \gamma h$$

la force d'impulsion,

(13) $$F_s = 2a(p_a + \gamma h) - 2a p_a = 2a\gamma h$$

la force de réaction causée par la différence de la pression hydrostatique et

$$F_d = 2\frac{\rho}{2}\int_a^1 \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 - a_0^2}}\right)^2 dx + 2\frac{\rho}{2}\int_1^L \left\{\frac{q}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]^2 - a_0^2}}\right\}^2 dx$$

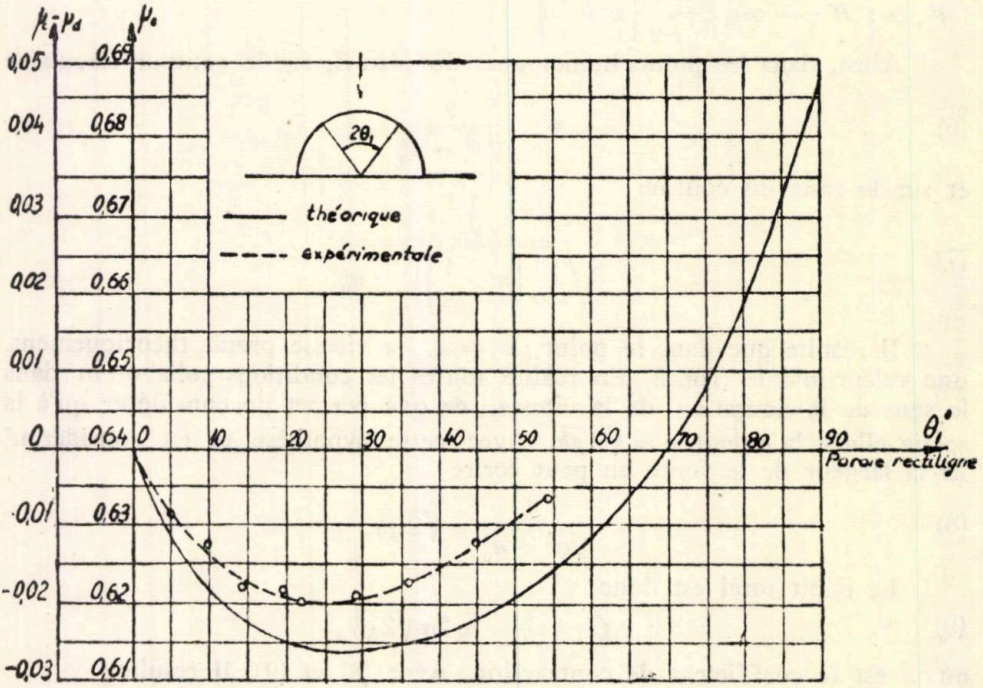


Fig. 2

la force résultante hydrodinamique. En utilisant (6) et (7) on aboutit après intégration, pour $L \to \infty$, à

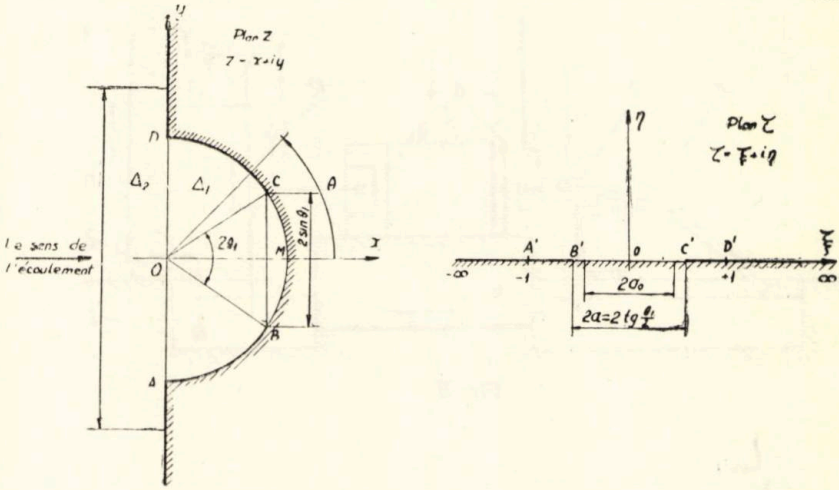

Plan Z
Z = x+iy
Le sens de l'écoulement
Plan τ
τ = ξ+iη
A'
B'
C'
D'
2a₀
2a=2 tg θ₁/2

Fig. 3

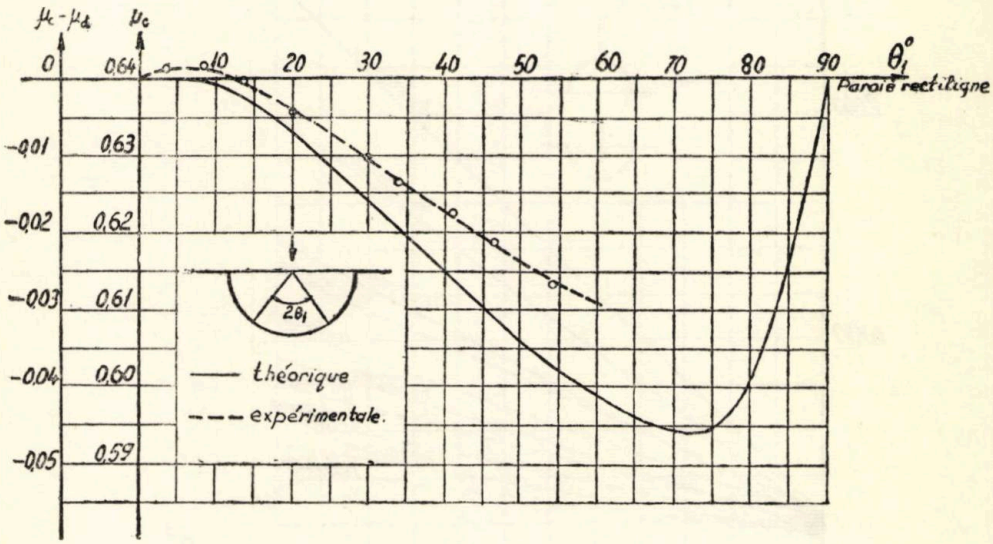

μc - μd
μc
θ₁°
Paroie rectiligne
théorique
expérimentale.

Fig. 4

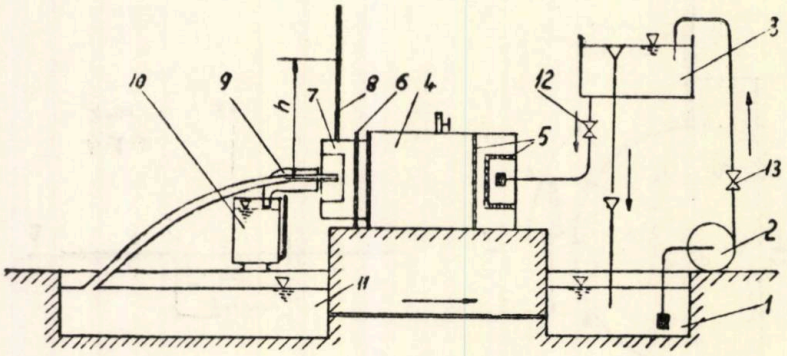

10
9
h
7
8
6
4
12
3
5
13
2
11
1

Fig. 5

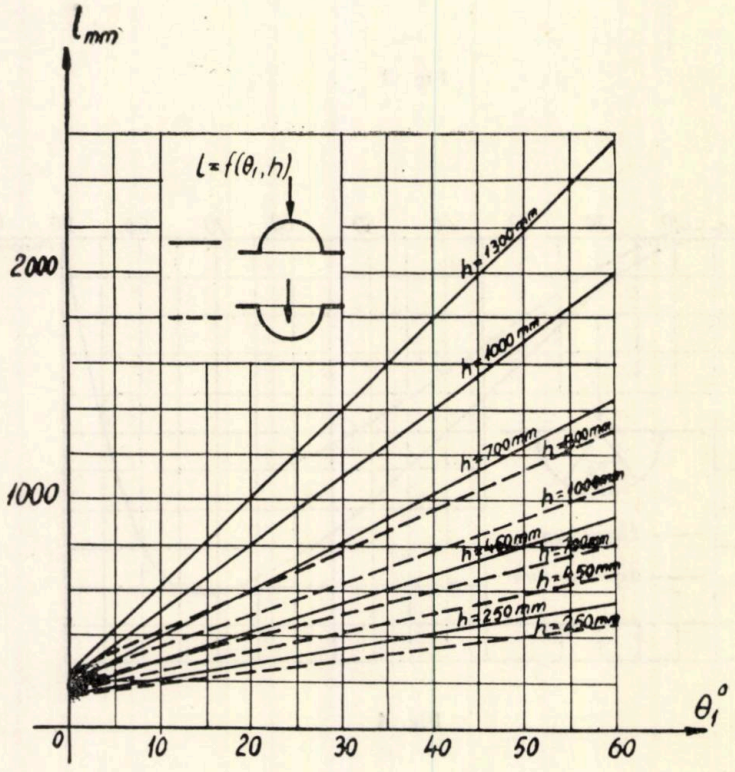

l mm
l = f(θ1, h)
2000
1000
h=1300 mm
h=1000 mm
h=700 mm
h=400 mm
h=100 mm
h=450 mm
h=250 mm
0
10
20
30
40
50
60
θ1°

Fig. 6

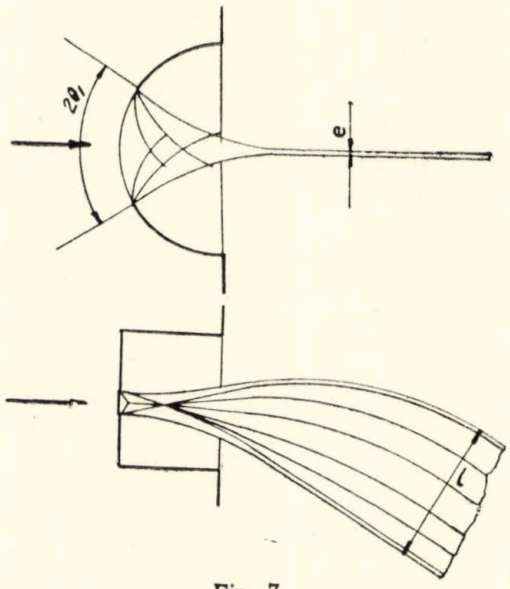


Fig. 7

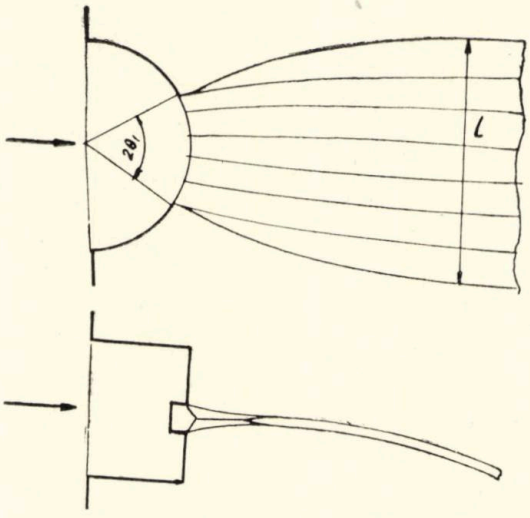


Fig. 8

$$F_d = \rho \frac{Q^2}{\pi^2 2a_0}\left[\ln\frac{a+a_0}{a-a_0} - 2\ln\frac{1+a_0}{1-a_0} + \frac{\pi a_0}{\sqrt{1-a_0^2}}\right]. \tag{14}$$

A l'aide des équations (12), (13), (14) et en considérant aussi (9) et (10), la relation (11) prend l'expression

$$1 + \frac{2\mu_c^2}{\pi^2 f(\mu_c)}\left[\frac{\pi f(\mu_c)\sin\theta_1}{\sqrt{1-\sin^2\theta_1 f^2(\mu_c)}} + \right.$$
$$\left. + \ln\frac{1+f(\mu_c)}{1-f(\mu_c)}\left(\frac{1-\sin\theta_1 f(\mu_c)}{1+\sin\theta_1 f(\mu_c)}\right)^2\right] - 2\mu_c = 0, \tag{15}$$

qui, par approximations, permet à déterminer la fonction $\mu_c = f(\theta_1)$ (fig. 2).

De la même manière on a traité le cas de la paroi à courbure inverse, (fig. 3) en obtenant l'équation

$$1 + \mu_c^2 \frac{\sin\theta_1}{\pi^2 \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} f(\mu_d)}\left[\left(1 - f^2(\mu_d)\operatorname{tg}^2\frac{\theta_1}{2}\right)\ln\frac{1+f(\mu_d)}{1-f(\mu_d)} + \right.$$
$$\left. + \left(1+f^2(\mu_d)\operatorname{tg}^2\frac{\theta_1}{2}\right)\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}f(\mu_d)}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}f(\mu_d)} - 2f(\mu_d)\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\right)\right] - 2\mu_c = 0, \tag{16}$$

c'est-à-dire la dépendance $\mu_c(\theta_1)$ (fig. 4).

Parce que autant (15) que (16) donnent $\theta_1 \to 0$ la même expression trouvée en litérature pour les parois droites [1], on peut considérer que les hypothèses et les raisonnements faits sont justes.

2. En utilisant l'installation présentée dans la fig. 5, on a déterminé par voie expérimentale un coefficient de débit global $\mu = \varphi(\mu_c)$, conaissant que μ_c (ou μ_d) est un coefficient de contraction proprement dit.

Il faut mentionner que les arêtes vives des orifices restent les mêmes autant pour les parois planes, que pour l'entière gamme des parois courbes, grâce au systhème $6-7$ (fig. 5), qui est détachable. Les grandeurs mesurées sont h et Q. Les graphyques (fig. 2 et 4), représentent les écarts théoriques et expérimentaux qui sont différentes parce qu'on n'avait pas considéré le coefficient de vitesse φ (déjà mentionné).

Les structures des jets sont assez différentes dans les trois cas: plane, avec curbure vers l'intérieur (fig. 7) et vers l'extérieur (fig. 8). Dans le cas de la paroi plane, interviennent quelques inversions, leur nombre décroissant avec l'augmentation de h. Pour le cas de la fig. 7, le jet est très aplati, avec une orientation vers la verticale; pour celui de la fig. 8,

vers l'horizontale. Il faut remarquer que le dernier ne présente pas d'inversions et que pour des h très petits, $\theta_1 = 4° \ldots 5°$. L'épaisseur des pélicules varie (de 1 à 3 mm) avec les charges. Pour des charges h et des angles θ_1 grands, la pélicule est détruite, l'écoulement continuant sous forme de gouttes.

La fig. 6 représente la variation de la largeur l des pélicules, en fonction de h et θ_1, pour les deux cas traités.

Parce que la pulverisation des pélicules est assez accentuée, on pouvait entrevoir quelques utilisations pratiques: refroidissement, aspersion et pulvérisation des divers liquides et même des matériaux granulaires fins.

Reçue le 28 III 1968

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Hydraulique

BIBLIOGRAPHIE

1. Carafoli E., Oroveanu T., *Mecanica fluidelor*. Vol. II, Ed. Acad. R.P.R., Buc. 1955.

ASUPRA SCURGERII PRIN ORIFICII PRACTICATE ÎN PEREŢI CILINDRICI

(Rezumat)

Se cercetează pe cale teoretică şi experimentală coeficientul de debit pentru curgerea prin orificii rectangulare practicate în pereţi cilindrici, prezentînd curbură atît spre interior cît şi spre exterior.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

Д. К. 531.8 : 539.313

К РАСЧЕТУ ДИНАМИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ЗВЕНЬЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ОСНОВАНИЯ

С. Н. КОЖЕВНИКОВ и Н. М. ДОЛГОВ

Введение

В современной прикладной механике все более существенное место начинают занимать исследования динамики систем с распределенными и сосредоточенными параметрами, работающих на подвижных основаниях.

При этом особый интерес представляет определение динамических нагрузок и деформаций в звеньях таких систем, а также анализ точности движения ведомых звеньев исполнительных механизмов при *нестационарном* переносном движении основания или *нестационарном* нагружении системы силами иного происхождения.

Исследование ряда вопросов динамики подобных систем, в частности, применительно к роторам турбомашин с подвижными (в том числе упругомассивными) опорами и некоторым другим механизмам и сооружениям как при линейных, так и нелинейных граничных условиях, можно найти, например, в работах [1]...[12], [14], [16], [17].

Сложность таких исследований обусловлена появлением в рассматриваемых системах *связанных* колебаний нескольких смежных упругих звеньев. В силу этого существенно изменяется частотный спектр системы в целом [1], [4], [7], [9] и распределение динамических деформаций в её звеньях.

Ниже рассматривается задача об определении динамических деформаций в системе с упругими опорами (смежными звеньями) при некоторых характерных нестационарных режимах возмущающего переносного движения основания.

1. *Уравнения движения*

Рассмотрим весомый упругий стержень (рис. 1), опоры которого связаны пружинами (смежными упругими звеньями) с подвижным основанием. Закрепление стержня в опорах может быть шарнирным, упругим или жестким. Условия закрепления в каждом случае будут определять формы и частоты собственных колебаний стержня.

Ускорение переносного движения произвольного сечения *недеформированной* оси стержня в системе координат xOy, связанной с основанием, будет равно

$$\ddot{y}(x) = \ddot{y}(0) + [\ddot{y}(l) - \ddot{y}(0)]\frac{x}{l}, \tag{1.1}$$

или в относительных координатах

$$\ddot{y}(\xi) = \ddot{y}(0) + [\ddot{y}(1) - \ddot{y}(0)]\xi. \tag{1.2}$$

Тогда уравнение, связывающее динамические деформации стержня с погонной инерционной нагрузкой, может быть записано следующим образом:

$$\frac{EI}{l^4}\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} = -\mu \frac{\partial^2 (y+\eta)}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

или

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + a\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -a\ddot{y}(\xi), \tag{1.4}$$

где $a = \mu l^4/EI$, μ — масса погонной единицы стержня. Отыскание решения уравнения (1.4) методом Фурье в форме

$$\eta(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n \tag{1.5}$$

приводит в данном случае для шарнирно опертого стержня, с одной стороны, к известному уравнению, описывающему формы собственных колебаний,

$$X_n = C_n \sin k_n \xi, \tag{1.6}$$

где $k_n = n\pi$, $n = 1, 2, 3...$, а с другой стороны, — к обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно составляющей функции времени

$$\ddot{T}_n + p_n^2 T_n = f_n(t), \tag{1.7}$$

где

$$f_n(t) = -\frac{2}{k_n}[\ddot{y}_1(t) - (-1)^n \ddot{y}_2(t)]. \tag{1.8}$$

В соотношении (8) и далее индексами 1 и 2 обозначены параметры, относящиеся соответственно к левой и правой опорам. Частное решение уравнения (1.7) может быть представлено следующим образом:

$$T_n = \frac{1}{p_n^2}\left[f_n(t) - \int_0^t \dot{f}_n(\tau)\cos p_n(t-\tau)\,d\tau\right]. \tag{1.9}$$

Тогда

$$\ddot{T}_n = -\frac{2}{n\pi}\int_0^t [\dddot{y}_1(\tau) - (-1)^n \dddot{y}_2(\tau)]\cos p_n(t-\tau)\,d\tau. \tag{1.10}$$

Учитывая, что ускорение произвольного сечения *деформированной* оси стержня с относительной координатой ξ равно

$$\ddot{y}_{\text{абс}}(\xi, t) = \ddot{y}(\xi, t) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \ddot{y}(\xi, t) + \sum_1^\infty C_n \ddot{T}_n \sin k_n \xi, \tag{1.11}$$

после подстановки (1.10) в (1.11) окончательно найдем $\ddot{y}_{\text{абс}}(\xi, t)$ в таком виде:

$$\ddot{y}_{\text{абс}}(\xi, t) = \ddot{y}_1(t)(1-\xi) + \ddot{y}_2(t)\xi - \tag{1.12}$$
$$-\sum_1^\infty \frac{2C_n}{n\pi}\sin k_n \xi \int_0^t [\dddot{y}_1(\tau) - (-1)^n \dddot{y}_2(\tau)]\cos p_n(t-\tau)\,d\tau.$$

Полученное соотношение дает возможность определить элементарные силы инерции, а следовательно и суммарное воздействие распределенных инерционных нагрузок на опоры.

Из уравнения моментов сил относительно левой и правой опор можем получить соответственно силы, воздействующие на опоры:

$$Q_1 = -\mu l\left\{\frac{1}{3}\ddot{y}_1(t) + \frac{1}{6}\ddot{y}_2(t) - \right.$$
$$\left. -\sum_1^\infty \frac{2C_n}{(n\pi)^2}\int_0^t [\dddot{y}_1(\tau) - (-1)^n y_2(\tau)]\cos p_n(t-\tau)\,d\tau\right\},$$
$$Q_2 = -\mu l\left\{\frac{1}{6}\ddot{y}_1(t) + \frac{1}{3}\ddot{y}_2(t) + \right. \tag{1.13}$$
$$\left. +\sum_1^\infty (-1)^n \frac{2C_n}{(n\pi)^2}\int_0^t [\dddot{y}_1(\tau) - (-1)^n \dddot{y}_2(\tau)]\cos p_n(t-\tau)\,d\tau\right\}.$$

Определив силы давления звена на опоры, будем рассматривать далее (рис. 1 б) движение приведенных к опорным сечениям масс под воздействием сил Q_1 и Q_2. Тогда связанные колебания этих масс могут быть описаны системой интегро-дифференциальных уравнений такого вида

$$
(1.14)\quad
\begin{cases}
\ddot{y}_1(t) + \beta_1^2 y_1(t) - \zeta_1 \sum_1^{\infty} \dfrac{2C_n}{(n\pi)^2} \int_0^t \dddot{y}_1(\tau) \cos \omega_n (t-\tau)\, d\tau + \\
+ \dfrac{1}{6}\zeta_1 \ddot{y}_2(t) + \zeta_1 \sum_1^{\infty} (-1)^n \dfrac{2C_n}{(n\pi)^2} \int_0^t \dddot{y}_2(\tau) \cos \omega_n (t-\tau)\, d\tau = \beta_1^2 \bar{y}_1(t), \\
\dfrac{1}{6}\zeta_2 \ddot{y}_1(t) + \zeta_2 \sum_1^{\infty} (-1)^n \dfrac{2C_n}{(n\pi)^2} \int_0^t \dddot{y}_1(\tau) \cos \omega_n (t-\tau)\, d\tau + \\
+ \ddot{y}_2(t) + \beta_2^2 y_2(t) - \zeta_2 \sum_1^{\infty} \dfrac{2C_n}{(n\pi)^2} \int_0^t \dddot{y}_2(\tau) \cos \omega_n (t-\tau)\, d\tau = \beta_2^2 \bar{y}_2(t).
\end{cases}
$$

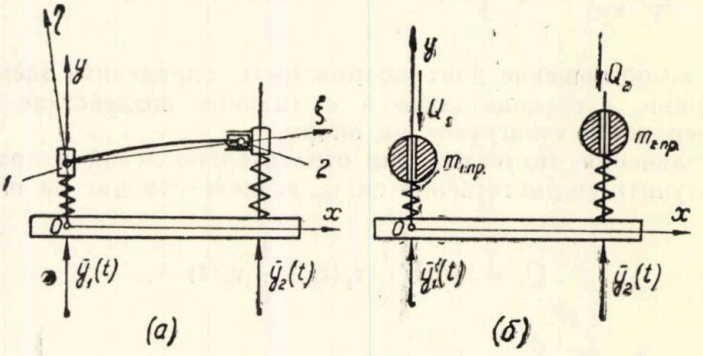


Рис. 1

Здесь $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — искомые перемещения опор; $\bar{y}_1(t)$ и $\bar{y}_2(t)$ — возмущающие воздействия на опоры со стороны основания; $\beta_1^2 = c_1/m_{1пр}$, $\beta_2^2 = c_2/m_{2пр}$ — частоты собственных колебаний опор с учетом приведенных к ним масс; $m_{1пр}$ и $m_{2пр}$ — приведенные к опорам массы. При решении задачи в линейной постановке $m_{1пр} = m_1 + m/3$, $m_{2пр} = m_2 + m/3$, c_1 и c_2, m_1 и m_2 — соответственно жесткости и массы опор, m — масса звена, соединенного с основанием через опоры 1 и 2.

Решение этой системы уравнений при наиболее характерных вариантах возмущения может позволить установить определенные ограничения на закон изменения возмущающего воздействия при известных параметрах системы или, наоборот, ограничить область изменения конструктивных характеристик системы в процессе её проектирования при заданном возмущении.

Поскольку движение опорных масс описывается интегро-дифференциальными уравнениями, целесообразно воспользоваться для решения системы методом операционного исчисления.

2. *Символические уравнения*

Введем для изображений величин, входящих в уравнения (1.14), следующие обозначения: $y_1(t) \to Y_1(p)$, $y_2(t) \to Y_2(p)$, $\bar{y}_1(t) \to \bar{y}_1(p)$, $\bar{y}_2(t) \to \bar{y}_2(p)$.

На основании теоремы о дифференцировании оригинала можем записать изображения соответствующих производных

$$\ddot{y}(t) \to p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0),$$

$$\dddot{y}(t) \to p^3 Y(p) - p^2 y(0) - p\dot{y}(0) - \ddot{y}(0),$$

где $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0)$ — начальное условие задачи.

Интегралам типа свертки (интегралам Дюамеля), входящим в уравнения под знаками сумм, будут соответствовать [13] изображения вида:

$$\int_0^t \dddot{y}(t) \cos\omega_n (t-\tau)\, d\tau \to \frac{p^4}{p^2+\omega_n^2} Y(p) - [p^2 y(0) + p\dot{y}(0) + \ddot{y}(0)] \frac{p}{p^2+\omega_n^2}.$$

Заменяя в системе (1.14) соответствующие величины их изображениями, получим следующую систему символических уравнений в пространстве изображений:

$$\left[p^2 + \beta_1^2 - \zeta_1 \sum_1^\infty \frac{2C_n}{(n\pi)^2} \frac{p^4}{p^2+\omega_n^2}\right] Y_1(p) +$$

$$+ \zeta_1 \left[\frac{1}{6} p^2 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{2C_n}{(n\pi)^2} \frac{p^4}{p^2+\omega_n^2}\right] Y_2(p) =$$

$$= \beta_1^2 \bar{y}_1(p) + [py_1(0) + \dot{y}_1(0)] -$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&-\zeta_1\sum_1^{\infty}\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\,[p^2y_1(0)+p\dot{y}_1(0)+\ddot{y}_1(0)]\,\frac{p}{p^2+\omega_n^2}+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{6}\,\zeta_1\,[py_2(0)+\dot{y}_2(0)]+\\
&+\zeta_1\sum_1^{\infty}(-1)^n\,\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\,[p^2y_2(0)+p\dot{y}_2(0)+\ddot{y}_2(0)]\,\frac{p}{p^2+\omega_n^2},\\
&\zeta_2\left[\frac{1}{6}\,p^2+\sum_1^{\infty}(-1)^n\,\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\,\frac{p^4}{p^2+\omega_n^2}\right]Y_1(p)+\\
&\qquad+\left[p^2+\beta_2^2-\zeta_2\sum_1^{\infty}\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\,\frac{p^4}{p^2+\omega_n^2}\right]Y_2(p)=\\
&\qquad=\beta_2^2\bar{y}_2(p)+\frac{1}{6}\,\zeta_2\,[py_1(0)+\dot{y}_1(0)]+\\
&+\zeta_2\sum_1^{\infty}(-1)^n\,\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\,[p^2y_1(0)+p\dot{y}_1(0)+\ddot{y}_1(0)]\,\frac{p}{p^2+\omega_n^2}+\\
&\qquad+[py_2(0)+\dot{y}_2(0)]-\\
&-\zeta_2\sum_1^{\infty}\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\,[p^2y_2(0)+p\dot{y}_2(0)+\ddot{y}_2(0)]\,\frac{p}{p^2+\omega_n^2}.
\end{aligned}
\right. \tag{2.1}
$$

Ограничиваясь конечным числом N слагаемых в суммах, введем для простоты дальнейших промежуточных записей следующие сокращенные обозначения

$$
\left\{
\begin{aligned}
&p^2+\beta_1^2-\zeta_1\sum_1^{N}\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\,\frac{p^4}{p^2+\omega_n^2}=f_{11}(p),\\
&\frac{1}{6}\,\zeta_1p^2+\zeta_1\sum_1^{N}(-1)^n\,\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\,\frac{p^4}{p^2+\omega_n^2}=f_{12}(p),\\
&\frac{1}{6}\,\zeta_2p^2+\zeta_2\sum_1^{N}(-1)^n\,\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\,\frac{p^4}{p^2+\omega_n^2}=f_{21}(p),\\
&p^2+\beta_2^2-\zeta_2\sum_1^{N}\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\,\frac{p^4}{p^2+\omega_n^2}=f_{22}(p),
\end{aligned}
\right. \tag{2.2}
$$

$$
(2.3)\quad \begin{cases}
py_1(0)+\dot{y}_1(0)=\varphi_{11}(p), \quad \frac{1}{6}\zeta_1[py_2(0)+\dot{y}_2(0)]=\varphi_{12}(p),\\
\zeta_1\sum_1^N \frac{2C_n}{(n\pi)^2}[p^2y_1(0)+p\dot{y}_1(0)+\ddot{y}_1(0)]\frac{p}{p^2+\omega_n^2}=\psi_{11}(p),\\
\zeta_1\sum_1^N (-1)^n\frac{2C_n}{(n\pi)^2}[p^2y_2(0)+p\dot{y}_2(0)+\ddot{y}_2(0)]\frac{p}{p^2+\omega_n^2}=\psi_{12}(p),\\
\frac{1}{6}\zeta_2[py_1(0)+\dot{y}_1(0)]=\varphi_{21}(p), \quad py_2(0)+\dot{y}_2(0)=\varphi_{22}(p),\\
\zeta_2\sum_1^N (-1)^n\frac{2C_n}{(n\pi)^2}[p^2y_1(0)+py_1(0)+\ddot{y}_1(0)]\frac{p}{p^2+\omega_n^2}=\psi_{21}(p),\\
\zeta_2\sum_1^N \frac{2C_n}{(n\pi)^2}[p^2y_2(0)+p\dot{y}_2(0)+\ddot{y}_2(0)]\frac{p}{p^2+\omega_n^2}=\psi_{22}(p).
\end{cases}
$$

Тогда система (2.1) запишется следующим образом:

$$
(2.4)\quad \begin{cases}
f_{11}(p)Y_1(p)+f_{12}(p)Y_2(p)=\beta_1^2\bar{y}_1(p)+\\
\quad+\varphi_{11}(p)-\psi_{11}(p)+\varphi_{12}(p)+\psi_{12}(p),\\
f_{21}(p)Y_1(p)+f_{22}(p)Y_2(p)=\beta_2^2\bar{y}_2(p)+\\
\quad+\varphi_{21}(p)+\psi_{21}(p)+\varphi_{22}(p)-\psi_{22}(p).
\end{cases}
$$

Рассмотрим вначале решение задачи при однородных начальных условиях. В этом случае систему (2.1) можно представить в таком виде:

$$
(2.5)\quad \begin{cases}
f_{11}(p)Y_1(p)+f_{12}(p)Y_2(p)=\beta_1^2\bar{y}_1(p),\\
f_{21}(p)Y_1(p)+f_{22}(p)Y_2(p)=\beta_2^2\bar{y}_2(p).
\end{cases}
$$

Решение системы (2.5) в общем случае можно записать так:

$$
(2.6)\quad \begin{cases}
Y_1(p)=\dfrac{\beta_1^2f_{22}(p)\bar{y}_1(p)-\beta_2^2f_{12}(p)\bar{y}_2(p)}{f_{11}(p)f_{22}(p)-f_{12}(p)f_{21}(p)},\\
Y_2(p)=\dfrac{\beta_2^2f_{11}(p)\bar{v}_2(p)-\beta_1^2f_{21}(p)\bar{y}_1(p)}{f_{11}(p)f_{22}(p)-f_{12}(p)f_{21}(p)}.
\end{cases}
$$

Исследование решения (2.6) системы (2.5) показывает, что изображения перемещений опорных масс при симметричных граничных условиях и симметричном возмущении могут быть представлены в виде произведений дробно-рациональных функций от оператора p на изображение возмущающего воздействия

$$Y_2(p) = Y_2(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}\bar{y}(p). \tag{2.7}$$

В случае асимметрии изображения $Y_1(p)$ и $Y_2(p)$ будут представлены в виде сумм двух аналогичных слагаемых.

Последующее отыскание функций-оригиналов, соответствующих изображениям $Y_1(p)$ и $Y_2(p)$, с помощью теорем разложения для ряда характерных режимов движения, в частности для периодических режимов, не может вызывать никаких принципальных затруднений.

Учитывая, что слагаемые вида $\frac{2C_n}{(n\pi)^2}\int_0^t \ddot{y}(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)\,d\tau$, входящие в уравнения движения под знаками сумм достаточно быстро убывают (убывают не только коэффициенты обратно пропорционально n^2, но и сами интегралы с увеличением ω_n), можно ограничиться при решении системы небольшим числом слагаемых.

Так, при $N = 3$ в случае симметричных граничных условий и симметричного возмущения получим:

$$Y_1(p) = Y_2(p) = 36\beta^2 \frac{b_8p^8 + b_6p^6 + b_4p^4 + b_2p^2 + b_0}{a_{10}p^{10} + a_8p^8 + a_6p^6 + a_4p^4 + a_2p^2 + a_0}\bar{y}(p), \tag{2.8}$$

где коэффициенты полиномов $R(p)$ и $Q(p)$ могут быть вычислены с помощью следующих соотношений:

$$\left\{\begin{aligned}
a_{10} &= 36\left(1-\frac{\zeta^2}{36}\right)+\zeta^2\left[40\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^2+\frac{31}{3}\left(\frac{2}{\pi^2}\right)\right]-98\zeta,\\
a_8 &= 36\left[\left(1-\frac{\zeta^2}{36}\right)(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)+2\beta^2\right]-\frac{2}{\pi^2}\left[98\beta^2\zeta+2\zeta(13\omega_1^2+\right.\\
&\quad \left.+40\omega_2^2+45\omega_3^2)-\frac{\zeta^2}{3}(5\omega_1^2-40\omega_2^2-27\omega_3^2)+\left(\frac{2}{\pi^2}\right)4\zeta^2(\omega_1^2+9\omega_3^2),\right.\\
a_6 &= 36\left[\left(1-\frac{\zeta^2}{36}\right)(\omega_1^2\omega_2^2+\omega_1^2\omega_3^2+\omega_2^2\omega_3^2)+2\beta^2(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)+\beta^4\right]-
\end{aligned}\right. \tag{2.9}$$

$$
\left\{\begin{aligned}
&-\frac{2}{\pi^2}\Big[2\zeta(4\omega_1^2\omega_2^2+9\omega_1^2\omega_3^2+36\omega_2^2\omega_3^2)+2\zeta\beta^2(13\omega_1^2+40\omega_2^2+45\omega_3^2)-\\
&-\frac{\zeta^2}{3}(4\omega_1^2\omega_2^2+9\omega_1^2\omega_3^2+36\omega_2^2\omega_3^2)\Big],\\
a_4 &= 36\Big[\Big(1-\frac{\zeta^2}{36}\Big)\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2+2\beta^2(\omega_1^2\omega_2^2+\omega_1^2\omega_3^2+\omega_2^2\omega_3^2)+\\
&+\beta^4(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)\Big]-\frac{2}{\pi^2}2\zeta\beta^2(4\omega_1^2\omega_2^2+9\omega_1^2\omega_3^2+36\omega_2^2\omega_3^2),\\
a_2 &= 36\,[2\beta\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2+\beta^4(\omega_1^2\omega_2^2+\omega_1^2\omega_3^2+\omega_2^2\omega_3^2)],\\
a_0 &= 66\beta^4\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2;
\end{aligned}\right. \tag{2.9}
$$

$$
\left\{\begin{aligned}
b_8 &= 1-\zeta\Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{\pi^2}\Big),\\
b_6 &= \beta^2+\Big(1-\frac{\zeta}{6}\Big)(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)-\frac{\zeta}{\pi^2}(\omega_1^2+\omega_3^2),\\
b_4 &= \beta^2(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)+\Big(1-\frac{\zeta}{6}\Big)(\omega_1^2\omega_2^2+\omega_1^2\omega_3^2+\omega_2^2\omega_3^2)-\\
&-\frac{\zeta}{\pi^2}\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2,\\
b_2 &= \beta^2(\omega_1^2\omega_2^2+\omega_1^2\omega_3^2+\omega_2^2\omega_3^2)+\Big(1-\frac{\zeta}{6}\Big)\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2,\\
b_0 &= \beta^2\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2.
\end{aligned}\right. \tag{2.10}
$$

Соотношением (2.8) с учетом (2.9) и (2.10) можно воспользоваться для исследования как стационарных, так и нестационарных режимов движения системы при симметричных условиях.

С точки зрения современных задач динамики машин, несомненно, особый интерес представляет исследование нестационарных процессов в подобных системах.

3. *Исследование нестационарных режимов*

При исследовании нестационарных режимов с помощью операционного исчисления приходится сталкиваться с некоторыми трудностями принципиального характера.

К таковым в первую очередь следует отнести составление математического описания возмущающего воздействия, которое, с одной стороны, как можно точнее соответствовало бы исследуемым характерным режимам движения системы, а с другой стороны позволяло бы сравнительно просто получить оригиналы перемещений.

Учитывая, что в данной задаче изображение перемещений опор (2.7) представлено в виде произведения двух сомножителей, можем определить оригинал, соответствующий первому из сомножителей с помощью известных [13] теорем разложения:

$$y^*(t) = \sum_{k=1}^{4N-2} y_k^*(t) = \sum_{k=1}^{4N-2} \frac{R(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}, \tag{3.1}$$

для изображения с простыми полюсами или

$$y^*(t) = \sum_{k=1}^{4N-2} y_k^*(t) = \sum_{k=1}^{4N-2} \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \left\{ \frac{d^{(m_k-1)}}{dp^{m_k-1}} \left[(p - p_k)^{m_k} \frac{R(p)}{Q'(p)} e^{pt} \right] \right\}, \tag{3.2}$$

для изображения с кратными полюсами, где p_k — обозначение к-го полюса изображения, m_k — кратность этого полюса.

Тогда оригинал решения системы (2.5) может быть представлен в общем случае в виде суммы соответствующих сверток:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{4N-2} \int_0^t y_k^*(t) \bar{y}(t - \tau)\, d\tau. \tag{3.3}$$

Рассмотрим некоторые из характерных нестационарных режимов, поддающихся удовлетворительному, с указанной выше точки зрения, математическому описанию.

а) Система подвержена возмущающему воздействию

$$\bar{y}(t) = A \sin [\bar{\omega}(t) t] = A \sin \mu t^2 \tag{3.4}$$

с постоянной амплитудой и переменной (возрастающей по линейному закону) частотой.

В этом случае применительно к изображению с простыми полюсами решение можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{4N-2} \frac{R(p_k)}{Q'(p_k)} A \int_0^t e^{p_k(t-\tau)} \sin \mu \tau^2\, d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^{4N-2} \frac{R(p_k)}{Q'(p_k)} A e^{p_k t} \int_0^t e^{-p_k \tau} \sin \mu \tau^2\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, можем преобразовать (3.5) к такому виду:

$$y(t)=\sum_{k=1}^{4N-2}\frac{B_k}{2i\sqrt{\mu}}e^{p_k t}\left[e^{i\frac{p_k^2}{4}}\int_{s(0)}^{s(t)}e^{is^2}\,sd+e^{-i\frac{p_k^2}{4}}\int_{s^*(0)}^{s^*(t)}e^{-is^{*2}}ds^*\right], \tag{3.6}$$

где

$$s(0)=i\frac{p_k}{2\sqrt{\mu}},\quad s^*(0)=-i\frac{p_k}{2\sqrt{\mu}},$$
$$s(t)=\sqrt{\mu}\left(t+i\frac{p_k}{2\mu}\right),\quad s^*(t)=\sqrt{\mu}\left(t-i\frac{p_k}{2\mu}\right),\quad B_k=A\frac{R(p_k)}{Q'(p_k)}. \tag{3.7}$$

Интегралы, входящие в решение (3.6), не могут быть вычислены непосредственно, но могут быть приведены к интегралам Френеля, от комплексного аргумента следующей заменой переменных

$$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}s\quad\text{и}\quad z^*=\frac{1-i}{\sqrt{2}}s^*. \tag{3.8}$$

После соответствующих преобразований решение может быть записано окончательно в таком варианте:

$$y(t)=\sum_{k=1}^{4N-2}\frac{B_k e^{p_k t}}{2\sqrt{2\mu}}\left[\left(\sin\frac{p_k^2}{4\mu}+\cos\frac{p_k^2}{4\mu}\right)\left(\int_{z^*(0)}^{z^*(t)}e^{z^{*2}}dz^*+\int_{z(0)}^{z(t)}e^{z^2}dz\right)+\right.$$
$$\left.+i\left(\sin\frac{p_k^2}{4\mu}+\cos\frac{p_k^2}{4\mu}\right)\left(\int_{z^*(0)}^{z^*(t)}e^{z^{*2}}dz^*-\int_{z(0)}^{z(t)}e^{z^2}dz\right)\right], \tag{3.9}$$

где

$$z^*(0)=\frac{p_k}{2\sqrt{2\mu}}(1-i),\quad z^*(t)=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\left(t+\frac{p_k}{2\mu}\right)(1-i),$$
$$z(0)=-\frac{p_k}{2\sqrt{2\mu}}(1-i),\quad z(t)=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\left[\left(t-\frac{p_k}{2\mu}\right)+i\left(t+\frac{p_k}{2\mu}\right)\right]. \tag{3.10}$$

Входящие в решение (3.9) интегралы представляют собой интегралы Френеля от комплексного аргумента и могут быть вычислены с помощью имеющихся таблиц [15], [18].

б) Система подвержена возмущающему воздействию

$$\bar{y}(t) = A\sin\sqrt{\mu t} \tag{3.11}$$

с постоянной амплитудой и переменной частотой (убывающей по закону $\bar{\omega}(t) = \sqrt{\mu/t}$.

Решение в этом случае запишется так:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{4N-2} B_k \int_0^t e^{p_k(t-\tau)} \sin\sqrt{\mu\tau}\,d\tau = \sum_{k=1}^{4N-2} B_k e^{p_k t} \int_0^t e^{-p_k\tau} \sin\sqrt{\mu\tau}\,d\tau. \tag{3.12}$$

Далее, воспользовавшись, как и в предыдущем варианте, формулами Эйлера, окончательно можем получить:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{4N-2} B_k \frac{\mu}{p_k^2}\left(-\sin\sqrt{\mu t} + e^{p_k t} I_k\right), \tag{3.13}$$

где

$$I_k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p_k}}\, e^{-\frac{\mu}{4p_k}}\left(\int_{z(0)}^{z(t)} e^{z^2} dz + \int_{z^*(0)}^{z^*(t)} e^{z^2} dz^*\right), \tag{3.14}$$

а пределы интегрирования определяются равенствами:

$$\begin{cases} z(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p_k}}, \quad z(t) = \sqrt{\frac{p_k}{\mu}}\left(i\sqrt{\mu t} + \frac{\mu}{2p_k}\right), \\ z^*(0) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p_k}}, \quad z^*(t) = \sqrt{\frac{p_k}{\mu}}\left(i\sqrt{\mu t} - \frac{\mu}{2p_k}\right). \end{cases} \tag{3.15}$$

Интегралы, входящие в (3.14), также, как и в предыдущем варианте, представляют собой интегралы Френеля от комплексного аргумента и могут быть вычислены с помощью указанных выше таблиц.

в) Возмущение описывается конечным экспоненциальным рядом

$$\bar{y}(t) = \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j = \sum_{j=1}^{m} A_j(1 - e^{-\mu_j t}). \tag{3.16}$$

В этом случае решение для функции времени

$$y(t) = \sum_{l=1}^{m(4N-2)} \int_0^t y_k^*(t-\tau)\,\bar{y}_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.17}$$

может быть представлено в элементарных функциях:

$$y(t) = \sum_{l=1}^{m(4N-2)} B_{kj}\left[\frac{e^{p_k t}-1}{p_k} + \frac{e^{-\mu_j t}-e^{p_k t}}{p_k+\mu_j}\right]. \tag{3.18}$$

Таким образом численный расчет этого варианта не может вызывать никаких затруднений.

В заключение следует отметить, что к расчетной схеме, для которой выполнено решение, могут быть приведены многие механические системы, работающие в условиях нестационарного нагружения, в частности шасси или несущие конструкции ряда транспортных средств различного назначения и применения.

Поступила 1 V 1969

УСХА, Киев, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев И. В., Тимофеев П. Г., *Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование.* Машиностроение, М., 1965.
2. Гладкий В. Ф., *Динамика конструкции летательного аппарата.* Изд. „Наука", М., 1969.
3. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П., *Нестационарные колебания механических систем.* „Наукова думка", Киев, 1966.
4. Григорьев Н. В., *Нелинейные колебания элементов машин и сооружений.* Машгиз, М., 1961.
5. Гробов В. А., *Совместные поперечные колебания вала и массивно упругих опор при учете гироскопического эффекта ротора.* Воп. динамики и прочности, АН Латвийской ССР, Рига, 1962, *VIII.*
6. Гудков А. И., Лешаков П. С., *Внешние нагрузки и прочность летательных аппаратов.* Машиностроение, М., 1968.
7. Гуров А. Ф.. *Расчеты на прочность и колебания в ракетных двигателях.* Машиностроение, М., 1966.
8. Кожевникоз С. Н., *Динамика машин с упругими звеньями и распределенными параметрами.* Сб. „Некоторые задачи динамики машин с учетом переменности масс и упругости звеньев" (Тр. II Всес. съезда по теорет. и прик. мех.), Изд. „Наука", М., 1965.
9. Кожевников С. Н., Долгов Н. М., *Влияние граничных условий на частотные характеристики звеньев механических систем.* Сб. „Динамика и прочность машин", Изд. Харьковского государственного университета, 1968, вып. *9.*
10. Кожевников С. Н., Манжерон Д., *О динамическом эффекте ускорений высшего порядка.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *1–2.*
11. Лисицын А. С., *О поперечных колебаниях вращающихся роторов с разными упругомассивными опорами.* Вест. машиностроения, Машгиз, М., 1961, *8.*
12. Маслов Г. С., *Расчеты колебаний валов.* Машиностроение, М., 1968.
13. Мартыненко В. С., *Операционное начисление.* Изд. Киевского университета, 1965.
14. Судинин В. А., *Вибрации нагруженных балок.* Тр. ЦАГИ, 1939, *409.*

15. Фаддева В. Н., Терентьев Н. М., *Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента*. ГИТТЛ, М., 1954.
16. Филиппов А. П., *Колебания механических систем*. „Наукова думка", К., 1965.
17. Шляхтин А. В., *Некоторые задачи динамики машин с упругими звеньями и связями*. Диссертация, Гос. НИИ машиноведения, М., 1964.
18. Martz C. W., *Tables of the Complex Fresnel Integrals*. Report SP-3010, Washington, 1964.

CALCULUL DEFORMAŢIILOR DINAMICE DIN ELEMENTELE SISTEMELOR MECANICE ÎN CAZUL MIŞCĂRII NEPERMANENTE A SUPORTULUI

(Rezumat)

Autorii determină deformaţiile dinamice ale unui sistem cu reazeme elastice în cazul unor regimuri caracteristice nestaţionare de mişcare perturbată de translaţie a suportului

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 536.24

AN EXPERIMENTAL STUDY OF A NEW TYPE OF HEAT EXCHANGER

BY

I. CURIEVICI, DAVID PERETZ, CRISTINA CAPATU
and AUREL ANDREESCU

1. A new type of a heat exchanger, conceived by the authors, is presented together with experimental data on its efficiency.

It is a parallel flow tube-in-tube exchanger, in which heat is transfered from the hot fluid (water) in the outer passage, to the cold fluid (air) in the inner tube. The new principle consists in introducing inside the inner tube a co-axial cylindrical sieve, which in laminar state, proved to enhance significantly the convective film coefficient. The length of the cylindrical sieve is equal, and its diameter close, to those of the inner pipe. It is closed at the upper end by a small plate and its lower end rests on the tube wall, as shown in Fig. 1.

The increased efficiency of the heat exchanger in laminar state is due to a local turbulence in the proximity of the wall, produced by the fluid flow through the sieve passages.

The experimental study was performed on the installation presented in the diagram in Fig. 2, where *1* is the sieve heat exchanger and 2 an ordinary heat exchanger, having the same characteristics as *1*, used for comparing the data.

The inner tube of the heat exchanger is 16.8 mm. I.D. and 20 mm. O.D. while the outer tube has an internal diameter of 43.5 mm. The active length of the exchanger is 985 mm. The diameter of the cylindrical sieve varies between 6,5 mm, and 13,5 mm. and the influence of the distance of the sieve to the tube wall was examined in a series of experiments.

In another series of experiments the diameter of the cylindrical sieve remained constant while the other characteristics of the sieve were made to vary.

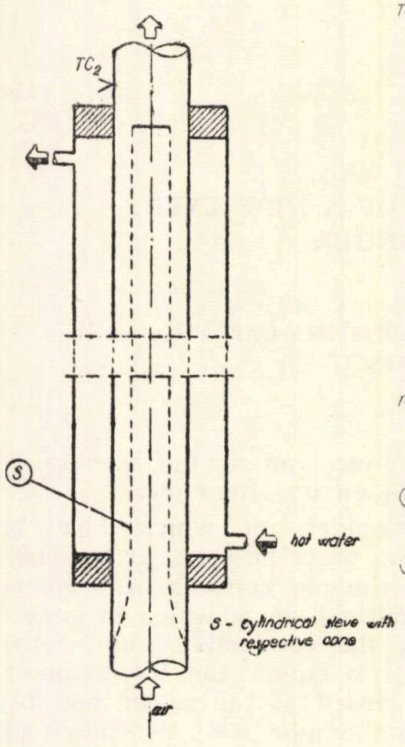


Fig. 1.

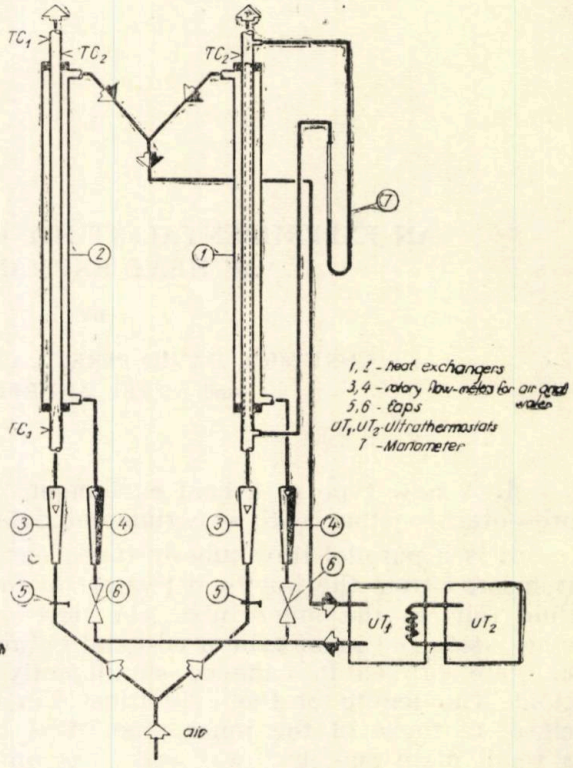


Fig. 2

The air was driven through the exchangers *1* and 2 (Fig. 2) by the same pump, with equal rates of flow, measured by the rotary flow-meters 3. The hot water in the outer passage of the exchangers was also circulated with equal flow-rates by the thermostat UT1 and metered by the rotary flow-meters *4*. To control the air and water rates of flow, the taps 5 and *6* were used, thus obtaining two equally dimensioned exchangers, with circulating fluids of identical parameters. The inlet and outlet temperatures of the air in the two exchangers were measured by the thermocouples Tcl and Tc2 mounted in a differential arrangement as shown in Fig. 2. The joint of each thermocouple was placed inside a suport (Fig. 3) to avoid errors due to radiation from the wall, or radial temperature drop in the air stream.

The pressure drop along the whole length of the inner tube was measured for different rates of flow, both with, and without the cylindrical sieve, by manometer 7 (fig. 2).

2. The experimental procedure is based upon the comparative determination of the convective heat transfer, for two parallel flow tube-in-tube heat exchangers of identical structural characteristics, of which one contains a cylindrical sieve inside the inner tube, while the other is used as blank sample.

The differential thermocouple Tc2, mounted between the upper ends of the two exchangers measures the excess temperature rise in the sieve exchanger, as compared to the chek-test exchanger, while the temperature rise in the check-test exchanger is marked by the differential Tc1, mounted between its two ends.

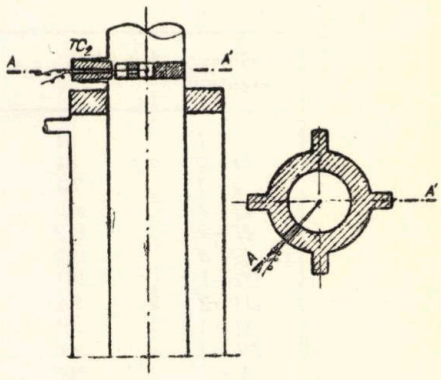


Fig. 3

The inlet temperature of the air, measured by a high accuracy thermometer, was kept constant for each experiment, varying from 19.5 to 23 C° for all the tests performed.

The temperatures of the hot fluid, kept constant at 57.6 C°, had an axial variation of 0.6 C°, observed along the whole length of the exchanger. The calculated temperature variation of the inner face of the internal tube was of only 0.34 C°, and was within the range of experimental error.

The Reynolds number for all the tests performed varied between 1,300 and 13,150 which corresponds to a variation of the flow-rate from 1 m^3/h to 10 m^3/h.

Four different sieves, the characteristics of which are given in table 1 were used in the experimental work and three cylinders were made for each type of sieve, at fixed values of about 6.5 mm, 9.0 mm, and 13.5 mm diameter.

3. *Nomenclature :* V = volumetric flow rate of air, m^3/h.; N_{Re} = Reynolds number; N_{Pr} = Prandtl number; N_{Gr} = Grashof number; N_{Nu} = Nusselt number; t = temperature, C°; Δt = temperature difference, C°; h = convective film coefficient of heat transfer, $kcal/m^2\,h\,C°$; d = diameter, mm; Q = heat flow rate, kcal/h; P = power consumed, kgm/s; ε = heat transfer effectivness, dimensionless; NTU = number of heat transfer units, dimensionless.

Subscripts : f = fluid; s = sieve; w = wall; t = tube; 1 = gas in heat exchanger; 2 = gas at sieveless heat exchanger outlet; 3 = gas at sieve heat exchanger outlet; calc. = calculated value by empirical formulae; max = maximum.

The experimental values of the convective film coefficient h for the heat transfer from the tube wall to the air circulated inside are given in table 2 (for exemplification), for one sieve only, and are presented graphically (Fig. 5...12) for other sieves tested in this work.

Table 1

Sieve notation	Mesh/cm²	Sieve diameter mm	Observations
I—1	81	6.5	
I—2	81	9.0	
I—3	81	13.5	
II—1	169	6.5	
II—2	169	9.0	
II—3	169	13.5	$d_t = 16.8$ mm
III—1	361	6.5	
III—2	361	9.0	
III—3	361	13.5	
IV—1	566	6.5	
IV—2	566	9.0	
IV—3	566	12.5	

The experimental values of h for the sieveless exchanger were checked by calculus, using the following formulae:

$$\mathcal{N}u_f = 0.17\ \mathcal{R}e_f^{0.33}\,\mathcal{P}r_f^{043}\,\mathcal{G}r_f^{0.1}\left[\frac{\mathcal{P}r_f}{\mathcal{P}r_w}\right]^{0.25}$$

for the laminar region,

$$\mathcal{N}u_f = 0.0023\,\mathcal{R}e_f^{0.8}\,\mathcal{P}r_f^{0.4}$$

fot the turbulent region, and a diagram of the form $\mathcal{N}u_f/\mathcal{P}r_f^{0.4} = f(\mathcal{R}e_f$ for the transition region.

The values of the convective film coefficient calculated from the expressions given above, were found in good agreement with those obtained experimentally.

This can be seen in Fig. 4, where the variation of h towards the Reynolds number, obtained experimentally in the present work for the sieveless exchanger, and that obtained from the formulae, are given comparatively.

In the experimental determinations of h for the sieve containing tube, the outer diameter of the cylindrical sieve was first varied and then the sieve characteristics were changed. Table 2 contains the experimental data for a cylindrical sieve of 9 mm dia. and 361 mesh/cm².

Table 2

V	N_{Re}	t_1	t_2	t_2	$\Delta_t = t_3 - t_2$	$h_{calc.}$	h	h_s	$\frac{h_s}{h}$
1.0	1,301	19.6	43.80	51.49	7.69	5.72	5.39	9.95	1.85
1.2	1,572	19.7	41.76	50.95	9.19	6.11	5.53	11.38	2.06
1.5	1,975	19.7	39.85	50.54	10.69	6.60	6.03	13.78	2.29
1.7	2,250	19.7	38.30	49.33	11.03	6.89	6.08	14.11	2.37
2.0	2,651	19.8	37.87	48.34	10.47	7.92	6.84	15.35	2.247
2.2	2,896	19.7	40.10	49.76	9.66	9.61	8.79	19.50	2.22
2.5	3,256	19.8	43.80	51.84	8.04	13.15	13.52	26.42	1.88
2.7	3,511	19.8	44.08	51.32	7.24	14.10	14.90	27.50	1.848
3.0	3,895	19.7	44.53	51.54	7.01	15.94	17,49	35.61	1.81
3.5	4,547	19.8	44.63	51.17	6.54	19.14	20.57	35.94	1.748
4.0	5,198	19.7	44.25	50.40	6.15	22.52	22.68	38.66	1.705
4.5	5,853	19.8	44.06	49.92	5.86	25.70	25.43	41.98	1.650
5.0	6,511	19.8	43.75	49.49	5.74	28.46	27.83	45.40	1.630
6.0	7,827	19.8	43.25	48.71	5.46	34.20	32.55	51.93	1.597
7.0	9,146	19.8	42.70	47.87	5.17	39.20	36.94	57.40	1.56
8.0	10,475	19.8	42.00	46.82	4.82	45.13	40.46	61.09	1.51
9.0	11,802	19.7	41.20	45.79	4.59	49.61	43.65	64.19	1.47
10.0	13,138	19.7	40.55	45.03	4.48	54.00	46.86	68.12	1.457

The whole experimental information obtained in this work points to the fact that the presence of the sieve brings about an increase of the ratio h_s/h for the entire range of variation of the

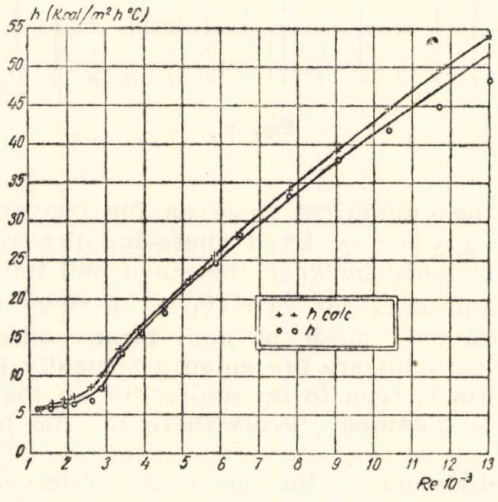


Fig. 4

Reynolds number, (1,300...13,150). For the upper limit of the $N_{Re} = 13{,}150$, used in the present work, the ratio h_s/h never dropped under a value of 1.19.

The general form of the curves h_s/h as a function of N_{Re} indicate a rapid increase of the ratio h_s/h in the laminar region, a maximum being attained at $N_{Re} \simeq N_{Recrit.}$, then it rapidly decreases for higher N_{Re} and then slowly decreases for $N_{Re} > 4{,}000$. It is to be presumed from this form of the curves, that for very high Reynolds numbers the influence of the cylindrical sieve inside the tube becomes negligible i.e. the ratio h_s/h approaches unity.

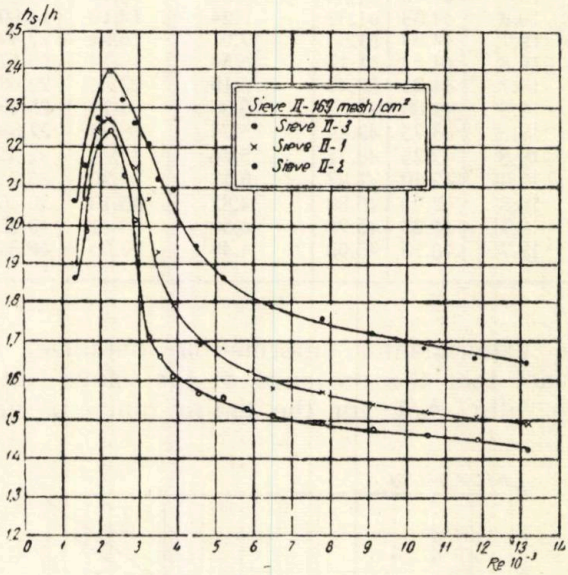


Fig. 5

The effect of the cylindrical sieve on the convective heat transfer coefficient for a sieve of fixed characteristics was found to be dependent on the distance between the sieve and the tube wall.

The experimental data for two types of sieve of, respectively, 169 mesh /cm², and 566 mesh/cm² and three different diameters ($d_s = 13.5$; 9.0 and 6.5 mm) are presented graphically in Figs. 5 and 6,

The general form is seen to be similar for all the curves and the ratio $(h_s/h)_{max}$ was obtained everywhere in the proximity of the critical N_{Re} .

The greatest efficiency of the sieve was observed for the cylindrical sieve of 9.0 mm dia. i.e. for a 4 mm distance between wall and

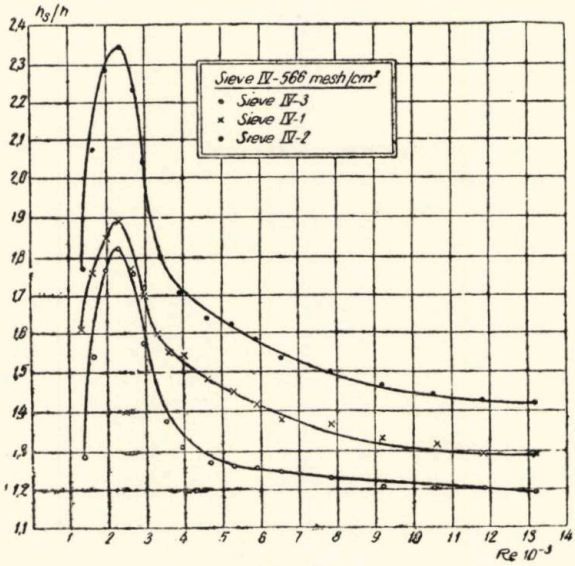

h_s/h
Sieve IV-566 mesh/cm²
Sieve IV-3
Sieve IV-1
Sieve IV-2
Re 10^{-3}

Fig. 6

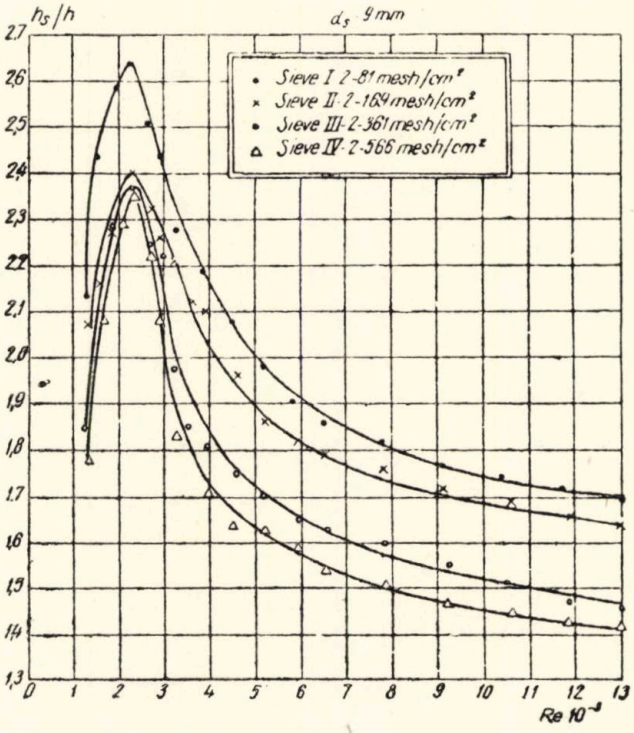

h_s/h
d_s 9 mm
Sieve I 2-81 mesh/cm²
Sieve II 2-184 mesh/cm²
Sieve III 2-361 mesh/cm²
Sieve IV 2-566 mesh/cm²
Re 10^{-3}

Fig. 7

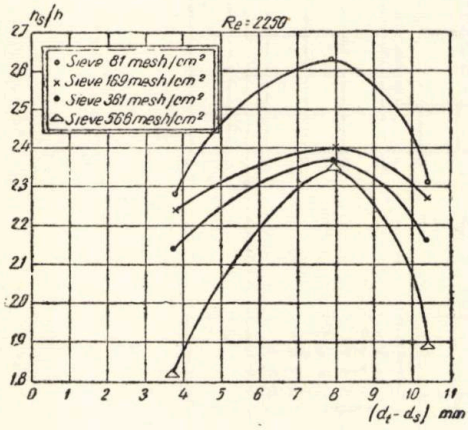


Fig. 8

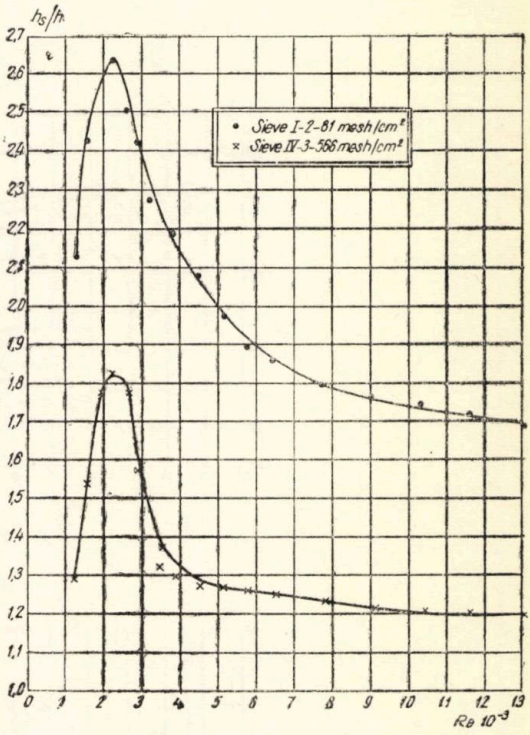


Fig. 9

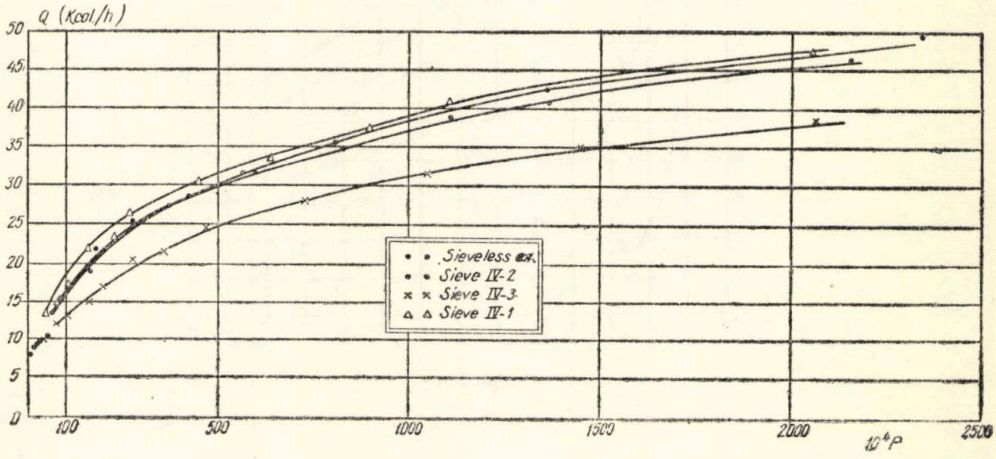


Fig. 10

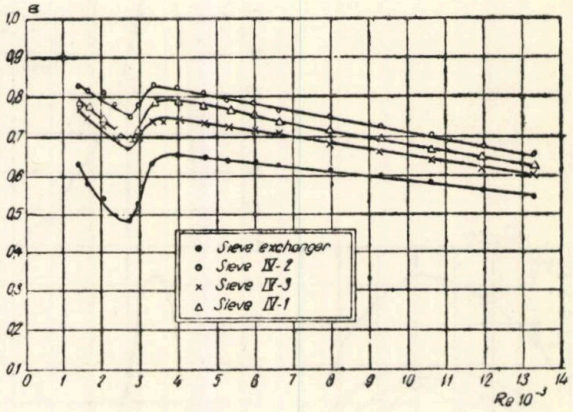

ε
Sieve exchanger
Sieve IV-2
Sieve IV-3
Sieve IV-1
Re 10⁻³

Fig. 11

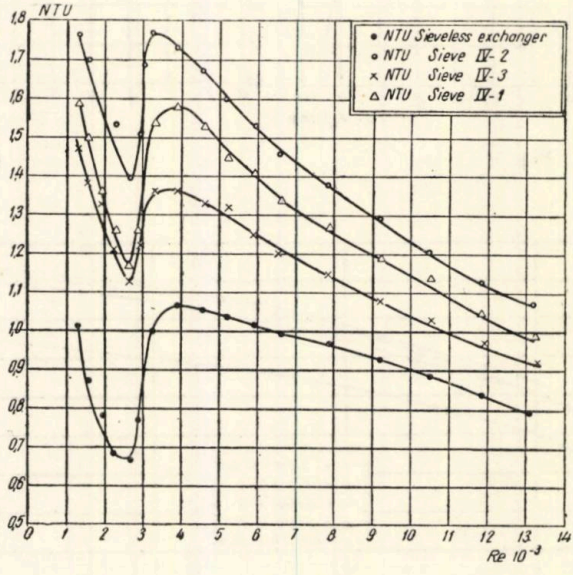

NTU
NTU Sieveless exchanger
NTU Sieve IV-2
NTU Sieve IV-3
NTU Sieve IV-1
Re 10⁻³

Fig. 12

sieve, and this is true for the whole range of N_{Re} studied, which would mean that this distance to the wall provided the most active local turbulence.

The maximum value of the ratio h_s/h, obtained in our tests was 2.64.

At a fixed diameter of the sieve, the effect on the heat transfer film coefficient was found to depend on the characteristics of the sieve. For the range 81 mesh/cm^2 to 566 mesh/cm^2 the efficiency deacreases with increase of meshes on square centimeter, as may be seen in Fig. 7.

The influence of the distance between cylinder and wall and that of the characteristics of the sieve on the ratio $(h_s/h)_{max}$ is presented in Fig. 8. In the diagram in Fig. 9, the highest and lowest values of h_s/h obtained in our tests are given as a function of N_{Re}.

It can be seen from this diagram that for the range of $(d_t - d_s)$ and sieve characteristics mentioned above, the values h_s/h, varies by 34.2% in the laminar region, by 30.9% at $N_{Re\ crit.}$ and by 34.0% for $N_{Re} > 2{,}300$.

4. To estimate the supplementary consumption of energy due to the presence of the sieve, the pressure drop was measured, for all the cases examined. The power consumed for driving the air through the exchanger was calculated on this basis, and the relation $Q_{transf.} = f$ (power consumed) was drawn in Fig. 10 (table 3).

Table 3

N_{Re}	ε	ε_s	NTU	NTU_s	Q	Q_s	10^4 P	10^4 P_s
1,301	0.638	0.829	1.0166	1.7664	7.00	9.10	6.95	30.3
1,572	0.582	0.808	0.8717	1.702	7.65	10.78	10.00	32.0
1,975	0.544	0.815	0.7843	1.6859	8.74	13.45	20.88	62.5
2,250	0.498	0.785	0.6877	1.5364	9.15	14.62	22.30	85.0
2,651	0.487	0.752	0.667	1.3938	10.45	16.50	52.90	110.0
2,896	0.538	0.780	0.7728	1.5134	12.97	18.84	67.20	165.0
3,256	0.635	0.830	1.0074	1.7710	17.35	22.65	92.30	229.0
3,895	0.658	0.824	1.0718	1.7365	21.55	27.00	179.40	375.0
4,547	0.654	0.813	1.0626	1.6744	25.15	31.20	277.00	564.0
5,198	0.647	0.799	1.0419	1.6031	28.40	35.10	422.00	811.0
5,853	0.642	0.785	1.0258	1.5364	31.50	38.60	601.00	1,113.0
6,511	0.631	0.768	0.9982	1.4605	34.68	42.15	826.00	1,370.0
7,827	0.621	0.749	0.9706	1.3823	40.70	49.15	1,370.00	2,350.0
9,146	0.606	0.726	0.9315	1.2949	46.30	55.60	2,160.00	3,190.0
10,475	0.588	0.704	0.8878	1.2167	51.40	61.40	3,215.00	5,690.0
11,802	0.567	0.679	0.8372	1.1362	56.00	67.10	4,570.00	7,920.0
13,138	0.549	0.661	0.7958	1.0810	60.30	72.50	6,250.00	10,840.0

The advantage of using the sieve, from the point of wiew of the energy consumed for circulating the air, can be clearly seen from this figure.

An exception was found to exist for the sieve having the diameter very close to that of the inner tube of the exchanger, for which the ratio $Q_{transf.}$ /power consumed was smaller than in the case oi the sieveless exchanger.

In table 3, the comparative values of ε (effectivness) and NTU are given for the 9.0 mm dia. and 566 mesh/cm^2 sieve and the empty tube, the advantage of our system appearing as obvious.

The curves $\varepsilon = f(N_{Re})$ and NTU $= f(N_{Re})$ are presented in Figs. 11 and 12.

5. Conclusion

1. By the introduction of a co-axial cvlindrical sieve in an ordinary heat exchanger, considerable increases of the convective film coefficient of heat transfer (up to 2.7 times) were obtained.

2. The intensity of this effect had a distinct maximum for $N_{Re} \simeq \simeq N_{Re crit.}$ and was found to depend on the distance between sieve and tube wall, as well as on the sieve characteristics.

3. The presence of the sieve causes a supplementary hydraulic resistence, but owing to enhancement of the heat transfer process, the system as a whole was found advantageous.

Received the 17 II 1969

Polytechnic Institute, Jassy
and
Center of Technical and Physical Research of the Romanian Academy, Jassy

STUDIUL EXPERIMENTAL AL UNUI NOU TIP DE SCHIMBĂTOR DE CĂLDURĂ

(Rezumat)

S-a cercetat un nou tip de schimbător de căldură caracterizat prin introducerea unui cilindru coaxial din sită, închis la partea superioară, într-un schimbător de căldură gaz-lichid, tip ţeavă în ţeavă (fig. 1). Prezenţa cilindrului din sită duce la o creştere rapidă cu N_{Re} a coeficientului de schimb de căldură în domeniul laminar, raportul h_s/h atingînd o valoare maximă în jurul $N_{Re} \simeq N_{Re\ crit.}$ (fig. 5 şi 6).

Valoarea raportului h_s/h este influenţată de distanţa dintre sită şi perete, precum şi de caracteristicile sitei. În cazul cercetat în care diametrul interior al schimbătorului a fost de 16,8 mm, valoarea $(h_s/h)_{max}$ cea mai mare s-a obţinut la o distanţă de la peretele tubului de cca. 4 mm şi cu o sită de 81 ochiuri/cm^2. Valoarea $(h_s/h)_{max}$ obţinută, variază între 1,91 şi 2,64.

Raportul h_s/h este supraunitar pe tot domeniul N_{Re} cercetat, dar tinde spre unu cu creşterea lui N_{Re}.

Calculele energetice arată o valoare mărită a eficienţei (fig. 11), o valoare mărită a lui NTU (fig. 12) şi o valoare mărită a căldurii transmise la aceeaşi putere consumată, faţă de schimbătorul obişnuit fără sită (fig. 10).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

D. K. 536.8

KINETISCHE GLEICHUNGEN FÜR VORREAKTIONEN IM LADUNGSREST BEI KLOPFENDER VERBRENNUNG IN OTTOMOTOREN

VON

DAVID PERETZ

1. Ein Modell der klopfenden Verbrennung

In einer vorherigen Arbeit [1] wurde über ein Modell der Klopferscheinungen in Ottomotoren berichtet, das auf einem allgemeinen Reaktionsmechanismus während des Selbstzündverzugs des Ladungsrestes fusst. Diese Vorreaktionen werden durch einstufige Kettenreaktionen dargestellt und kennzeichnen sich wie folgt:

a) Die Selbstzündung des Ladungsrestes erfolgt zu dem Zeitpunkt, in welchem die Konzentration eines gewissen Oxydationszwischenproduktes, der sich während der Kettenreaktion bildet, einen kritischen Wert erreicht.

b) Die kritische Konzentration des Zwischenproduktes wird bei der höchsten Reaktionsgeschwindigkeit erreicht, die gleichzeitig auch die kritische Reaktionsgeschwindigheit ist.

c) Die Bildungsgeschwindigkeit der effektiven Zentren während der Vorreaktion kann durch eine den Brenngesetzen gleichartige Funktion ausgedrückt werden.

Die zur Berechnung vorgeschlagenen Gleichungen lauten:

$$y = 1 - e^{-\frac{m}{m+1}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m+1}}, \tag{1}$$

$$y_{cr} = 1 - e^{-\frac{m}{m+1}}, \tag{2}$$

wobei:

$$y = \frac{N_{c,0} - N_c}{N_{c,0}} \tag{3}$$

und $N_{e,0}$ — die Kraftstoffmoleküle im Brenngemisch zum Zeitpunkt $t = 0$ da noch keine Vorreaktion begonnen hat; N_e — die noch nicht in Vorreaktionen oxydierten Kraftstoffmoleküle im Endgas zum Zeitpunkt t; m — kinetischer Exponent; τ_{aa} — der pauschale Zündverzug des Ladungsrestes (Dauer der Vorreaktion im Endgas bei klopfender Verbrennung).

Folglich ist y die bis zum Zeitpunkt t reagierte Kraftstoffmenge im Ladungsrest und y_{cr} die bis zum Zündverzugsende kristische Kraftstoffmenge, jeweils auf die Ausgangsmenge bezogen.

Die Gleichungen (1) und (2) werden von einer Reihe Versuchsergebnissen bestätigt.

In dieser Arbeit wird die Bedeutung beider kinetischen Grössen (m und τ_{aa}) besprochen, sowie die Vorteile, die der Gebrauch reduzierter kinetischen Grössen bietet.

2. Kinetische Gleichungen für Vorreaktionen im Ladungsrest

Die Verlaufsweise der Vorreaktion im Endgas, die mit den Gl. (1) und (2) beschrieben ist, zeigt, dass in den Berechnungen zwei kinetische Parameter vorkommen, die unabhängig von der Zeit sind u. z. m — kinetischer Exponent der Vorreaktion, τ_{aa} — Dauer der Vorreaktion.

Diese Parameter bestimmen eindeutig die Kettenreaktionsgeschwindigkeit der Vorreaktion, die im Ladungsrest stattfindet und zur Selbstzündung derselben führt.

Um die vercshiedenen Vorreaktionen bei klopfender Verbrennung unter einander vergleichen zu können, schlagen wir den Gebrauch einiger reduzierter kinetischer Grössen vor, welche die Konzentration der Zwischenprodukte sowie die Reaktionsgeschwindigkeit charakterisieren.

Entsprechend den Gl. (1), (2) sowie der Gl. (4)

$$\frac{x_i}{x_{icr}} = \frac{y}{y_{cr}} \tag{4}$$

erhalten wir :

$$\frac{y}{y_{cr}} = \frac{x_i}{x_{icr}} = \frac{1 - e^{-\frac{m}{m+1}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m+1}}}{1 - e^{-\frac{m}{m+1}}}, \tag{5}$$

wobei x_i die dem Zeitpunkt t entsprechende Konzentration der Zwischenprodukte und x_{icr} die kritische Konzentration derselben beim Ende der Vorreaktion (τ_{aa}) sind.

Wenn wir t/τ_{aa} als unabhängige Veränderliche wählen und den kinetischen Exponenten als Parameter betrachten, dann können wir diese Funktion graphisch darstellen (Abb. 1)

Auf diese Art können wir Reaktionen mit verschiedenen Zündverzugswerten, die denselben oder verschiedene kinetische Exponenten besitzen,

vergleichen. Aus der Abb. 1 ist ersichtlich, dass die Reaktion intensiver (oder dass die reduzierte Konzentration der Zwischenprodukte grösser für eine relative Zeit ist), wenn der kinetische Exponent kleiner ist.

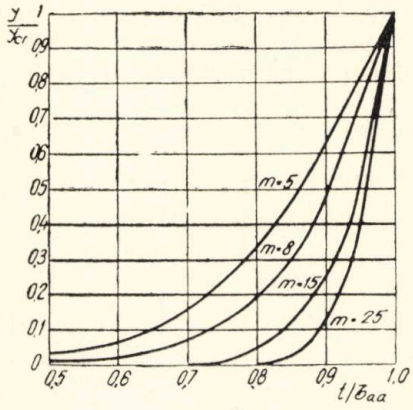


Abb. 1

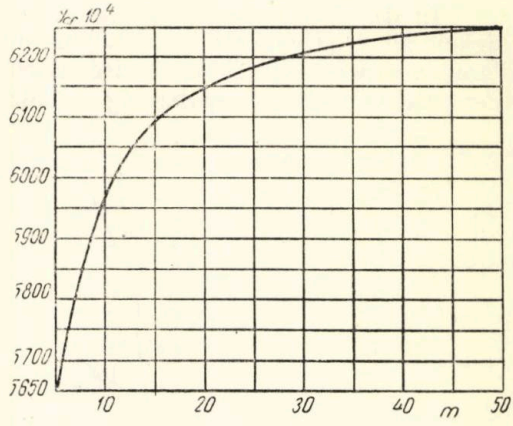


Abb. 2

In der Abb. 2 wird y_{cr} in Abhängigkeit vom kinetischen Exponenten ausgedrückt. Für die Werte $m = 5...15$, verändert sich die kritische Kraftstoffmenge ziemlich rasch aber bei grösseren Werten von m (z. B. angefangen von $m = 50$), bleibt y_{cr} ungefähr konstant. Diese Wahrnehmung ist in Übereinstimmung mit der Voraussetzung Mc Phersons [2], der annimmt, dass die kritische Konzentration x_{icr} nur von der Art des Kraftstoffes abhängt (unabhängig von Druck, Temperatur und Zeit).

Gleickzeitig kann man aus der Abb. 2 ersehen, dass y_{cr} praktisch nicht einen gewissen Wert überschreiten kann (ungefähr 0,625).

Die Reaktionsgeschwindigkeit kann auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$w = \frac{dy}{d(t/\tau_{aa})} = m\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^m e^{-\frac{m}{m+1}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m+1}} \tag{6}$$

und beim Reaktionsende:

$$w_{cr} = m\, e^{-\frac{m}{m+1}}. \tag{7}$$

Diese Reaktionsgeschwindigkeit ist mit der Veränderung der Konzentration der Zwischenprodukte als Zeitfunktion proportional, folglich mit der Bildungsgeschwindigkeit dieser Produkte. Der Wert dieses Proportionalitätsfaktors hängt von dem Oxydierungsmechanismus der Vorreaktion ab, so dass wir um vergleichbare Resultate zu erhalten, vorschlagen, eine dimensionlose Reaktionsgeschwindigkeit zu gebrauchen, wie aus Gl. (8) ersichtlich ist:

$$(8) \qquad w_r = \frac{\mathrm{d}\,(y/y_{cr})}{\mathrm{d}\,(t/\tau_{aa})} = \frac{m}{y_{cr}} \left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^m \mathrm{e}^{-\frac{m}{m+1}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m+1}}.$$

In der Abb. 3 sind die Werte der adimensionalen Reaktionsgeschwindigkeit als relative Zeitfunktion für einige Werte des Exponenten m (als Parameter) wiedergegeben. Es ist ersichtlich, dass die Höchstwerte der Reaktionsgeschwindigkeit gleichzeitig mit dem Exponenten m wachsen.

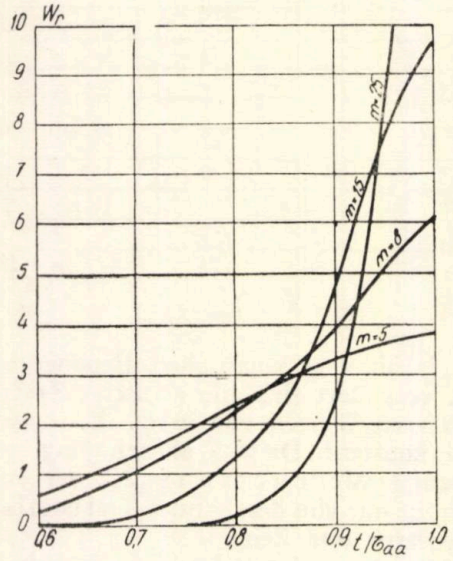


Abb. 3

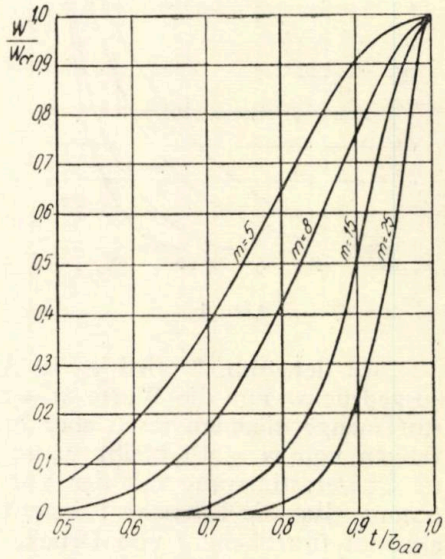


Abb. 4

Es gibt auch eine andere Möglichkeit, verschiedene Reaktionsgeschwindigkeiten vergleichend zu studieren u. z. mit Hilfe einer reduzierten adimensionalen Reaktionsgeschwindigkeit (w/w_{cr}) $(w_r/w_{r\,cr})$ als relative Zeitfunktion t/τ_{aa}, wie es z. B. in der Abb. 4 wiedergegeben ist. Die Werte w/w_{cr}, wurden nach den Gl. (6) und (7) für einige Werte des kinetischen Exponenten m berechnet.

Beide Methoden, die den Vergleich der Reaktionsgeschwindigkeiten ermöglichen, erlauben, dass Reaktionen mit verschiedener Dauer nur als Funktionen vom Exponenten m, der als Parameter genommen wurde, ausgedrückt werden und folglich für die Verallgemeinerung der experimentellen Ergebnisse und für das Studium der Einflüsse verschiedener Faktoren auf den Verlauf der Vorreaktionen von Wichtigkeit sind.

Zwischen diesen Reaktionsgeschwindigkeiten sowie zwischen den kritischen Reaktionsgeschwindigkeiten kann man folgende Beziehungen aufstellen:

$$(9) \qquad w_y = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{w}{\tau_{aa}}, \qquad (10) \qquad w_r = \frac{\mathrm{d}\,(y/y_{cr})}{\mathrm{d}\,(t/\tau_{aa})} = \frac{w}{y_{cr}},$$

(11) $$w_{rcr} = \frac{w_{cr}}{y_{cr}},$$ (12) $$w_{ycr} = y'_{cr} = \frac{w_{cr}}{\tau_{aa}}.$$

Die Veränderung der reduzierten Konzentration der Zwischenprodukte mit der Zeit für verschiedene Werte der Vorreaktionsdauer im Endgas kann man auch durch folgende Gleichung ausdrücken:

(13) $$w_{yr} = \frac{d(y/y_{cr})}{dt} = \frac{w_y}{y_{cr}}.$$

Die kritische Geschwindigkeit ist in diesem Falle

(14) $$w_{yrcr} = \frac{w_{y\,cr}}{y_{cr}}.$$

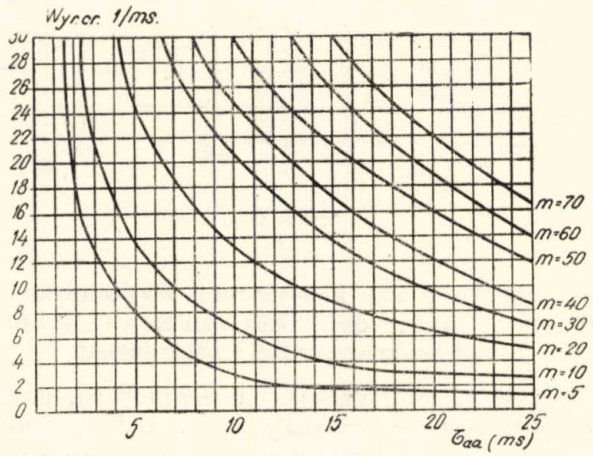


Abb. 5

In der Abb. 5 sind die Kurven w_{yrcr} als Funktion der Vorreaktionsdauer bei verschiedenen m-Werten wiedergegeben. Die kritischen Geschwindigkeiten w_{yrcr} wachsen mit dem kinetischen Exponenten und erreichen hohe Werte, wenn die Dauer der Vorreaktion sich vermindert.

Die Kurven der Reaktionsgeschwindigkeit z. B. w_r (Abb. 3) besitzen Wendepunkte für gewisse Werte der relativen Zeit und folglich erreicht die Reaktionsbeschleunigung in diesen Zeitmomenten den Höchstwert.

Die Beschleunigung der Vorreaktion bei klopfender Verbrennung erhalten wir durch Ableiten der Gl. (6) oder (8) usw. in Beziehung zur Zeit, z. B.:

(15) $$w'_r = \frac{d^2(y/y_{cr})}{d(t/\tau_{aa})^2} = m\left\{\frac{1}{y_{cr}^2}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m+1} e^{-\frac{m}{m+1}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m+1}}\left[1-\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m+1}\right]\right\}.$$

Die Gl. (15) ist graphisch als Zeitfunktion für einige m - Werte in Abb. 6 wiedergegeben. Das Maximum der Kurven wächst gleichzeitig mit dem kinetischen Exponenten.

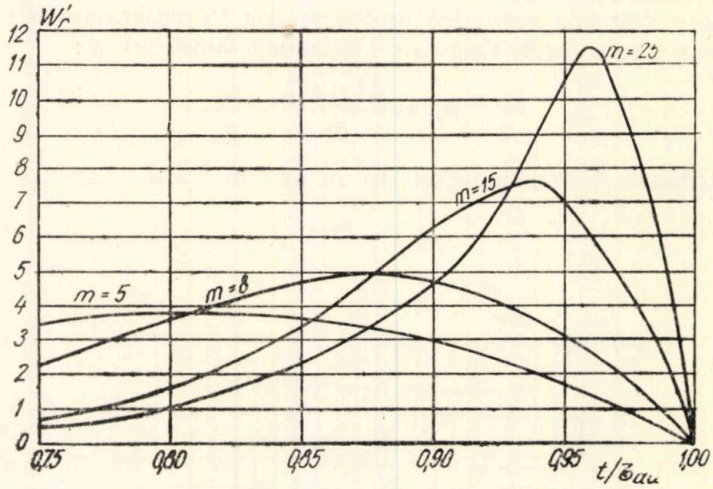


Abb. 6

3. Die Bedeutung des kinetischen Exponenten m und der Dauer τ_{aa} in der quantitativen Kennzeichnung der Vorreaktionen im Ladungsrest

Wie aus den Gl. (2), (7) und (11) ersichtlich ist, bestimmt der kinetische Exponent eindeutig die Grössen y_{cr}, w_{cr} und $w_{r\,cr}$ und folglich kann dieser noch als Exponent des kritischen Verbrauchs an Kraftstoff oder Exponent der kritischen Reaktionsgeschwindigkeit benannt werden.

Die Bildungsgeschwindigkeit der effektiven Zentren ist [1]:

$$w_{ef} = Dt^m, \tag{16}$$

in welcher D ein Proportionalitätsfaktor ist

$$D = \frac{C}{a}. \tag{17}$$

Nach [1] ist:

$$C = \frac{m}{\tau_{aa}^{m+1}}. \tag{18}$$

Folglich ist:

$$D = \frac{m}{a\,\tau_{aa}^{m+1}} \quad \text{und} \quad (20) \quad w_{ef} = \frac{m t^m}{a\,\tau_{aa}^{m+1}}. \tag{19}$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dass der kinetische Exponent nicht mit Null gleich sein kann, weil in diesem Falle auch $w_{ef} = 0$ und folglich keine Vorreaktionen stattfinden. Die Schlussfolgerung ist, dass die Vorreaktionen nicht der Nullordnung entsprechen können.

Der kinetische Exponent kann ebenso keine negativen Werte annehmen, weil in solchen Fällen die Bildungsgeschwindigkeit der effektiven Zentren nicht mehr eine stetig wachsende Funktion während der Reaktionsdauer sein kann. Wie wir in der vorherigen Veröffentlichung [1] gezeigt haben, kann der Exponent m Werte zwischen 5...70 annehmen. Der Wert dieses Exponenten beeinflusst die Veränderungsgeschwindigkeit der Funktion $y = f(t)$. In doppelt logarithmischen Koordinaten ist diese Funktion eine Gerade mit der Steigung $A = m + 1$.

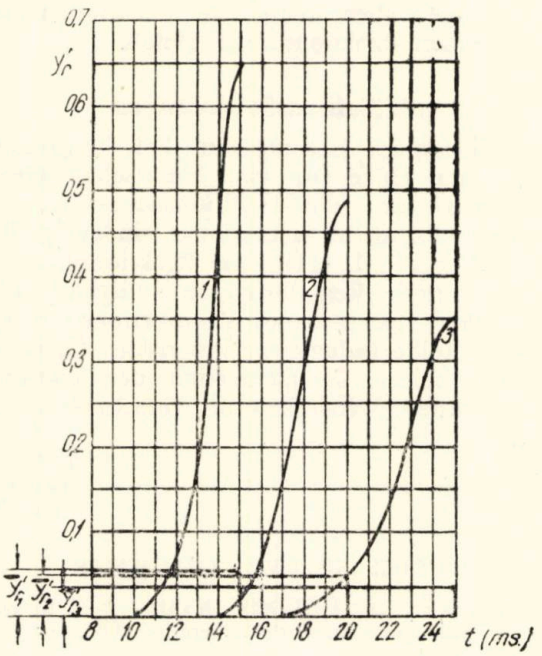


Abb. 7

Die zweite kinetische Grösse der Vorreaktion im Ladungsrest bei klopfender Verbrennung, die Dauer der Vorreaktion τ_{aa} (der pauschale Zündverzug des Ladungsrestes) berechnet man von einem gewissen willkürlich gewählten Zeitpunkt der einem KW von 60° vor dem o. T. entspricht [1].

Diese Reaktionsdauer kann man als eine umgekehrte mittlere Geschwindigkeit des Zunehmens der reduzierten Konzentration in Zwischenprodukten deuten.

So zeigt die Reaktionsgeschwindigkeit

$$y_r' = \frac{\mathrm{d}(y/y_{cr})}{\mathrm{d}t}, \tag{21}$$

dass beim Reaktionsende ($t = \tau_{aa}$), y gleich y_{cr} ist und folglich eine mittlere Reaktionsgeschwindigkeit durch Gl. (22) ausgedrückt werden kann :

$$\bar{y}_r' = \frac{1}{\tau_{aa}}. \tag{22}$$

In der Abb. 7 sind die $\bar{y}_r'$- (Gl. (22)) als Zeitfunktion sowie die y_r'- Werte (Gl. (21)) für einen kinetischen Exponenten $m = 15$ mit verschiedener Reaktionsdauer τ_{aa} wiedergegeben. Die mittleren Reaktionsgeschwindigkeiten $\bar{y}_r'$ bleiben aber auch für Reaktionen mit verschiedenen Exponenten und derselben Reaktionsdauer gleich.

4. Schlussfolgerungen

1. Die Vorreaktionen im Ladungsrest bei klopfender Verbrennung können mathematisch mit Hilfe von zwei kinetischen Grössen — den kinetischen Exponenten m und die Reaktionsdauer τ_{aa} — gekennzeichnet werden. Der kinetische Exponent m bestimmt eindeutig die Werte y_{cr} (Gl. (2)), w_{cr} (Gl. (7)) und w_{rcr} (Gl. (11)). Die Reaktionsdauer τ_{aa} kann man als eine umgekehrte mittlere Reaktionsgeschwindigkeit (Gl. (22)) deuten.

2. Um den Verlauf verschiedener Vorreaktionen vergleichend auszudrücken, werden eine Reihe reduzierter kinetischer Grössen eingeführt, die es ermöglichen, die reduzierte Konzentration der Zwischenprodukte und die reduzierte Reaktionsgeschwindigkeit bei verschiedenen Arbeitsbedingungen zu bestimmen.

Eingegangen am 9 III 1969

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Wärmetechnik
und Wärmekraftmaschinen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Peretz D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1–2*, S. 493–508.
2. Mc Pherson a. o., Soc. Automat. Engrs., Preprint, 1958, pp. 1–12.

ECUAŢII CINETICE PENTRU REACŢIILE DE PREDETONAŢIE DIN AMESTECUL FINAL ÎN MOTOARELE CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE

(Rezumat)

Reacţiile de predetonaţie din amestecul final se pot caracteriza analitic prin doi parametri cinetici — exponentul cinetic m şi durata reacţiei de predetonaţie τ_{aa}. Exponentul cinetic m determină univoc valorile consumului critic de combustibil y_{cr} (2), viteza critică de reacţie w_{cr} (7) şi viteza critică w_{rcr} (11). Durata reacţiei τ_{aa} se poate interpreta ca inversa vitezei medii de reacţie (22).

Pentru compararea modului de evoluţie a diferitelor reacţii de predetonaţie în diferite condiţii de lucru se propun o serie de mărimi cinetice privind atît concentraţia redusă în compuşi intermediari de oxidare din amestecul final cît şi viteza redusă de reacţie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 536.8

SUPAPĂ CU ACŢIONARE RAPIDĂ PENTRU PRELEVAREA PROBELOR DE GAZ

DE

MARCEL GUTMAN şi LAURENŢIU TURIC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Braşov, din 6—7 decembrie 1968

1. Introducere

Pentru cercetarea unor procese care au loc în motoarele cu ardere internă, ca de exemplu: procesul arderii, procesul de evacuare-umplere la motoarele în 2 timpi, procesul de încărcare uniformă a cilindrilor la motoarele policilindrice, etc., este necesară prelevarea unor probe de gaz din cilindrii motoarelor într-un interval de timp foarte scurt, interval cu atît mai scurt cu cît motorul este de turaţie mai ridicată.

În acest scop au fost propuse mai multe tipuri de supape, dintre care majoritatea puteau fi utilizate pentru motoare cu turaţie relativ mică. Astfel, pentru prelevarea produselor rezultate la un proces de ardere, Levedahl a propus o supapă acţionată printr-un cilindru de presiune şi un declanşator electromagnetic, iar Downs a propus „supapa tip Ricardo", care utilizează forţa unui arc şi a unui electromagnet. Donahue a utilizat supape mici cu taler acţionate de un mecanism de antrenare pentru studiul distribuţiei amestecului, iar Bartholomew şi Cooper au folosit pentru acelaşi scop supape acţionate în mod asemănător de forţa unui arc şi de o forţă magnetică.

Pentru măsurarea randamentului baleiajului motoarelor în 2 timpi, Naegel şi Drinkwater au utilizat supape mecanice ce permiteau prelevarea unor cantităţi foarte mici de gaz (mai puţin decît 0,3 cm^3) la motoare cu turaţie mai mică de 2400 rot/min [1].

Diferite tipuri de supape au mai fost utilizate de Mazing, Lebedeev, Hovach, Neuman, Withrow şi Boyd, Egerton, Inozemţev şi Koşchin, Garner, Orlin, Mizerniuc, Roganov etc., iar la noi în ţară de Dănescu [2], [3].

O supapă de prelevat probe de gaz pentru măsurarea randamentului baleiajului la motoarele în 2 timpi cu turaţie mare este propusă de Tsuyashi Asanuma şi Shigeru Yanaginara [1]. Aceştia propun supape electromagnetice atît de tipul cu ac cît şi de tipul cu taler (în funcţie de presiunea gazului din cilindru) la

care curentul necesar comenzii ridicării supapei se obţine cu ajutorul descărcării unui condensator prin intermediul unui tiratron, la un anumit interval fixat printr-un numărător electronic de turaţie.

În vederea prelevării probelor de gaze necesare studierii proceselor motoarelor cu ardere internă cu o turaţie pînă la 3 000 rot/min, Burghardt [4] a propus o supapă cu acţionare hidraulică cu o durată extrem de scurtă a deschiderii, însă cu care trebuie prelevate probele de gaze la un număr consecutiv de cicluri de funcţionare pentru a se putea atinge doza necesară analizei.

Autorii au realizat o supapă cu ac a cărei formă constructivă este ameliorată faţă de cea construită de Tsuyashi Asanuma şi Shigeru Yanaginara, realizînd totodată o schemă electronică de comandă îmbunătăţită la care tiratronul este înlocuit cu un tiristor.

În cele ce urmează se descriu supapa, schema electronică şi se expun totodată unele rezultate obţinute în timpul experimentării supapei.

2. Descrierea supapei

Supapa electromagnetică de tipul cu ac, realizată, este reprezentată în fig. 1.

Faţă de supapa cu ac, prezentată în lucrarea [1], ea prezintă avantajul că atît scaunul cît şi ghidajul tijei supapei constituie o singură piesă notată cu *a* în figură. De asemenea s-a căutat ca secţiunea miezului de fier deci şi inducţia să rămînă aproximativ constante în lungul circuitului magnetic.

Bobina montată în interiorul piesei notată cu *b* este constituită din cca 163 spire de sîrmă din cupru de 0,6 mm.

Elementul asupra căruia acţionează forţa magnetică atunci cînd se comandă deschiderea supapei este un pistonaş din fier fără remanenţă, solidarizat cu tija de închidere a supapei.

Prin rotirea corespunzătoare a capacului *C* care limitează cursa acestui pistonaş, se variază cursa tijei supapei de la 0 la 0,5 mm. Secţiunea de scurgere a gazului prin intervalul dintre scaun şi supapă, la ridicarea maximă a acesteia, este de cca 5,5 mm^2.

Supapa este apăsată pe scaunul ei cu ajutorul unui resort elicoidal, a cărei forţă de apăsare se reglează atît în funcţie de presiunea maximă din cilindru, cît şi în funcţie de durata dorită a deschiderii supapei. La experienţele efectuate, forţa de apăsare a resortului a fost variată între 13,4 kgf şi 21,0 kgf. La o forţă de apăsare a resortului de 21,0 kgf, supapa poate fi utilizată pentru prelevări de probe de gaz din cilindrii motoarelor la care se atinge o presiune maximă $p_z = 70$ kgf/cm^2.

Forţa maximă de atracţie pentru o tensiune de 97 V la bornele bobinei, cînd curentul maxim de descărcare atinge cca 45 A, se apreciază la cca 22 kgf.

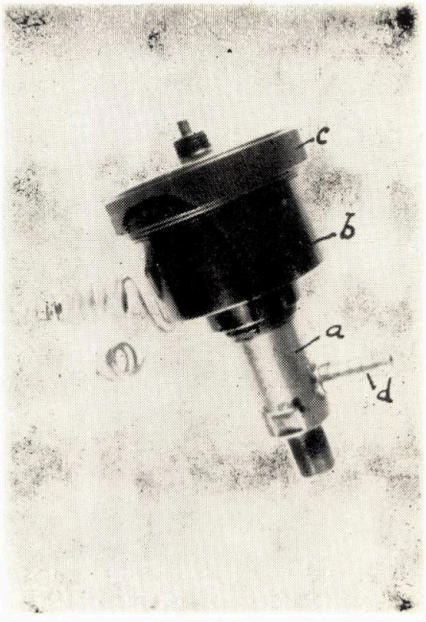


Fig. 1. — Supapa cu ac realizată.

Trebuie subliniat faptul că unele elemente ale ansamblului supapei prezentate necesită o prelucrare foarte îngrijită. Astfel, jocul dintre partea de ghidare a supapei şi bucşa de ghidare respectivă este de cca 0,002...0,004 mm. La fel trebuie prelucrat cu atenţie scaunul şi acul de închidere a supapei. De asemenea trebuie asigurat un joc suficient între tija supapei şi pistonaş, deoarece în caz contrar există pericolul unei solicitări la încovoiere a tijei supapei în timpul ridicării acesteia, dacă suprafaţa interioară a piesei *b* în care glisează pistonaşul nu este perfect coaxială cu bucşa de ghidare a supapei, ceea ce ar atrage scăpări nedorite de gaz prin supapă.

Singurele piese care comportă un oţel de bună calitate şi care trebuie tratate termic, sînt corpul supapei *a* şi supapa. Aceste piese s-au confecţionat din RUL 3 şi s-au călit.

Gazele sînt evacuate din supapă prin ştuţul *d*. Răcirea corpului supapei este realizată cu ajutorul unei serpentine din ţeavă de cupru prin care circulă apa de răcire şi care înfăşoară suprafaţa exterioară a piesei *a*.

3. Sistemul electronic de comandă

Deoarece cantitatea de gaz prelevată cu ajutorul acestei supape este uneori insuficientă pentru a fi analizată, mai ales la durate mici de deschidere şi curse mici ale supapei, este necesară prelevarea succesivă în mai multe cicluri de funcţionare, pînă se atinge cantitatea dorită. Marea majoritate a supapelor de prelevare cunoscute au dezavantajul că permit prelevarea la cicluri succesive de funcţionare, ceea ce conduce la o abatere de la funcţionarea reală mai ales la motoarele cu cilindree redusă şi cînd cantitatea de gaz prelevată pe ciclu este importantă în raport cu volumul total al cilindrului. Din acest motiv, comanda deschiderii supapei se realizează prin intermediul unui numărător electronic de turaţii, care permite deschiderea succesivă a supapei la intervale suficient de mari (100...150 cicluri), astfel încît prelevarea probei de gaz dintr-un ciclu să nu mai poată influenţa funcţionarea motorului în timpul ciclului cînd are loc următoarea prelevare a gazului; momentele deschiderii şi închiderii supapei sînt aceleaşi la toate prelevările pentru o anumită determinare.

În fig. 2 sînt reprezentate schematic elementele componente ale instalaţiei electronice de comandă a deschiderii supapei la intervalul de cicluri dorit, precum şi la un anumit unghi de avans sau întîrziere în raport cu P.M.S.

Pe arborele cotit al motorului s-a montat discul *1*, prevăzut cu o fantă circulară în dreptul căreia se află sursa luminoasă într-o parte, iar în cealaltă parte fotodioda 2. În felul acesta, la fiecare rota-

ţie a arborelui se obţine un impuls de comandă la ieşirea circuitului de amplificare, datorită variaţiei curentului în circuitul fotodiodei. Aceste impulsuri de la ieşirea circuitului de amplificare, comandă numărătorul electronic *4*.

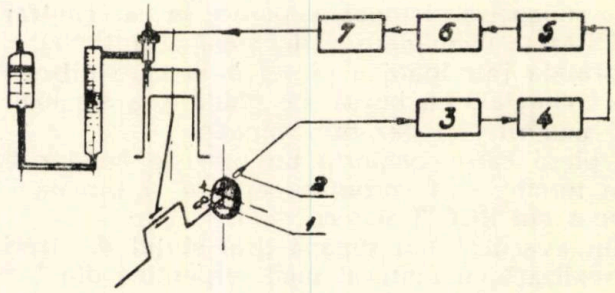


Fig. 2. — Schemă cuprinzînd elementele componente ale instalaţiei electronice de comandă a supapei.
1 — disc cu fantă; *2* — fotodiodă; *3* — circuit de amplificare; *4* — numărător; *5* — circuit de temporarizare; *6* — monostabil pentru formarea impulsurilor de aprindere; *7* — circuit de putere.

Numărătorul executat, este în baza 2, fiind format din 9 bistabile, putînd astfel executa comenzi la una din următoarele turaţii: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 şi 512. Ieşirile ultimelor 4 bistabile ale numărătorului, care prezintă interes pentru scopul propus, sînt legate la un comutator cu mai multe poziţii. Semnalul de la comutator, care se succede la un număr *n* de rotaţii, funcţie de poziţia la care se fixează, comandă temporizatorul 5. Rolul acestuia este de a deplasa semnalul de comandă a deschiderii supapei cu un anumit interval de timp, pentru ca momentul declanşării să coincidă cu momentul corespunzător unui anumit punct dorit de pe ciclu.

Impulsurile de durată variabilă generate de temporizator atacă monostabilul de comandă a tiristorului din schema circuitului de putere. Monostabilul de comandă a tiristorului generează un impuls negativ de durată determinată, suficientă pentru trecerea sigură în conducţie a tiristorului.

Circuitul de putere este alimentat de la un redresor monofazat în punte, al cărui transformator este prevăzut cu prize în secundar pentru reglajul tensiunii redresate. Tensiunea de la ieşirea redresorului se aplică unei baterii de condensatoare prin intermediul unui circuit electronic.

Prin manevrarea corespunzătoare a unor întrerupătoare se pot introduce sau scoate din circuit anumiţi condensatori din bateria de condensatoare sus amintită.

La aplicarea impulsului pozitiv la grila tiristorului, acesta este pus în conducţie şi condensatoarele puse în circuit se descarcă pe bobina supapei, realizînd comanda de ridicare. Valorile capacităţilor condensatoarelor introduse în circuit sînt, aşa cum se va vedea în continuare, funcţie de: forţa de apăsare a resortului supapei, cursa acesteia şi durata totală de deschidere.

Între momentul în care fanta discului 2 trece prin dreptul fotodiodei şi momentul în care începe ridicarea supapei (raportat numai la ciclul în care numărătorul generează impulsul funcţie de intervalul ales), există un interval de timp, care, pentru o turaţie dată depinde de forţa de apăsare a arcului supapei, cursa acesteia, valoarea capacităţilor condensatoarelor în circuit, tensiunea de lucru şi presiunea din interiorul cilindrului. Acest interval de timp s-a determinat experimental pentru cîteva regimuri de funcţionare.

O dată cunoscut acest interval de timp, ce poate fi denumit întîrziere la deschiderea supapei în raport cu momentul de comandă al fotodiodei, se fixează exact momentul începerii deschiderii supapei corespunzător unui anumit punct de pe ciclu, fie prin rotirea corespunzătoare cu un anumit număr de grade a discului prevăzut cu fantă fixat pe arborele cotit, fie lăsînd neschimbată poziţia discului dar reglînd în mod corespunzător temporizatorul şi deplasînd astfel semnalul cu numărul de grade dorit.

Din analiza literaturii de specialitate rezultă că aici s-a utilizat pentru prima dată o schemă electronică bazată pe folosirea unui tiristor pentru comanda unei supape electromagnetice destinată prelevării probelor de gaz.

În ceea ce priveşte avantajul utilizării tiristorului în locul tiratronului, trebuie menţionate durata mare de folosinţă, micşorarea inerţiei, tensiunea reziduală de conducţie mult mai redusă, lipsa surselor de filament, comportarea mai bună la suprasarcini, simplitatea mai mare a instalaţiei şi gabaritul mai redus.

Ansamblul instalaţiei electronice realizate pentru comanda deschiderii supapei este prezentat în fig. 3.

4. Caracteristicile supapei

Avînd în vedere că pentru diversele scopuri în care se poate utiliza supapa prezentată, acţionată de instalaţia electronică descrisă, trebuie să se cunoască în mod precis întîrzierea la deschiderea supapei, durata totală de deschidere şi debitul de gaz prelevat funcţie de forţa de apăsare a resortului, cursa supapei, presiunea gazului în

amonte de supapă şi valoarea capacităţii condensatoarelor din circuit, s-au stabilit unele dintre aceste caracteristici ale supapei, folosind un grup compresor prevăzut cu un rezervor tampon, un tub gradat din sticlă pentru măsurarea debitului de gaz prelevat, un traductor de cursă cu fotocelulă, un oscilograf etc. În fig. 4 este redată instalaţia experimentală utilizată pentru determinarea acestor caracteristici.

Pentru obţinerea oscilogramelor de ridicare a supapei, de aceasta s-a fixat elementul mobil al traductorului de cursă, prevăzut cu fantă.

Baza de timp s-a fixat pe osciloscop prin baleierea lui pe o lungime corespunzătoare lui 180°, aceasta realizîndu-se cu ajutorul unei fotodiode cu amplificatorul respectiv şi a unui disc prevăzut cu două găuri aşezate diametral, pe acelaşi diametru pe care se află şi gaura pentru comanda supapei; discul este montat pe axul unui motor electric cu turaţia de 3 000 rot/min.

În cazul duratelor mai mari ale deschiderii supapei, s-a folosit pentru baleiajul osciloscopului semnalul dat de către fotodioda utilizată pentru comanda supapei, lungimea de baleiere fiind în acest caz corespunzătoare lui 360°.

În fig. 5 sînt prezentate 6 oscilograme ale ridicării supapei. După cum se observă, timpul total de deschidere a supapei pentru aceste experienţe variază între cca 2,2...13,6 m sec.

Astfel, de pildă, pentru cercetarea baleiajului la un motor în doi timpi se alege regimul de funcţionare a supapei corespunzător deschiderilor totale mai reduse în cazul în care trebuie prelevate probe de gaz în timpul destinderii, iar pentru prelevarea de probe în perioada compresiunii se alege regimul de funcţionare ce permite atît curse mai lungi cît şi durate mai mari de deschidere a supapei.

În fig. 6 sînt prezentate 3 oscilograme ce reprezintă variaţia curentului de descărcare prin bobina supapei, în funcţie de timp, pentru diferite valori ale capacităţilor condensatoarelor de descărcare.

De asemenea, s-au efectuat şi măsurători privind cantitatea de gaz prelevată. În acest scop s-a utilizat cilindrul gradat de la analizatorul Orsat, umplut în prealabil cu apă, aerul dislocînd volumul corespunzător de apă.

Cu ajutorul instalaţiei experimentale din fig. 4, presiunea aerului comprimat s-a variat între 1 şi 8 at.

În fig. 7 s-a reprezentat variaţia debitului de aer prelevat în funcţie de presiunea în amonte de supapă, pentru o cursă a supapei de 0,278 mm în următoarele două situaţii: 1) condensatoarele se descarcă numai pe bobina supapei; 2) în paralel cu bobina supapei s-a montat o rezistenţă de 30 Ω. Se observă variaţia liniară a debitului cu presiunea pentru valori date ale cursei şi capacităţii.

În fig. 8 se prezintă variaţia debitului de aer prelevat în funcţie de cursa supapei pentru cazul montării în paralel cu bobina supapei a unei rezistenţe de 30 Ω, la următoarele valori ale capacităţii forţei

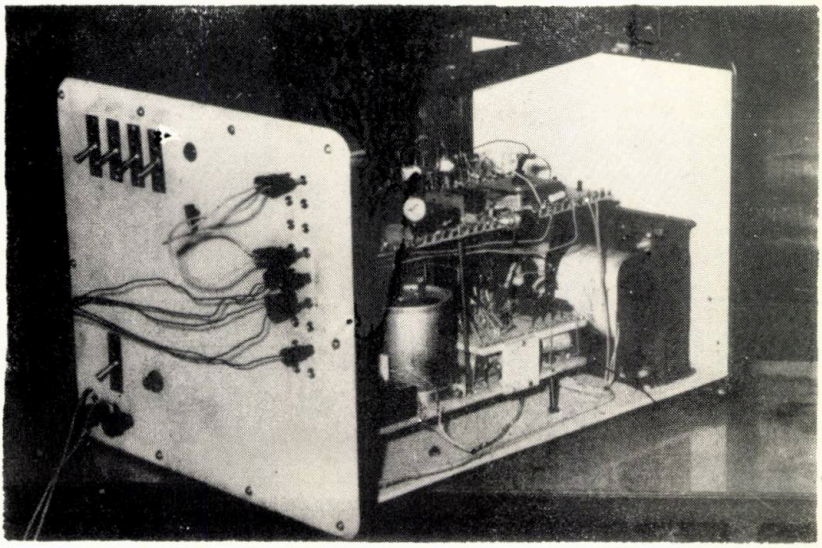


Fig. 3. — Instalația electronică realizată pentru comanda deschiderii supapei.

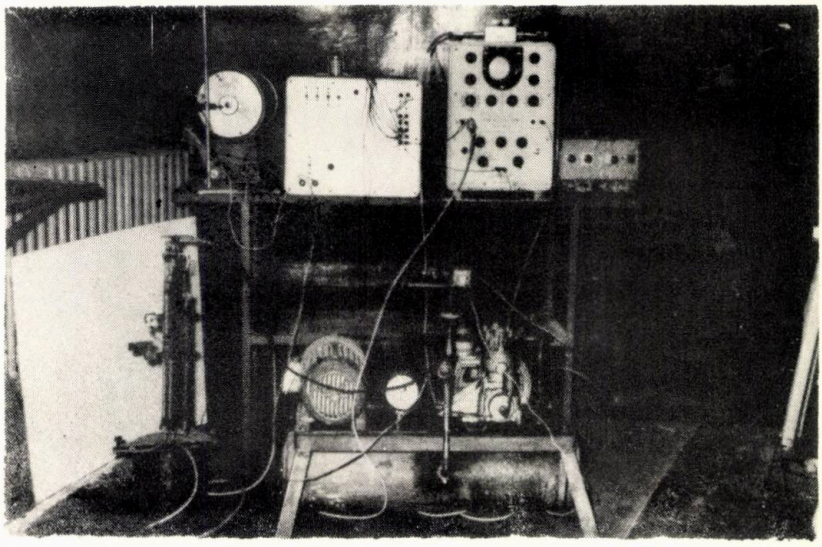
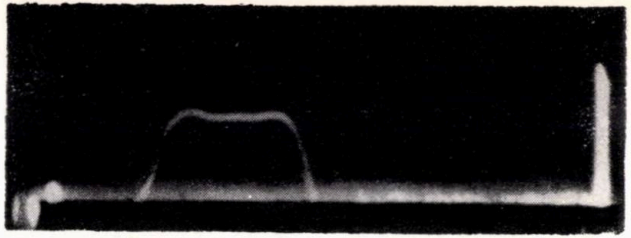
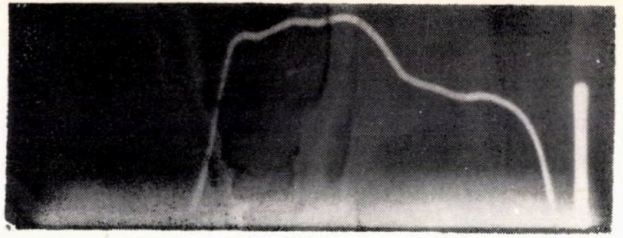


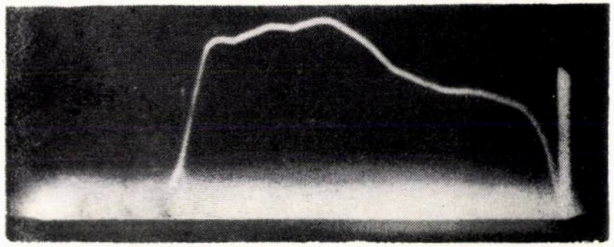
Fig. 4. — Instalația experimentală utilizată pentru determinarea caracteristicilor supapei.



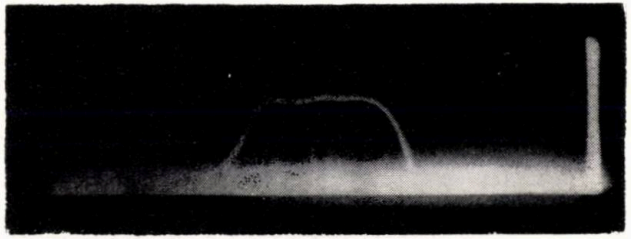
a — $F=21$ kgf, $p=7$ kgf/cm², $C=135$ μF, $s=0{,}175$ mm, $T_t = 2{,}5\ 10^{-3}$ sec.



b — $F=21$ kgf, $p=7$ kgf/cm², $C=180$ μF, $s=0{,}247$ mm, $T_t = 2{,}5\ 10^{-3}$ sec.

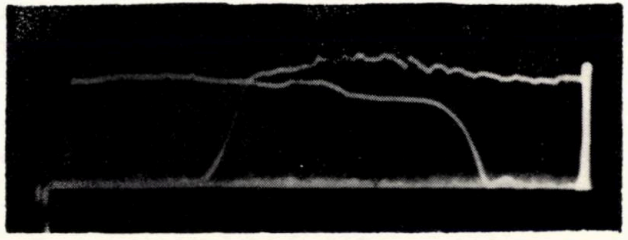


c — $F=21$ kgf, $p=7$ kgf/cm², $C=180$ μF, $s=0{,}234$ mm, $T_t = 6{,}9\ 10^{-3}$ sec.



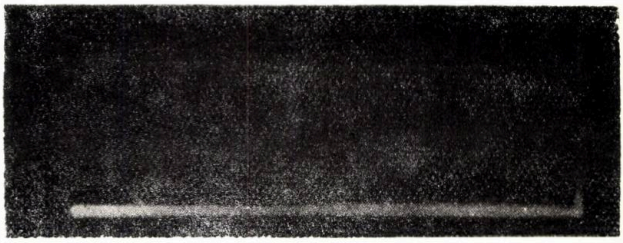
d — $F=21$ kgf, $p=7$ kgf/cm², $C=90$ μF, $s=0{,}87$ mm, $T_t = 2{,}22\ 10^{-3}$ sec.

e — $F=21$ kgf, $p=7{,}6$ kgf/cm², $C=270$ μF, $s=0{,}37$ mm, $T_t = 11{,}3\ 10^{-3}$ sec (bobina supapei montată în paralel cu o rezistență de 30 Ω).

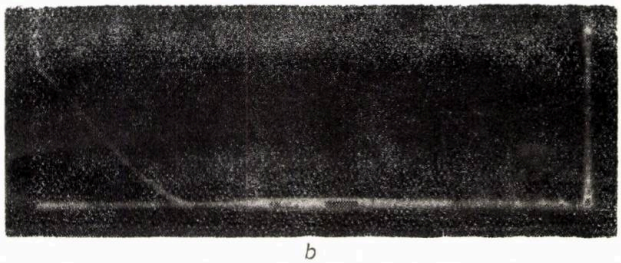


f — $F=21$ kgf, $p=7$ kgf/cm², $C=315$ μF, $s=0{,}432$ mm, $T_t = 13{,}6\ 10^{-3}$ sec (bobina supapei montată în paralel cu o rezistență de 30 Ω).

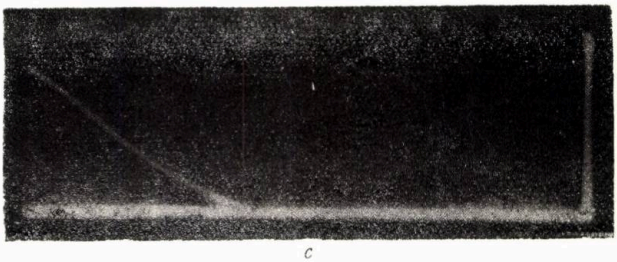
Fig. 5. — Oscilograme ale ridicării supapei pentru diverse regimuri de funcționare. F — forța de apăsare a resortului; p — presiunea aerului comprimat în amonte de supapă; s — cursa supapei; C — capacitatea condensatoarelor din circuit; T_t — timpul total de deschidere.



a



b



c

Fig. 6. — Oscilograme ale variației curentului de descărcare prin bobina supapei în funcție de timp, pentru diferite valori ale capacităților condensatoarelor de descărcare: *a* — $C = 90$ μF; *b* — $C = 225$ μF; *c* — $C = 360$ μF

resortului și presiunii aerului comprimat: $C=270\,\mu F$, $F=21$ kgf, $p=7{,}5$ kgf/cm^2. Este interesant de remarcat că pentru anumite valori ale lui C, F și p debitul de aer prelevat atinge un maxim la o anumită valoare a cursei, după care începe să scadă deși cursa se mărește în

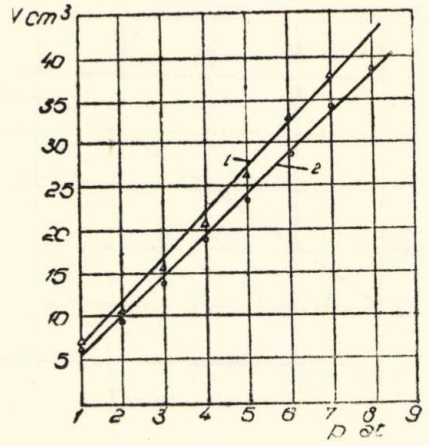


Fig. 7. — Variația debitului de aer prelevat în funcție de presiunea acestuia pentru $s=0{,}278$ mm, $F=21$ kgf; $C=225$ μF.
1 — condensatoarele se descarcă prin bobina supapei; *2* — bobina supapei este montată în paralel cu o rezistență de 30Ω.

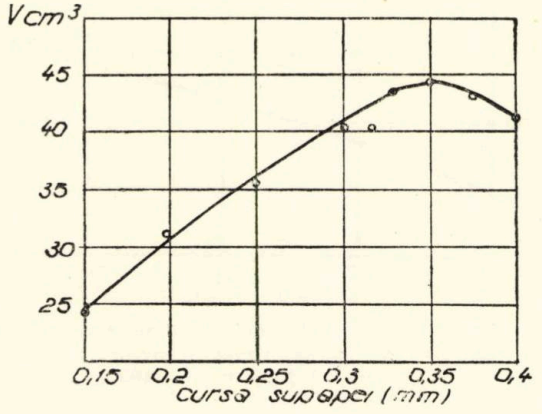


Fig. 8. — Variația debitului de gaz prelevat în funcție de cursa supapei pentru cazul montării supapei și pentru $F=21$ kgf, $p=7{,}5$ kgf/cm^2, $C=270$ μF.

continuare. Acest lucru se explică prin faptul că, cu cît cursa este mai mare, cu atît este mai mare şi intervalul de aer dintre pistonaşul din fier fără remanenţă şi capacul supapei, producînd astfel creşterea reluctanţei circuitului magnetic şi deci micşorarea forţei de atracţie, ceea ce atrage micşorarea timpului secţiune disponibil al supapei

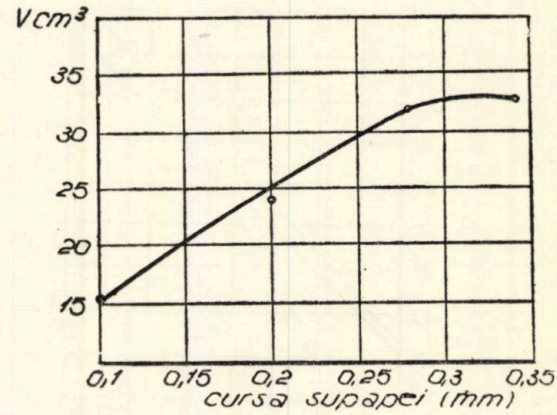


Fig. 9. — Variaţia debitului de aer prelevat în funcţie de cursa supapei în cazul montării unei rezistenţe de 30 Ω în paralel cu bobina supapei, pentru $F=21$ kgf, $p=7{,}5$ kgf/cm², $C=225$ μF.

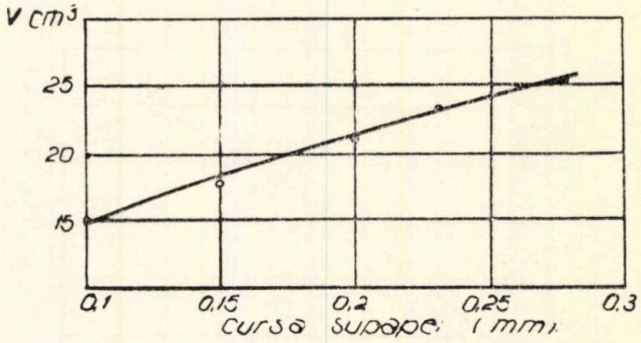


Fig. 10. — Variaţia debitului de aer prelevat în funcţie de cursa supapei pentru $F=21$ kgf, $p=7{,}5$ kgf/cm², $C=180$ μF.

În fig. 9 şi 10 este redată de asemenea, variaţia debitului de gaz prelevat în funcţie de cursa supapei, pentru diverse valori ale lui C, F şi p.

5. Concluzii

1. Se utilizează pentru comanda supapei o schemă electronică incluzînd un tiristor pentru circuitul de putere, ce prezintă toate avantajele generale pe care le implică utilizarea tiristorilor.

2. Durata de deschidere a supapei poate fi variată între limite largi; în cadrul experienţelor efectuate limitele au fost cuprinse între 2,2...13,6 msec.

3. Durata de deschidere a supapei poate fi reglată acţionînd simultan sau separat asupra cursei, forţei de apăsare a arcului şi valorii capacităţii condensatorilor din circuit. Reglajul cel mai simplu s-a obţinut prin modificarea valorii capacităţilor condensatorilor din circuit.

4. Momentul de deschidere al supapei poate fi fixat chiar în timpul funcţionării motorului, acţionînd în mod corespunzător temporizatorul.

5. Volumul de gaz prelevat pe ciclu se poate regla corespunzător valorii volumului cilindrului.

6. Prelevarea gazului într-un ciclu nu este perturbată de prelevarea anterioară, datorită numărătorului care comandă deschiderea la intervale de 100...150 cicluri, sau chiar mai mult.

7. Supapa prezentată permite studiul coeficientului de baleiaj la motoarele în 2 timpi, studiul efectului de purjare la motoarele în 4 timpi de turaţie ridicată şi cu suprapunere mare a deschiderii supapelor, determinarea gradului de uniformitate a încărcăturii cilindrilor la motoarele policilindrice, studiul proceselor de ardere la motoarele de mare turaţie etc.

8. Schema de comandă realizată poate servi şi pentru alte tipuri de supape ce s-ar construi pentru scopurile arătate mai sus.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de motoare termice
şi
Catedra de fizică şi electronică

BIBLIOGRAFIE

1. Asanuma T., Yanaginara S., *Gas Sampling Valve for Mearuring Scavenging Efficiency in High-Speed Two-Stroke Engines.* SAE Trans., 1962.
2. Dănescu Al., *Contribuţiuni la studiul arderii în motoarele cu cap incandescent.* Lucrare de dizertaţie, Bucureşti, 1961.
3. Орлин А. С., Круглов М. Г., *Двухтактные двигатели.* М., 1960.
4. Burghardt K., *Ventil zur Entnahme von Gasproben aus dem Brennraum schnellaufender Verbrennungskraft-maschinen.* Kraftfahrzeugtechnik, 1962, 1.

SCHRELLGESTEUERTES FÜR GASPROBENENTNAHME

(Zuzammenfassung)

Es wurden Versuche das Ventil bei verschiedenen Betriebsbedingungen zu gesteuertes Nadelventil beschrieben.

Damit der normale Lauf des Motors ungestört bleibt und auch die Gaszusammensetzung sich nicht verändert, erlaubt der elektronische Zähler der Steuerung das Öffnen des Ventils nur in Abständen von 120—250 Umdrehungen.

Es wurden Versuche das Ventil bei verschiedenen Betriebsbedingungen zu prüfen durchgeführt und zwar hinsichtlich des Gasdrucks vor dem Ventil (und Ausströmung bei Atmosphärendruck), des Ventilstangenhubs und der Federspannung.

Das Ventil erlaubt den Spülvorgang bei zweitakmotoren zu verfolgen, die Spülwirkung in schnellen Viertaktmotoren, bei welchen die Einlass- und Auslassventile eine langere Dauer gleichzeitig offen bleiben zu bestimmen, die Landungsgleichmässigkeit bei Motoren mit grossem Hubrauminhalt festzustellen, sowie Untersuchungen der Verbrennungsprozese vorzunehmen.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. — Nadelventil für Gasproben.

Abb. 2. — Die elektronische Steuerung des Ventils. *1* — Scheibe mit Schlitz; 2 — Photodiode; 3 — Verstärker; 4 — Zähler; 5 — Zeitverzögerungskreis; 6 — Stromimpuls für den Thyrisor; 7 — Leistungskreis.

Abb. 3. — Elektronische Anlage der Ventilsteuerung.

Abb. 4 — Versuchsanlage für die Ventilprüfung.

Abb. 5. — Oszillogramme der Ventilarbeit für verschiedene Betriebsbedingungen.

Abb. 6. — Oszillogramme des Entladungstroms durch die Ventilspule als Zeitfunktion für verschiedene werte der Entladungskondensatoren.

Abb. 7. — Die Veränderung der Lufturchflussmenge als Funktion des Luftdrucks. *1* — Der Kondensator entladet sich durch die Ventilspule; 2 — Die Ventilspule in Parallelschaltung mit einem Widerstand von 30 Ω.

Abb. 8 und Abb. 9. — Die Veränderung der Luftdurchflussmenge als Funktion des Ventilhubs. Die Ventilspule in Parallelschaltung mit einem Widerstand von 30 Ω.

Abb. 10. — Die Veränderung der Luftdurchflussmenge als Funktion des Ventilhubs.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 531.8

CONTRIBUŢII LA STUDIUL PE MODEL A CALITĂŢII DE MERS A LOCOMOTIVEI LDI CONSTRUITĂ DE „UZINELE 23 AUGUST"

DE

I. ZĂGĂNESCU şi C. URSU

1. Consideraţii generale

Studiul calităţii de mers a locomotivelor prezintă o importanţă deosebită, deoarece acceleraţiile verticale şi laterale ale construcţiei suspendate determină utilizarea greutăţii aderente, buna funcţionare a instalaţiei energetice, indicele de confort şi durata în serviciu.

În această lucrare se studiază cu ajutorul maşinilor analogice de calcul, calitatea de mers a locomotivei LDI construită de „Uzinele 23 August". Studiul se referă la oscilaţiile situate în planul vertical median longitudinal, cu considerarea numai a oscilaţiilor proprii, deoarece alegînd în mod arbitrar condiţiile iniţiale, se poate simula caracterul aleator al impulsurilor generate de cale.

2. Stabilirea gradelor de libertate

Pentru stabilirea gradelor de libertate, introducem următoarele ipoteze de calcul [1] : a) locomotiva circulă în aliniament şi palier; b) rigiditatea căii în plan vertical este infinită; c) masa cutiei se consideră concentrată în centrul de greutate; d) diametrul de rulare al roţilor este acelaşi, rularea făcîndu-se fără alunecare; e) modelul dinamic al locomotivei se consideră un sistem mecanic oscilator disipativ, asupra căruia nu acţionează forţe exterioare.

În felul acesta configuraţia modelului dinamic este cea din fig. 1.

Cutia de masă m execută următoarele mişcări: 1° o translaţie în lungul axei căii (coordonata x) : 2° o translaţie pe o direcţie perpendiculară pe planul căii (coordonata z); 3° o rotaţie în jurul unei axe orizontale determinată de intersecţia planului vertical median transversal cu planul orizontal longitudinal care conţine axele osiilor (coordonata φ).

Osiile montate, de masă m_0, execută mișcările: 4° o translație în lungul axei căii (coordonatele x_i; $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$); 5° o rotație în jurul axei proprii (coordonatele α_i; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$).

Presupunem că la momentul t modelul dinamic ocupă poziția din fig. 1. Masa m a executat translațiile $z + z^*$ și $x + x^*$ și rotația φ, iar masele m_0 — translațiile x_i și rotațiile α_i.

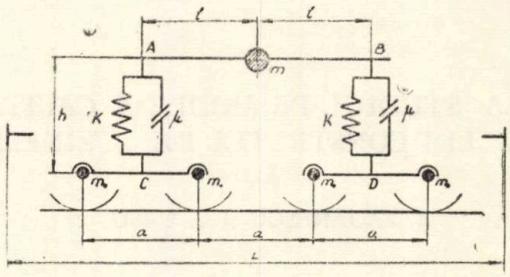


Fig. 1

Oscilațiile materialului rulant de cale ferată fiind considerate mici, mărimile z și x, care apar datorită rotației φ, se pot determina cu relațiile:

$$z^* = h(1 - \cos\varphi) \simeq h\varphi, \quad x^* \simeq h\varphi. \tag{1}$$

3. Ecuațiile diferențiale ale mișcării

Folosind ecuațiile lui Lagrange, ecuațiile diferențiale ale mișcărilor oscilatorii pot fi scrise sub forma:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{z} + a_{12}\ddot{\varphi} + \beta_{11}\dot{z} + c_{11}z = 0, \\ a^*_{22}\ddot{\varphi} + a_{12}\ddot{z} + \beta_{22}\dot{\varphi} + c_{22}\varphi = 0, \end{cases} \tag{2}$$

unde:

$$a^*_{22} = a_{22}\left(1 - \frac{a^2_{23}}{a_{22}a_{33}}\right).$$

Coordonata x fiind ciclică a fost eliminată.

Coeficienții inerțiali a_{ij} sînt definiți prin relațiile

$$a_{11} = m, \quad a_{12} = a_{23} = mh,$$

$$a_{22} = 8mh^2 + I_y, \quad a_{33} = m + 4n\frac{I_0}{D^2},$$

unde I_y, I_0 reprezintă momentele de inerţie al cutiei [3] şi respectiv al osiei montate, în raport cu axele de rotaţie care trec prin centrul de greutate, iar h — distanţa de la centrul de greutate al cutiei pînă la planul osiilor.

Coeficienţii de rigiditate c_{ij} au expresiile

$$c_{11} = 2K, \quad c_{22} = 2Kl^2 - G_0 h, \tag{4}$$

unde K este coeficientul de rigiditate aferent unui punct de suspendare (în plan); $2l$ — distanţa dintre punctele de suspendare; G_0 — greutatea construcţiei suspendate.

Coeficienţii de amortizare β_{ij} [4] sînt daţi de

$$\beta_{11} = 2\beta_1, \quad \beta_{22} = 2\beta_2 l^2 - G_0 h, \tag{5}$$

unde β_i este coeficientul de amortizare prin frecare vîscoasă corespunzătoare unui punct de suspendare (în plan); el se exprimă în funcţie de coeficientul de amortizare prin frecare uscată μ [5].

Din sistemul de ecuaţii (2) pot fi obţinute ecuaţiile diferenţiale ale oscilaţiilor independente. Rezultă astfel ecuaţia mişcării de săltare

$$a_{11}\ddot{z} + \beta_{11}\dot{z} + c_{11} z = 0 \tag{6}$$

şi respectiv a mişcării de galop

$$a^*_{22}\ddot{\varphi} + \beta_{22}\dot{\varphi} + c_{22}\varphi = 0. \tag{7}$$

Admiţînd că la momentul $t = 0$ condiţiile iniţiale sînt: $z = z_0$, $\dot{z} = 0$, $\varphi = \varphi_0$ şi $\dot{\varphi} = 0$, soluţiile ecuaţiilor (6) şi (7) se prezintă sub forma

$$z(t) = z_0 e^{-h_1 t} \cos \omega_1 t \tag{8}$$

şi

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-h_2 t} \cos \omega_2 t, \tag{9}$$

unde:

$$2h_i = \frac{\beta_{ii}}{a_{ii}}, \quad \omega_i^2 = \frac{c_{ii}}{a_{ii}}, \quad (i=1,2), \tag{10}$$

ultima reprezentînd patratul frecvenţei oscilaţiilor proprii.

4. Calculul acceleraţiilor

Să considerăm un punct M situat pe axa mediană longitudinală a locomotivei la distanţa x_M de axa verticală care trece prin centrul de greutate (fig. 1). Acceleraţia sa este

$$a_M = \ddot{z} + x_M \ddot{\varphi}. \tag{11}$$

Ţinînd cont de (8) şi (9), relaţia (11) devine

$$a_M = z_0 (h_1^2 + \omega_1^2) e^{-h_1 t} \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + \\ + x_M \varphi_0 (h_2^2 + \omega_2^2) e^{-h_2 t} \cos(\omega_2 t - \alpha_2), \tag{12}$$

unde:

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{2h_i}{h_i^2 - \omega_i^2}. \tag{13}$$

Cum în cazul vehiculelor de cale ferată $h_i^2 \ll \omega_i^2$ şi $\operatorname{tg} \alpha_i \simeq 0$, (12) devine

$$a_M = \omega_1^2 z_0 e^{-h_1 t} \cos \omega_1 t + x_M \omega_2^2 \varphi_0 e^{-h_2 t} \cos \omega_2 t; \tag{14}$$

ţinînd seama de (8) şi (9) rezultă

$$a_M = \omega_1^2 z(t) + x_M \omega_2^2 \varphi(t). \tag{15}$$

Pentru scopuri practice este însă necesar a se cunoaşte variaţia modulului acceleraţiilor verticale maxime. Această variaţie este determinată de înfăşurătoarea valorilor maxime ale curbei definită prin (17), care se poate scrie

$$(a_M)_{\max} = z_0 \omega_1^2 e^{-h_1 t} + x_M \omega_2^2 \varphi_0 e^{-h_2 t}. \tag{16}$$

5. Modelarea electronică a ecuaţiilor mişcării

Pentru ca ecuaţiile diferenţiale (6) şi (7) să poată fi modelate pe maşinile electronice, ele trebuie transformate în ecuaţii de maşină, introducînd pentru funcţiile z, φ şi variabila independentă t, următorii factori de scară:

$$Z = k_z z, \quad \Phi = k_\varphi \varphi, \quad \varepsilon = k_t t. \tag{17}$$

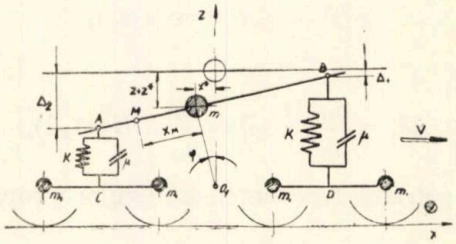


Fig. 2

În felul acesta cele două ecuaţii de maşină pot fi scrise sub forma:

$$\ddot{Z} = -A_1 \dot{Z} - B_1 Z, \quad \ddot{\Phi} = -A_2 \dot{\Phi} - B_2 \Phi. \tag{18}$$

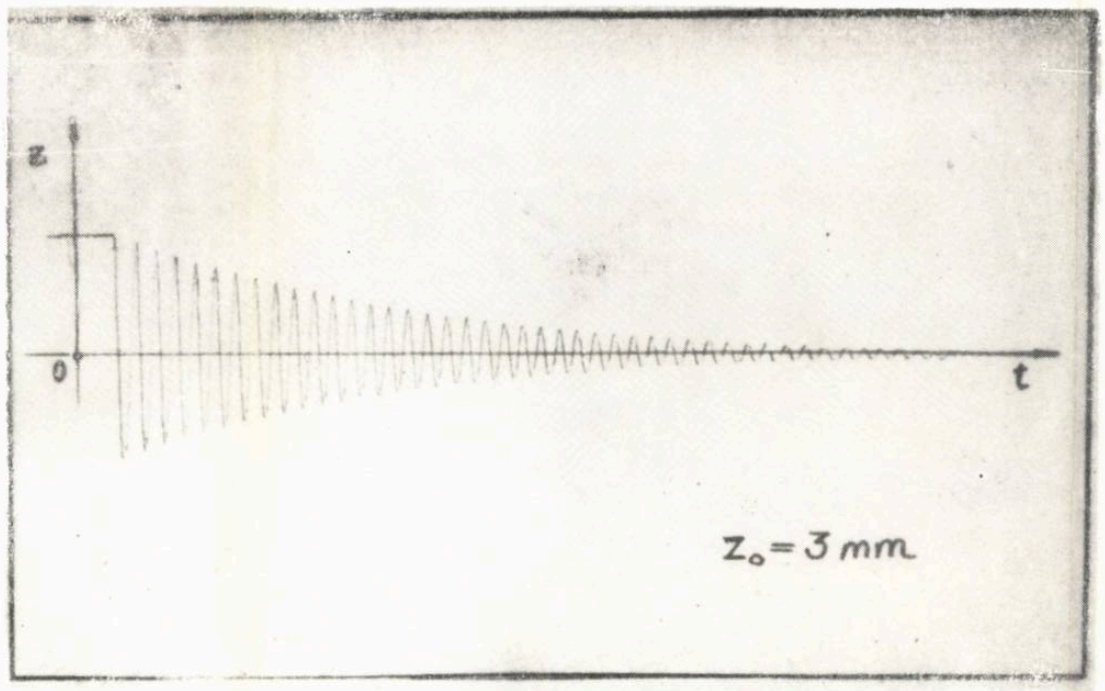


Fig. 4

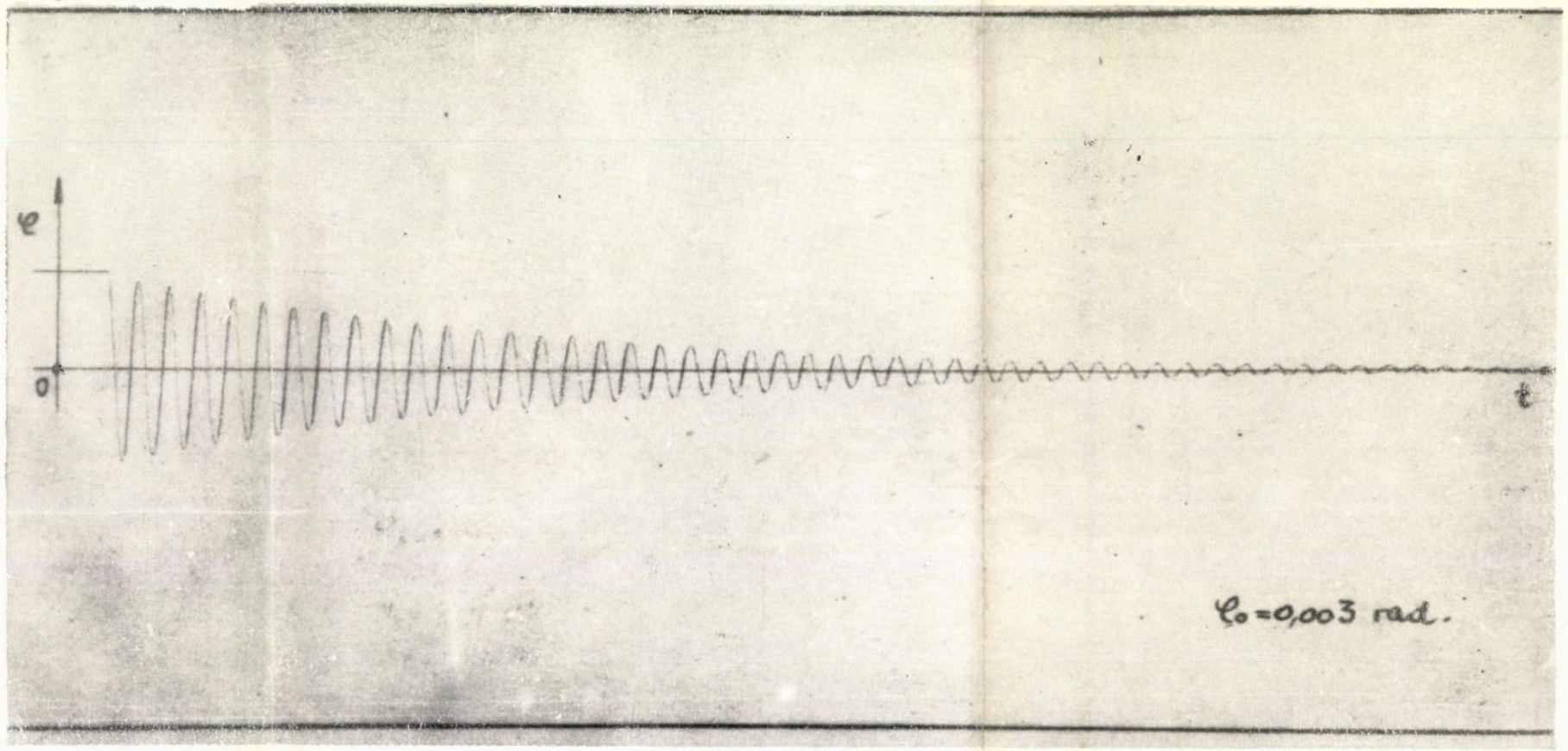


Fig. 5

Se observă că cele două ecuații de mașină sînt absolut identice, ele diferind numai prin valoarea coeficienților A_i și B_i, care pot fi determinați respectiv cu relațiile

$$A_i = \frac{\beta_{ii}}{k_t a_{ii}}, \quad B_i = \frac{c_{ii}}{k_t^2 a_{ii}}, \quad (i = 1, 2). \tag{19}$$

Modelul corespunzător ecuațiilor diferențiale (18) este reprezentat în fig. 2.

6. Aplicație numerică

Elementele geometrice și masice ale locomotivei LDI construită de „Uzinele 23 August" sînt următoarele: greutatea locomotivei, $G = 20\,000$ kgf; greutatea suspendată, $G_0 = 16\,600$ kgf; greutatea nesuspendată, $G_1 = 3\,400$ kgf; sarcina pe osie, $2Q = 5\,000$ kgf; greutatea unei osii montate, $2q = 850$ kgf; lungimea locomotivei peste tampoane, $L = 7{,}225$ m; înălțimea construcției suspendate, $H = 1{,}8$ m; lățimea locomotivei, $B = 2{,}38$ m; distanța dintre osii, $a = 1{,}00$ m; diametrul roților, $D = 0{,}750$ m; momentul de inerție al construcției suspendate, $I_y = 7\,400$ kgfm s²; distanța dintre centrul de oscilații și centrul de greutate $h = 0{,}85$ m; coeficienții inerțiali, $a_{11} = 1\,600$ kgf m^{-1} s², $a_{22} = 18\,688$ kgf m s²; coeficienții de amortizare, $\beta_{11} = 2\,902$ kgf m^{-1} s, $\beta_{22} = 14\,253{,}7$ kgf m s; coeficienții elastici, $c_{11} = 415\,000$ kgf m^{-1}, $c_{22} = 400\,890$ kgf m^{-1}.

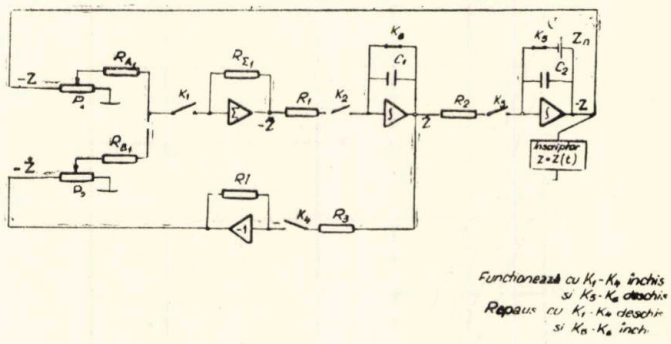


Fig. 3

Ținînd seama de valorile de mai sus, ecuațiile diferențiale (18) și (19) devin

$$\ddot{Z} = -1{,}74\,\dot{Z} - 250\,Z, \quad \ddot{\Phi} = -0{,}76\,\dot{\Phi} - 26{,}8\,\Phi. \tag{20}$$

Soluțiile grafice ale acestor ecuații, obținute folosind schema bloc din fig. 3, sînt reprezentate în fig. 4 și fig. 5.

Pe baza celor expuse la §4, se pot determina cu ajutorul relației (16) și a oscilogramelor din fig. 4 și fig. 5, accelerațiile oricărui punct de pe ampatamentul locomotivei. Rezultatele sînt reprezentate grafic în fig. 6. Accelerațiile verticale corespunzătoare fiecărei osii montate sînt reprezentate în fig. 7.

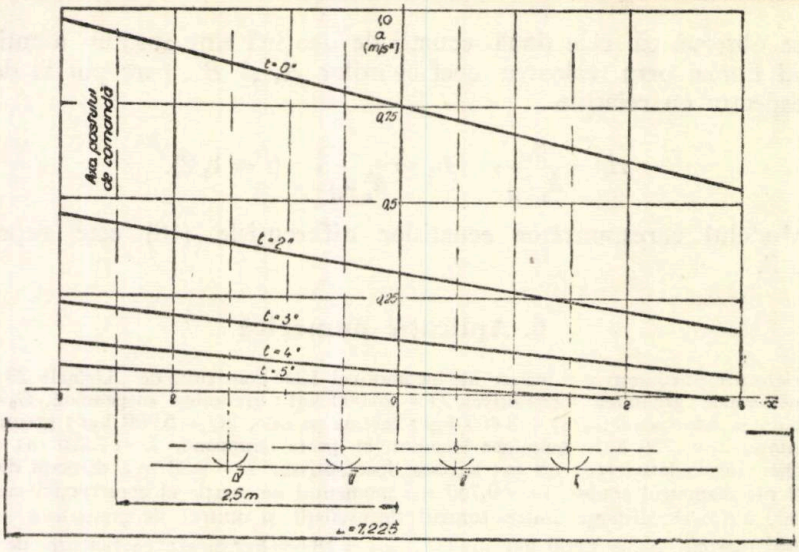

a [m/s²]
t=0°
t=2°
t=3°
t=4°
t=5°
Axa pasului de comandă
2,5m

Fig. 6

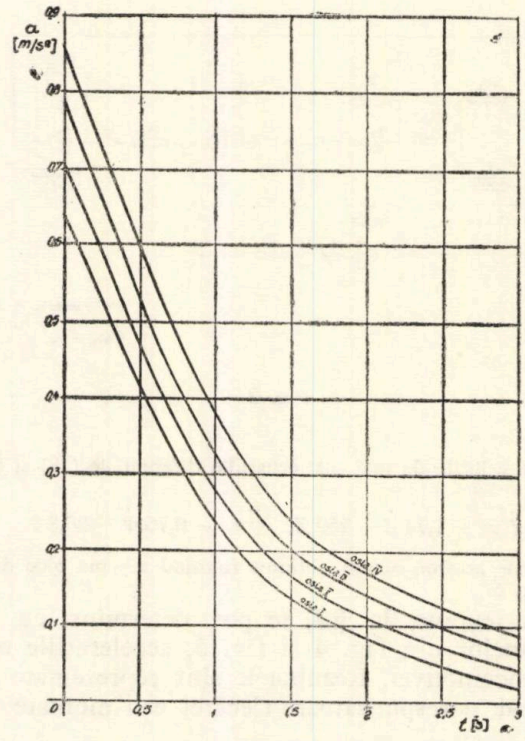

a [m/s²]
axa IV
axa III
axa II
axa I
t [s]

Fig. 7

7. Concluzii

Din analiza rezultatelor obţinute se desprind următoarele:

1. Acceleraţiile verticale maxime ale construcţiei suspendate a locomotivei sînt cuprinse între limitele $a = (0{,}08...0{,}10)$ g.

2. Variaţiile maxime ale sarcinilor pe osii sînt aproximativ $\Delta Q = \pm (6{,}5...8{,}6)\,\%$ din sarcina statică.

3. Coeficientul dinamic vertical, determinat de oscilaţiile construcţiei suspendate, este cuprins între limitele $K_v = 1{,}065...1{,}085$.

4. Valoarea maximă a acceleraţiei cutiei locomotivei corespunzătoare punctelor de comandă este $a_c = 0{,}094$ g.

Valorile determinate mai sus sînt comparabile cu cele existente în literatura de specialitate. Prin urmare calitatea de mers a locomotivei studiate este satisfăcătoare.

Primit la 24 VIII 1963 *Institutul politehnic, Timişoara*

BIBLIOGRAFIE

1. Лазариян В. А., *Динамика вагонов.* Изд. „Транспорт", М., 1964.
2. Николаев И. И., *Динамика локомотивов.* Всес. Изд. полиграфического обьеднения, М, 1962.
3. Weishaupt S., *Die Hauptabmessungen von Drehgestellfahrzeugen unter Beauchtung schwingungstechnischer Bzlange.* Deutsche Eisenbahntechnik, 1963, *4.*
4. Дименберг П. М., Шаталов С. Т., Гусаров А. А., *Колебания машин.* Машиностроение, М., 1964.
5. Крепсогорский С. С., *Вертикальные колебания надрессирного строения подвижного состава и влияния их на пути.* Тр. всес. науч. иссл. инст. хелезнодорожного трансп., *152.*

ОБ ИЗУЧЕНИИ НА МОДЕЛИ ХОДОВЫХ КАЧЕСТВ ТЕПЛОВОЗА ПОСТРОЕННОГО НА ЗАВОДЕ „23 АВГУСТА"

(Резюме)

В работе изучаются холодные качества тепловоза строющегося на заводе „23 Августа", с использованием аналоговых счетных машин.

Рассматриваются только собственные колебания происходящие в средней вертикальной продольной плоскости.

Сравнимость полученных результатов с результатами существующими в литературе показывает возможность применения этого метода в практических условиях.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 621.01

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DE LA CAPACITÉ PORTANTE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES EN POLYAMIDE SUR ACIER [1])

I. CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DE L'ENGRÈNEMENT DES ROUES DENTÉES CYLINDRIQUES POLYAMIDE-ACIER AVEC DENTURE DROITE

PAR

M. GAFIŢANU

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. Introduction

L'étude et les essais des engrenages aux roues dentées en polyamide s'imposent à présent en premier lieu à cause des avantages que ces engrenages présentent, de certains points de vue, par rapport aux engrenages métalliques : poids spécifique réduit, fonctionnement silencieux, résistence à l'usure, résistance chimique, usinage économique,

Mais, on peut constater que les méthodes actuelles d'étude des engrenages en polyamide, et en général en matières plastiques sont au fond des transpositions de certaines méthodes de calcul des engrenages métalliques, transpositions qui ne tiennent pas suffisamment compte des particularités spécifiques de ces matériaux et par conséquent ne peuvent pas offrir des explications satisfaisantes, scientifiques, concernant leur comportement dans l'exploitation [2], [3].

Cet ouvrage se propose de mettre en évidence quelques unes des particularités de l'engrènement des roues dentées en polyamide, avec l'examen des propriétés spécifiques de ces matériaux et en particulier de leur considérable déformabilité.

Dans ce but on étudie l'influence des déformations appréciables de la denture en plastique sur le rapport de conduite et sur la répartition de la charge sur les dents, éléments qui sont déterminants en ce qui concerne le taux de charge de ces engrenages.

---

[1]) Sujet de la thèse de doctorat élaborée sous la direction du Mr. G. Manea, professeur à l'Institut Polytéchnique de Bucarest, membre correspondant de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie.

C'est seulement sur cette base que l'analyse de l'influence de certains paramètres constructifs, fondamentaux, sur la capacité de charge peut devenir réalisable par la suite.

2. Recherches expérimentales

Pour l'étude du rapport de conduite et de la distribution de la charge sur les dents pendant leur engrènement, on a réalisé le dispositif de chargement statique représenté dans la fig. 1.

En appliquant un moment de torsion sur l'arbre *4*, par le levier *9* et en déplaçant par rapport à un repère initial, l'écrou *12* sur la vis *11*, on peut reproduire de façon statique, par points, l'engrènement des dents de la roue en polyamide *7* avec les dents de la roue métallique *6*.

Les roues éprouvettes ont été executées en polyamide *6*, type Relon P, de production indigène — avec les principaux caractéristiques indiquées dans la fig. 2 et avec le module d'élasticité à la flexion de $E = 8660$ kgf/cm² (à 20°C) [2]).

Dans ces conditions il reste à étudier l'influence des déformations appréciables de ces engrenages sur le rapport de conduite et sur la répartition de la charge sur les dents, éléments qui à leur tour sont déterminants en ce qui concerne la capacité de charge.

Les roues dentées éprouvettes ont été obtenues par le fraisage d'un semiproduit cylindrique moulé par injection. Les dimensions finales des roues éprouvettes, ainsi que les résultats des mesurages dimensionaux sont indiques dans le tableau 1.

Avant les essais, les roues éprouvettes ont été soumises à un traitement thérmique de stabilisation des propriétés, pendant 8 heures dans l'huile à 120°C.

Les roues dentées métalliques ont été executées par fraisage de roulement suivi de shaving. Le matériau utilisé a été l'acier OLC 45.

Les dimensions et les caractéristiques géometriques correspondent aux roues éprouvettes pour le rapport d'engrenage $i = 1$.

Les résultats des mesurages dimensionaux (tableau 1) ont montré que du point de vue de la précision cinématique et du fonctionnement continu, ces roues correspondent à la huitième classe de précision (STAS 6273—60). La rugosité des flancs, appréciée par comparaison, a été de maximum $R = 1{,}6$ μm.

Ont été mesurées aussi les erreurs du pas de base pour les dents étudiées (tableau 1).

---

[2]) D'après les essais ICECHIM (Institut de Recherches Chimiques de Bucarest).

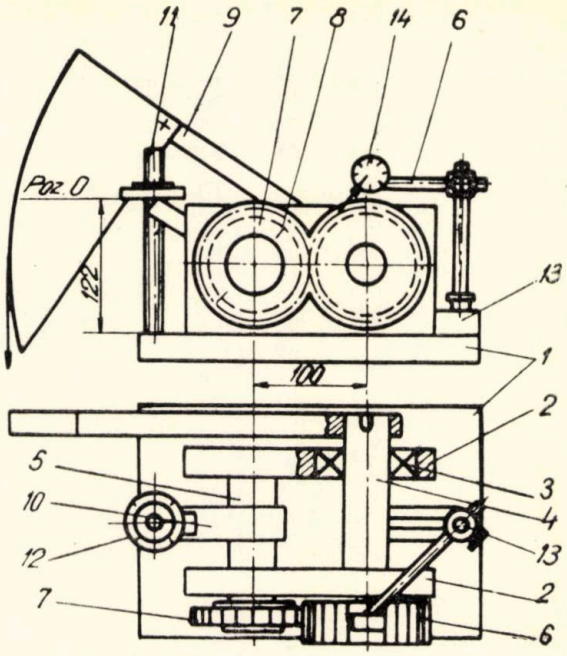


Fig. 1 — Dispositif de charge statique : *1* — corps de base ; 2 — supports ; 3 — roulements à billes ; *4, 5* — arbres ; *6* — roue dentée métallique ; *7* — roue éprouvette en polyamide ; *8* — vis de fixage ; *9* — levier de chargement ; *10* — levier d'appui ; *11* — vis de déplacement ; *12* — écrou gradé ; *13, 14* — comparateur.

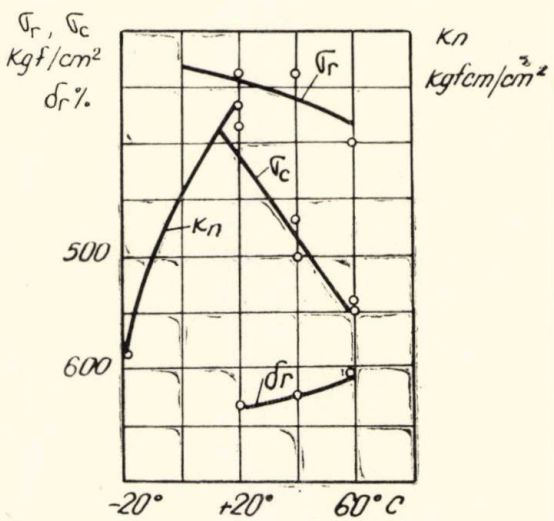


Fig. 2. — La variation avec la température de quelques caractéristiques mécaniques pour la polyamide 6-Relon *P* — d'après les essais ICECHIM. σ_r — limite (seuil) de rupture (kgf/cm²) ; σ_c — limite d'écoulement (kgf/cm²) ; δ_r — alongement de rupture (%) ; K_n — résilience (kgf cm/cm²).

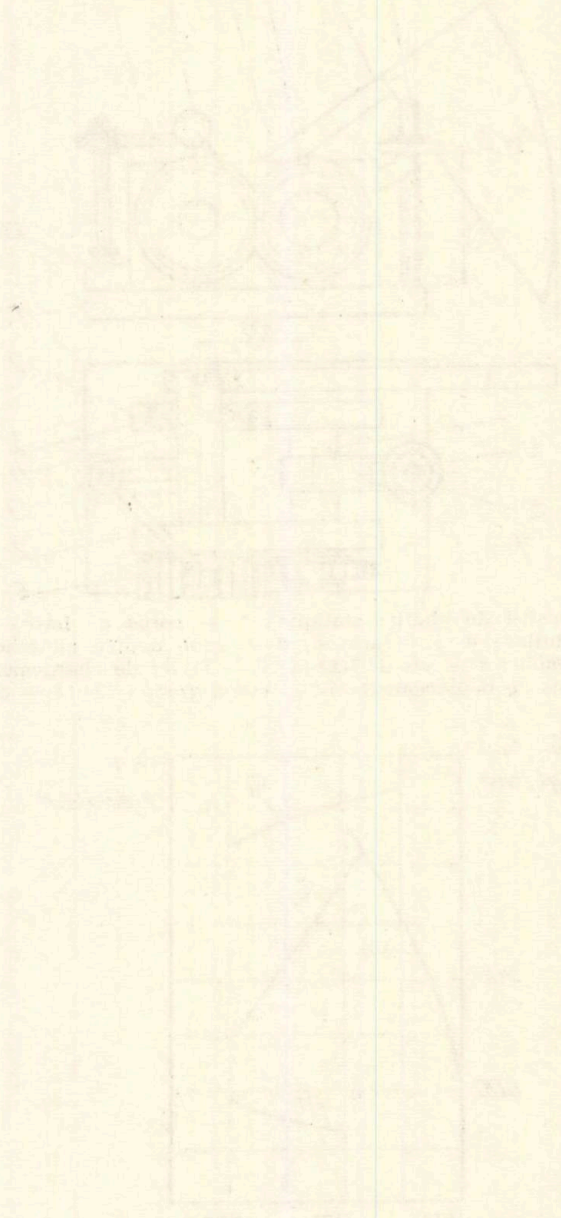


Tableau 1

Les résultats des mesures dimensionelles sur les roues dentées essayées

Roue		Dents z	Module m mm	Classe de precision				Erreur du pas de base		
				precision cinématique		fonctionement continu		dent	Apb, μm	
poly-amide	métal			poly-amide	métal	poli-amide	métal		poly-amide	métal
12	*1M*	25	4	10	8	8	8	antérieure avec traducteur postérieure	−20 −10 −10	5 5 10
1	*2M*	40	2,5	9	8	8	8	antérieure avec traducteur postérieure	+20 +10 0	10 5 10
9	*3M*	50	2	9	8	8	8	antérieure avec traducteur postérieure	0 0 0	0 0 5

2.1. Résultats expérimentaux

A. *La variation de la charge sur les dents pendant leur engrènement.* Aux engrenages essayés, cette variation a été suivie par les moyens de la tensométrie électro-résistive avec des traducteurs collés dans les zones „d'encastrement" des dents étudiées dans le disque de la roue.

En appliquant un moment de torsion constant sur l'arbre *4* du dispositif et en tournant les roues dentées avec l'écrou *12*, on peut lire et représenter graphiquement (sur un diagramme) les indications du pont tensométrique, donc la variation de la charge sur les dents pendant leur engrènement. Dans les fig. 3, 4, 5 ont été représentés les résultats de ces essais pour les différentes forces tangentielles sur les roues dentées. En abscisse est indiqué l'angle de rotation de la roue, pendant l'engrènement, par rapport à une position initiale arbitrairement établie et en ordonée, les indications du pont tensométrique.

B. *Recherches sur le rapport de conduite réel en corrélation avec les déformations élastiques des dents.* En tournant les roues, avec une charge constante, on peut trouver les moments d'entrée et de sortie de l'engrènement de la dent avec traducteur, simultanément avec le mesurage des déformations locales et de flexion des dents en polyamide existantes dans l'engrènement aux moments respectifs. Puisque la différence entre les angles d'entrée et de sortie de l'engrènement représente l'angle correspondant à l'arc de l'engrènement, pour la dent étudiée, cette différence, rapportée au pas angulaire, nous offre le rapport de conduite réel [1].

Premièrement, on a établi la dépendance entre la force périphérique tangentielle appliquée sur la roue et la déformation élastique mesurée dans la direction de la ligne d'engrènement (fig. 6...8).

Ainsi, devient possible l'expression de la dépendance entre les déformations considerées sur le cercle primitif ou de roulement et le rapport de conduite réel ε, par son augmentation $\Delta\varepsilon$ par rapport à une valeur initiale ε_0 mesurée pour une charge périphérique sur la roue, arbitraire et relativement petite (0,5 kgf/cm).

Sur cette base on a considéré la corrélation entre les déformations des dents pendant leur engrènement, envisagées sur le cercle primitif (δ) et rapportées au module

$$\frac{\delta}{m} \simeq \frac{\delta_{n\,\text{entrée}} + \delta_{n\,\text{sortie}}}{2m\cos\alpha}, \tag{1}$$

où $\alpha = 20°$ est l'angle de pression, et l'augmentation du rapport de conduite $\Delta\varepsilon$, par rapport à la valeur initiale du rapport de conduite ε_0 (fig. 9...11).

Le rapport de conduite réel à été calculé avec la relation

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon\,. \tag{2}$$

Sur le même dispositif ont été aussi effectués des essais en ce qui concerne le rapport de conduite initial ε_0 pour des roues éprouvettes usées.

Les modifications par usure des profils des flancs actifs (par exemple (fig. 12)) ont mené à des valeurs pour le rapport de conduite initial ε plus petites que le rapport de conduite théorique ε_t (tableau 2).

Tableau 2

La modification du rapport de conduite initial ε_0

Roue no.	Dents z	Charge F_t/mb kgf/cm²	Rotations	Rapport de conduite initial	
				théorique ε_t	modifié, ε_o (sous charge)
20/1	25	123	10 10^6	1,6	1,31 (82%
25/2	40	208	582 10^3	1,71	1,34 (78%
5	40	169	18,6 10^6	1,71	1,14 (67%
8	50	204	10 10^6	1,76	1,41 (80%

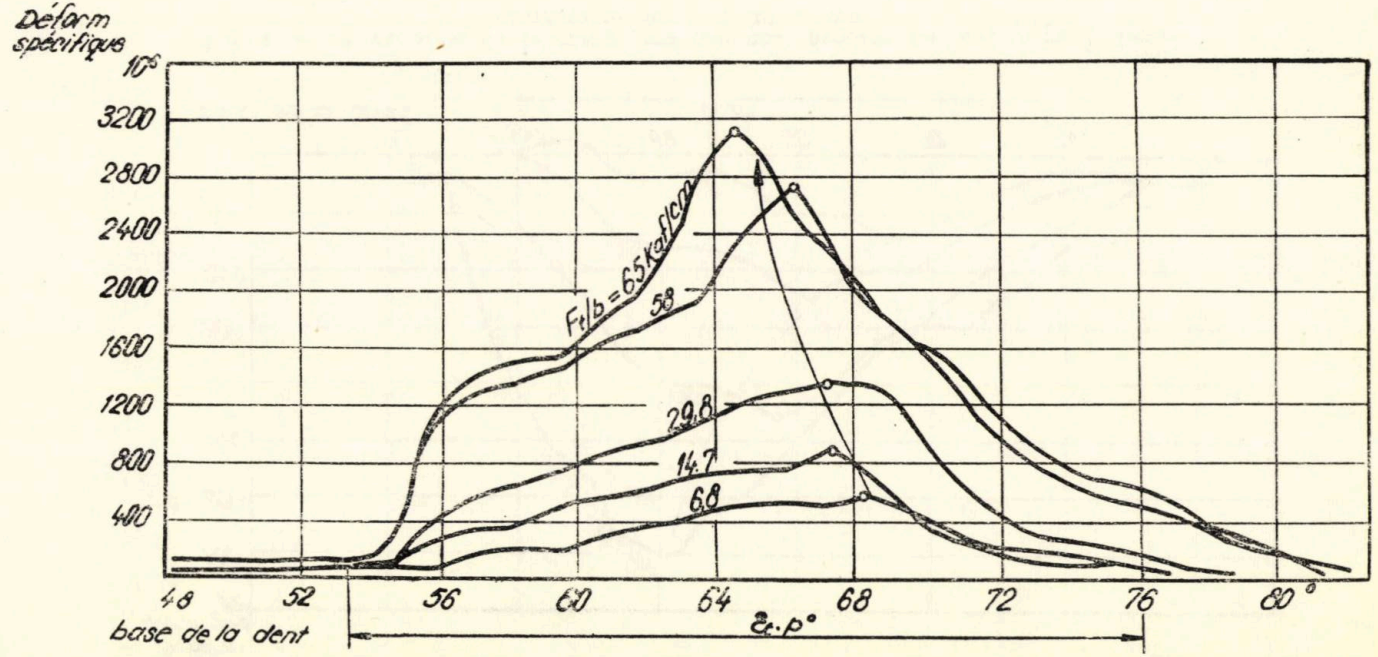


Fig. 3. — **La variation de la charge sur une dent pendant son engrènement.** Roue éprouvette no. *12*, $z=25$, neuve.

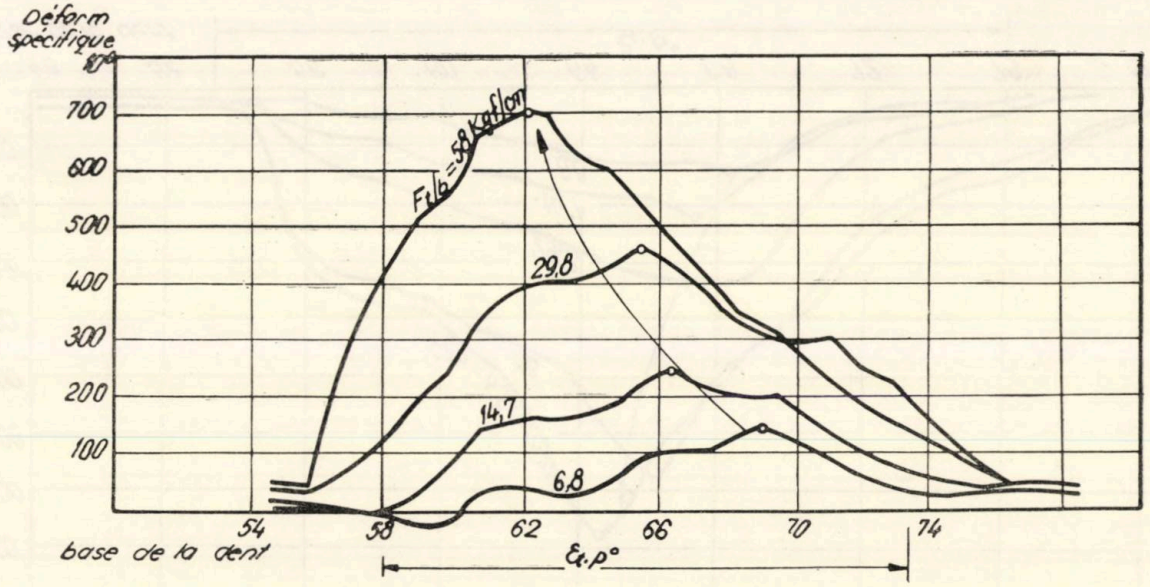


Fig. 4. — La variation de la charge sur une dent pendant son engrènement. Roue éprouvette no. *1*, z=40, neuve.

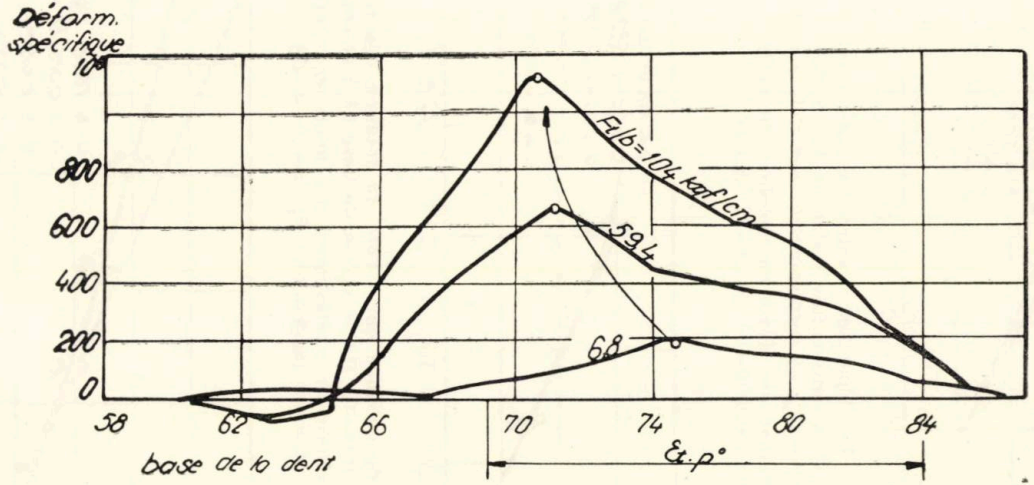


Fig. 5. — La variation de la charge sur une dent pendant son engrènement. Roue éprouvette no. 9, $z=50$, neuve.

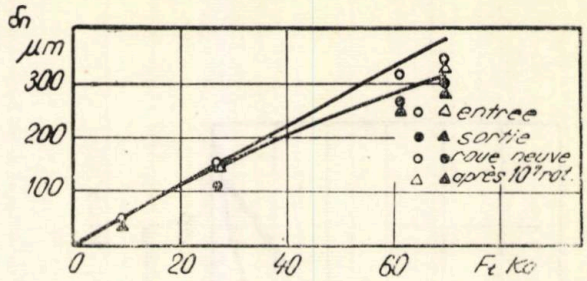


Fig. 6. — La dépendance entre l'arc de rotation des roues éprouvettes, considéré sur le cercle de base (δ_n) et correspondant aux déformations élastiques des dents en engrènement et la force tangentielle F_t ($z=25$, $m=4$).

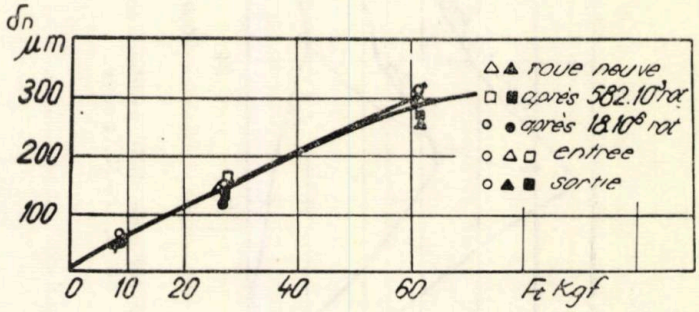


Fig. 7. — La dépendance entre l'arc de rotation des roues éprouvettes, considéré sur le cercle de base (δ_n) et correspondant aux déformations élastiques des dents en engrènement et la force tangentielle F_t ($z=50$, $m=2$).

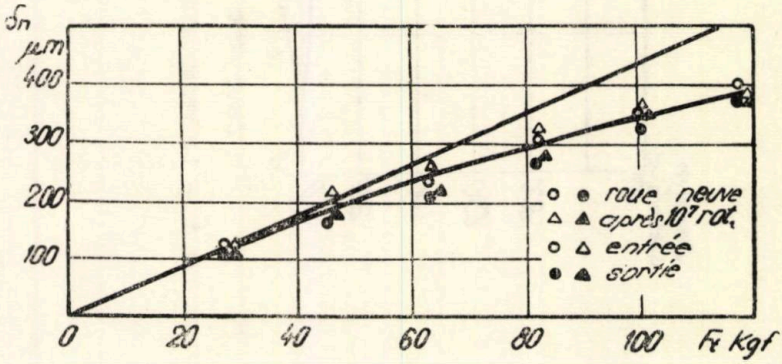


Fig. 8. — La dépendance entre l'arc de rotation des roues éprouvettes, sur le cercle considéré de base (δ_n) et correspondant aux déformations élastiques des dents en engrènement et la force tangentielle F_t ($z=40$, $m=2$).

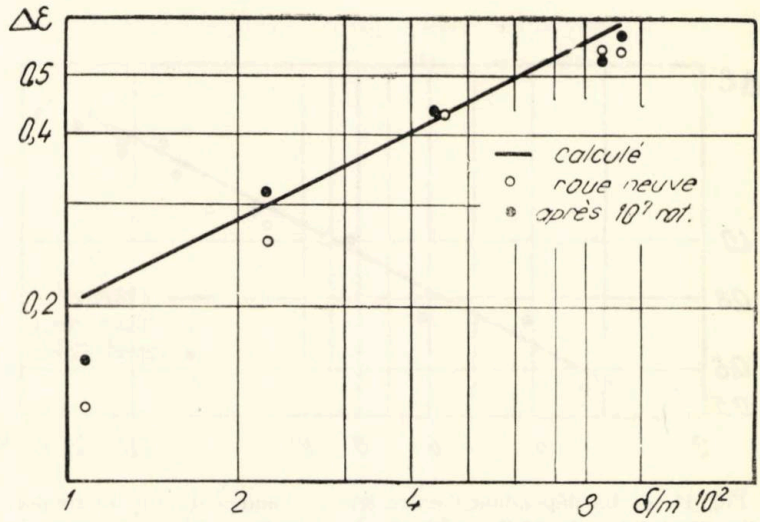


Fig. 9. — La dépendance entre δ/m et l'augmentation du rapport de conduite $\Delta\varepsilon$, pour $z=25$, $m=4$. Valeurs calculées avec la relation (2).

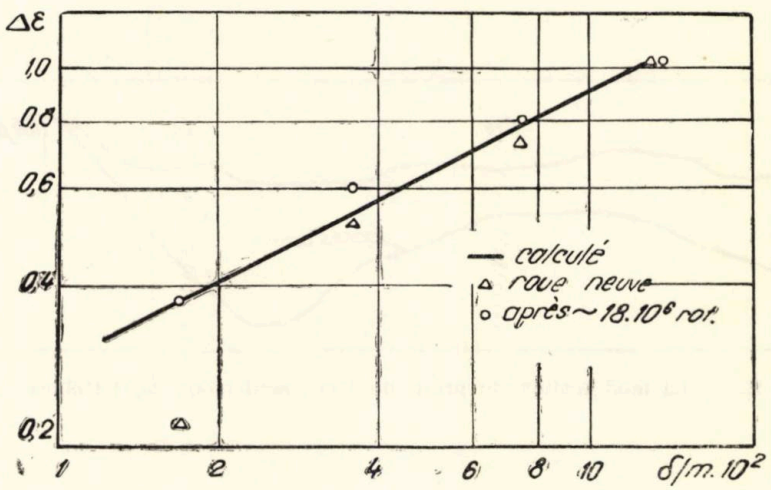


Fig. 10. — La dépendance entre δ/m et l'augmentation du rapport de conduite $\Delta\varepsilon$, pour $z=40$, $m=2,5$. Valeurs calculées avec la relation (2).

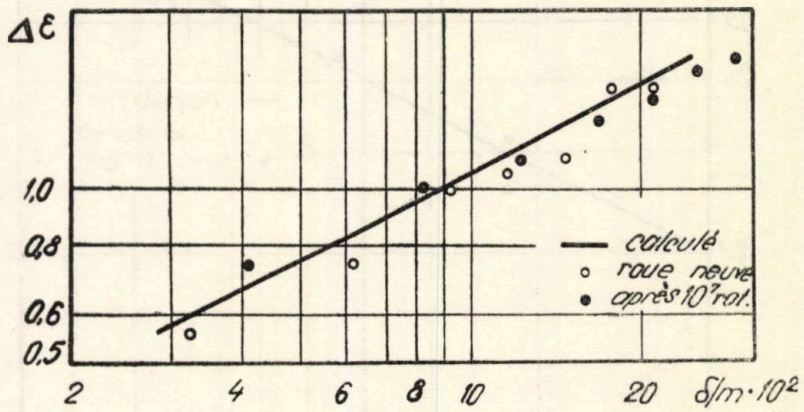


Fig. 11. — La dépendance entre δ/m et l'augmentation du rapport de conduite $\Delta\varepsilon$, pour $=50$, $m=2$. Valeurs calculées avec la relation (2).

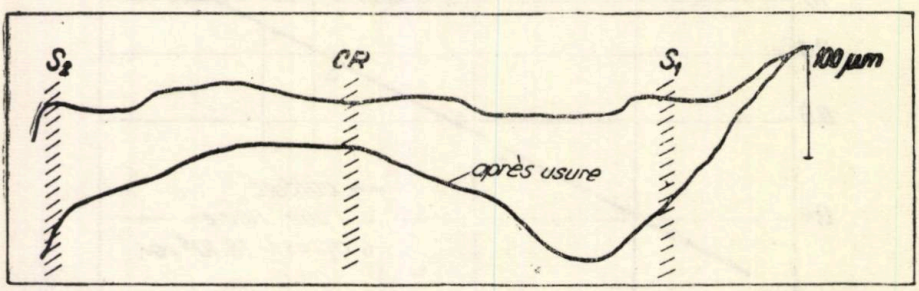


Fig. 12. — La modification du profil du flanc actif (roue 20/*1*) (tableau 2).

3. Conclusions

L'interprétation des résultats expérimentaux des fig. 3...5 permet de dégager les conclusions suivantes :

1. Les modifications de charge sur les dents, à leur entrée ou sortie de l'engrènement, se produisent continuellement.

2. L'accroissement de la charge conduit à une modification de la position du point de contact avec un maximum de charge sur la dent ; ce point se deplace de la zone d'entrée dans l'engrènement unipaire théorique vers la base de la dent.

En analysant les diagrammes représentées dans les fig. 6...11 et le tableau 2 on peut constater :

3. L'accroissement du rapport de conduite $\Delta\varepsilon$ dépend du rapport δ/m et du nombre de dents z ; aussi donc il peut être calculé, avec une précision suffisante avec la rélation déjà connue [1]

$$\Delta\varepsilon \simeq 31{,}6\, z_1^{3/4}\, k_2\, (\delta/\pi m)^{1/2},$$

avec : $k_2=0{,}01$, pour $i=1$; $k_2=0{,}01125$, pour, $i=1{,}5$; $k_2=0{,}01275$, pour $i=3$; $k_2=0{,}0165$, pour $i=\infty$.

4. Le fonctionnement sous charge des roues dentées et par conséquent les modifications des profils par usure n'ont pas eu, en général, une influence sur l'accroissement du rapport de conduite $\Delta\varepsilon$.

5. Le rapport réel de conduite ε dépend, dans une certaine mesure, du nombre de rotations effectuées, grâce aux modifications progressives du rapport de conduite initial ε_0 par usure (tableau 2).

6. Par suite de l'accroissement du rapport de conduite réel avec les déformations, donc avec la charge, on ne peut pas constater une dépendance linéaire entre la déformation des dents en engrènement et la charge.

7. Les déformations, dans la zone de fonctionnement (charge de 40...70 kgf/cm^2), sont beaucoup plus grandes que les erreurs du pas de base.

8. Le rapport réel de conduite est sensiblement plus grand que le rapport de conduite initial et même théorique (pour les roues essayées ($\varepsilon/\varepsilon_t=1{,}16...1{,}53$) ; cette appréciable différence a évidemment de larges conséquences sur la répartition de la charge sur les dents ou sur les conditions de calcul des dents.

Donc *le fonctionnement des engrenages avec roues dentées en polyamide est sensiblement influencé par les déformations appréciables des dents, déformations qui mènent à des modifications du rapport de conduite, des conditions de chargement des dents.*

Toutes ces modifications doivent être par conséquent considerées dans les calculs de ces engrenages.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Éléments de Machines
et de Mécanismes

BIBLIOGRAPHIE

1. Gafițanu M., *Considerații asupra gradului de acoperire la roțile dințate cilindrice cu dinți drepți.* St. și cerc. de mec. apl., 1967, *6.*
2. Glanville A., *Nylon Gears.* Machinery, 1956, p. 2280.
3. Hall K. W., Alword H. H., *Zytel Spur Gears.* Mech. Eng., May 1959.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL CAPACITĂȚII PORTANTE A ANGRENAJELOR CILINDRICE DIN POLIAMIDĂ PE OȚEL

Nota I

Contribuții la studiul angrenării roților dințate cilindrice poliamidă pe oțel cu dantură dreaptă

(Rezumat)

În lucrare se prezintă unele aspecte specifice ale angrenării roților dințate cilindrice din poliamidă cu roți dințate din oțel, cu considerarea deformabilității mari a poliamidei, în corelație cu gradul de acoperire real. Se verifică de asemenea unele relații deduse pe cale teoretică anterior în legătură cu dependența dintre deformații și gradul de acoperire real [1].

Explicația figurilor

Fig. 1. — Dispozitiv de încărcare statică. *1* — corp de bază; 2 — suporți; *3* — rulmenți; *4*, 5 — arbori; *6* — roată dințată metalică; *7* — roată epruvetă din poliamidă; *8* — șurub de fixare; *9* — pîrghie de încărcare; *10* — pîrghie de sprijin; *11* — șurub de deplasare; *12* — piuliță gradată; *13*, *14* — comparator.

Fig. 2 .— Variația cu temperatura a unor caracteristici mecanice pentru poliamida 6 — Relon P, după încercări ICECHIM.

Fig. 3...5 — Variația sarcinii pe dinte în timpul angrenării.

Fig. 6...8 — Dependența dintre arcul de rotație al roților epruvetă considerat pe cercul de bază δ_n și corespunzător deformațiilor elastice ale dinților în angrenare și forța tangențială.

Fig. 9...11. — Dependența dintre δ/m și creșterea gradului de acoperire (valori calculate).

Fig. 12. — Modificarea profilului flancului activ.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 621.01

INVESTIGATIONS ABOUT THE POINT BEARINGS

BY

TRAIAN DEMIAN

1. Introduction

The studying of the point bearings, of the processes which occur in them, appeared and extended because of the necessity to reduce the friction which represents the most important factor of the fundamental error from the measuring instruments and computers (which utilizes these bearings). As a rule, up to now, investigations have incompletely comprised or broached some aspects, within the framework regarding the studies of other sorts of problems and processes.

Revaluating the most significant things to be taken into consideration in the researches effectuated during several years — in the dissertation for the doctorate elaborated by the author — it is particularly presented a *theory and an unitary calculus* of the point bearings, and also of the slide barings with spherical contact surfaces generally. At the same time in the work there are presented the experimental results which were obtained utilizing a modern solution, more efficient for the friction moment determination in the point bearings.

2. Theoretical Researches

The problems which constitute the object of the first part — the part of the theoretical researches — which deserve to be unterlined from the contents of the work, are :

1.1. *The distinct point out of the components of the complex friction from the vertical bearings : the peculiarities of the conditions of influence of every factor and the general study of the moment of friction for the general case of the eccentric pressure surface.*

The friction moment provisional calculation is relied on the hypothesis of the *pure rotating*, specific for the spherical surfaces. This situation corresponds to a concentrated force P acting axially (Fig. 1). The Hertzian contact surface remains in the same position during all the motion. The distribution of the tensions in section, is made according to an ellipse having the great semiaxis equal to the pressure circle radius a. After calculations, the friction moment M has the value

$$M = \frac{3}{13}\pi\mu P \frac{3}{2\pi}\frac{P}{p_{max}} = \frac{0{,}407\,\mu P^{1,5}}{p_{max}}. \tag{1}$$

The relation (1) introduces errors not only in connection with the precision of the circular contact surface and the coeficient of friction constancy but also from the point of view of the operation conditions.

There is always a lateral force S, constant or variable; one has to be taken into acount.

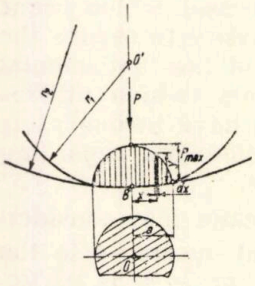


Fig. 1

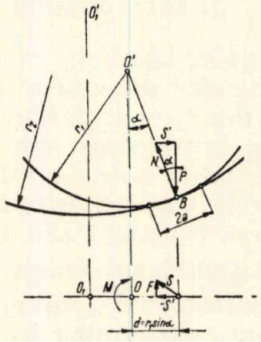


Fig. 2

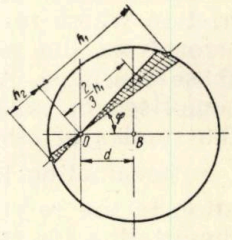


Fig. 3

If in the first case *the lateral force S is considered having a constant direction* (Fig. 2), the contact surface is removing into the position with the centre in B, the axis of the point OO' may be considered parallel to the initial position. The moment of friction is

$$M = r_1 \sqrt{\frac{S^2 - P^2\mu^2}{1 + 1/\mu^2}} \tag{2}$$

or, for a uniformly distributed pressure and for constant S the (2) relation becomes

$$M = \mu dN, \tag{3}$$

where $d = r_1 \sin \alpha$.

If we study the value of the momnet of friction within the contact surface (Fig. 3), and for the field $0 \leqslant d \leqslant a$, this moment will be given by

$$(4) \qquad M = \frac{4}{3\pi}\, aN\mu \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{d^2}{a^2}\sin^2\varphi}\left(4 - \frac{d^2}{a^2}\cos^2\varphi + 1 - \frac{d^2}{a^2}\right) d\varphi,$$

an elliptical integral which is solved by utilizing the function tables.

Puting equation (4) in the form

$$(5) \qquad M = kaN\mu$$

and plotting together with (3) we observe that the precision of the results given by (3) and implicitly by (2) decreases as d/a diminishes (S decreases with α also with d/a).

One may say the followings:

a) for $S=0$ it appears the rotating friction;

b) for $S > P\mu$ it appears the *sliding friction* (see the numerator of the fraction below the radical);

c) for $S < P\mu$ we may say that it appears a rotating friction with rolling.

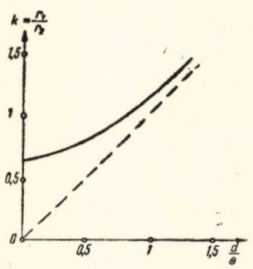


Fig. 4

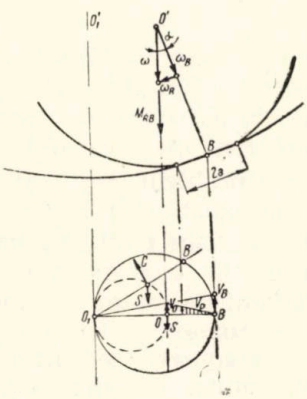


Fig. 5

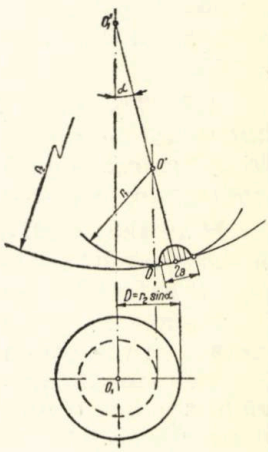


Fig. 6

The last case can be considered to result from the tendency of the point to fix himself to a certain position in the bearing (Fig. 5). These tendencieas apear at the same time with the appearance of the lateral force S when the rolling starts (the rotating friction diminishes automatically), the centre of the point removes on the small circle, with the O_1O diameter, and the centre of the surface on the big circle, with the diameter O_1B. The resistant moment — as a sum of the moment corresponding to the rotating and of the moment corresponding to the rolling — is dependent on α which changes during the movement.

The important conclusion which results is that by the (precision) apparatuses where a constant moment of friction is required in the bearing, it is not advisable to utilize the points for the $S<\mu P$ domain.

In a second case *the lateral force S is considered of variable direction.* Since S pushes outward, this will turn round the axis of the O'_1O_1 system (Fig. 6).

The contact surface on the point remains the same, only the surface on the bearing calotte will be modified (with the speed of the point).

The situation will be similar to that of constant lateral force with the difference that instead of r_1, in the expression of the *moment of slide friction* we ought to introduce r_2:

$$M = r_2 \sqrt{\frac{S^2 - \mu^2 P^2}{1 - 1/\mu^2}}. \tag{6}$$

In all the hypotheses concerning the vertical bearings the two following conditions were respected: the lateral force is small in comparision with the axial one (otherwise the study is likewise that for the horizontal bearings); the horizontal bearing has a sufficient great axial clearance that may warrant it a degree of freedom upon this direction.

1.2. *The identification of the friction types which appear in the horizontal bearings, the particular study of the friction phenomenon with its influences, the connection between the moment of friction and the reading and registering error at the indicator of the apparatus.*

Here the solution of the problem ought to be preceded by a study of the clearance, because the calculus of these bearings is influenced to a great extent by *the position of the contact point* between the elements. To prevent an overstress of the bearing it is necessary to avoid the contact on the coned surface of the point and the bearing.

The pre-calculus of the moment of friction *corresponds to the pure friction* which results of an imaginated similitude between the cylindrical bearings and those for points. For the symmetrically loaded shaft, after calculation we obtain

$$M = \mu r_1 P \tag{7}$$

and for the nonsymmetrically loaded shaft according to the scheme from Fig. 7 it results:

$$M = \mu r_1 (P_1 + P'_1). \tag{8}$$

In both situations the point appears from the formula as a cylindrical journal with radius r_1. The values of the real moment of friction do not correspond to the calculus based on relations (7) and (8), because the only parameter rigorously known is the load of the bearing. There

appear important errors in the process of measuring the radius as well as, particularly, in the (totally uncertain) estimate of the coefficient of friction.

In an estimation closer to reality the point was considered as a rolling ball within the calotte of the bearing (Fig. 8). The rolling friction lasts from the beginning of the motion untill the reaching of the maximum angle β_g, respectively β_g', when — it is obviously — the lateral force is also considered. The calculated moment of friction is.

$$M = \frac{Pr_1\mu}{\sqrt{\mu^2/(\cos\alpha)^2+1}}, \tag{9}$$

where $\mu = \operatorname{tg}\beta_g'$.

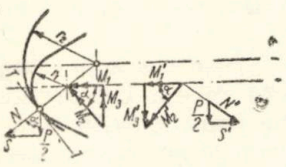


Fig. 7

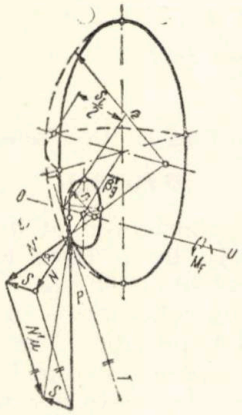


Fig. 8

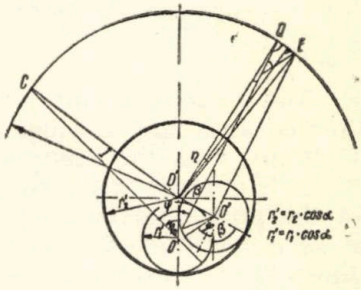


Fig. 9

The variation of the moment of friction from the value corresponding for the rolling to that corresponding to sliding has a great importance for the calculus of the indication error of the apparatus, caused by the point shifting. From the Fig. 9 one observes that if the shaft (with the indicator) is rotating from φ_0 to φ, it describes the arc CE. At the return of the point in the lowest position (the angle φ being preserved), it results an error η which can by calculated from

$$\eta^3 + 4\frac{r_2'-r_1'}{1}\sin(\varphi+\varphi_0)\,\eta^2 + 4\left[\frac{r_2'-r_1'}{I^2}\sin^2(\varphi+\varphi_0) - 2\right]\eta + \tag{10}$$

$$+ 8\frac{r_2'-r_1'}{I}\left[\sin\left(\frac{\varphi}{1-r_2'/r_1'}+\varphi_0\right) - \sin(\varphi-\varphi_0)\right] = 0,$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

where through I was noted the indicator needle length.

The indication error diminishes with the decrease of the load and increases or decreases with the longitudinal clearance S_l.

The geometrical indication error (the line on the dial) is given by

$$E_g = \pi I \eta / 180.$$

In the horizontal bearing it also appears the *rotating friction*, after the limit value of the rolling angle have been reached. If the point is considered at rest and the calotte moving, for a very little longitudinal clearance, the circular contact surface can be considered perpendicular on the point axis OO; the ansamble geometry appears like in the Fig. 10 *b* and the moment of friction will be

$$M = \mu \frac{2N}{\pi a^2} \int_{c+a}^{c-a} r_1^2 \arccos \frac{r_1^2 + c^2 - a^2}{2cr_1} \, dr_1 .$$

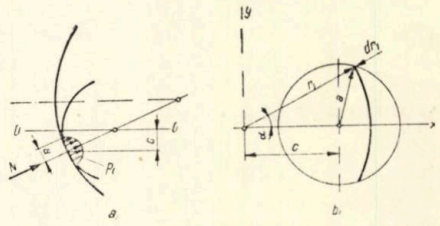


Fig. 10

For $c=a$ appears the pure rotating friction and the moment will be

$$M = 32\, Pa/(9\pi).$$

The rotating ought to be considered at the final moment evaluation because the moment given by it rises with the transversal and implicitly with the longitudinal diminishing.

It is evident that a rigorous delimitation of the processes appearing in the horizontal bearings is impossible. The more recent researches make a similitude between the point moving in the bearing with some different radius wheels movement, rigidly tied to each other, on stepped surface. The moment of friction is than

$$M = \left(r_1 \sin\alpha \sin\frac{\varphi}{K} + f \cos\frac{\varphi}{K} \right) P + 0{,}33\, \mu P^{1,3} \frac{\cos\alpha}{b^{1,3} \sin^{1,33}\alpha} \frac{r_1^{0,33}}{E_1} \times \times \left(\frac{k}{k-1} \right)^{0,33} \left(\frac{m+1}{m} \right)^{0,33}, \tag{12}$$

where $b = 1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha$, $m = E_1/E_2$ and f is the rolling friction coefficient.

One can see that the minimum moment of friction is obtained not for a minimum longitudinal clearance ($\sin\alpha = 0$) but for an intermediate value of the longitudinal clearance.

1. 3. *The elaboration of a process for the point bearings calculus from the dynamical point of view, which may avoid the rapid destruction of the working surfaces; the modifications introduced by the dynamical conditions in the relations utilized for the strength calculus*

(in static conditions); the evalution of the maximum friction moment at the impact stress.

We may consider that the dynamical stress appears in the following phenomena succession :

a) the point pressing against the bush until the transformation of the kinetic impact energy into elastic deformation (at the end of this stage the point speed is zero), the surfaces appropriation and potential energy are maximum ;

b) the spherical surface returns to the initial form (the potential energy changes once more into kinetic energy).

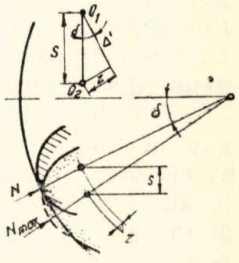


Fig. 11

The maximum impact efforts appear in the middle of the first stage. On the basis of Fig. 11 (O_1 and O_2 are positions of the point centre of curvature at the beginning respectively the end of the first collision stage) utilizing the most disavantageous case of the horizontal point the energy balance equation will be $dA = N dz + \mu N dz \operatorname{ctg} \delta$, where z is the point penetration in the bearing (the vertical way s was also expressed depending on z).

Utilizing the Hertz theory and integrationg from zero to N_{max} it results the mechanical work value

$$A = 0{,}3\,(1 + \mu \operatorname{ctg} \delta)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)^{2/3} N_{max}^{5/3};$$

for the maximum strain in dynamical conditions σ_{maxdln} one obtains

$$\sigma_{max\ din.} = 0{,}779 \sqrt[5]{\frac{A\,(1/r_1 - 1/r_2)^3}{(1 + \mu \operatorname{ctg} \delta)\,(1/E_1 + 1/E_2)^4}}. \tag{13}$$

The friction work accompaning $1+\mu$ ctg δ term disappears at the vertical journal because here — one may consider — the impact being centrical.

Further, on the basis of some hypotheses and ardous working calculus one determines in this work the relation between the dynamical strains, at the mobile systems provided with mass tied elastically respective rigidly to the point.

Finally it results

$$\sigma_{max\ elastic} = \sin^{1/2} \delta\, \sigma_{max\ rigid} \tag{14}$$

in the case of centric collisions.

Afterwards there are effectuated calculations for all the alternatives which may apear in two more important cases of dynamic stresses :

a) operation by impact when the point is submited to a succession of blows (the vibrations between two consecutive collisions disappear);

b) operation with vibrations when it is not realized a damping between two consecutive collisions.

1.4 *The presentation of some hypotheses concerning the wear processes which may occure in point bearings; the friction moment calculus in these hypotheses; conclusions and solutions in the most disavantageous case of vertical points.*

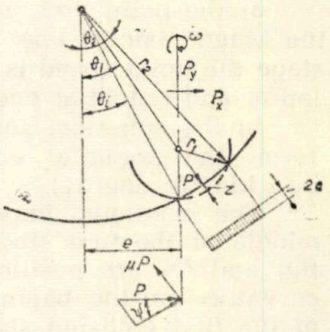


Fig. 12

For the calculus of friction moment M and of the wear volume V the following hypotheses were admited: 1) the point is moving parallel to the initial position; 2) the bearing axially and laterally loaded; 3) the contact realized on a rectangular surface, having a width equal with $2a$, very little in comparison with the lenght; 4) the Hertz relations are utilized for the contact between two spherical surfaces.

With the notations from Fig. 12 and after the calculus was be done, the friction moment M will be

$$M = 2\mu r_2 P \cos\theta_1 \sin\Delta\theta \frac{k\sin(\theta_1 - \Delta\theta) - (k-1)\sin\theta_1}{k\sin(\theta_1 + \Delta\theta) - (k-1)\sin\theta_1}, \tag{15}$$

where θ_1 is the angle between the point axis and the force P; ψ—the angle between the lateral force and the resultant of the friction force with the lateral force; $P = \sqrt{P_y^2 + P_x^2\cos\psi}$ and $\Delta\theta = \theta_0 - \theta_1$.

The quantity of weared material is given by the approximate relation

$$V = 2\pi r_2 \sin\theta\,(r_2^2\Delta\theta - r_1^2\cos^{-1}\sqrt{1 - k^2\sin^2\Delta\theta}).$$

From a plotting results the great influence exerted by k upon the operation of the ensemble. With an increase of k (at some constructions it is necessary by the increase of r_2) in the bearing it is mentained a friction moment of smale value.

The theoretical study gives a wide imagine of the friction, strength and wear phenomena. Along with the practical interest, connected with the improvement of apparatuses operation guality, and their bearings construction according to their utilization, the new problems presented in this study with the possible solutions show the scientific interest still offered by the point bearings.

3. Experimental Researches

The problems forming the object of the second part — the experimental researches — which will be unterlined from the work contents, are :

3.1. *The realization of an original method for friction moment experimental determination, after a previous critical analysis of the measurement methods actually still in use ; the method can be extended to all point bearings types as well as to other forms of precision mechanics bearings.*

As a rule, the method aims to determine as exactly as possible the losses by friction in bearing, thus eliminating every „contact" which may falsify the results by introducing some casual moments, alien to that one we are interested in.

The mobile system based on point bearings is drawn until at a convenient revolution after being allowed to return in the position at rest. As a solution for the theoretical basis position is utilized the revolution equation of the rigid around a fixed axis

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = M_m - M_r = M_m - (M + M_a + M_b), \tag{16}$$

where M_m is the action moment ; M — the friction moment from the bearing ; M_a — the moment of friction of the mobile system with the air (can be determined by effectuating measurements in vacuum); M_b — the resisting moment brought about by the remanent currents (they are determmined by replacing the electric drive by a mechanical drive).

The relation (16) allows the calculus of M_r if M_m and $Id\omega/dt$ are known ; namely $M_r = M_m - Id\omega/dt = M_m - I\varepsilon$, and after decoupling the system, at the reaching of the wished revolution, $M_r = -Id\omega/dt$.

Because its complicated form, the moment of inerţia I of the mobile system mass, is determined with the torsion pendulum, utilizing a single-thread suspension.

The thread elastic constancy K being known and utilizing the dynamic equilibrium equation of the mobile system $d^2\varphi/dt^2 - K\varphi/I = 0$ for a subassembly with a known moment of inertia I_0, measuring the corresponding T_0 oscilation time, one obtaines

$$I = \frac{T^2}{T_0^2} I_0 . \tag{17}$$

The angular acceleration ε is established by previous determination of angular velocity variation.

The well known methods of the function determination — the photographical recording and the stroboscopic method — are successful

at great revolutions, but surpass the domain of utilisation of point bearings.

The conceived method allows to obtain some corresponding results just in the revolution domain in which point bearings are utilized.

As we may see from the Fig. 13, at the passing of orifice 3 on the disc 2 before the inductive transducer 1 (fixed on the stand support) its inductance is modified. The electric puls which appeared in this way is delivered to the registering apparatus by the adopted measuring system, the complete schema of which is shown in Fig. 14.

The transducer is supplied by the voltage measurement bridge 3 with the amplifier 4. The unbalancing of the bridge, which appeared by the orifice passing front of the transducer, is delivered as signal to the registering apparatus 5.

Measuring the displacement $\Delta S'$ from a number of p pulse intervals (the constant velocity v of band advance is known) it may be written $\Delta S' = p\Delta S$ and therefore

$$\omega = \frac{2\pi p}{m} \frac{v}{\Delta S'}, \quad n = \frac{60\, p}{m} \frac{v}{\Delta S'}, \tag{18}$$

where m denotes orifices number on disc periphery, $\Delta S'$ — the distance between two known consecutive loops.

3.2. *The construction of an original test stand which assures a high precision for clearance adjustment and determination as well as for the signal transmission to registering apparatus.*

The mobile system, composed of shaft, the bushings in which are fixed, by fastening through end-section diminishing, the points and the disc, leans upon two bearings with stone bushings.

The carrying away of the mobile system is similar to that of an induction electric counter for alternating current. The quality of such a carrying away is that of having no winding in the mobile system and also it is avoided the utilization of collector, brushes, and forming of sparks in the collector. By the support form adopted, utilizing adjusting screws and an air bubble device, the stand allows both the study of horizontal bearings and of the vertical ones.

The variation of the bearings load was realized by utilizing discs of different forms and materials.

The clearance adjustment and determination is made in horizontal position with a previous bringing at „zero" of the mobile system, eliminating all the clearance, with the help of one of the two bearings which is adjustable ; utilizing the graduated eye glass microscope with which the stand was provided (Fig. 15), the „collapse" e of the mobile system is measured, after which from the Fig. 15 geometry it is possible to write

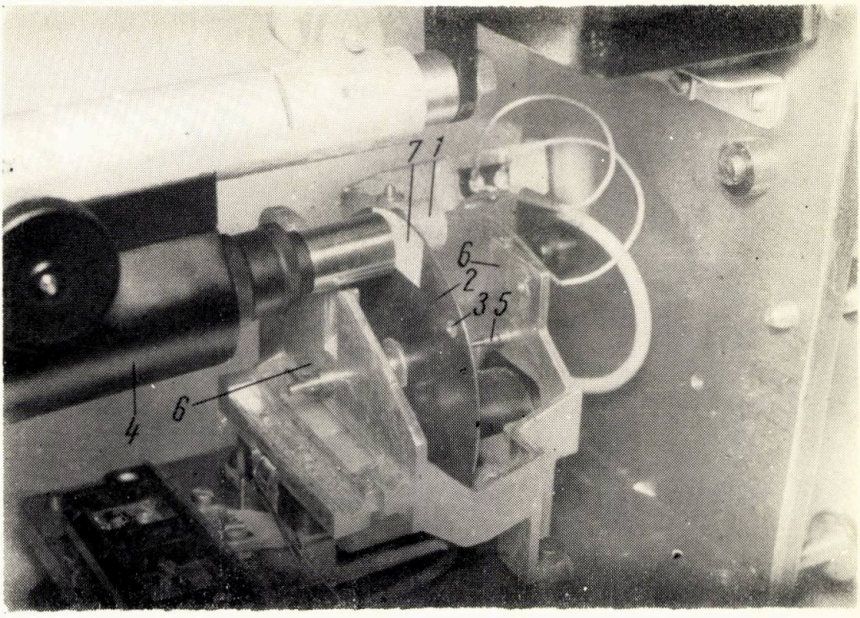


Fig. 13

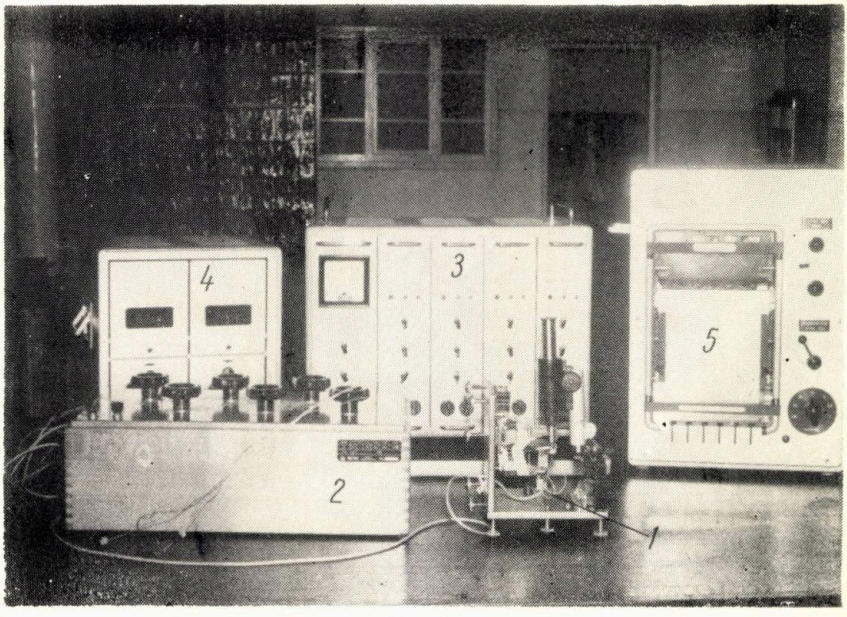


Fig. 14

$$e = \sqrt{s_l [2(r_2 - r_1) - s_l]},$$

out of which the longitudinal clearance is determined $S_l = 2s_l$ for both the horizontal and the vertical position.

Since the „collapse" is considerably greater as s_l, the method is advantageous because it allows a high determination precisios of longitudinal clearance, by a microscop strictness.

As succint estimate of the method and the test stand the followings may be told: a) in the measuring system supplimentary moments are not introduced; b) more high measurement precision; c) the measurements can be carried out in all phases of the mouvement; d) the method may be applied to all bearings types of fine mechanics.

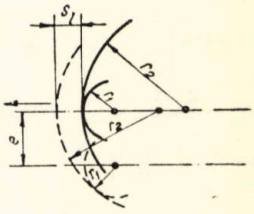


Fig. 15

However a peculiar attention is necessary in order to avoid the assembling and centring lacks of precision which may provoke important dynamical strains in the bearings. The variation of the bearings load can not be realized by additional loads, because of the throwing out of balance, but by more disc shaft collections. A rigorously equal clearance distribution on the two bearings of the horizontal fulcrums being impossible, the measuring must be effectuated in two directions with 180° discrepancy.

3.3. *The determining, by the obtained practical results of some ways to improve the operation of point bearings on the whole, more particularly of those tried and utilized in the indigenous apparatus production.*

The researches were carried out with the points and bearings utilized by the „Electromagnetica" plants in the production of electric monophasic counters for active energy (of CAM—6 type).

The points manufactured of ball-bearing steel with a mineralogical hardness identical with that of quartz and the bushing of syntetic sapphire with a hardness identical with that of corundum and very close to that of genuine sapphire.

During all the time of the measurement the geometric parameters of the point and bearing were preserved unchanged in order to maintain these constructive elements as they were used in the indigenous production. At the vertical bearing only the cylindrical upper bearing was replaced by a point bearing (the immediate practical effect was certainly a considerable reduction of the whole friction moment). The measurements were carried out at the same temperature (environmental).

The following factors were modified successively and concomitantly: mobile system weight; longitudinal clearance (in a great range

of values but with contact on the spherical surface); shaft position (vertical, horizontal); electrical or mechanical drive; operation in air or in vacuum; the mobile system angular velocity.

Recordings for more than 70 different situations were made from which 22 velocity diagrams were effectuated. In Fig. 16 it is presented one of these diagrams, together with a fragment from the tape recordings.

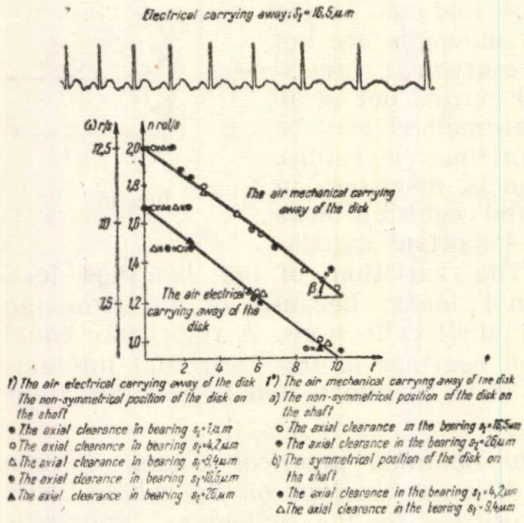


Fig. 16

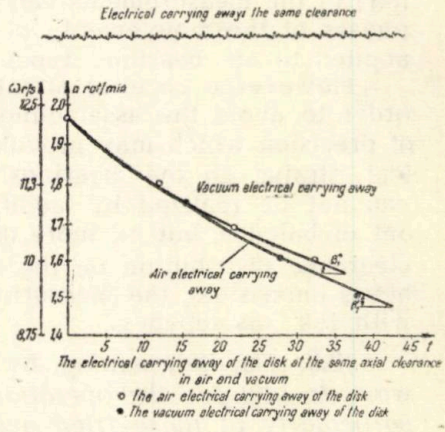


Fig. 17

From the experiments and horizontal bearing diagrams it results: a) between the closely limits of the load, the moment of friction is not influenced by the mobile system wight; b) the moment of friction decreases with the reduction of the moment of inertia from the mobile system mass; c) the moment of friction increases with the increase of the angular acceleration; d) the air friction and the remanent currents influence (by the adopted drive system) can be neglected; e) the experimentaly determined moment and coefficient of friction, although still substantially differ from the calculated values, but are 20...30 closer to them, compared to the methods utilized up to now.

From the experiments and vertical bearing diagram (in Fig. 17 is presented one of the synthesis diagrams with a little fragment of a case from the tape recordings) results: a) the moment of friction, by the same parameters and the same conditions, is much smaller by the horizontal bearings; b) the longitudinal clearance has an important influence in the case of vertical bearings, the moment of friction is

reduced according to its decreasement (the reduction will not be made under the limit of an adjustment by clamping which may produce a rapid wear and eventually the deformation of the shaft); c) the friction diminishes with the moment of inertia of the mobile system mass and with the reduction of the synthesis diagram inclination angle, consequently of the angular acceleration; d) because of the small friction in these bearings, the resistant moments resulting from air and remanent currents (depending on revolution) must enter in the full moment of resistance calculus.

Regarding to the experimental results obtained by the realized method, the differences confronted by the calculated values of the previous methods were diminished with nearly 50%.

4. Conclusion

Regarding to the generally utilization of the point bearings, from the experiments it has resulted:

1. The recommendation to utilize vertical point bearings, in all the cases; horizontal support will be utilized only if imposed by the construction.

2. The necesity of small clearances at the vertical system, clearances which may assure the contact in the spherical zone of the point, in both systems.

3. The mobile system must be made of materials with a good electric conductance (at the electric apparatuses) especially for the vertical support.

4. It must be also paid attention to the inertia moment of the mass, angular acceleration, centring, materials and to the surfaces operation.

The work, taken as a whole, points out the complexity of the processes which take place in the point bearings and at the same time the aspects which can be studied thorougly, the directions in which it is possible to act for a better approach between the experimental results and the theoretical ones.

Received the 18 IV 1969

Polytechnic Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucarest

STUDII RELATIVE LA RULMENȚI CU CONTACT PUNCTIFORM

(Rezumat)

Autorul expune principalele rezultate obținute în recenta sa teză de doctorat din domeniul precizat în titlul articolului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.01

CU PRIVIRE LA ANALIZA ŞI SINTEZA ANGRENAJELOR PLANETARE PENTRU TRANSMISIA PUTERILOR MARI (I)

DE

N. IONIŢĂ

1. Angrenajele planetare [1]) servesc în primul rînd, la fel ca toate celelalte angrenaje cu roţi dinţate, pentru transmiterea unor puteri. Faţă de angrenajele normale cu roţi dinţate la care ies numai două capete de ax din cutia angrenajului, în cazul angrenajelor planetare se dispune de trei axe, al căror raport de cuplu este definit prin raportul transmisiei şi care este constant pentru orice condiţie de funcţionare; în schimb raportul turaţiilor lor este interdependent după anumite legi.

Cu ajutorul acestor însuşiri caracteristice, pot fi rezolvate probleme de acţionare folosind angrenajele planetare. Mai mult decît atît, rezolvarea în acelaşi mod nu este posibilă cu alte tipuri de angrenaje.

Un exemplu caracteristic şi cunoscut de folosire a angrenajelor planetare (numite şi angrenaje diferenţiale, atunci cînd gradul de mobilitate este mai mare decît unu) constă în ansamblul axelor de antrenare a roţilor automobilelor, cele trei axe ale unui diferenţial de automobil avînd funcţiuni respectiv de axă de acţionare şi axe de antrenare.

Avantajele folosirii diferenţialelor de automobil se explică prin faptul că cuplurile de transmisie, în orice situaţie de funcţionare a roţilor din stînga şi din dreapta automobilului, sînt egale între ele; în schimb, pentru turaţiile celor două roţi este valabil că suma lor are un raport anumit faţă de turaţia axei cardanice. Prin efectul diferenţialului sînt însă posibile şi turaţii diferite la cele două roţi antrenate, lucru care se întîmplă în timpul parcurgerii unei curbe.

2. Asemănătoare ca funcţie de transmitere însă diferite din punct de vedere constructiv sînt diferenţialele cu roţi dinţate cilindrice, capabile să transmită cupluri mai mari şi care folosesc o roată dinţată mare cu dantură interioară. Concentric cu aceasta se află dispusă o mică roată interioară, numită roată solară. Între cele două roţi sînt aşezate în lagăre, pe o punte de legătură cu roata solară, una sau mai multe roţi planetare, care în timpul funcţionării o înconjoară printr-o mişcare de revoluţie. Astfel, axele roţii planetare descriu în timpul

[1]) A se vedea în această ordine de idei lucrări ale lui M. Gafiţanu, aflate în curs de apariţie în acest *Buletin*.

unei rotații complete în jurul roții solare un cilindru cu raza egală cu lungimea punții de legătură.

Calculul gradului de mobilitate la un astfel de mecanism se face cu formula de structură

$$M_3 = 3n - 2C_5 - C_4, \tag{1}$$

în care n este numărul elementelor mobile ale mecanismului (roți centrale, sateliți, portsateliți) din care se elimină elementele pasive; C_5 — numărul cuplelor cinematice de clasa a V-a (articulațiile); C_4 — numărul cuplelor cinematice de clasa a IV-a (contactele dintre dinți).

În cazul cînd toate elementele sînt mobile, formula devine

$$M_3 = 3n - 2C_5 - C_4 = 12 - 8 - 2 = 2. \tag{2}$$

În consecință pentru a se cunoaște legile de mișcare ale mecanismului, urmează a fi date legile de mișcare a două elemente (mecanismul trebuie să aibă două elemente conducătoare). Un astfel de mecanism este *planetar diferențial* sau angrenaj diferențial.

În cazul cînd unul din elementele componente ale mecanismului considerat este fix, formula de structură conduce la

$$M_3 = 9 - 6 - 2 = 1. \tag{3}$$

Asemenea mecanisme cu elemente dințate cu pîrghie cu gradul de mobilitate egal cu unu se numesc *angrenaje planetare* simple sau angrenaje planetare.

Notînd cu: *1* — roata solară, *2* — roata planetară, *3* — roata cu dantură dințată interioară și *P* — puntea de legătură între satelit și roata solară, formula generală de calcul a angrenajelor planetare cu axe paralele va fi

$$i_{13}^P = \frac{w_1^P}{w_3^P} = \frac{w_1 - w_P}{w_3 - w_P} = \frac{n_1 - n_P}{n_3 - n_P}, \tag{4}$$

unde i_{13}^P este raportul de transmisie al mecanismului, presupunînd elementului *P* imobil.

Această formulă exprimă raportul vitezelor unghiulare relative față de puntea de legătură, care se obține prin anularea mișcării sale de rotație, imprimînd întregului sistem o rotație egală și de sens contrar cu turația absolută a punții față de un sistem de referință fix (de exemplu suportul angrenajului).

Dîndu-se două viteze oarecare se poate determina cu ajutorul formulei cea de a treia. Prin fixarea rigidă a unui element, în formula de mai sus se anulează evident viteza unghiulară respectivă. De exemplu, pentru $w_3 = 0$,

$$i_{1P} = 1 - i_{13}^P, \tag{5}$$

unde i_{1P} este raportul de transmisie al mecanismului cu roata *3* fixă, calculat de la roata *1* la elementul *P*.

3. Un angrenaj cu o singură roată planetară poate fi reprezentat schematic prin graful asociat, la care cele trei vîrfuri [2]) ale triunghiului reprezintă cele trei axe ale angrenajului (fig. 1).

Pentru a stabili o relație între turații care să caracterizeze angrenajele planetare în general, se pleacă de la bilanțul puterilor instantanee

$$\sum_{j=1}^{n} F_j v_j \cos \alpha_j + \sum_{j=1}^{n} M_j w_j = 0. \tag{6}$$

Neglijînd pierderile de randament, vom lua în considerare egalitatea puterilor introduse cu a celor care ies din angrenaj. Dacă puterile sînt exprimate ca produse între cuplu și turație și dacă definim ca raport de transmisie raportul cuplurilor între axele respective, se obține

$$n_1 + an_2 + bn_3 = 0. \tag{7}$$

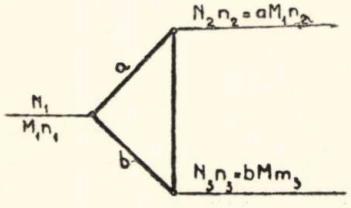


Fig. 1. — Graful unui angrenaj cu o singură roată planetară.

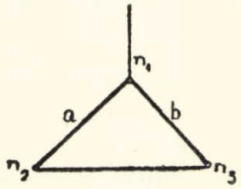


Fig 2. — Graful angrenajului de automobil ($a=b$).

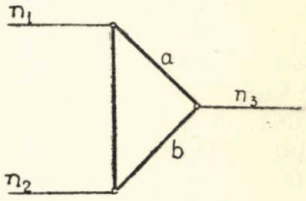


Fig. 3. — Graful unui angrenaj planetar cu o singură roată planetară pentru însumarea puterilor.

Relația (7) este valabilă pentru toate angrenajele planetare. Ea arată că există un anume raport între cele trei turații, care deosebește tipul de angrenaj respectiv de altele.

Constantele *a* și *b*, cu semnele + sau —, depind de tipul constructiv și de raportul de transmisie al angrenajului. Aplicînd ecuația (7) grafului corespunzător angrenajului de automobil menționat mai sus, rezultă fig. 2, în care prin n_1 s-a notat turația axei cardanice și prin n_2, n_3 — turațiile roților automobilului.

Pentru $a=b$ rezultă relația de proporționalitate între suma turațiilor celor două roți din spate ale automobilului și turația axului cardanic, $n_1+a_2(n_2+n_3)=0$.

---

[2]) Menționăm că în fig. 1...3 nu s-a pus în evidență elementul fix, notat de regulă cu 0 (zero). A se vedea, de ex., R. Voinea și M. Atanasiu, *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*, Ed. Tehn., Buc., 1964.

O altă modificare poate fi ca în cazul grafului din fig. 3, în care axa 3 este cuplată cu o mașină iar turațiile n_1 și n_2 sînt ale angrenării. În acest caz (7) devine $n_3 = k(n_1 + bn_2)$.

Prin urmare *angrenajele planetare pot fi folosite pentru transmiterea, ramificarea sau chiar însumarea puterilor.*

Angrenajele planetare cu roți dințate cilindrice la care între cele două roți solare este dispusă numai o singură roată planetară pot funcționa perfect; trebuie avut însă în vedere că ele devin economice în momentul cînd dispun de cît mai multe roți planetare cu scopul de a participa cît mai uniform la transmiterea forțelor.

Această repartiție a puterii în cadrul angrenajului se obține în orice caz prin măsuri constructive speciale, deoarece sistemele cu mai mult decît o roată dințată pot deveni static nedeterminate.

Se cunosc diferite soluții menite a îmbunătăți distribuția uniformă a puterii asupra tuturor dinților în angrenare. Astfel, se cunosc construcții la care se folosesc materiale elastice, în majoritatea cazurilor sintetice, cîteodată și arcuri pentru așezarea în lagăre a unor organe ale angrenajelor.

Prin deformarea acestor materiale se obține o echilibrare reciprocă a forțelor transmise, chiar dacă ea nu este completă. Flexibilitatea roții solare exterioare cu dantură interioară servește aceluiași scop. Este evident că la asemenea soluții se stabilește întotdeauna un compromis între rezistență și flexibilitate. Dacă se prevăd trei roți planetare dispuse pe aceeași circumferință la un unghi de 120° se renunță deseori la așezarea în lagăre a pinionului solar, a purtătorului planetarei sau a roții cu dantură interioară, sau chiar la mai multe elemente constructive. În acest caz, elementele nesprijinite în lagăre se autocentrează sub influența forțelor periferice astfel încît acestea se repartizează în mod egal la fiecare dinte atacat.

Problematica expusă mai sus de a repartiza sarcina în mod uniform pe toate roțile planetare și căile nu întotdeauna fericite de a obține acest rezultat au dus la părerea larg răspîndită de a se evita pe cît posibil folosirea angrenajelor planetare. O asemenea părere nu mai este justificată în prezent întrucît, așa cum se va vedea într-una din notele noastre ulterioare, este posibil a se alege pentru fiecare caz specific tipul corespunzător de angrenaj, justificat atît din punct de vedere tehnic cît și economic, întreaga problemă putînd fi formulată în termeni de problemă de optimizare.

4. Plecînd de la necesitatea obținerii unei repartizări cît mai uniforme a forțelor în interiorul angrenajului planetar în condiții constructive economice se vor prezenta o serie de considerațiuni privind construcția unor tipuri de angrenaje noi de puteri mari ce pot fi folosite cu succes în industria grea, în special în instalațiile ce reclamă siguranță mare în exploatare.

Astfel este cazul macaralelor pentru cuptoare adînci și a macaralelor folosite pentru turnare la care folosirea angrenajelor planetare cu două motoare pe transmisia de ridicare conduce la posibilitatea ca în cazul avarierii unui motor, macaralele să continue a funcționa cu un singur motor, în sarcină plină, însă cu jumătate din viteza de lucru.

De asemenea oportunitatea folosirii angrenajelor planetare acționate de două motoare cu rol asemănător celor de mai sus este reclamată de siguranța în exploatare a funicularelor pentru persoane. Este evident în acest caz avantajul creat de posibilitatea folosirii a două viteze diferite de funcționare, fără a se recurge în cazul schimbării lor la manevrarea unor cuplaje.

În general domeniul abordat se referă la angrenajele planetare la care roțile planetare sînt astfel solidarizate în construcție încît repartizarea sarcinilor din angrenaj se face în orice condiții și la orice sarcină în mod automat, construcția angrenajului devenind în felul acesta static determinată.

Primită la 9 V 1969

Academia de studii economice, București

BIBLIOGRAFIE

1. Tutunaru D., Lazaride G., Demian T., *Teoria mecanismelor și organe de mașini*, EDP, Buc., 1968.
2. Mangeron D., Bogdan R., *Studii, cercetări și perspective de dezvoltare a Teoriei mecanismelor și mașinilor în România.* Bul. Inst. polit. Iași, 1958 **IV (VIII)**, *3—4.*
3. Manolescu N. I., Maroș D., *Cinetostatica și Dinamica mecanismelor.* Ed. Tehn., Buc., 1958.
4. Artobolevskii I. I., Imedashvili K. A., *Dynamics of Differential Gear-Train Mechanisms.* J. of Mechanisms, 1959, *4*, pp. 79—92.
5. Fritsch F., Prelegere în cadrul Simpozionului „Zilele tehnicii — Austria", mai 1969, București.

SOPRA L'ANALISI E LA SINTESI DEGLI INGRANAGGI PLANETARI PER LA TRANSMISSIONE DELLE GRANDI POTENZE (I)

(Sunto)

L'A.,predendo le mosse da una serie di studi recenti che ne valorofocano l'impiego degli ingranaggi planetari (vedasi [4], come pure l'articolo di M. Gafițanu, inserito în questo *Bollettino)* e usando la teoria dei grafi, additta al problema, di ottimizzazione concernente tali mecanisme.

Spiegazione delle figure

Fig. 1. — Grafo di un angrenaggio con una sola ruota planetaria.
Fig. 2. — Grafo dell'angrenaggio differenziale di un'automobile ($a = b$).
Fig. 3. — Grafo din un angrenaggio planetario con una sola ruota planetaria per la sommazione delle potenze.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia IV : MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.9.01

DETERMINAREA COEFICIENŢILOR ŞI EXPONENŢILOR DIN RELAŢIILE MOMENTULUI DE TORSIUNE ŞI A FORŢEI AXIALE, LA BURGHIEREA OŢELURILOR ROMÂNEŞI STAS 880—60

DE

GH. CAŞLER, AL. RENER şi D. ZETU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Lucrarea de faţă cuprinde rezultatele cercetărilor experimentale privind valorile coeficienţilor C_P şi C_M, precum şi ale exponenţilor x_p, y_p, x_M şi y_M din relaţiile forţei axiale:

$$P = C_p d^{x_p} s^{y_p} \text{ [kgf]} \tag{1}$$

şi a momentului de torsiune:

$$M_t = C_M d^{x_M} s^{y_M} \text{ [kgf cm]}, \tag{2}$$

pentru o serie de oţeluri româneşti cuprinse în STAS 880—60 şi anume: OLC 15, OLC 20, OLC 30, OLC 40, OLC 50, OLC 55 şi OLC 65. Rezultatele încercărilor experimentale efectuate asupra celorlalte mărci de oţeluri cuprinse în STAS-ul indicat au fost deja publicate în [2].

Pentru orientare rapidă, tabelul 1 cuprinde rezultatele privind întreaga grupă de oţeluri.

2. Datele experimentale s-au obţinut folosind un dinamometru tip Paramonov modificat, proiectat şi executat în Laboratorul de maşini-unelte şi scule.

S-a lucrat pe o maşină de găurit cu coloană tip A 2 „Înfrăţirea—Oradea", care a permis aşchierea cu patru avansuri şi anume: $s_1 = 0{,}08$ mm/rot, $s_2 = 0{,}13$ mm/rot, $s_3 = 0{,}2$ mm/rot, $s_4 = 0{,}31$ mm/rot. Viteza de aşchiere s-a păstrat între limitele 7...10 m/min, acţionîndu-se în acest scop asupra mecanismului de reglare a turaţiilor mişcării principale.

Burghiele folosite sînt produsele „Fabricii de Scule—Rîşnov", avînd următoarele caracteristici: a) materialul, oţel rapid; b) canalele, lustruite; c) raportul dintre grosimea miezului şi diametru, $\eta = d_m/d = 0{,}16$, constant pentru toate burghiele; d) unghiul, $\omega = 30°$; e) metoda de ascuţire conică, procedeul Whashborne, realizată cu un dispozitiv Kellemberger adaptat pe un polizor. Ascuţirile s-au efectuat la următoarea geometrie: $\alpha_{ex} = 12°$, $\psi = 55°$, $2\varkappa = 120°$, valori ce se încadrează în prescripţiile STAS.

Încercările s-au intreprins folosind lichid de răcire-ungere (5% emulsie).

3. Cu datele experimentale obţinute pentru fiecare oţel cercetat s-au trasat două rînduri de drepte în diagrame dublulogaritmice, la $s = \text{const.}$ şi, respectiv, la $d = \text{const.}$, atît pentru forţa axială P cît şi pentru momentul de torsiune M_t. Rezultatele obţinute pot fi urmărite în fig. 1...14.

Folosind metoda prezentată în lucrarea [1] s-au calculat valorile medii pentru exponenţii x_p, y_p, x_M, y_M, precum şi pentru coeficienţii C_p şi C_M, prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Oţel STAS 880—60	HB kgf/cm²	$(x_p)_m$	$(y_p)_m$	$(C_p)_m$	$(x_M)_m$	$(y_M)_m$	$(C_M)_m$
OLC 10	111	1,13	0,81	58	1,73	0,83	6,1
OLC 15	129	1,13	0,67	57	1,71	0,81	7,6
OLC 20	138	1,05	0,65	66	1,73	0,83	8,0
OLC 25	131	1,03	0,73	72	1,79	0,81	5,3
OLC 30	174	1,00	0,71	85	1,77	0,81	6,6
OLC 35	140	1,04	0,67	67	1,65	0,79	7,4
OLC 40	191	1,03	0,75	88	1,68	0,81	7,9
OLC 45	207	1,07	0,72	63	1,71	0,84	6,7
OLC 50	229	1,95	0,70	78	1,74	0,81	7,1
OLC 55	219	0,96	0,66	90	1,72	0,80	7,1
OLC 60	255	0,97	0,72	91	1,82	0,79	5,3
OLC 65	244	0,88	0,73	152	1,68	0,88	10,2

Datele din tabel pot fi folosite, împreună cu coeficienţii de corecţie din lucrarea [3] privind modificarea condiţiilor de lucru faţă de condiţiile indicate în prezenta lucrare, la proiectarea proceselor tehnologice şi a construcţiilor de maşini-unelte, scule şi dispozitive.

Limitele largi şi diversitatea de valori ale coeficienţilor şi exponenţilor se explică prin caracteristicile fizico-mecanice variate ale materialelor experimentate.

4. Rezultatele obţinute în prezenta lucrare confirmă, odată în plus, concluziile din lucrarea de sinteză asupra burghierii [4], şi anume:

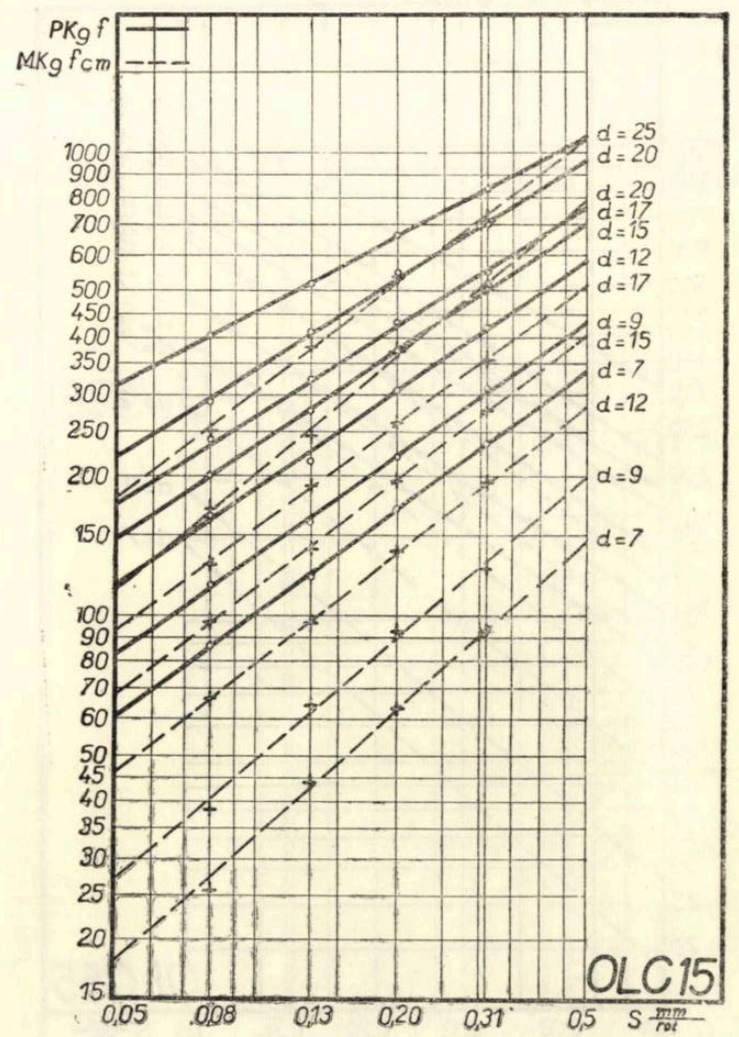


Fig. 1

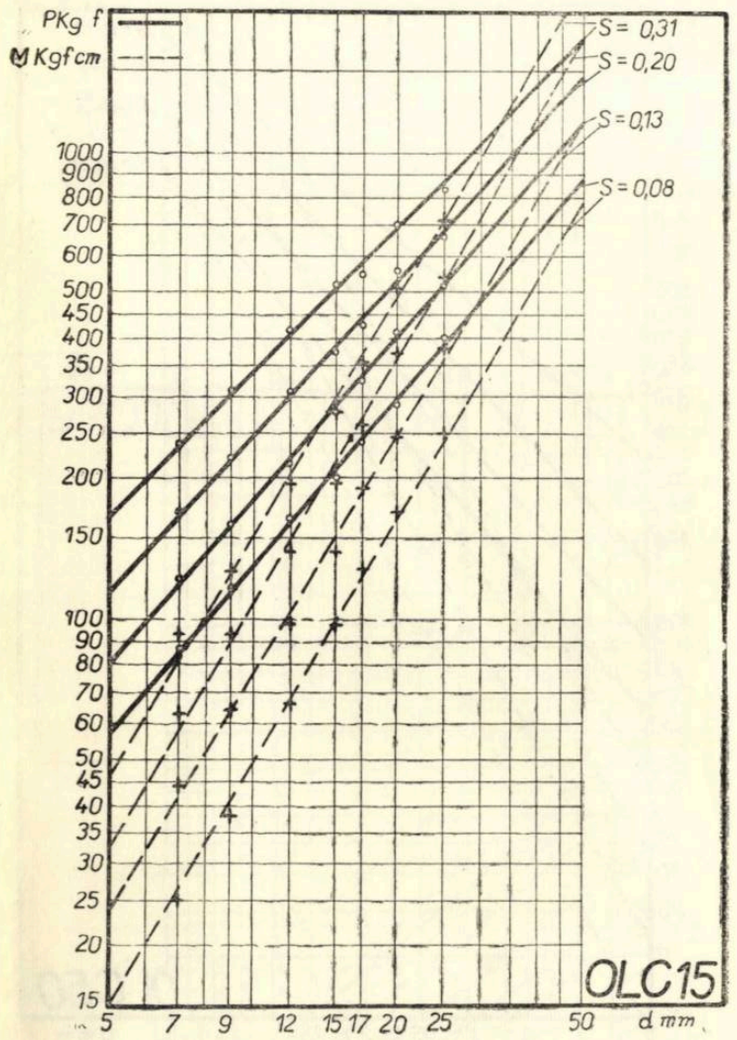


Fig. 2

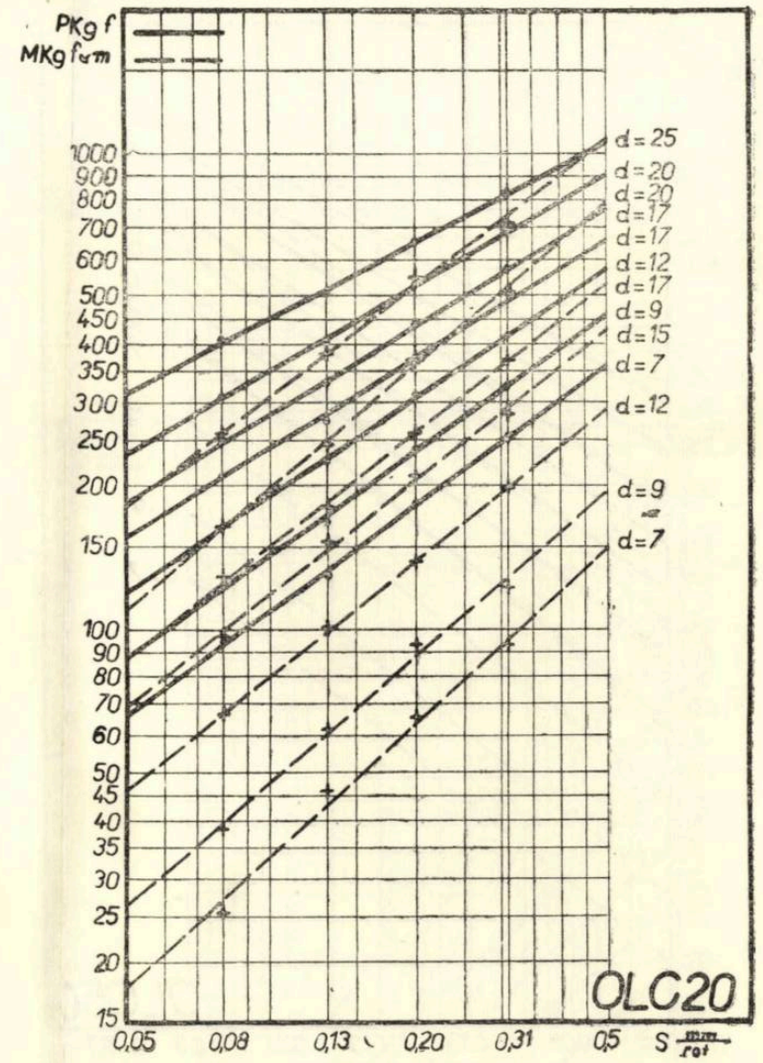


Fig. 3

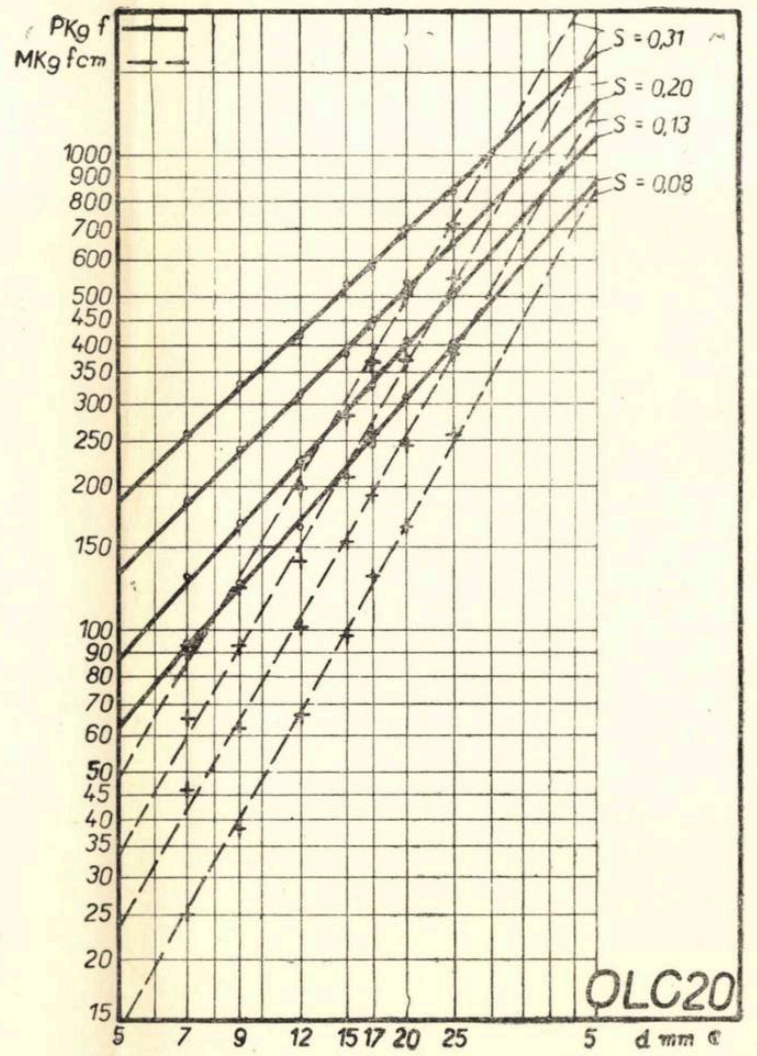


Fig. 4

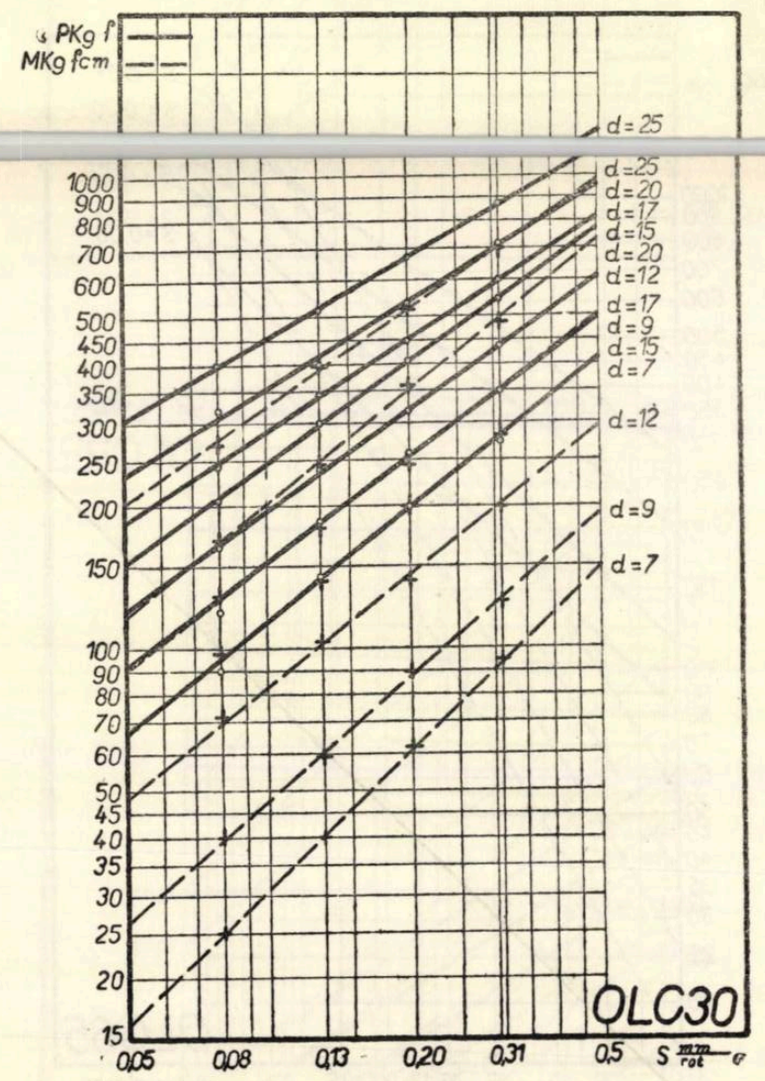


Fig. 5

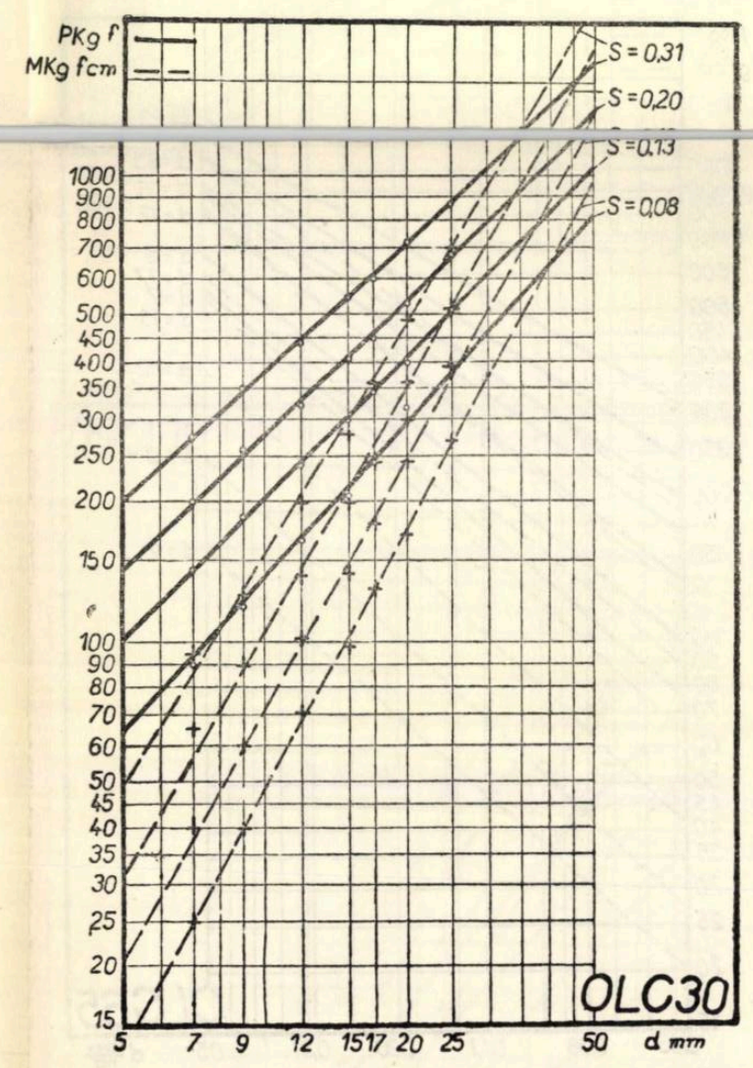


Fig. 6

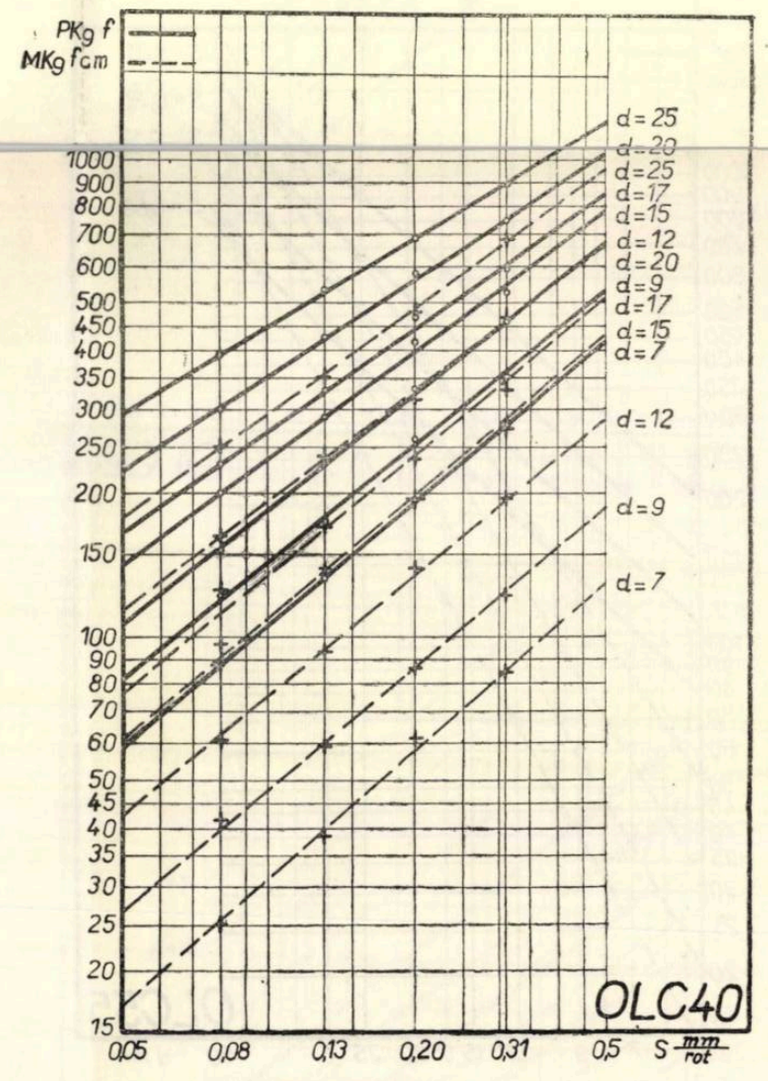


Fig. 7

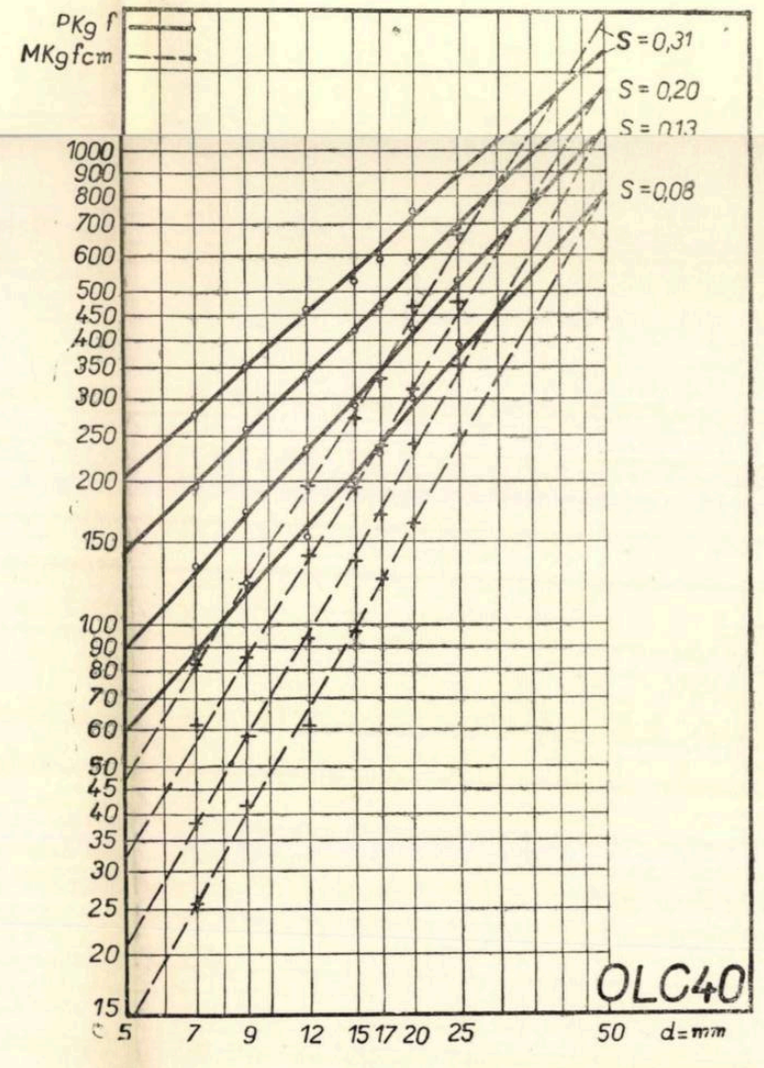


Fig. 8

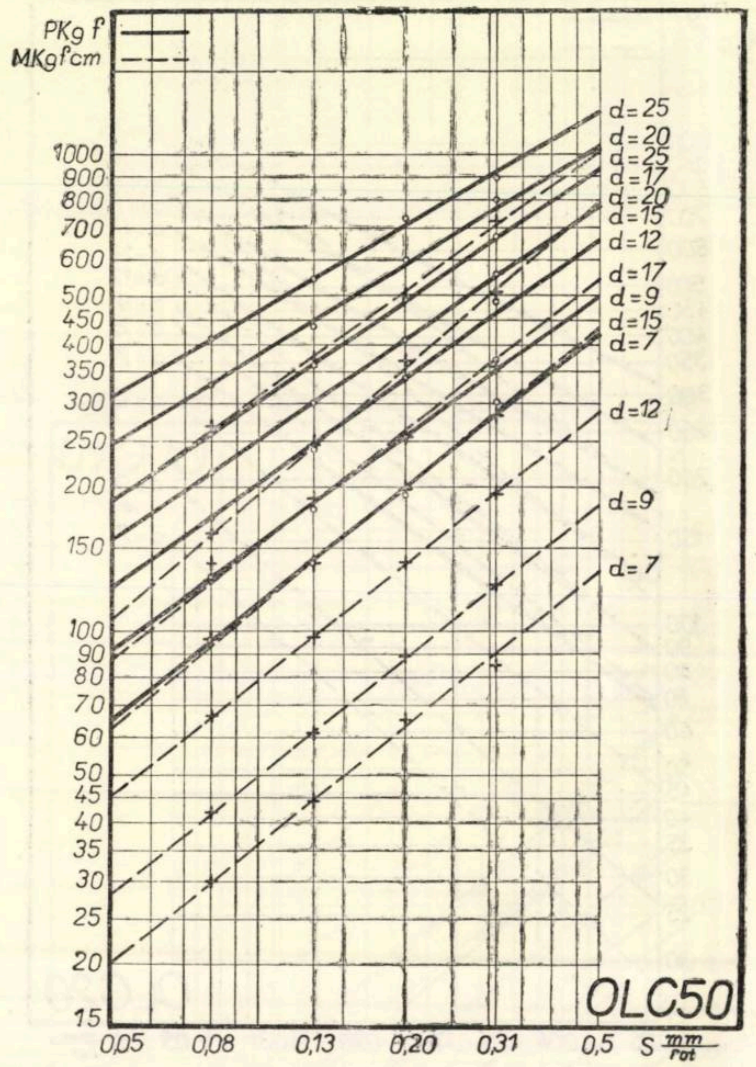


Fig. 9

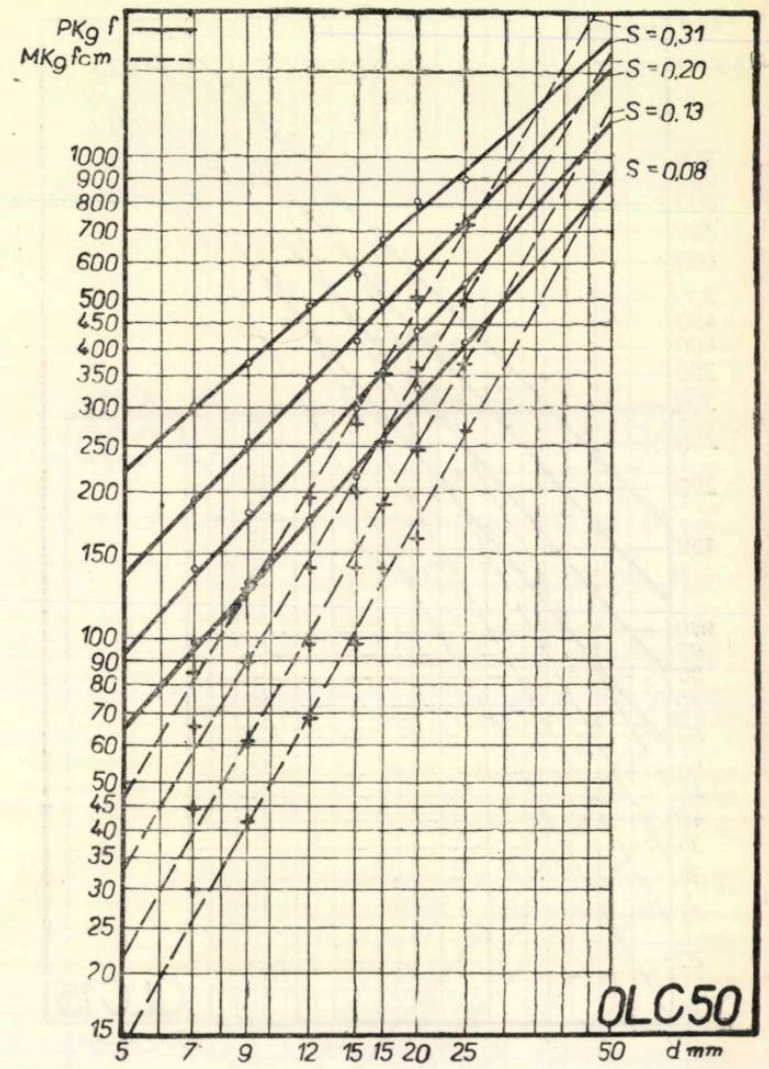


Fig. 10

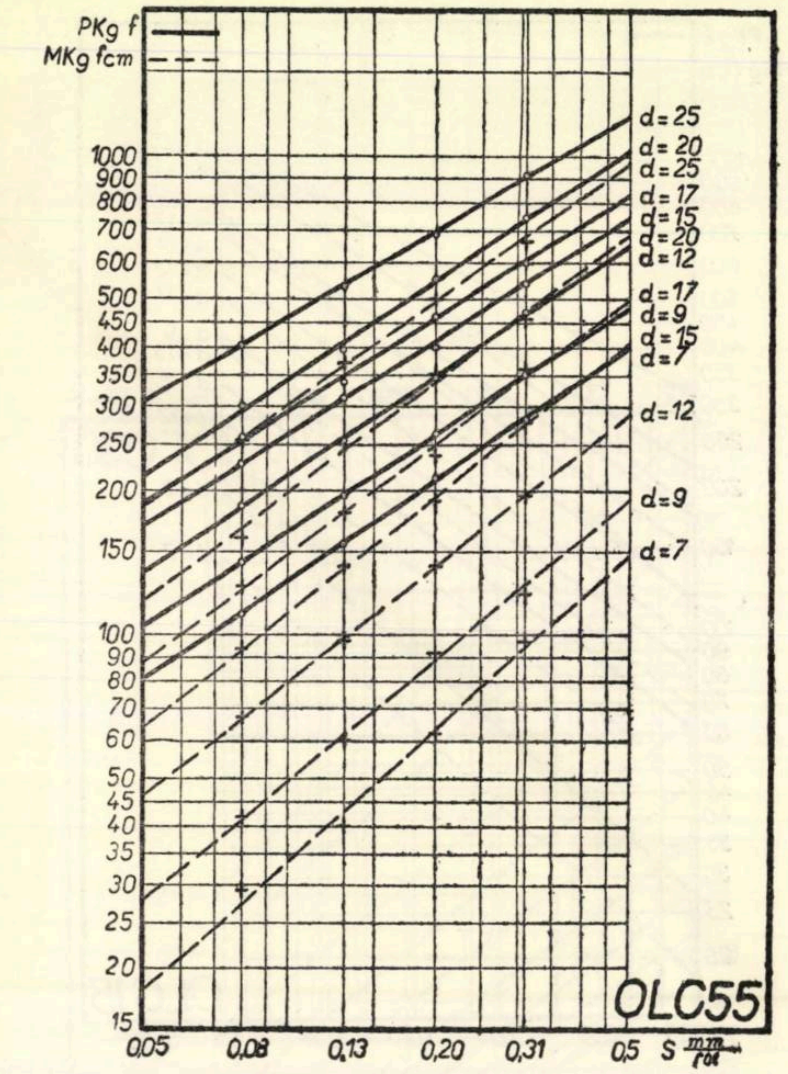


Fig. 11

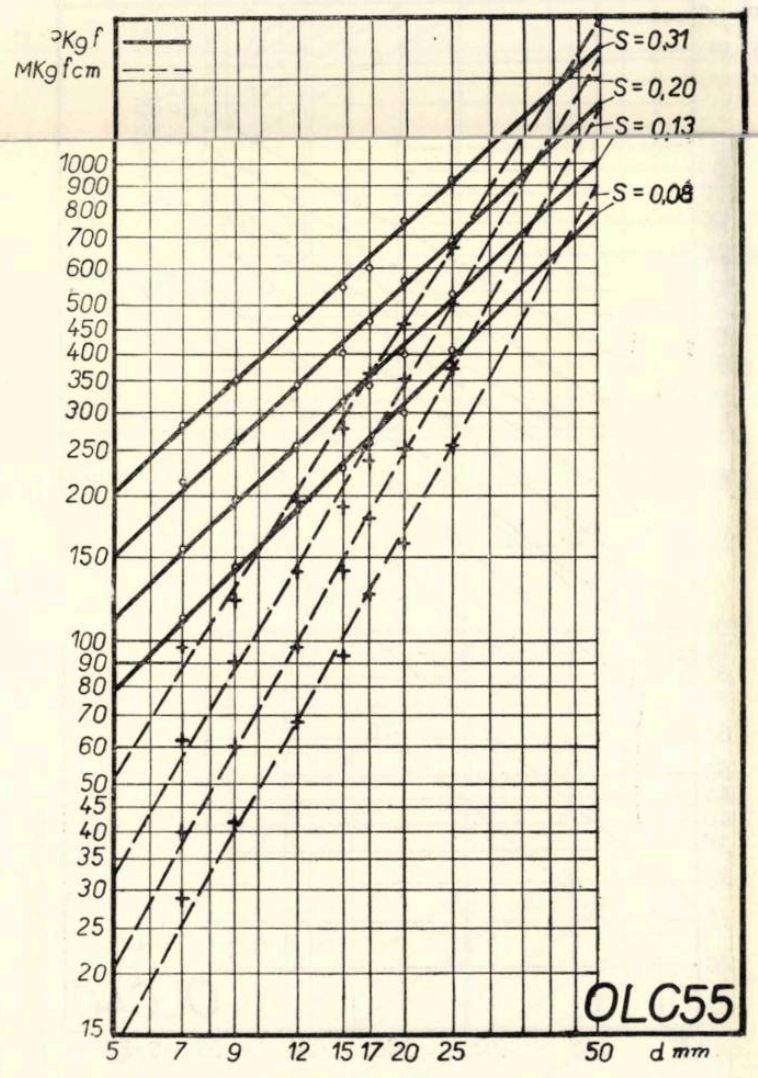


Fig. 12

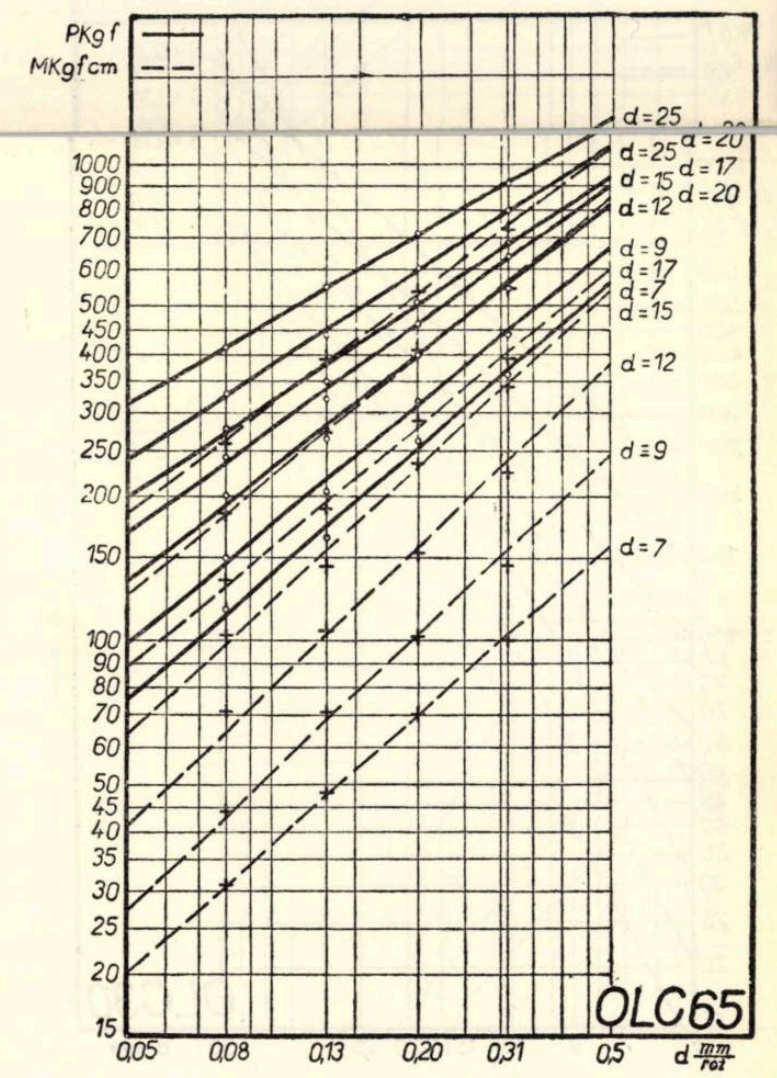


Fig. 13

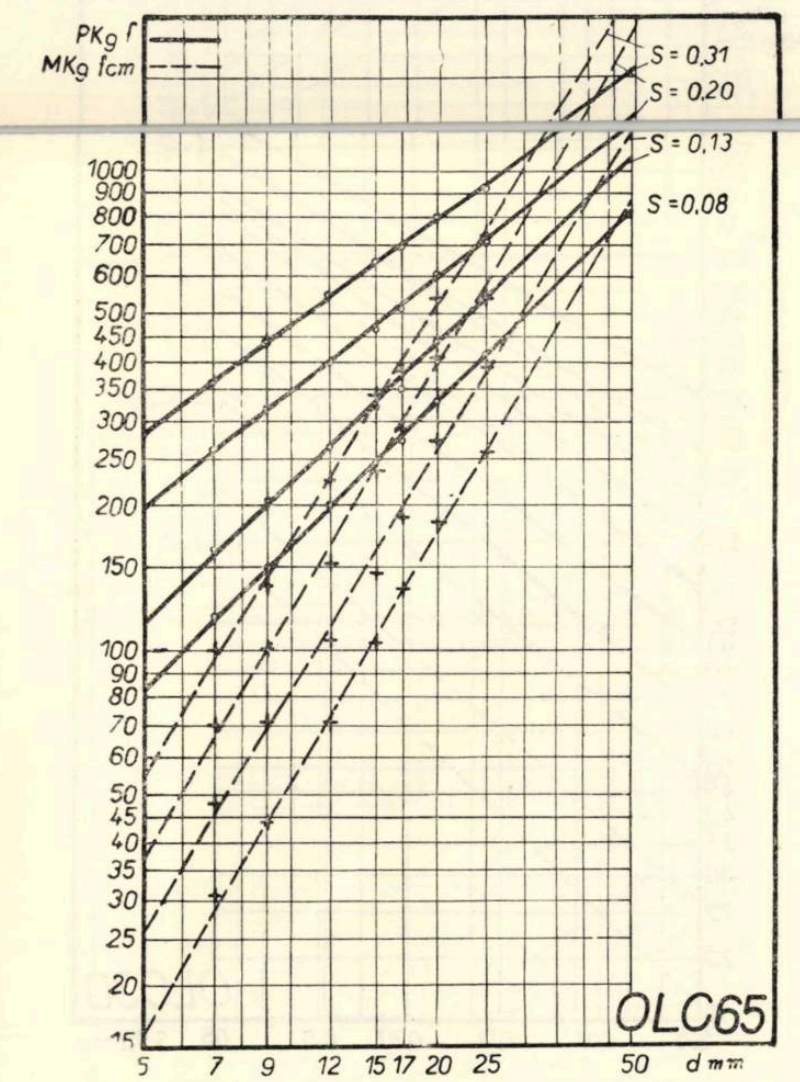


Fig. 14

1. Folosirea relaţiilor (1) şi (2) cu valori constante ale exponenţilor şi coeficienţilor pentru toate materialele, indiferent de compoziţie, structură şi caracteristici fizico-mecanice, aşa cum se face potrivit unor normative existente în ţară şi peste hotare, poate duce la erori considerabile. Prin folosirea unui singur parametru, cum ar fi duritatea sau rezistenţa la rupere, aşa cum procedează normativele [5]...[9], nu se poate defini precis comportarea la burghiere a oţelului respectiv. Rezultă deci oportunitatea stabilirii pentru fiecare material în parte, cel puţin în condiţiile actuale, a constantelor şi exponenţilor mai sus arătaţi.

2. Valoarea exponentului x_M rămîne destul de mult sub valoarea $x_M=2$, recomandată de o serie de normative. Acceptarea acesteia duce de asemenea la erori importante în aprecierea solicitărilor la care sînt supuse sculele şi utilajele.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini-unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh., Rener Al., *Determinarea constantelor şi exponenţilor din relaţiile momentului de torsiune şi a forţei axiale la burghierea oţelurilor româneşti, STAS 793–53.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *3–4*, pp. 345–346.
2. Caşler Gh., Rener Al., Zetu D., *Determinarea constantelor şi exponenţilor din relaţiile momentului de torsiune şi a forţei axiale la burghierea oţelurilor româneşti, STAS 880–49.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *3–4*, pp. 349–350.
3. Caşler Gh., Belous V., Rener Al. şi colab., *Influenţa geometriei părţii aşchietoare a burghielor elicoidale asupra dinamicii burghierii unor oţeluri româneşti.* Constr. de maş., 1963, nr. *8*, pp. 562—569.
4. Caşler Gh., Belous V., Rener Al., *Contribuţii la cercetarea experimentală a dinamicii burghierii oţelurilor româneşti.* Constr. de maş., 1967, nr. *6—7*, pp. 375–381.
5. * * * *Normative unificate de regimuri de aşchiere şi timpi auxiliari pentru 21 procedee de prelucrare.* M. M. C. M., Bucureşti.
6. * * * *Normative unificate de regimuri de aşchiere şi timpi auxiliari pentru 13 procedee de prelucrare.* M. M. C. M., Bucureşti.
7. * * * *Режимы резания металлов инструментами из быстрорежущем сталь.* Машгиз, М., 1950.
8. * * * *Нормативы по режимам резания свиорлами из инстументальноu сталь.* Машгиз, М., 1956.
9. * * * *Tool Engineers Handbook.* Mc. Graw Hill Book Comp., Inc., N Y, 1959.

DIE BESTIMMUNG DER VON DEN RELATIONEN DER AXIALKRAFT UND DES DREHMOMENTES KOEFFIZIENTEN UND EXPONENTEN BEIM BOHREN DER RUMÄNISCHEN STAHLSORTEN, STAS 880–60

(Zusammenfassung)

Durch die Verwendung eines mechanischen Bohrmesstisches werden die Koeffizienten und Exponenten der Gleichungen (1) und (2) beim Bohren, festgelegt.

Die erhaltene Werte sind in der Tabelle 1 angegeben.

Diese Werte können, mit Hilfe der aus der Arbeit [3] „Bedingungskoeffizienten" auch bei der Berechnung der Axialkraft und des Drehmomentes für andere Arbeitsbedingungen als diejenigen aus der vorliegenden Arbeit, verwendet werden.

Die grosse Anzahl der verschiedenen Werte der Koeffizienten und Exponenten wird durch die Verschidenheit der physikalischen und mechanischen Eigenschaften der geprüften Stahlsorten erklärt.

Wenn man bei der Berechnung mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) konstante Werte der Koeffizienten und Exponenten für alle Stahlsorten verwenden würde, abgesehen von der Struktur, der physikalischen und mechanischen Eigenschaften, dann käme zu bedeutenden Fehlern.

Daraus folgt die Notwendigkeit der Bestimmung der Obengezeigten Koeffizienten und Exponenten für jede Stahlsorte.

Gleichfalls bemerkenswert ist, dass die Werte der Exponenten x_M unter dem Wert $x_M = 2$ steht.

Die Annahme des Wertes $x_M = 2$ führt gleichfalls zu bedeutenden Fehlern bei der Bewertung der Spannungen denen die Werkzeuge, Vorrichtungen und Werkzeugmaschinen ausgesetzt werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECŢIA V

CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 1—2, 1969

СЕКЦИЯ V

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕХНИКА

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECTION V

CONSTRUCTIONS. HYDROTECHNICS

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. D. 621-217

SUL CALCOLO DELLA LASTRA CIRCOLARE SU SUOLO ELASTICO SOGGETTA A CARICHI PARZIALI DI SUPERFICIE ED A CARICHI LINEARI

DI

CARLO EMANUELE CALLARI

1. Premessa

La lastra circolare su suolo elastico è stata studiata quasi esclusivamente nel caso in cui il carico è distribuito in modo assialsimmetrico [1], [2]; in tal modo il problema risulta alquanto semplificato rispetto a quello generale, essendo la deformata della lastra funzione soltanto della distanza radiale e non della coordinata angolare del riferimento polare al centro della lastra.

Nel caso particolare della lastra circolare galleggiante (che equivale alla lastra su suolo di Winkler-Zimmermann non vincolata al contorno), lo studio di condizioni di carico non simmetriche può teoricamente essere svolto mediante l'uso della funzione di Green, calcolata nel lavoro [3]; più generalmente, per la lastra su suolo di Winkler comunque vincolata al bordo, è stato risolto il problema del carico concentrato applicato in un punto qualsiasi della lastra [4]. Quest'ultima trattazione permette, teoricamente, per mezzo della sovrapposizione degli effetti, il calcolo della lastra circolare, per una qualsiasi condizione di carico; in pratica il procedimento risulta assai lungo in conseguenza della non sempre rapida convergenza degli sviluppi in serie.

Per condizioni di carico dotate di una certa regolarità il calcolo puo' invece essere svolto assai piu' rapidamente integrando direttamente l'equazione differenziale della deformata

Nella presente nota si esaminano alcune condizioni di carico parziale, lineare e di superficie; per evitare una eccessiva complessità degli sviluppi analitici si è assunto, come legame sforzi-deformazioni per il sottofondo, la semplice relazione di Winkler-Zimmermann[1]); le varie espressioni pro-

[1]) Dal punto di vista delle applicazioni pratiche si può ricordare, a proposito della legge di reazione del sottofondo, che opere di notevole importanza sono state calcolate, anche recentemente, assumendo la relazione di semplice proporzionalità di Winkler-Zimmermann, ottenendo un ottimo accordo con prove sperimentali; inoltre, nella calcolazione pratica, le semplificazioni spesso introdotte per facilitare la risoluzione pratica del problema, impostato secondo le teorie più complesse diminuiscono il grado di approssimazione caratteristico di queste ultime;

poste recentemente per tale legame, sia derivate da schematizzazioni meccaniche del suolo [5]...[7], che dall'estensione al bidimensionale della relazione di Wieghardt [8], [9], conducono infatti a calcoli notevolmente lunghi già per le più semplici condizioni di carico simmetrico; la complessità aumenterebbe evidentemente nell'estensione di tali procedimenti a condizioni di carico meno regolari.

2. Richiami sull'impostazione generale del problema

L'equazione differenziale della deformata della lastra circolare elastica, isotropa e di spessore costante, appoggiata sul suolo dotato delle caratteristiche ipotizzate da Winkler-Zimmermann, risulta notoriamente, nel campo dei piccoli spostamenti:

$$D\nabla_r^4 w + kw = q(r, \theta), \quad (1)$$

dove il secondo membro rappresenta il carico verticale di superficie, funzione delle coordinate polari r e θ riferite al centro della lastra. Introducendo la coordinata radiale adimensionale $\rho = \lambda r$, essendo $\lambda = 4\sqrt{k/D}$, la (1) diviene:

$$\nabla^4 w + w = \frac{q(\rho, \theta)}{\lambda^4 D}. \quad (2)$$

La soluzione generale della (2) è fornita dalla somma di un suo integrale particolare w_P e dell'integrale w_G dell'omogenea associata[4]), che traduce il problema della flessione della lastra su suolo elastico caricata soltanto sul contorno.

L'integrale generale w_G della (2) si può esprimere, nel caso più generale, nella seguente forma [4]:

$$w_G(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} R'_n \operatorname{sen} n\theta, \quad (3)$$

---

infine non si deve dimenticare che la determinazione dei coefficienti da introdurre nei calcoli risulta, anche nei casi in cui si eseguono accurate prove sperimentali, affetta da un certo margine di incertezza, che può rendere illusoria anche la maggior esattezza formale dei procedimenti più rigorosi.

[2]) Nella (1) w rappresenta lo spostamento verticale del generico punto della lastra, $D = Eh^3/[12(1-\nu)]$ — la regidezza della lastra di spessore h, mentre k è il coefficiente di reazione del suolo.

[3]) Nella (3) risulta $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$, dove si è indicato con ∇^2 l'operatore

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2};$$

nella (1) l'operatore, formalmente uguale, è invece riferito a r anzichè a ρ.

[4]) Dopo aver determinato la deformata verticale del piano medio della lastra e cioè l'espressione $w = w(\rho, \theta)$, le varie caratteristiche di sollecitazione risultano facilmente calcolabili ([2, pp. 282—284]).

essendo R_n e R'_n le sottoriportate combinazioni lineari delle funzioni di Kelvin, e di otto costanti di integrazione:

$$(4)\qquad \begin{cases} R_n = A_n \operatorname{ber}_n \rho + B_n \operatorname{bei}_n \rho + C_n \operatorname{ker}_n \rho + D_n \operatorname{kei}_n \rho, \\ R'_n = A'_n \operatorname{ber}_n \rho + B'_n \operatorname{bei}_n \rho + C'_n \operatorname{ker}_n \rho + D'_n \operatorname{kei}_n \rho, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

L'integrale particolare w_P della (3) viene determinato nei singoli casi in relazione alle modalità di carico della lastra.

3. Carico di superficie uniformemente distribuito su una limitata zona circolare

3.1. Zona circolare caricata concentrica alla lastra

Consideriamo una lastra circolare, di centro O, e raggio $r_e = \rho_e/\lambda$, soggetta a carico verticale uniforme q sulla sua zona circolare centrale di raggio $r_i = \rho_i/\lambda$ (fig. 1).

In conseguenza della simmetria radiale del problema, la (3) si particolarizza nella forma:

$$(5)\qquad w_G(\rho) = R_0 = A_0 \operatorname{ber}_0 \rho + B_0 \operatorname{bei}_0 \rho + C_0 \operatorname{ker}_0 \rho + D_0 \operatorname{kei}_0 \rho .$$

Nella zona centrale caricata uniformemente, si ha la soluzione particolare:

$$(6)\qquad w_{iP} = \frac{q}{\lambda^4 D}\ ^{5});$$

l'integrale generale dell'omogenea associata è fornito dalla (5), che si semplifica nella forma:

$$(7)\qquad w_{iG}(\rho) = A_{0i} \operatorname{ber}_0 \rho + B_{0i} \operatorname{bei}_0 \rho\ ^{6}).$$

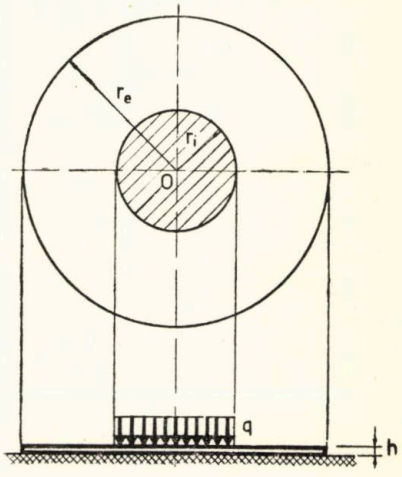


Fig. 1

Con nuovi valori delle costanti la (7) si può porre nella forma:

$$(8)\qquad w_{iG}(\rho) = \frac{q}{\lambda^4 D}(A_{0i} \operatorname{ber}_0 \rho + B_{0i} \operatorname{bei}_0 \rho).$$

---

[5]) Si sono contrassegnate con l'indice i le varie grandezze corrispondenti alla zona centrale caricata della lastra.

[6]) Si deve infatti annullare, nella (5), il coefficiente C_0, in quanto la funzione $\operatorname{ker}_0 \rho$ e la sua derivata prima divengono infinite per $\rho = 0$, e cioè in corrispondenza del centro della lastra, in contrasto col fatto che in realtà sia lo abbassamento verticale che la rotazione man-

L'espressione della deformata della superficie media della lastra risulta pertanto, nella zona interna caricata, e cioè per $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_i$:

$$w_i(\rho) = w_{iP} + w_{iG}(\rho) = \frac{q}{\lambda^4 D}(1 + A_{0i}\,\mathrm{ber}_0\rho + B_{0i}\,\mathrm{bei}_0\rho). \tag{9}$$

Nella zona anulare esterna scarica, e cioè per $\rho_i \leqslant \rho \leqslant \rho_e$, la soluzione generale è fornita[7]) dalla (5), espressa in forma analoga alla (8):

$$w_e(\rho) = \frac{q}{\lambda^4 D}(A^*_{0e}\,\mathrm{ber}_0\rho + B^*_{0e}\,\mathrm{bei}_0\rho + C_{0e}\,\mathrm{ker}_0\rho + D_{0e}\,\mathrm{kei}_0\rho). \tag{10}$$

Per la determinazione delle costanti si utilizzano quattro condizioni di continuità sulla circonferenza di raggio e due condizioni di compatibilità con i vincoli sul bordo esterno della lastra; quattro costanti, in relazione alla particolare formulazione adottata, risultano indipendenti dalle condizioni di vincolo al bordo della lastra.

Per determinare queste ultime transformiamo la (10) nella forma equivalente:

$$w_e(\rho) = \frac{q}{\lambda^4 D}(A_{0i}\,\mathrm{ber}_0\rho + B_{0i}\,\mathrm{bei}_0\rho) + \frac{q}{\lambda^4 D}(A_{0e}\,\mathrm{ber}_0\rho + B_{0e}\,\mathrm{bei}_0\rho + C_{0e}\,\mathrm{ker}_0\xi + D_{0e}\,\mathrm{kei}_0\rho), \tag{11}$$

essendosi introdotte le nuove costanti:

$$A_{0e} = A^*_{0e} - A \quad , \quad B_{0e} = B^*_{0e} - B_{0i}.$$

Le condizioni di continuità sulla circonferenza di raggio r_i sono fornite dall'uguaglianza degli abbassamenti, del momento flettente e del taglio radiali, nonchè della continuità della deformata; esprimendo tali condizioni in funzione della (9) e della (11), si ottiene il seguente sistema, che permette la determinazione delle quattro incognite $A_{0e}, B_{0e}, C_{0e}, D_{0e}$[8]):

$$\begin{cases} A_{0e}\,\mathrm{ber}_0\rho_i + B_{0e}\,\mathrm{bei}_0\rho_i + C_{0e}\,\mathrm{ker}_0\rho_i + D_{0e}\,\mathrm{kei}_0\rho_i = 1, \\ A_{0e}\,\mathrm{ber}'_0\rho_i + B_{0e}\,\mathrm{bei}'_0\rho_i + C_{0e}\,\mathrm{ker}'_0\rho_i + D_{0e}\,\mathrm{kei}'_0\rho_i = 0, \\ A_{0e}\,\mathrm{ber}''_0\rho_i + B_{0e}\,\mathrm{bei}''_0\rho_i + C_{0e}\,\mathrm{ker}''_0\rho_i + D_{0e}\,\mathrm{kei}''_0\rho_i = 0, \\ A_{0e}\,\mathrm{ber}'''_0\rho_i + B_{0e}\,\mathrm{bei}'''_0\rho_i + C_{0e}\,\mathrm{ker}'''_0\rho_i + D_{0e}\,\mathrm{kei}'''_0\rho_i = 0. \end{cases} \tag{12}$$

---

tengono in tale punto un valore finito. Anche il termine $D_0\,\mathrm{kei}_0\rho$ deve annullarsi in conseguenza delle caratteristiche di carico; ciò si può osservare esprimendo la condizione che nel centro, per $\rho = 0$, si annulla il taglio radiale, per considerazioni di simmetria.

[7]) Si sono contrassegnate con l'indice *e* le varie grandezze corrispondenti alla zona esterna, scarica, della lastra.

[8]) Nelle equazioni (12) gli apici indicano le successive derivate rispetto a ρ delle funzioni ber, bei, ker, kei, che sono poi calcolate per il valore $\rho = \rho_i$ della variabile.

Le rimanenti due costanti, A_{0i} e B_{0i}, che compaiono nel primo termine della (11) e nella (9), si determinano mediante le condizioni di vincolo sulla cironferenza esterna della lastra.

Quando il bordo è libero (caso della lastra circolare galleggiante), risultano nulli il momento flettente e il taglio radiali; si hanno pertanto le due condizioni:

$$(13)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 w_e}{\partial \rho^2} + \dfrac{\nu}{\rho} \cdot \dfrac{\partial w_e}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_e} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} \left(\dfrac{\partial^2 w_e}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial w_e}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_e} = \left(\dfrac{\partial^3 w_e}{\partial \rho^3} - \dfrac{1}{\rho^2} \cdot \dfrac{\partial w_e}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial^2 w_e}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=\rho_e} = 0. \end{cases}$$

Esplicitando le (13) si ottiene un sistema di due equazioni lineari nelle incognite A_{0i} e B_{0i}; le espressioni di tali costanti risultano, dopo alcuni passaggi:

$$A_{0i} = -A_{0e} + \frac{\alpha\beta_i - \gamma\delta_i}{\beta_i \delta_r - \beta_r \delta_i}, \quad B_{0i} = -B_{0e} + \frac{\gamma\delta_r - \alpha\beta_r}{\beta_i \delta_r - \beta_r \delta_i},$$

con il seguente significato dei simboli:

$$\alpha = -C_{0e}\left(\ker_0'' \rho_e + \frac{\nu}{\rho_e} \ker_0' \rho_e \right) - D_{0e}\left(\mathrm{kei}_0'' \rho_e + \frac{\nu}{\rho_e} \mathrm{kei}_0' \rho_e \right),$$

$$\beta_r = \mathrm{ber}_0''' \rho_e + \frac{1}{\rho_e} \mathrm{ber}_0'' \rho_e - \frac{1}{\rho_e^2} \mathrm{ber}_0' \rho_e,$$

$$\beta_i = \mathrm{bei}_0''' \rho_e + \frac{1}{\rho_e} \mathrm{bei}_0'' \rho_e - \frac{1}{\rho_e^2} \mathrm{bei}_0' \rho_e,$$

$$\gamma = -C_{0e}\left(\ker_0''' \rho_e + \frac{1}{\rho_e} \ker_0'' \rho_e - \frac{1}{\rho_e^2} \ker_0' \rho_e \right) -$$

$$- D_{0e}\left(\mathrm{kei}_0''' \rho_e + \frac{1}{\rho_e} \mathrm{kei}_0'' \rho_e - \frac{1}{\rho_e^2} \mathrm{kei}_0' \rho_e \right),$$

$$\delta_r = \mathrm{ber}_0 \rho_e + \frac{\nu}{\rho_e} \mathrm{ber}_0' \rho_e, \quad \delta_i = \mathrm{bei}_0'' \rho_e + \frac{\nu}{\rho_e} \mathrm{bei}_0' \rho_e.$$

Nel caso in cui il bordo della lastra sia semplicemente appoggiato, sono nulli sul contorno lo spostamento verticale e il momento flettente radiale; ne risultano le espressioni delle costanti:

$$A_{0i} = -A_{0e} + \frac{\varepsilon\delta_i - \alpha \,\mathrm{bei}_0 \rho_e}{\delta_i \,\mathrm{ber}_0 \rho_e - \delta_r \,\mathrm{bei}_0 \rho_e}, \quad B_{0i} = -B_{0e} + \frac{\alpha \,\mathrm{ber}_0 \rho_e - \varepsilon\delta_r}{\delta_i \,\mathrm{ber}_0 \rho_e - \delta_r \,\mathrm{bei}_0 \rho_e},$$

essendo:

$$\varepsilon = - C_{0e} \ker_0 \rho_e - D_{0e} \operatorname{kei}_0 \rho_e .$$

Nel caso in cui il bordo sia perfettamente incastrato sono nulli sul contorno sia lo spostamento verticale che la rotazione in direzione radiale; ne risultano le espressioni delle costanti:

$$A_{0i} = - A_{0e} + \frac{\varepsilon \operatorname{bei}'_0 \rho_e - \varepsilon' \operatorname{bei}_0 \rho_e}{\operatorname{ber}_0 \rho_e \operatorname{bei}'_0 \rho_e - \operatorname{ber}'_0 \rho_e \operatorname{bei}_0 \rho} ,$$

$$B_{0i} = - B_{0e} + \frac{\varepsilon' \operatorname{ber}_0 \rho_e - \varepsilon \operatorname{ber}'_0 \rho_e}{\operatorname{ber}_0 \rho_e \operatorname{bei}'_0 \rho_e - \operatorname{ber}'_0 \rho \operatorname{bei}_0 \rho_e} ,$$

essendo:

$$\varepsilon' = - C \ker'_0 \rho_e - D_{0e} \operatorname{kei}'_0 \rho_e .$$

3. 2. Zona circolare caricata non concentrica alla lastra

Consideriamo la lastra su suolo elastico indicata in fig. 2; essa è soggetta ad un carico uniforme esteso ad una zona circolare di raggio r_c che presenta il suo centro C a distanza r_0 dal centro della lastra.

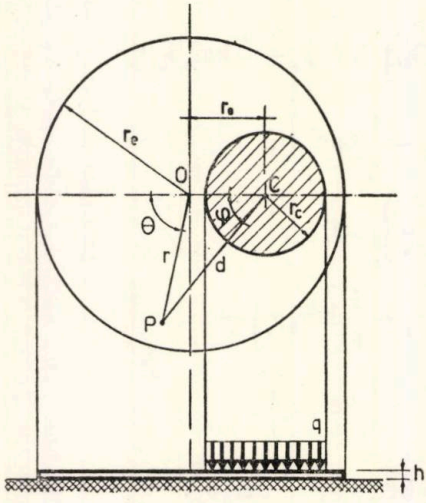


Fig. 2

Supponiamo che la zona circolare soggetta al carico sia totalmente compresa entro la circonferenza che delimita la lastra; sarà quindi $r_0 + r_c \leqslant r_e$, essendo $r_0 \neq 0$; il generico punto P della lastra avrà come coordinate polari, rispetto al centro O della lastra, r e θ; in un riferimento polare al centro C della zona caricata le coordinate risultano d e φ.

Si assume come asse di riferimento della coordinata angolare θ il diametro passante per OC; ne risulta, rispetto ad esso, la simmetria del sistema [9]).

Nella zona caricata la deformata della lastra può essere considerata come somma di due termini; il primo, dovuto alla flessione della lastra sollecitata soltanto sul contorno, è espresso in forma differenziale dalla omogenea associata alla (2); il secondo, che constituisce una soluzione particolare w_{cP} della (2), è ancora espresso dalla (6).

---

[9]) Le varie lunghezze indicate in fig. 2 (r_e, r_0, r_c, r, d) sono riportate a valori adimensionali moltiplicandole per λ (ρ_e, ρ_0, ρ_c, ρ, δ); si sono poi contrassegnate con gli indici c ed s le grandezze afferenti rispettivamente alla zona di lastra caricata ed a quella scarica.

Il primo termine sopracitato è espresso dalla (3), che, in relazione alla simmetria connessa alla scelta del diametro OC come origine delle coordinate angolari θ, risulta:

$$w_{cG}(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \cos n\theta, \tag{14}$$

dove i termini R_n, espressi dalla prima delle (4), si semplificano, nel caso in esame, nella forma:

$$R_n = A_n \operatorname{ber}_n \rho + B_n \operatorname{bei}_n \rho \text{ [10)}.$$

L'espressione dell'abbassamento nella zona caricata risulta pertanto, con nuovo valore delle costanti:

$$w_c(\rho, \theta) = w_{cP} + w_{cG} = \frac{q}{\lambda^4 D} + \frac{q}{\lambda^4 D} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \operatorname{ber}_n \rho + B_n \operatorname{bei}_n \rho) \cos n\theta. \tag{15}$$

Nella zona scarica della lastra lo spostamento verticale w si può considerare come somma dell'effetto dei carichi al bordo esterno, e del carico applicato sulla zona centrale.

Il primo termine risulta, come in precedenza calcolato:

$$w_{s1} = \frac{q}{\lambda^4 D} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \operatorname{ber}_n \rho + B_n \operatorname{bei}_n \rho) \cos n\theta\,; \tag{16}$$

il secondo termine si può rappresentare mediante l'espressione valida per la zona esterna scarica della lastra studiata nel §3.1, purchè si assuma come riferimento polare, per il generico punto P della lastra, quello con origine nel centro C della zona scaricata.

Del fatto che, in realtà, la zona scarica della lastra in esame non è anulare, si tiene implicitamente conto, come si espone nel seguito, trasformando le coordinate del riferimento polare al punto C in quello del riferimento al centro della lastra, e determinando le costanti arbitrarie in funzione della reale geometria del sistema.

Si avrà pertanto:

$$w_{s2} = \frac{q}{\lambda^4 D} (A_0 \operatorname{ber}_0 \delta + B_0 \operatorname{bei}_0 \delta + C_0 \ker_0 \delta + D_0 \operatorname{kei}_0 \delta)\,; \tag{17}$$

lo spostamento verticale totale risulta in conseguenza:

$$w_s(\rho, \delta, \theta) = w_{s1} + w_{s2}. \tag{18}$$

---

[10]) Devono infatti rimanere finiti, nel centro della lastra, sia lo spostamento verticale che la rotazione; in conseguenza, devono annullarsi le costanti C_n e D_n in quanto alcune delle funzioni $\ker_n \rho$ e $\operatorname{kei}_n \rho$, nonche le rispettive derivate prime, assumono valore infinito per $\rho = 0$; si ha ad esempio, $\ker_0 0 = \infty$, e $\operatorname{kei}_1 0 = \infty$ [11].

Per determinare tali espressioni occorre calcolare le quattro costanti di integrazione A_0, B_0, C_0, D_0, e le coppie di costanti A_n e B_n.

Le prime quattro costanti si determinano mediante le condizioni di continuità sulla circonferenza limite della zona caricata; in consequenza della formulazione adottata per le espressioni di w nelle due zone di lastra, si constata facilmente che le costanti A_0, B_0, C_0, D_0 sono fornite da espressioni formalmente uguali a quelle delle costanti $A_{0e}, B_{0e}, C_{0e}, D_{0e}$ (§ **3.1**) salvo la sostituzione di ρ_c al posto di ρ_i.

Per il calcolo delle costanti A_n e B_n si utilizzano le condizioni di compatibilità con i vincoli del bordo della lastra. Risulta quindi necessario transformare l'espressione di w_s (18), funzione di ρ, δ, θ, in una funzione delle sole coordinate ρ e θ.

Le coordinate polari adimensionali del generico punto P della lastra nei riferimenti al punto O ed al punto C sono legate dalle relazioni:

$$\delta \operatorname{sen} \varphi = \rho \operatorname{sen} \theta, \qquad \delta \cos \varphi = \rho_0 + \rho \cos \theta,$$

e, in conseguenza:

$$\delta^2 = \rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho \cos \theta.$$

Applicando il teorema di addizione di Neumann per le funzioni di Bessel modificate [12], che si esprime, per $\rho > \rho_0$ [11]), nella forma:

$$\mathrm{I}_0 (\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 \cos \theta}) = \mathrm{I}_0(\rho)\,\mathrm{I}_0(\rho_0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n(\rho)\,\mathrm{I}_n(\rho_0) \cos n\theta,$$

$$\mathrm{K}_0 (\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 \cos \theta}) = \mathrm{K}_0(\rho)\mathrm{I}_0(\rho_0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathrm{K}_n(\rho)\,\mathrm{I}_n(\rho_0) \cos n\theta,$$

e, ricordando la definizione delle funzioni di Kelvin:

$$\mathrm{i}^n \mathrm{I}_n (\mathrm{i}^{1/2}, \rho) = \mathrm{ber}_n \rho + \mathrm{i}\, \mathrm{bei}_n \rho, \quad \mathrm{i}^{-n} \mathrm{K}_n (\mathrm{i}^{1/2}, \rho) = \mathrm{ker}_n \rho + \mathrm{i}\, \mathrm{kei}_n \rho,$$

si possono esprimere i vari termini della (17) in funzione delle coordinate ρ e θ del riferimento al centro O della lastra.

Si ottiene infatti, dopo alcuni passaggi:

---

[11]) Poichè il cambiamento di variabile viene eseguito in vista della determinazione delle condizioni al bordo della lastra, interessa soltanto il caso in cui $\rho > \rho_0$. Dopo aver determinato le costanti A_n e B_n è infatti più agevole, nel calcolo numerico della deformata della zona scarica della lastra nei vari punti (fra cui quelli con $\rho < \rho_0$), procedere per mezzo della (18), funzione di ρ, δ, θ, piuttosto che per mezzo della espressione che se ne può derivare, esprimendo δ in funzione di ρ.

$$
(19)\quad
\begin{cases}
\mathrm{ber}_0\delta = \mathrm{ber}_0\rho\,\mathrm{ber}_0\rho_0 - \mathrm{bei}_0\rho\,\mathrm{bei}_0\rho_0 + \\
\quad + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\mathrm{ber}_n\rho\,\mathrm{ber}_n\rho_0 - \mathrm{bei}_n\rho\,\mathrm{bei}_n\rho_0)\cos n\theta, \\
\mathrm{bei}_0\delta = \mathrm{ber}_0\rho\,\mathrm{bei}_0\rho_0 + \mathrm{bei}_0\rho\,\mathrm{ber}_0\rho_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\mathrm{ber}_n\rho\,\mathrm{bei}_n\rho_0 + \\
\qquad + \mathrm{bei}_n\rho\,\mathrm{ber}_n\rho_0)\cos n\theta, \\
\mathrm{ker}_0\delta = \mathrm{ker}_0\rho\,\mathrm{ber}_0\rho_0 - \mathrm{kei}_0\rho\,\mathrm{bei}_0\rho_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\mathrm{ker}_n\rho\,\mathrm{ber}_n\rho_0 - \\
\qquad - \mathrm{kei}_n\rho\,\mathrm{bei}_n\rho_0)\cos n\theta, \\
\mathrm{kei}_0\delta = \mathrm{ker}_0\rho\,\mathrm{bei}_0\rho_0 + \mathrm{kei}_0\rho\,\mathrm{ber}_0\rho_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\mathrm{ker}_n\rho\,\mathrm{bei}_n\rho_0 + \\
\qquad + \mathrm{kei}_n\rho\,\mathrm{ber}_n\rho_0)\cos n\theta.
\end{cases}
$$

Sostituendo le (19) nella (18) si ottiene l'espressione dello spostamento verticale w_s in funzione delle sole coordinate ρ e θ; dopo aver introdotto i valori sopradeterminati delle costanti $A_0,\ldots,D_0$ risulta quindi possibile il calcolo delle costanti A_n e B_n; le equazioni di compatibilità sono quelle indicate nel § 3.1, esplicitate secondo le espressioni generali richiamate nella nota [4]).

A titolo di esempio, per il caso in cui il contorno della lastra sia perfettamente incastrato, sviluppando i calcoli si ottengono le seguenti espressioni delle costanti:

$$A_n = \frac{1}{\Delta_1}(\mu_n\,\mathrm{bei}'_n\,\rho_e - \mu'_n\,\mathrm{bei}_n\,\rho_e), \qquad B_n = \frac{1}{\Delta_1}(\mu'_n\,\mathrm{ber}_n\,\rho_e - \mu_n\,\mathrm{ber}'_n\,\rho_e),$$

dove i simboli riportati valgono:

$$\Delta_1 = \mathrm{ber}_n\,\rho_e\,\mathrm{bei}'_n\,\rho_e - \mathrm{ber}'_n\,\rho_e\,\mathrm{bei}_n\,\rho_e,$$

$$\mu_n = (-1)^{n+1}a[A_0(\mathrm{ber}_n\,\rho_e\,\mathrm{ber}_n\,\rho_0 - \mathrm{bei}_n\,\rho_e\,\mathrm{bei}_n\,\rho_0) +$$
$$+ B_0\mathrm{ber}_n\,\rho_e\,\mathrm{bei}_n\,\rho_0 + \mathrm{bei}_n\,\rho_e\,\mathrm{ber}_n\,\rho_0) + C_0(\mathrm{ker}_n\,\rho_e\,\mathrm{ber}_n\,\rho_0 - \mathrm{kei}_n\,\rho_e\,\mathrm{bei}_n\,\rho_0) +$$
$$+ D_0(\mathrm{ker}_n\,\rho_e\,\mathrm{bei}_n\,\rho_0 + \mathrm{kei}_n\,\rho_e\,\mathrm{ber}_n\,\rho_0)],$$

$$\mu'_n = (-1)^{n+1}a[A_0(\mathrm{ber}'_n\,\rho_e\,\mathrm{ber}_n\rho_0 - \mathrm{bei}'_n\,\rho_e\,\mathrm{bei}_n\rho_0) +$$
$$+ B_0(\mathrm{ber}'_n\,\rho_e\,\mathrm{bei}_n\,\rho_0 + \mathrm{bei}'_n\,\rho_e\,\mathrm{ber}_n\,\rho_0) + C_0(\mathrm{ker}'_n\,\rho_e\,\mathrm{ber}_n\,\rho_0 - \mathrm{kei}'_n\,\rho_e\,\mathrm{bei}_n\,\rho_0) +$$
$$+ D_0(\mathrm{ker}'_n\,\rho_e\,\mathrm{bei}_n\rho_0 + \mathrm{kei}'_n\,\rho_e\,\mathrm{ber}_n\,\rho_0)];$$

il coefficiente a vale 1 per $n = 0$, e vale 2 per $n \geqslant 1$.

3.3. Esempi di applicazione

A titolo di esempio si è calcolata la lastra circolare in due condizioni di carico parziale.

La prima condizione corrisponde ad un carico di superficie uniformemente distribuito su una zona circolare concentrica alla lastra, di raggio pari alla meta' del raggio esterno della lastra stessa ($r_i = r_e/2$).

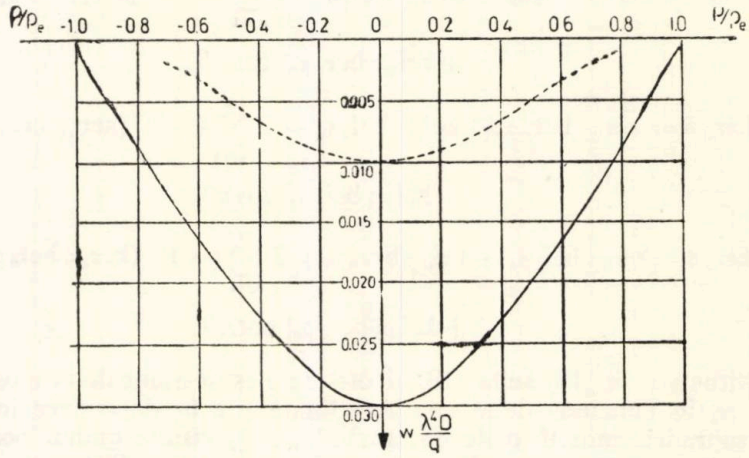


Fig. 3

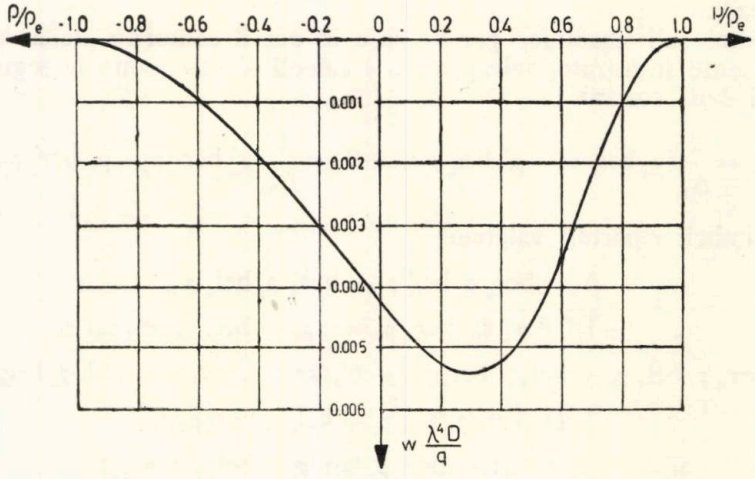


Fig. 4

La deformata verticale lungo il diametro è riportata nella fig. 3, per le due condizioni al vincolo corrispondenti all'appoggio e all'incastro al bordo; si è indicata con tratto continuo la curva corrispondente all'appoggio, e tratteggiata quella corrispondente all'incastro; le ascisse sono riferite al raggio adimensionale esterno ρ_e.

Il secondo esempio è costituito dalla lastra circolare incastrata al contorno e soggetta a un carico uniformemente distribuito su una zona circolare di raggio $r_c = 0{,}4\, r_e$, con centro C posto a distanza $r_0 = 0{,}5\, r_e$ dal centro della lastra.

La deformata lungo il diametro che congiunge il centro dell zona caricata con il centro della lastra, è riportata nella fig. 4; il carico è applicato dalla parte del raggio con ascisse positive.

4. Carichi uniformi distribuiti linearmente

Quando la lastra è soggetta ad un carico concentrato verticale F_1 (fig. 5) applicato nel generico punto F di coordinate polari (r_F, φ), l'integrale particolare della (2) è fornito dall'espressione [4]:

$$\omega_p = -\frac{F_1}{2\pi\lambda^2 D}\,\mathrm{kei}_0\,\mu\,. \tag{20}$$

La distanza fra il generico punto P ed il punto F risulta, in forma adimensionali, essendo $\mu = \lambda m$:

$$\mu^2 = \rho^2 + \rho_F^2 - 2\rho\rho_F\cos(\theta - \varphi). \tag{21}$$

L'espressione (20) risulta valida anche se riferita alla risultante di un carico distribuito su un elemento superficiale infinitesimo di area $d\Omega = r_f\, dr_F\, d\varphi$, posto nell'intorno del punto F. Si avra'quindi, in generale, essendo Ω la area di applicazione del carico:

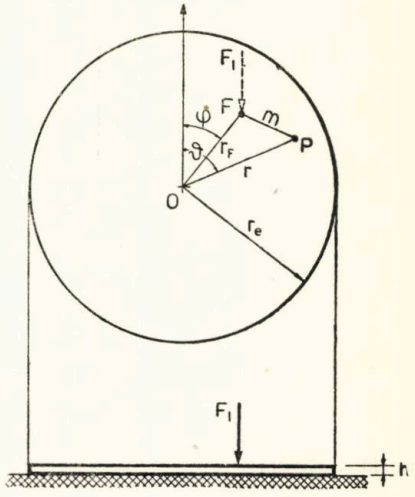


Fig. 5

$$\omega_p = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\frac{q(\rho_F,\varphi)}{\lambda^2 D}\,\mathrm{kei}_0\,\mu\,d\tau_F\, r_F\, d\varphi = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\frac{q(\rho_F,\varphi)}{\lambda^4 D}\,\mathrm{kei}_0\,\mu\,d\rho_F\,\rho_F\,d\varphi. \tag{22}$$

4.1. Carico lineare uniformemente distribuito su un raggio della lastra

Consideriamo la lastra soggetta ad un carico verticale lineare uniforme pari a p, esteso a tutto un raggio; senza difetto di generalita' assumiamo tale raggio come origine della coordinata angolare θ', in vista delle semplificazioni analitiche che ne derivano (fig. 6).

La generica espressione $q(\rho_F, \varphi)$ del carico di superficie applicato alla lastra si particolarizza quindi nella forma:

$$q(\rho_F, \varphi) = p\lambda\delta(\varphi - \varphi_0) \tag{23}$$

essendo $\delta(\varphi - \varphi_0)$ la funzione δ di Dirac, e φ_0, per la sopraesposta ipotesi sulle coordinate angolari, pari a zero.

In conseguenza del riferimento adottato l'espressione della soluzione generale dell'equazione omogenea risulta, in analogia alla (14), ponendo a fattore il termine frazionario costante:

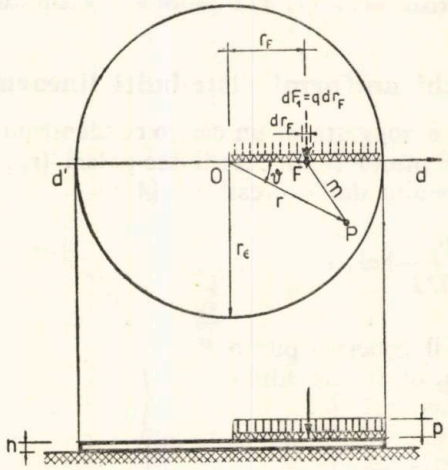


Fig. 6

$$w_G(\rho\theta) = \frac{p}{2\pi\lambda^3 D} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \operatorname{ber}_n\rho + B_n \operatorname{bei}_n\rho) \cos n\theta \,. \tag{24}$$

La soluzione particolare (22), tenuto conto della (23), si puo' esprimere nella forma:

$$w_p = -\frac{1}{2\pi\lambda^4 D} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{0}^{\rho_e} p\lambda\delta(\varphi - \varphi_0) \operatorname{kei}_0 \mu\ \rho\ d\rho_F\, d\varphi =$$

$$= -\frac{p}{2\pi\lambda^3 D} \int_{0}^{\rho_e} \operatorname{kei}_0 \sqrt{\rho^2 + \rho_F^2 - 2\rho\rho_F \cos\theta}\, d\rho_F \,. \tag{25}$$

L'integrale è esteso al raggio *Od*, che è appunto il luogo dei generici punti *F* su cui è applicato il carico.

Per risolvere l'integrale a secondo membro della (25) si puo' esprimere la funzione integranda nelle seguenti forme [12]:

$$\operatorname{kei}_0 \sqrt{\rho^2 + \rho_F^2 - 2\rho\rho_F \cos\theta} = \operatorname{bei}_0 \rho_F \operatorname{ker}_0 \rho + \operatorname{ber}_0 \rho_F \operatorname{kei}_0 \rho +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{bei}_n \rho_F \operatorname{ker}_n \rho + \operatorname{ber}_n \rho_F \operatorname{kei}_n \rho) \cos n\theta, \tag{26}$$

valida per $\rho > \rho_F$, e nel campo in cui è $\rho < \rho_F$:

$$\text{kei}_0 \sqrt{\rho^2 + \rho_F^2 - 2\rho\rho_F \cos\theta} = \text{kei}_0\rho_F \,\text{ber}_0\rho + \text{ker}_0\rho_F \,\text{bei}_0\rho + \\ + 2\sum_{n=1}^{\infty} (\text{kei}_n\rho_F \,\text{ber}_n\rho + \text{ker}_n\rho_F \,\text{bei}_n\rho)\cos n\,\theta. \tag{27}$$

In conseguenza della doppia espressione della funzione integranda, la soluzione della (25) viene effettuata nei due intervalli $[0, \rho_e]$, $[\rho, \rho_e]$; sviluppando l'integrale si ottiene:

$$\omega_p = -\frac{p}{2\pi\lambda^3 D}\left[\Delta_0(\rho) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n(\rho)\cos n\theta\right], \tag{28}$$

essendo, sia per $n = 0$ che per $n = 1, \ldots, \infty$:

$$\Delta_n = \text{ker}_n\rho\int_0^{\rho}\text{bei}_n\rho_F\,d\rho_F + \text{kei}_n\rho\int_0^{\rho}\text{ber}_n\rho_F\,d\rho_F + \\ + \text{bei}_n\rho\int_{\rho}^{\rho_e}\text{ker}_n\rho_F\,d\rho_F + \text{ber}_n\rho\int_{\rho}^{e}\text{kei}_n\rho_F\,d\rho_F. \tag{29}$$

L'espressione Δ_n è funzione soltanto di ρ, come appare dall'esame della (29); il calcolo dei termini integrali di quest'ultima è immediato, noti che siano gli integrali indefiniti delle funzioni di Kelvin che in essi compaiono; questi ultimi possono essere calcolati facilmente attraverso l'integrazione termine per termine, in quanto tali funzioni sono assolutamente e uniformemente convergenti per valori finiti e positivi dell'argomento [10].

L'espressione dell'abbassamento effettivo del generico punto della lastra risulta pertanto dalla somma della (24) e della (28).

Le coppie di costanti di integrazione A_n e B_n si determinano mediante le condizioni di vincolo al bordo esterno, sulla circonferenza di raggio adimensionale ρ_e, che comportano in ogni caso due equazioni di compatibilita'.

A titolo di esempio, nel caso di bordo incastrato, essendo nulli spostamento e inclinazione radiale per $\rho = \rho_e$, si ottengono le seguenti espressioni delle costanti:

$$A_n = \frac{a_0}{a_n}\left[(\text{bei}'_n\rho_e \,\text{kei}_n\rho_e - \text{bei}_n\rho_e \,\text{kei}'_n\rho_e)\int_0^{\rho_e}\text{ber}_n\rho_F d\rho_F + \right.$$

$$\left. + (\text{bei}'_n\rho_e \,\text{ker}_n\rho_e - \text{bei}_n\rho_e \,\text{kei}'_n\rho_e)\int_0^{\rho_e}\text{bei}_n\rho_F d\rho_F\right],$$

$$B_n = \frac{a_0}{a_n}\Big[(\mathrm{ber}_n\rho_e \,\mathrm{kei}'_n\rho_e - \mathrm{bei}'_n\rho_e \,\mathrm{kei}_n\rho_e)\int_0^{\rho_e} \mathrm{ber}_n\rho_F\, d\rho_F +$$

$$+ (\mathrm{ber}_n\rho_e \,\mathrm{ker}'_n\rho - \mathrm{ber}'_n\rho_e \,\mathrm{ker}_n\rho_e)\int_0^{\rho_e} \mathrm{bei}_n\rho_F\, d\rho_F\Big],$$

dove $a_0 = 1$ per $n = 0$, $a_0 = 2$ per $n \geqslant 1$, ed il termine a_n indica sinteticamente l'espressione:

$$\mathrm{ber}_n\rho_e \,\mathrm{bei}'_n\rho_e - \mathrm{ber}'_n\rho \,\mathrm{bei}_n\rho \ , \quad (n = 0, 1, 2, 3...).$$

4.2. Carico lineare uniformemente distribuito su un arco di cerchio concentrico alla lastra

La lastra studiata nel paragrafo precedente sia ora soggetta ad un carico verticale p, distribuito uniformemente su un arco di cerchio $r_p = \rho_p/\lambda$ (con $r_p < r_e$), di centro O coincidente con quello della lastra. L'angolo sotteso dall'arco su cui è applicato il carico è pari a $\theta_p = \theta_1 - \theta_0$, essendo θ_1 e θ_0 le coordinate angolari degli estremi dell'arco stesso (fig. 7).

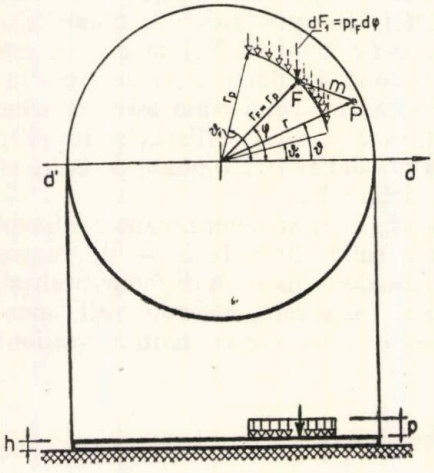


Fig. 7

Poichè i punti F di applicazione del carico, di coordinate r_F e φ, appartengono soltanto all'arco sopra indicato, la espressione generica del carico applicato alla lastra puo' porsi nella seguente forma, in funzione delle coordinate adimensionali:

$$q(\rho_F - \varphi) = p\lambda\delta(\rho_F - \rho_p)\,\Phi(\theta_1, \theta_0),$$

essendo $\delta(\rho_F - \rho_p)$ la funzione δ di Dirac, e $\Phi(\theta_1, \theta_0)$ una funzione di definizione della legge di distribuzione del carico, che vale:

$\Phi = 1$ per $\theta_0 \leqslant \varphi \leqslant \theta_1$,

$\Phi = 0$ per $\varphi \leqslant \theta_0$ e per $\theta_1 < \varphi \leqslant 2\pi$.

La soluzione particolare si deduce ancora dalla (22), che si particolarizza nella forma:

$$w_p = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\frac{p\lambda\delta'(\rho_F-\rho_p)\,\Phi(\theta_1,\theta_0)}{\lambda^4 D}\,\mathrm{kei}_0\,\mu\,\mathrm{d}\rho_F\,\rho_F\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= -\frac{p}{2\pi\lambda^3 D}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\rho_e}\mathrm{kei}_0\,\mu\delta(\rho_F-\rho_p)\,\Phi(\theta_1,\theta_0)\,\mathrm{d}\rho_F\,\rho_F\,\mathrm{d}\varphi = \tag{30}$$

$$= -\frac{p\rho_p}{2\pi\lambda^3 D}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\mathrm{kei}_0\,\mu\,\mathrm{d}\varphi,$$

essendo $\rho_F = \text{costante} = \rho_p$.

La grandezza μ è ancora espressa dalla (21), con la sostituzione di ρ_F con ρ_p; analoga variazione, unitamente alla sostituzione di $\cos(\theta-\varphi)$ al posto di $\cos\theta$ rende valide anche nel caso in esame, la (26) e la (27).

Si ottengono quindi, con procedimento analogo a quell esposto nel § **4.1.** le due espressioni:

$$w_p = -\frac{p\rho_p}{2\pi\lambda^3 D}\left\{(\theta_1-\theta_0)\,\Delta_0^{(1)}(\rho) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_0^{(1)}(\rho)\,[\mathrm{sen}\,n\,(\theta-\theta_0) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{sen}\,n\,(\theta_1-\theta)]\right\}, \tag{31}$$

valida nel campo in cui è $\rho < \rho_p$, e:

$$w_p = -\frac{p\rho_p}{2\pi\lambda^3 D}\left\{(\theta_1-\theta_0)\,\Delta_2^{(0)}(\rho) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_2^{(2)}(\rho)\,[\mathrm{sen}\,n\,(\theta-\theta_0) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{sen}\,n\,(\theta_1-\theta)]\right\}, \tag{32}$$

valida nel campo in cui è $\rho > \rho_p$.

Nelle espressioni precedenti i simboli hanno il seguente significato:

$$\Delta_0^{(1)}(\rho) = \mathrm{bei}_0\,\rho\,\mathrm{ker}_0\,\rho_p + \mathrm{ber}_0\,\rho\,\mathrm{kei}_0\,\rho_p, \quad \Delta_n^{(1)}(\rho) = \frac{1}{n}(\mathrm{bei}_n\,\rho\,\mathrm{ker}_n\,\rho_p + \mathrm{ber}_n\,\rho\,\mathrm{kei}_n\,\rho_p),$$

$$\Delta_0^{(2)}(\rho) = \mathrm{ker}_0\,\rho\,\mathrm{bei}_0\,\rho_p + \mathrm{kei}_0\,\rho\,\mathrm{ber}_0\,\rho_p, \quad \Delta_n^{(2)}(\rho) = \frac{1}{2}(\mathrm{ker}_n\,\rho\,\mathrm{bei}_n\,\rho_p + \mathrm{kei}_n\,\rho\,\mathrm{ber}_n\,\rho_p),$$

essendo $n = 1, 2, 3...$

La soluzione dell'equazione differenzialle della lastra sollecitata soltanto al bordo viene ancora dedotta dalla (3); per semplificare lo sviluppo dei calcoli, in relazione alla forma ottenuta in precedenza per la soluzione particolare w_p, risulta opportuno esprimere la (3) attraverso la somma di

un termine costante e di due serie di funzioni antisimmetriche rispetto ai raggi corrispondenti agli estremi dell'arco soggetto a carico. Si ha pertanto, ponendo a fattore il solito termine costante:

$$(33)\quad w_q(\rho,\theta)=\frac{p\rho_p}{2\pi\lambda^3 D}\left\{(\theta_1-\theta_0)R_0(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(\rho)[\operatorname{sen} n(\theta-\theta_0)+\operatorname{sen} n(\theta_1-\theta)]\right\},$$

dove i termini R_n, forniti dalla prima delle (4), sono ancora espressi nella forma ridotta, con $C_n = D_n = 0$.

La espressione dello spostamento verticale effettivo risulta quindi dalla somma della (33) e della (31) oppure della (32), a seconda della zona di lastra.

Le coppie di costanti A_n e B_n si determinano mediante le condizioni al contorno, in relazione alle caratteristiche di vincolo sul bordo della lastra.

A titolo di esempio si riportano in forma esplicita le espressioni di tali costanti nel caso di bordo perfettamente incastrato:

$$A_n=\eta\frac{\mathrm{bei}'_n\rho_e(\ker_n\rho_e\,\mathrm{bei}_n\rho_p+\mathrm{kei}_n\rho_e\,\mathrm{ber}_n\rho_p)}{\mathrm{ber}_n\rho_e\,\mathrm{bei}'_n\rho_e-\mathrm{ber}'_n\rho_e\,\mathrm{bei}_n\rho_e}-$$

$$-\frac{\mathrm{bei}\,\rho_e(\ker'_n\rho_e\,\mathrm{bei}_n\rho_p+\mathrm{kei}'_n\rho_e\,\mathrm{ber}_n\rho_e)}{\mathrm{ber}_n\rho_e\,\mathrm{bei}'_n\rho_e-\mathrm{ber}'_n\rho_e\,\mathrm{bei}_n\rho_e}.$$

$$B_n=\eta\frac{\mathrm{ber}_n\rho_e(\ker'_n\rho_e\,\mathrm{bei}_n\rho_p+\mathrm{kei}'_n\rho_e\,\mathrm{ber}_n\rho_p)}{\mathrm{ber}_n\rho_e\,\mathrm{bei}'_n\rho_e-\mathrm{ber}'_n\rho_e\,\mathrm{bei}_n\rho_e}-$$

$$-\eta\frac{\mathrm{ber}'_n\rho_e(\ker_n\rho_e\,\mathrm{bei}_n\rho_p+\mathrm{kei}_n\rho_e\,\mathrm{ber}_n\rho_p)}{\mathrm{ber}_n\rho_e\,\mathrm{bei}'_n\rho_e-\mathrm{ber}'_n\rho_e\,\mathrm{bei}_n\rho_e},$$

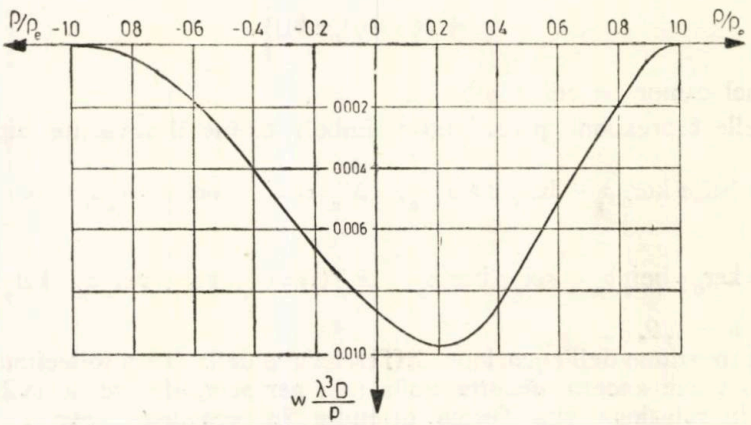


Fig. 8

dove n assume i valori interi $0, 1, 2, 3...$; il coefficiente η vale 1 per $n = 0$ e $2/n$ per $n = 1, 2, 3...$

4.3. Esempi di applicazione

Come esempi di applicazione si è calcolata dapprima la lastra incastrata al contorno, e soggetta ad un carico lineare p uniformemente distribuito su un raggio generico, dal centro della lastra al bordo; nella fig. 8 è riportata la deformata lungo il diametro corrispondente alla linea di carico; il semidiametro caricato corrisponde alle ascisse ρ/ρ_e positive, quello scarico alle ascisse negative.

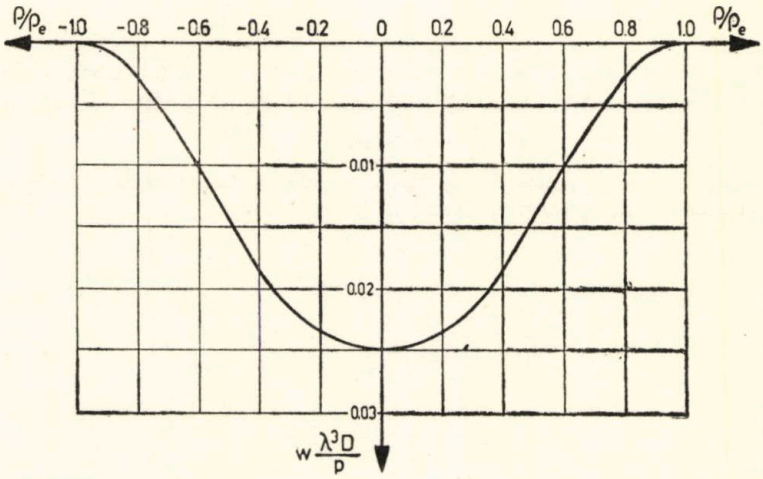


Fig. 9

La medisima lastra di cui al capoverso precedente è stata considerata soggetta ad un carico lineare uniforme sulla circonferenza di raggio pari a meta' del raggio esterno; il problema presenta cosi' simmetria assiale; la deformata del diametro generico è riportata nella fig. 9.

Ricevuto il 10 VII 1968

Politecnico di Torino, Italia

BIBLIOGRAFIA

1. Schleicher F., *Kreisplatten auf elastischer Unterlage.* J. Springer, Berlin, 1926.
2. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells.* Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1959.
3. Como M., *La piastra ricolare galleggiante.* Rend. Acc. Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, Serie 4, 1964, **XXXI.**
4. Reismann H., *Bending of Circular and Ring-shaped Plated on an Elastic Foundation.* J. of Appl. Mechanics, 1954, **21,** *1.*
5. Foti C., *Il calcolo delle strutture di fondazione su un modello di terreno a piu'strati.* Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Universita' di Bari, **VII,** *59.*

BUDAPESTI MUSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

6. Mele M., *La piastra circolare su suolo elastico.* Tecnica Italiana, 1966, *12.*
7. Sollazzo A., *Sull'interpretazione meccanica di un modello di fondazione.* Istituto di Scienza delle Costruzioni della Universita' di Trieste, 1966, Pubblicazione nr. *57.*
8. Capurso M., *Su di una generalizzazione del suolo di Wieghardt per le strutture di fondazione bidimensionali.* Ric. Sci., 1965, 35, (II A), pp. 1290–1304.
9. — *Sul calcolo delle strutture di fondazione su suolo di Wieghardt generalizzato.* Ric. Sci. 1965, 35 (II A), pp. 1305–1330.
10. McLachlan N. W., *Bessel Functions for Engineers.* Oxford University Press, London, 1961,
11. Abramowitz M., Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications, New York, 1965.
12. Whittaker E. T., Watson G. N., *A Course of Modern Analysis.* University Press, Cambridge, 1965.

ASUPRA CALCULULUI PLĂCILOR CIRCULARE PE SOL ELASTIC SUPUSE LA SARCINI PARŢIALE DE SUPRAFAŢĂ ŞI LA SARCINI LINIARE

(Rezumat)

Se studiază plăcile circulare pe sol elastic, satisfăcînd condiţiile Winkler-Zimmermann, supuse unor sarcini parţiale, liniare şi de suprafaţă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

D. C. 624 ; 550.3

A NEW SHAKING TABLE USED TO TEST STRUCTURES AT SEISMIC ACTIONS

BY

ANTON ŞESAN, GÉRARD d'ALBON, I. CIONGRADI and LUCIAN STRAT

1. Introduction

The structural response under seismic actions has complex features and in spite of the development realized in the last time by the dynamic analysis, it appears practicaly impossible to be theoretically described. In the design of buildings situated in seismic areas and especially in the case of new types of structures and of the use of modern building materials, the analysis must be preceded by investigations made at actions similar in effect with the seismical ones.

The experimental proceedings used to produce strong dynamic forces in structures do not allow to get conclusive results regarding the structural behaviour to possible seismic actions. Thus, the method to produce shocks in the neighbouring ground of the building by means of explosions is not similar in comparison with the seismic action (as vibration spectrum, duration and so on).

The use of forced vibration generators installed either at the top roof, or at the base of the building perform usually only harmonical motions with small amplitudes. These generators and even a set of strong forced vibration generators yield only the dynamic properties of the tested building (natural period, modes and damping).

At present a various set of shaking tables are employed both for usual dynamic investigations on models and structural members and also in order to calibrate vibration transducers.

During the last decade, different shaking tables were constructed in order to test models or parts of buildings. At most of these tables, the mobility is carried out by mechanical, elastic or hinged suspensions (steel lamelled springs, hinged rods, etc.) [1]...[4].

This type of suspension limits the loading capacity and therefore can hardly be employed for full-scale structure testing.

Some shaking tables are acted only at resonant frequency [5]. The change in natural frequency of the moving table is obtained by varying the stiffness constants of the existing springs. All these types have usually only sinusoidal actuators.

Some useful investigations on large-scale models were made by means of these shaking tables. However the results are unsatisfactory taking in view the small loading capacity, the manner in which the motion is achieved and the difficulties in applying the similitude laws between the model and the prototype. Besides, the above discussed equipments do not reproduce an earthquake-like motion.

2. Principle of the New Shaking Table

We present the new type of shaking table based on the hydraulic plane bearing principle, which is adequate in full-scale structural testings [6]; afterwards we present some of our achievements.

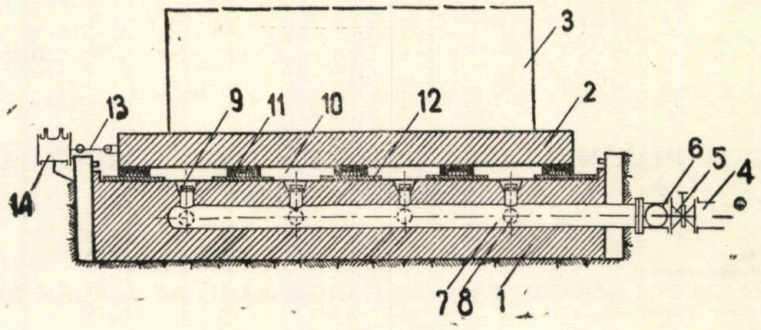


Fig. 1

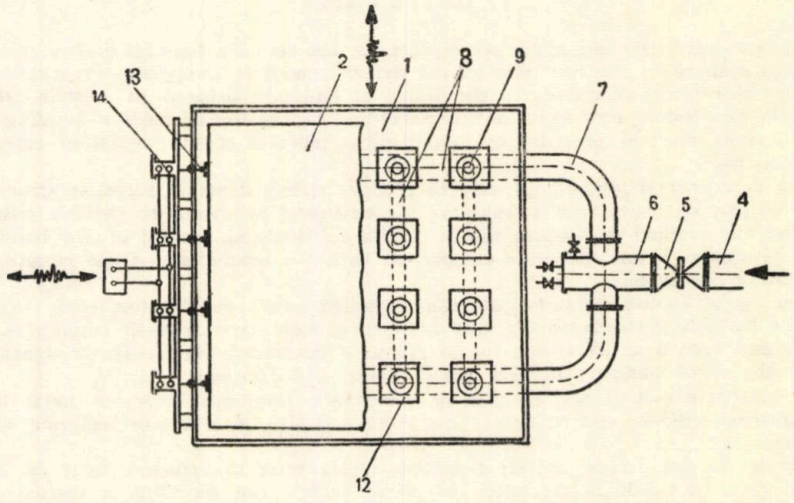


Fig. 2

The main advantage of this system consists in permiting an actual seismic testing of a full-scale structure by complete detaching the base of the structure from the ground. In our case the fixed part (*1*) is connected with the foundation in the lower position. The thin fluid layer (of this plane bearing) assures the mobility of the upper shaking table (*2*) (presented in the Figs. 1, 2 and 3) on which the building (*3*) to be tested is built up.

The mechanical suspension is replaced by a fluid (water, oil, compressed air). The fluid is brought into the space between the two tables by means of an outer pipe network (*4* and *7*), and of a pipe network (*8*) installed into one of the tables. The valves (*5* and *6*) assure the fluid admission supplied by a water tower, a water supply plant or a pumping station. The fluid layer, supplied during all the testing duration from the

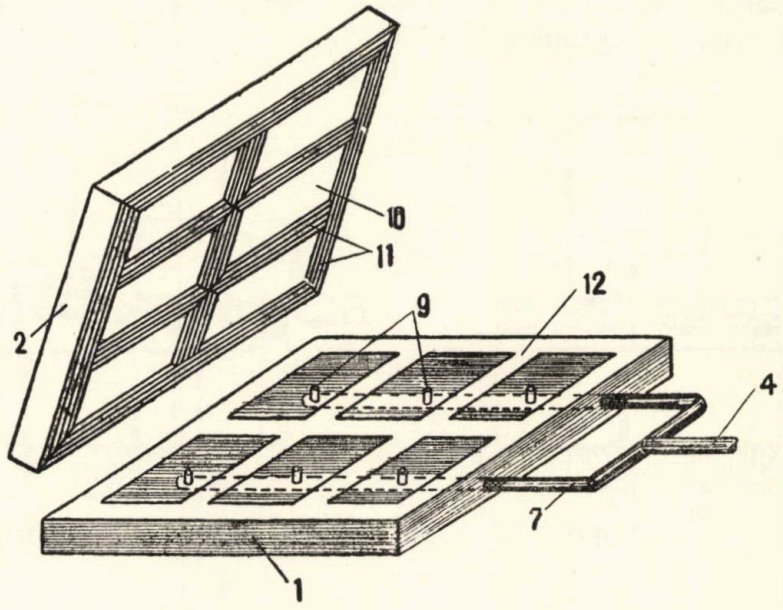


Fig. 3

pipe network by means of the nozzles (*9*), has such a pressure as to compensate both the static stresses (resulted from the weight of the tested building, and moving table — fig. 4) and the dynamic ones. These dynamic loads appear from the dynamic couple action, formed by the acting force F_A applied to the moving table, and by the resistance force F_i (fig. 4 b), which acts in the center of gravity of the whole (moving table + the building to be tested). The dynamic couple $F_A H = F_i H$ rotates the upper shaking table (with the test building) in the action plane.

This „balancing" does not occur, owing to the possibility of pressure selfstabilisation necessary to compensate the unitary stresses (according to the principle of the plane fluid bearings with selfstabilised pressure), since the fluid is injected into the compartments (*10*), separate from each other and from the outer space by the labyrinths (*11*) that have an appropiate hydraulic resistance. Thus, in the case when one of the sides of the movable table would tend to draw near to the fixed one, the in-

terstice between the two tables corresponding to the outline of the compartments of that side, should decrease, and consequently, the local pressure would increase as much as the system can remain in balance. When the shaking table tends to lift up, the phenomenon described above is reversed.

The area (*12*) of the fixed table must have only very small deviations compared with a perfect horizontal surface, but only under the moving strips of labyrinths.

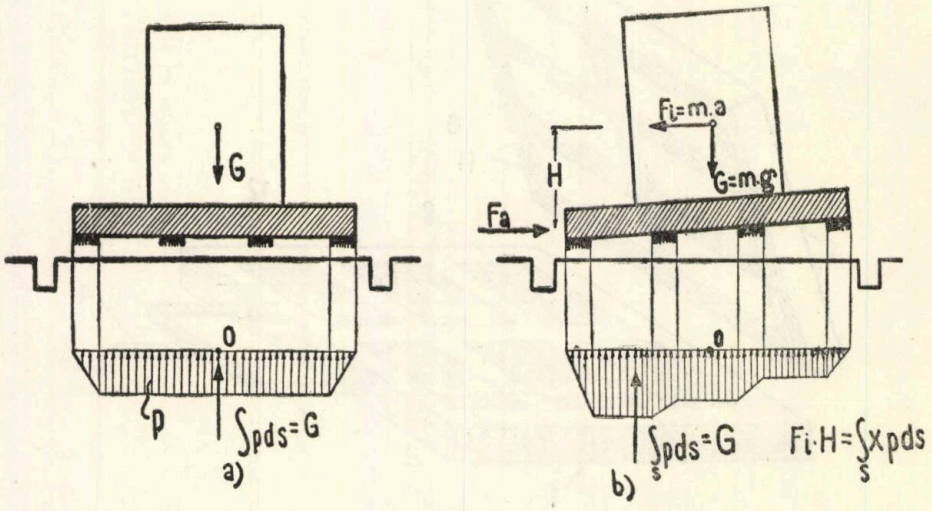


Fig. 4

The shaking tables conceived on these principles are not limited as regarding their size. Thus, one is able to realise, at need, shaking tables of thousands of tons. Because the short time of each experience (a strong earthquake lasts about 30 sec) the energetic equipment related to this fluid consumption may be reduced by accumulating the necessary energy before investigations are made. The shaking table may have any desired outline in plane.

In order to impart to the upper table some programmed earthquake-like motions or periodical ones, hydraulic, pneumatic, electromagnetic actuators (*14*), connected to the moving table by means of the connecting-rods (*13*) may be used in order to assure the plane movements on two perpendicular directions. The driving equipment is, generally, electronically commanded since this system is best suited for selfcorrecting the programe (as regards displacements, accelerations and/or displacements and accelerations).

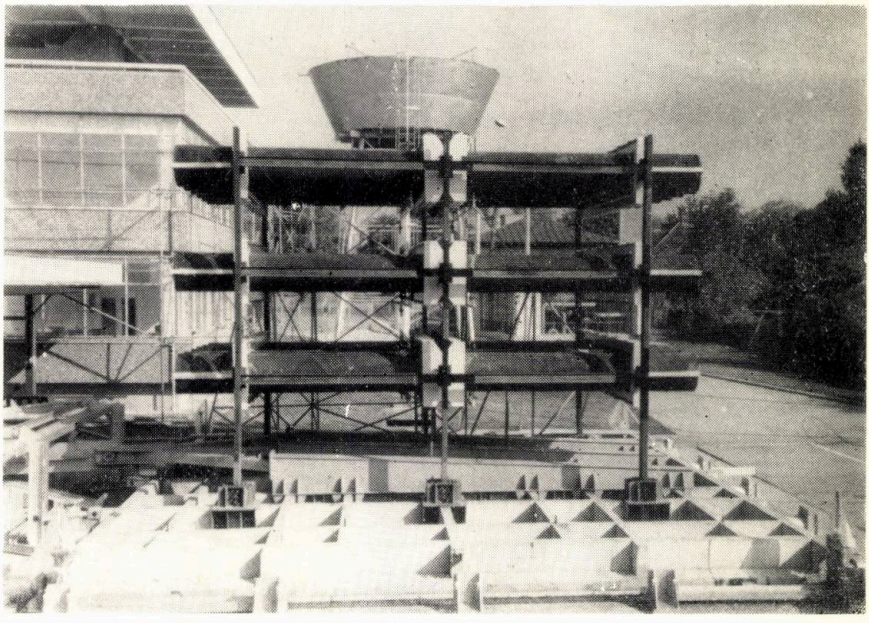


Fig. 5

3. Main Achievements

According to the principle described in § 2, several shaking tables were carried out. One of them (fig. 5) is 10×10 m in plane and may support a 140....200 t weight, depending on the loading distribution. In fig. 5 a steel model of a framework erected on the table is shown.

As fluid is water stored into a tank situated at 8 m height, of 60 m^3 capacity that is satisfactory for several trials.

Both the fixed and the movable table are made of reinforced concrete ; the labyrinths are made of polystirene.

The driving of the moving table, carried out actually in one direction only, is realised by means of several types of actuators, according to the feasibilities and the desired performances. Thus an inertial eccentric driving device gives some sinusoidal movements having variable amplitudes in steps from 0,1 to 1,55 cm and the frequency up to 15 cps ; the programmed moving of the shaking table is realised by two electro-hydraulic actuators which perform accelerations of more than 0,4 *g*.

The linear cam acting device (mechanical programming) is more advantageous to reproduce a quite identical programme by different velocities, and is used especially for the stress distribution analysis, on models or parts of structures, relating to the acceleration change.

In order to determine the mechanism of collapse for rigid structural models, a driving hydraulic actuator is used realising uniform accelerated motions with elastic shocks at the end of the run. The accelerations of the shaking table are great in this case, exceeding the gravity acceleration.

Another shaking table has an octogonal shape with a 6 m^2 area. It can be employed uninterruptedly along about 15 min. The vibrating table has several actuators for harmonic motions-linear and torsional oscillations with frequencies up to 20 cps, and range of amplitude up to 2 cm, also for programmed earthquake-like motions with 15 cm maximum displacement and 10 t loading capacity.

4. Conclusive Remarks

The shaking tables conceived according to the fluid plane bearing principle with selfstabilised pressure can be carried out for very different load capacities — from some tens kgf at little size shaking tables, up thousands of tons at the large shaking tables able to test full-scale structures.

A set of such shaking tables, with various load capacities, organised in a complex seismic testing stand, allows the analysis of structures or of various scale models up to the collapse. For particular structures the investigations of appropiate model lead to good results both for the determination of the dynamic properties and for the knowledge of the seismic response.

The large-series and typified structures need a more deeply elaborated analysis of their seismic behaviour. The safety reliability of a building and the problems related to seismic protection cost cannot be solved by means of a small number of investigations carried out on a single model. The seismic stress distribution at low intensity actions, the building behaviour at strong earthquake motions, the collapse, briefly the seismic response must be investigated by means of a set of models, the structure being improved from a model to another so that, finally, the actual structural research may provide the withstanding reliability, to a given degree of the seismic action by a minimum cost.

These skaking tables described above are robust and safe. The shaking tables like the actuating devices, can be executed using common technical means of building entreprises.

By hydraulic or mechanical energy storage, even for very large shaking tables, the power plant, appears to be rather small.

Received the 10 VI 1969

Polytechnic Institute of Jassy,
Department of Statics and Strength of Materials
and
INCERC, Jassy

REFERENCES

1. Oberti G., *Development of Aseismic Design and Construction in Italy by Means of Research on Large Model Test.* Pr. I-st. W. C. E. E., Berkeley, 1956.
2. Oberti G., Lauletta E., *Dynamic Tests on Models of Structures.* Pr. II-nd. W. C. E. E., Tokyo, 1960.
3. Айзенберг Я. М., *Виброплатформа для исследовании сеисмостойкости сооруженш.* Пром. строит., 1963, 7.
4. Денисов Б. Е., *Испытание модели в 1/4 натуральной величины на виброплатформе.* Строит. механика и расчет сооружении, 1965, 4.
5. Kubo K., Sato N., *Vibration Test of a Structure Supported by Pile Foundation.* Bull Univ. of Tokyo, 1967.
6. d'Albon G., Şesan A., Ciongradi I., Strat L., Cahu G., Author Certificate, General Direction for Metrology, Standards and Inventions, State Office for Inventions, 1964, 16 Dec., nr. 48930.

O NOUĂ PLATFORMĂ SEISMICĂ FOLOSITĂ LA ÎNCERCAREA STRUCTURILOR

(Rezumat)

Se prezintă o nouă platformă mobilă pentru încercarea structurilor la scară naturală la acţiuni seismice.

Structura de încercat este detaşată de teren prin intermediul unei pături de fluid situată între o platformă mobilă şi una fixă.

Autostabilizarea verticală pe timpul acţiunii seismice simulate este realizată folosind principiul lagărelor fluide plane. Sînt prezentate două platforme în funcţiune executate după acest principiu.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

D. K. 624.1

ZUR BERECHNUNG VON POLYGONALFÖRMIGEN GRÜNDUNGSBALKEN

VON

TUDOR SILION

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

1. Vorwort

Bei Ingenieur- und Hochbauten kommt es oftmals vor dass polygonalförmige Gründungsbalken benützt werden. Das geschiet gewöhnlich bei turmähnlichen Bauten wie Wasserbehälter und andere Bauten solcher Art.

Gewöhnlich wird dann die Annahme gemacht dass die Sohldrücke eine lineare Form haben. Das ist aber manchmal nur eine sehr grobe Annäherung da die Sohldrücke in Wirklichkeit kurvenähnlich verlaufen. Die Durchbiegungen der elastischen Linie des Balkens hängen von seiner Steifigkeit und von dem Verformungsvermögen des Baugrundes und des Bauwerkes ab.

Professor F. Bleich hat ein Berechnungsverfahren für den geradlinigen Balken ausgearbeitet das auf einer Annahme von Prof. S. Timoschenko beruht.

2. Grundprinzip des Verfahrens

In vorstehender Arbeit wird das Berechnungsverfahren von F. Bleich auf polygonalförmige Gründungsbalken angewendet.

Die Annahmen die dabei gemacht werden sind:

a) Die Verformungen des Balkens und des Baugrundes sind gleich und hängen in einem Punkte linear vom Druck ab (Winkler-Schwedler Ansatz).

b) Es wird der Einfluss der Drillmomente vernachlässigt, die wegen der polygonalen Form des Balkens auftreten.

Um die Methode von F. Bleich anwenden zu können, nimmt man an dass der Balken auf der Strecke zwischen zwei Stützen unterbrochen ist.

Um die Kontinuität zu bewahren werden in diesem Punkt folgende Bedingungen geschrieben:

$$M_A = M_B, \quad \varphi_A = \varphi_B, \quad y_A = y_B, \quad T_A = T_B.$$

Die Werte von M, φ, y und T werden aus den Verhältnissen

$$M = \sum \frac{P_i l_e}{4} \varphi_3(\xi), \quad \varphi = -\sum \frac{P_i}{k l_e^2 b} \varphi_2(\xi),$$

$$y = \sum \frac{P_i}{2kbl_e} \varphi_1(\xi), \quad T = -\sum \frac{P}{2} \varphi_4(\xi),$$

errechnet (Abb. 1).

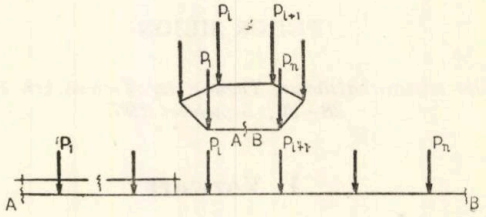


Abb. 1. — Berechnungsschema

Die Werte φ die die Einflusszahlen für Momente, Verdrehungen und Querkräfte darstellen haben folgende Form:

$$\varphi_3 = e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi), \quad \varphi_1 = e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi), \quad \varphi_2 = e^{-\xi}\sin\xi, \quad \varphi_4 = e^{-\xi}\cos\xi.$$

Hier P ist die Stützenkraft, l_e — die elastische Länge des Balkens, EI — die Biegesteifigkeit des Balkens, b — die Breite des Balkens, k — die Bettungsziffer.

Mit diesen Annahmen kann die Methode von F. Bleich auch be einem polygonalen Balken angewendet werden.

Die Verhältnisse aus denen man die fiktiven Kräfte erhalten kanni in dem man dieselben Annahmen wie F. Bleich macht, sind:

$$\begin{cases} V_1\varphi_{3AV_1} + \sum P_i\varphi_{3AP_i} = \sum P_i\varphi_{3BP_i} + V_3\varphi_{3BV_3}, \\ V_1\varphi_{2AV_1} + V_2\varphi_{2AV_2} - \sum P_i\varphi_{2AP_i} = \sum P_i\varphi_{2BP_i} - V_4\varphi_{2BV_4} - V_3\varphi_{2BV_3}, \\ V_1\varphi_{1AV_1} + V\varphi_{1AV_2} + \sum P_i\varphi_{1AP_i} = \sum P_i\varphi_{1BP_i} + V_4\varphi_{1BV_4} + V_3\varphi_{1BV_3}, \\ V_2\ _{AV_2} - \sum P_i\varphi_{4AP} = \sum P_i\varphi_{4BP_i} - V_4\varphi_{4BV_4}. \end{cases}$$

Die Werte von φ Können aus Tafeln entnommen werden. Die Lösung der vier Gleichungen gibt uns die Werte der Unbekannten V_1, V_2, V_3 und V_4 mit deren Hilfe man den Gründungsbalken berechnen kann.

Bei symmetrischer Belastung wird $V_1 = V_3$ und $V_2 = V_4$.

Im Falle dass die Stützenkräfte und Stützenabstände gleich sind und der Balken unendlich lang ist erhält man die Ergebnisse von Kögler und Scheidig.

3. Schlussfolgerungen

Das beschriebene Verfahren ermöglicht die Berechnung von polygonalförmigen Gründungsbalken mit Hilfe des Winkler-Schwedler Ansatzes.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Geotechnik und
Fundamenten

LITERATURVERZEICHNIS

1. Timoshenko S., *Strength of Materials.* Part **II**, 3-d ed., Toronto-New York-London, D. Van Nostrand Com.
2. Lehr H., *Fundaţii.* Vol. **II**, Ed. Tehn., Buc., 1957.
3. — *Fundaţii. Exemple de calcul.* Ed. Tehn., Buc., 1967.
4. Verdeyen J., *Mécanique du sol et fondation.* Eyrolles, Paris, 1947.

CONTRIBUŢIE LA CALCULUL GRINZILOR POLIGONALE DE FUNDAŢIE

(Rezumat)

Se extinde metoda preconizată de prof. F. Bleich pentru calculul grinzilor rezemate pe un mediu elastic Winkler, la grinzi de fundaţie poligonale.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Schema de calcul.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

D. C. 539. 3; 539.4

DER EINFLUSS DER QUERKRAFT ÜBER DIE AUF ELAŞTISCHER UNTERLAGE GELAGERTE TRÄGERN

VON

N. PREDA und N. UNGUREANU

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28–30. September 1967

1. Vorwort

An den gewöhnlichen Trägern, in einigen gewissen besonderen Fällen — nämlich, die mit höchen Querschnitten, kleinen Spannweiten und grossen Einzellasten belastete Balken—der Einfluss der Querkraft über die Verformungen ist vergleichbar mit dessen des Biegemoments.

In anderen üblichen praktischen Umständen ist der Einfluss der Querkraft vernachlässigbar.

Gegen gewöhnliche unstetige gelagerte Balken, die Trägern auf elastischer Unterlage, wegen der Mithilfe der elastischer Bettung an dem Balkenverformungsprozess, besitzen sehr kleine Durchbiegungen.

Es ist zu erwarten dass, an die auf elasticher Bettung gelagerten Balken, auch wegen gegenseitiger Abhängigkeit zwischen Beanspruchungen und Verformungen, der Einfluss der Querkraft qualitativ verschiedenartig sei.

Es wird in Folgenden der Einfluss der Querkraft über die auf elastischer Unterlage gestützten Balken behandelt ; es wird vorausgesetzt dass : a) der Trägerquerschnitt konstant sei, b) die Belastungen in Längssenkrechthauptträgheitsplan wirken, c) der Verkstoff des Trägers und der Bettung homogene, elastische und isotrope sind, d) der Auflagerdruck zwischen den Träger und der Bettung auf der Breite des Trägers gleichmässig verteilt sei und längs dessen nach Winklersvorausetzungen veränderlich sei.

2. Lösung der Differentialgleichung

Mit der in Abb. 1 dargestellten Bezeichnungen, gilt die Differentialgleichung des Trägers :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} + \frac{\alpha}{GA} \cdot \frac{dT(x)}{dx}, \tag{1}$$

wo

$$\alpha = \frac{A}{I^2} \int_A \left[\frac{S(y)}{b(y)}\right]^2 dA$$

ist.

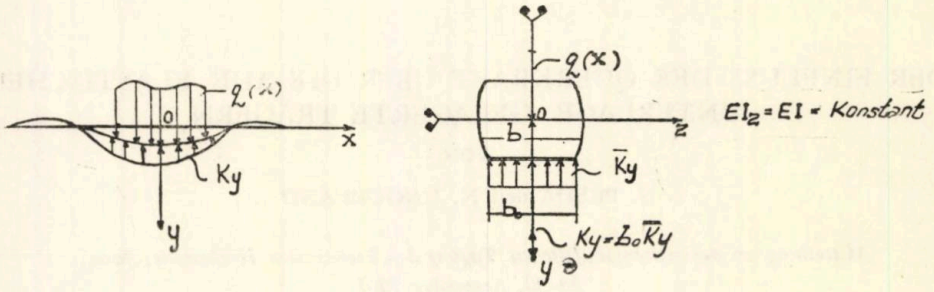


Abb. 1

Mit $d^2M/dx^2 = dT/dx = -p(x) = -(q - ky)$, und aus (1), durch zweifache Differentiation erreicht man:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{\alpha k}{GA} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k}{EI} y = \frac{q(x)}{EI} - \frac{\alpha}{GA} \cdot \frac{d^2q(x)}{dx^2}. \tag{2}$$

Aufzeichnend mit $\beta^4 = k/4EI$, $\xi = \beta x$ und $\alpha k/\beta^2 GA = 2\mu^2$, und vereinfachend mit β^4, wird die Differenzialgleichung (2):

$$\frac{d^4y}{d\xi^4} - 2\mu^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} + 4y = \frac{4}{k} q(\xi) - \frac{2\mu^2}{k} \cdot \frac{d^2q(\xi)}{d\xi^2}. \tag{3}$$

Bemerkt man dass: $[\beta] = cm^{-1}$, $[\xi] = 0$, $[\mu] = 0$, beziehungweise Abmessungen besitzen.

Die Beziehung (3) stellt die in reduzierte Abszisse Differentialgleichung des Trägers auf elastischer Unterlage, in Betracht ziehend sowohl das Biegemoment wie auch die Querkraft dar. Die homogene Differentialgleichung bildet die mathematische Gestalt dem Träger nur unter Einzellast.

Die charakteristische Gleichung der homogenen linearen mit konstanten Koeffizienten Differentialgleichung ist:

$$r^4 - 2\mu^2 r^2 + 4 = 0,$$

und hat die Wurzeln:

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - 4}}.$$

Weil μ immer real und positiv ist, kann man schreiben:

$$r_{1,2,3,4} = \pm \mu \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\mu^4}}}.$$

Einsetzen μ, β und $k = b_0 \bar{k}$ in dem Ausdruck $\mathbb{S} = 1 - 4/\mu^4$, erhaltet man

$$\mathbb{S} = 1 - \frac{4}{\alpha^2} \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{A^2}{I} \cdot \frac{G}{b_0 k}.$$

Für gewöhnliche Werte: $1{,}11 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}5$; $0{,}1 \leqslant \bar{k} \leqslant 100$ kgf/cm^3; $1/3 \leqslant G/E \leqslant 1/2$; $6 \leqslant A^2/I \leqslant 12{,}5$, stellt man fest dass $\mathbb{S} < 0$, dann $r_{1,2,3,4} = \pm \mu \sqrt{1 \pm i\sqrt{4/\mu^4 - 1}}$, oder $r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}\mu^2} \pm i \sqrt{1 - \frac{1}{2}\mu^2}$ wo $1 - \frac{1}{2}\mu^2$ immer positiv ist.

Mit Aufzeichnung $\sqrt{1 + \frac{1}{2}\mu^2} = \varepsilon$ und $\sqrt{1 - \frac{1}{2}\mu^2} = \theta$, $\varepsilon^2 + \theta^2 = 2$, $\varepsilon^2 - \theta^2 = \mu^2$, kann man dann die Lösung der homogenen Gleichung:

$$y = \left(A \cos \xi \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\mu^2} + B \sin \xi \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\mu^2}\right) \exp \xi \sqrt{1 + \tfrac{1}{2}\mu^2} +$$

$$+ \left(C \cos \xi \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\mu^2} + D \sin \xi \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\mu^2}\right) \exp\left(-\xi \sqrt{1 + \tfrac{1}{2}\mu^2}\right)$$

in folgende Form überschreiben:

$$y(\xi) = e^{\varepsilon\xi}(A \cos \theta\xi + B \sin \theta\xi) + e^{-\varepsilon\xi}(C \cos \theta\xi + D \sin \theta\xi). \tag{4}$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3) ist:

$$\Phi(\xi) = \frac{4}{k} \int_0^{\xi} Y(\xi - t) \left[q(t) - \frac{\mu^2}{2} : \frac{d^2 q(t)}{dt^2}\right] dt, \tag{5}$$

wo $Y(\xi)$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist, das Argument ξ wird $\xi - t$, und die Konstanten A, B, C, D aus Cauchy's Bedingungen: $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0$, $Y''(0) = 0$ und $Y'''(0) = 1$, bestimmt werden.

Aus diesen Bedingungen folgt: $A = -1/8\,\varepsilon$, $B = D = 1/8\,\theta$, $C = 1/8\,\varepsilon$. Dann bekommt man:

$$Y(\xi) = \frac{1}{8\varepsilon\theta}\left[e^{\varepsilon\xi}(\varepsilon\sin\theta\xi - \theta\cos\theta\xi) + e^{-\varepsilon\xi}(\varepsilon\sin\theta\xi + \theta\cos\theta\xi)\right],$$

oder

$$Y(\xi) = \frac{1}{4\varepsilon\theta}(\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\varepsilon\xi\sin\theta\xi - \theta\,\mathrm{sh}\,\varepsilon\xi\cos\theta\xi). \tag{6}$$

Abschliessend, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) ist :

$$Y(\xi) = e^{\varepsilon\xi}(A\cos\theta\xi + B\sin\theta\xi) + e^{-\varepsilon\xi}(C\cos\theta\xi + D\sin\theta\xi) + \Phi(\xi), \tag{7}$$

wo $\Phi(\xi)$ und $Y(\xi)$ von (5) bzw. (6) gegeben sind.

Die Integrationskonstanten A, B, C, D werden aus anfänglichen Bedingungen bestimmt ; die Belastungsfunktion $\Phi(\xi)$ ändert sich längs des Trägers nach der Verteilung der senkrechten Belastung.

Aus (5) und (1) folgt :

$$\begin{cases} \varphi = \beta\dfrac{dy}{d\xi},\ M(\xi) = -\dfrac{k}{4\beta^2}\cdot\dfrac{d^2y}{d\xi^2} + \dfrac{k\mu^2}{2\beta^2}y(\xi) - \dfrac{\mu^2}{2\beta^2}q(\xi), \\ T(\xi) = -\dfrac{k}{4\beta}\cdot\dfrac{d^3y}{d\xi^3} + \dfrac{k\mu^2}{2\beta}\cdot\dfrac{dy}{d\xi} - \dfrac{\mu^2}{2\beta}\cdot\dfrac{dq(\xi)}{d\xi}. \end{cases} \tag{8}$$

Für die Bestimmung der Konstanten A, B, C, D und der Grösse φ M, T bedarf es der $Y(\xi)$ und seiner sukzessiven Ableitungen bis dritter Ordnung :

$$\begin{cases} Y'(\xi) = \dfrac{1}{4\varepsilon\theta}(e^{\varepsilon\xi} - e^{-\varepsilon\xi})\sin\theta\xi = \dfrac{1}{2\varepsilon\theta}\,\mathrm{sh}\,\varepsilon\xi\sin\theta\xi, \\ Y''(\xi) = \dfrac{1}{4\varepsilon\theta}e^{\varepsilon\xi}(\theta\cos\theta\xi + \varepsilon\sin\theta\xi) - \dfrac{1}{4\varepsilon\theta}e^{-\varepsilon\xi}(\theta\cos\theta\xi - \varepsilon\sin\theta\xi) = \\ \qquad = \dfrac{1}{2\theta}\,\mathrm{ch}\,\varepsilon\xi\sin\theta\xi + \dfrac{1}{2\varepsilon}\,\mathrm{sh}\,\varepsilon\xi\cos\theta\xi, \\ Y'''(\xi) = \dfrac{1}{4\varepsilon}e^{\varepsilon\xi}\left(\dfrac{\mu^2}{\theta}\sin\theta\xi + 2\varepsilon\cos\theta\xi\right) - \dfrac{1}{4\varepsilon}e^{-\varepsilon\xi}\left(\dfrac{\mu^2}{\theta}\sin\theta\xi - 2\varepsilon\cos\theta\xi\right) = \\ \qquad = \dfrac{\mu^2}{2\varepsilon\theta}\,\mathrm{sh}\,\varepsilon\xi\sin\theta\xi + \mathrm{ch}\,\varepsilon\xi\cos\theta\xi. \end{cases} \tag{9}$$

3. Die Ausdrücke der Belastunsfunktion $\Phi(\xi)$ für einige übliche Fälle

a) *Teilweise gleichmässige Last* (Abb. 2). Für $0 \leqslant \xi \leqslant a$, $q = 0$ dann $\Phi(\xi) = 0$; für $a \leqslant \xi < b$, $q =$ Konst., dann

$$\Phi(\xi) = \frac{4q}{k} \int_0^{\xi} Y(\xi - t)\, dt.$$

Nach Einsetzen des Ausdruckes $Y(\xi)$ aus (6), erhält man:

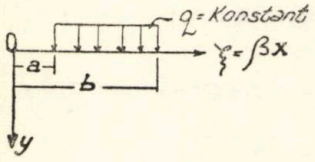


Abb. 2

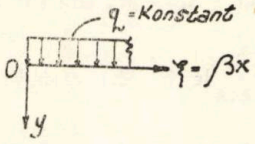


Abb. 3

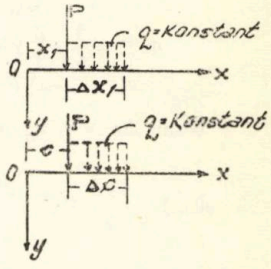


Abb. 4

(a) $$\Phi(\xi) = \frac{q}{k}\left[1 - \operatorname{ch}\varepsilon(\xi - a)\cos\theta(\xi - a) + \frac{\mu^2}{2\varepsilon\theta}\operatorname{sh}\varepsilon(\xi - a)\sin\theta(\xi - a)\right].$$

Wen es nur das Biegemoment vorhanden ist, also μ verschwindet, $\varepsilon = \theta = 1$:

$$\Phi(\xi) = \frac{q}{k}[1 - \operatorname{ch}(\xi - a)\cos(\xi - a)].$$

Für $\xi > b$:

$$\Phi(\xi) = \frac{4q}{k} \int_a^{b} Y(\xi - t)\, dt,$$

oder nach Einsetzen der Funktion $Y(\xi)$:

$$\Phi(\xi) = \frac{q}{k}\Big\{\operatorname{ch}\varepsilon(\xi - b)\cos\theta(\xi - b) - \operatorname{ch}\varepsilon(\xi - a)\cos\theta(\xi - a) -$$

$$- \frac{\mu^2}{2\varepsilon\theta}[\operatorname{sh}\varepsilon(\xi - b)\sin\theta(\xi - b) - \operatorname{sh}\varepsilon(\xi - a)\sin\theta(\xi - a)]\Big\}.$$

Ohne den Einfluss der Querkraft man erziehlt:

$$\Phi(\xi) = \frac{q}{k}[\operatorname{ch}(\xi - b)\cos(\xi - b) - \operatorname{ch}(\xi - a)\cos(\xi - a)].$$

Aus der Beziehung (a), für den Fall $a = 0$, erfolgt (Abb. 3):

$$\Phi(\xi)=\frac{q}{k}\left(1-\operatorname{ch}\varepsilon\xi\cos\theta\xi+\frac{\mu^2}{2\varepsilon\theta}\operatorname{sh}\varepsilon\xi\sin\theta\xi\right),$$

und nur unter den Einfluss des Biegemomentes :

$$\Phi(\xi)=\frac{q}{k}\,(1-\operatorname{ch}\xi\cos\xi).$$

b) *Einzellast* (Abb. 4) : $P=\lim\limits_{\Delta x_1\to 0} q\Delta x_1$, $\Delta c=\beta\Delta x_1$, $P=\dfrac{1}{\beta}\lim\limits_{\Delta c\to 0} q\Delta c$,

$$\Phi(\xi)=\frac{4}{k}\,q\int_c^{c+\Delta c} Y(\xi-t)\,dt=\frac{4}{k}\,q\,Y(\xi-t_m)\int_c^{c+\Delta c} dt=\frac{4}{k}\,q\,\Delta c\,Y(\xi-t_m).$$

Wann $\Delta c\to 0$, $t_m\to c$ und $q\,\Delta c\to\beta P$, also für $\xi>c$ erzichlt man :

$$\Phi(\xi)=\frac{4\beta P}{k}\,Y(\xi-c)=\frac{\beta P}{k\varepsilon\theta}\,[\varepsilon\operatorname{ch}\varepsilon(\xi-c)\sin\theta(\xi-c)-\theta\operatorname{sh}\varepsilon(\xi-c)\cos\theta(\xi-c).$$

Nur unter den Einfluss des Biegemomentes es folgt :

$$\Phi(\xi)=\frac{\beta P}{k}\,[\operatorname{ch}(\xi-c)\sin(\xi-c)-\operatorname{sh}(\xi-c)\cos(\xi-c)].$$

c) *Einzelmoment* (Abb. 5) : $m=\lim\limits_{\Delta x_2\to 0} P\Delta x_2$, $\Delta x_2=\Delta d/\beta$, $m=\dfrac{1}{\beta}\lim\limits_{\Delta d\to 0} P\Delta d$.

Wendet man das Ergebniss für Einzellast an erziehlt man

$$\Phi(\xi)=-\frac{4\beta P}{k}\,Y(\xi-d)+\frac{4\beta P}{k}\,Y(\xi-d-\Delta d)=-\frac{4\beta P}{k}\,\Delta d\,\frac{Y(\xi-d)-Y(\xi-d-\Delta d)}{\Delta d}$$

und bei Limes :

$$\Phi(\xi)=-\frac{4\beta^2 m}{k}\,Y'(\xi-d),\quad(\xi>d),$$

oder mit (9) :

$$\Phi(\xi)=-\frac{\beta^2 m}{k\varepsilon\theta}\operatorname{sh}\varepsilon(\xi-d)\sin\theta(\xi-d);$$

ohne den Einfluss der Querkraft es folgt :

$$\Phi(\xi)=-\frac{2\beta^2 m}{k}\operatorname{sh}(\xi-d)\sin(\xi-d).$$

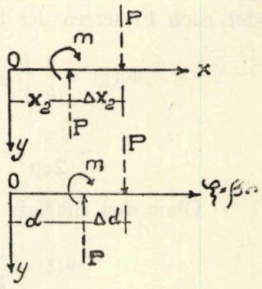


Abb. 5

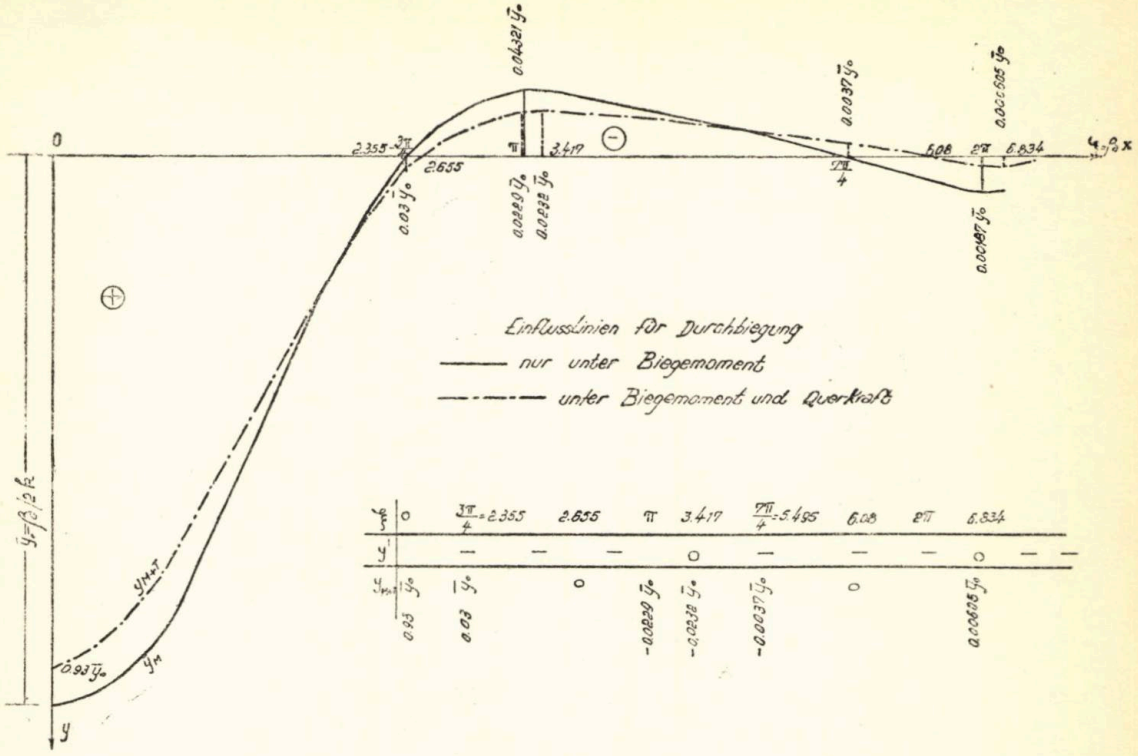

Einflusslinien für Durchbiegung
nur unter Biegemoment
unter Biegemoment und Querkraft

Abb. 7 a

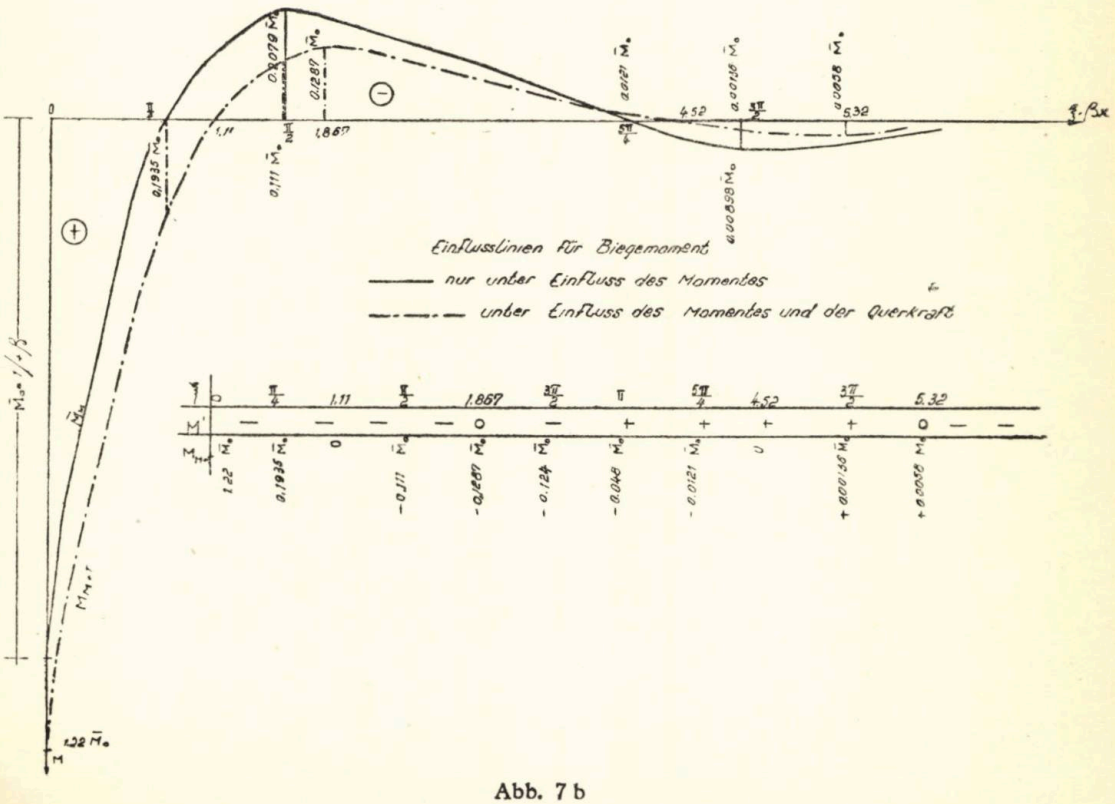

Einflusslinien für Biegemoment
nur unter Einfluss des Momentes
unter Einfluss des Momentes und der Querkraft

Abb. 7 b

4. Unendlichlange Träger unter Einzellast (Abb. 6)

Das Problem hat als Lösung die der homogenen Gleichung aus (3):

$$(10) \qquad y(\xi) = e^{\varepsilon\xi}(A\cos\theta\xi + B\sin\theta\xi) + e^{-\varepsilon\xi}(C\cos\theta\xi + D\sin\theta\xi).$$

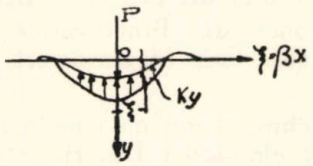
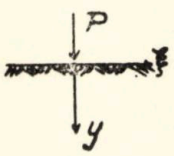


Abb. 6

Die Randbedingungen : $\xi \to \infty$, $y \to 0$; $\xi = 0$, $\varphi = 0$ und $T = -P/2$, ergeben die folgende Werte für die vier Konstanten: $A = B = 0$, $C = \beta P/2k\varepsilon$, $D = \beta P/2k\theta$. Dann, aus (10), durch sukzessive Ableitung erfolgen φ, M und T, die im Tabelle 1 eingeschrieben sind.

Tabelle 1

Belastungsfall	Gleichzeitige Einfluss des Biegemomentes M und der Querkraft T	Nur der Einfluss des Biegemomentes M
	$y(\xi) = \dfrac{\beta P}{2k\varepsilon\theta} e^{-\varepsilon\xi}(\theta\cos\theta\xi + \varepsilon\sin\theta\xi)$	$\bar{y}(\xi) = \dfrac{\beta P}{2k} e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)$
	$\varphi(\xi) = -\dfrac{\beta^2 P}{k\varepsilon\theta} e^{-\varepsilon\xi}\sin\theta\xi$	$\bar{\varphi}(\xi) = -\dfrac{\beta^2 P}{k} e^{-\xi}\sin\xi$
	$M(\xi) = \dfrac{P}{4\beta\varepsilon\theta} e^{-\varepsilon\xi}[\varepsilon(\mu^2 - 1)\sin\theta\xi + \theta(\mu^2 + 1)\cos\theta\xi]$	$\bar{M}(\xi) = \dfrac{P}{4} e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi)$
	$T(\xi) = -\dfrac{P}{2\varepsilon\theta} e^{-\varepsilon\xi}[\varepsilon\theta\cos\theta\xi + \dfrac{1}{2}\mu^2\sin\theta\xi]$	$\bar{T}(\xi) = -\dfrac{P}{2} e^{-\xi}\cos\xi$

Beispiel. Es sei ein Träger aus Holz mit einem rechteckigen Querschnitt $A = 16$ cm $\times$ $\times$ 20 cm unter einer Einzellast $P = 1$. In Abb. 7 sind die Einflusslinien für Biegelinie und Moment, ohne und unter der Einwirkung der Querkraft aufgezeichnet:

$A = 320$ cm^2, $\bar{k} = 10$ kg/cm^3, $k = 16$ cm $\times$ 10 kg/cm^3 $= 160$ kg/cm^2, $E = 10^5$ kg/cm^2, $G = 5 \times 10^3$ kg/cm^2, $I = 10\,667$ cm^4, $\alpha = 1{,}2$, $\mu^2 = 0{,}3098$, $\beta = 0{,}013916$ cm^{-1}, $\varepsilon = 1{,}075$, $\theta = 0{,}9189$, $\beta/2k = 0{,}0000435$ cm/kg, $\varepsilon\theta = 0{,}9878$.

Eine vergleichsweise Untersuchung der Einflusslinien erweist dass der Einfluss der Querkraft offenbart sich durch:

a) Verminderung der Einsenkungen, schnellere Abflachung und Abschwächung der Durchbiegungen und daraus verringert sich der Auflagerdruck zwischen den Träger und die elastische Bettung.

b) Im allgemeinen, auch die Einflusslinie des Momentes schneller abflacht und abschwächt, aber ihm Maximalwert vergrössert (in unserem Beispiel um 22%).

Zum Abschluss, manchmal kann man nicht den Einfluss der Querkraft über den Träger auf elastischer Unterlage vernachlässigen.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Statik und
Festigkeitslehre

INFLUENŢA FORŢEI TĂIETOARE ASUPRA GRINZILOR REZEMATE PE MEDIU ELASTIC

(Rezumat)

Se stabileşte ecuaţia diferenţială a axei deformate a grinzilor rezemate pe mediu elastic în ipoteza Winkler. Se deduce soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale precum şi funcţia de încărcare pentru sarcinile curent întîlnite în practică: forţe distribuite de intensitate constantă, forţe şi momente concentrate.

Se obţine, de asemenea, o soluţie pentru grinda de lungime infinită, încărcată cu o sarcină concentrată, iar cu ajutorul unui exemplu de calcul se pune în evidenţă influenţa forţei tăietoare chiar la grinda de lungime infinită.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

D. K. 533.4

ÜBER DIE BERECHNUNG DER RANDAUFLAGERKRÄFTE SCHIEFWINKLIGER PLATTEN

VON

V. ILLE und P. PETRINA

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

1. Die Bestimmung der Auflagerkräfteverteilung an den Rändern einer schiefwinkligen Platte — obzwar für die Praxis von besonderem Interesse (schiefe Brücken, schiefe Kassettendecken, Flugbau) — hat in der technischen Literatur noch keine dementsprechende Lösung gefunden, und zwar infolge der Schwierigkeiten, die aus der Integration der Differentialgleichung mit partiellen Ableitungen für die parallelogrammförmige Platte mit gegebenen Randbedingungen erwachsen.

Den wenigen Arbeiten, in welchen die Stützkräfte schiefer Platten behandelt werden, liegen entweder direkte Messungen am Bau oder Modell, oder Differenzenrechnungsverfahren zugrunde [1]...[3]. Obwohl die Untersuchung von Sonderfällen zu einigen Schlussfolgerungen führte, welche auf ein umfassendes Gebiet betreffend Schiefwinkligkeit und Seitenverhältnisse angewendet werden können, ist aus dem oben angeführten Grunde eine nähere quantitative und qualitative Erkenntnis der Randauflagerkräfte nötig, zumal in der Baupraxis immer häufiger schiefe Platten verwendet werden.

In der Arbeiten [4]...[7] wird die Möglichkeit der Integration der Plattengleichung für schiefe Platten mit verschiedenen Randbedingungen mit Hilfe der Galerkinschen Variationsmethode in der von Kontorowitsch vorgeschlagenen Form behandelt.

2. In einem schiefwinkligen Achsensystem, dessen Koordinaten parallel zu den Plattenrändern verlaufen (Abb. 1), wird die Plattengleichung [4]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial u^4} - 4\beta \cos\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial u^3 \partial v} + 2\beta^2(1 + 2\cos^2\alpha) \frac{\partial^4 w}{\partial u^2 \partial v^2} - 4\beta^3 \cos\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial u \partial v^3} + \tag{1}$$

$$+ \beta^4 \frac{\partial^4 w}{\partial v^4} = \frac{ga^4}{D} \sin^4\alpha$$

annähernd für den folgenden Fall integriert: die Ränder $u = \pm 1$ sind eingespannt oder einfach aufgelagert; die Ränder $v = \pm 1$ sind beliebig aufgelagert, und zwar für eine gleichförmig verteilte Last g.

In (1) sind folgende Bezeichnungen benützt worden: $w(u, v)$ — die Durchbiegung der Platte, $D = Eh^3/12(1-\mu)$ — die Plattensteifigkeit, μ — die Poissonsche Zahl, E — das Elastizitätsmodul (Young), h — die Plattenstärke, $h = u^*/a$, $v = v^*/b$, $\beta = a/b$, α — der Konstruktionswinkel der Platte.

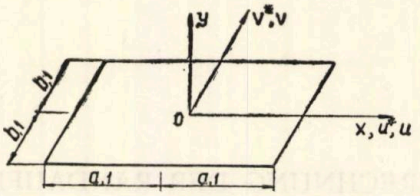


Abb. 1. — Die Platte bezogen auf das schiefe Achsensystem.

Wenn die Durchbiegungsfunktionen $w(u, v)$ als endliche Reihe dargestellt werden:

$$w(u, v) = \sum_{i=1}^{k} w_i(u, v) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(v) f_i(u), \tag{2}$$

wobei das System $\varphi_i(v)$ bekannter Funktionen ein linear unabhängiges, im gegebenen Bereich relativ vollständiges Funktionssystem darstellt, kann das Funktionssystem $f_i(u)$ dargestellt bestimmt werden, dass Gleichung (1), in Variationsform geschrieben, sowie die Randbedingungen bei $u = \pm 1$ befriedigt sind.

Für den Fall eingespannter Ränder ($v = \pm 1$) hat Gleichung (1) in Variationsform geschrieben folgendes Aussehen:

$$\int_{-1}^{+1} \left(\nabla^4 w - \frac{ga^4}{D} \sin^4 \alpha \right) \varphi_j(v) dv = 0, \quad (j = 1, 2, ..., k), \tag{3}$$

und für den Fall einfach aufgelagerter Ränder ($v = \pm 1$) kann die Differentialgleichung mit partiellen Ableitungen (1) in Form des Systems

$$\int_{-1}^{+1} \left(\nabla^2 \mathfrak{M} + ga^2 \sin^2 \alpha \right) g_j(v) dv = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \left(\nabla^2 w + \frac{\mathfrak{M}}{D} a^2 \sin \alpha \right) h_j(v) dv = 0, \tag{4}$$

$$(j = 1, 2, ..., k),$$

geschrieben werden.

Die Operatoren $\nabla^4(...)$ und $\nabla^2(...)$ aus obigen Beziehungen werden in schiefwinkligen Koordinaten ausgedrückt.

In Gleichung (3) sind für die Funktionen $\varphi_i(v)$ aus Gleichung (2) die Ausdrücke

$$\varphi_1(v) = (1-v^2)^2, \quad \varphi_2(v) = (1-v^2)^2 v,$$

verwendet worden, und für Gleichung (4) die folgenden Beziehungen:

$$(5) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}(u,v) = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_i(u,v) = \sum_{i=1}^{k} g_i(v) f_i(u), \\ w(u,v) = \sum_{i=1}^{k} w_i(u,v) = \sum_{i=1}^{k} h_i(v) \varphi_i(u), \end{cases}$$

wobei

$$g_1(v) = h_j(v) = 1 - v^2, \quad g_2(v) = h_i(v) = (1-v^2)v.$$

Im Falle der eingespannten Ränder ($u = \pm 1$) führt Gleichung (3) zu einem System von zwei gewöhnlichen heterogenen Differentialgleichungen mit konstanten Beiwerten, deren Lösung (im letzteren Falle successive) zur Bestimmung der unbekannten Funktionen für $w(u,v)$ führt. Die in diesen Funktionen vorkommenden Konstanten werden aus den Randbedingungen bestimmt.

Aus der bereits bestimmten Funktion $w(u,v)$ können die auf die Platte wirkenden Beanspruchungen — Biege- und Drillmomente, Querkräfte — leicht auf Grund der bekannten Formeln bestimmt werden, wobei zu beachten ist, dass dieselben in schiefwinkligen Koordinaten ausgedrückt sind.

Für die Querkräfte sind folgende Beziehungen gegeben [8]:

$$(6) \quad T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad T_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

woraus der verallgemeinerte Ausdruck der Querkräfte [8]

$$(7) \quad R_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad R_y = T_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

lauten wird. Hiernach werden in den Gleichungen (6) und (7) die Momente M_x, M_y und M_{xy} in Abhängigkeit von $w(u,v)$ anhand der nachstehenden Formeln ersetzt [8]:

$$(8) \quad \begin{cases} M_x = \dfrac{-D}{a^2 \sin^2 \alpha} \left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} (\sin \alpha + \mu \cos^2 \alpha) - 2\mu\beta \cos \alpha \dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \mu\beta^2 \dfrac{\partial}{\partial v^2} \right], \\ M_y = \dfrac{-D}{a^2 \sin^2 \alpha} \left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} (\cos^2 \alpha + \mu \sin^2 \alpha) - 2\beta \cos \alpha \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \beta^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right], \\ M_{xy} = M_{yx} = -\dfrac{D(1-\mu)}{a^2 \sin^2 \alpha} \left(\beta \dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \cos \alpha \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} \right). \end{cases}$$

3. Um nun weiterhin den Fall der einfach auf die Ränder $u = \pm 1$ gestützten Platte zu behandeln, benützen wir den aus [6] hergeleiteten Ausdruck für $w(u, v)$. Für $51°14'47'' > \alpha < 90°$ wird dieser folgendermassen lauten:

$$
\begin{aligned}
w(u,v) = (1-v^2)\Big(&c_m \bar{C}_1 \operatorname{ch} mu + c_n \bar{C}_2 \operatorname{ch} nu + \gamma_m C_1 \operatorname{ch} mu + \gamma_n C_2 \operatorname{ch} nu + \\
&+ \delta_m C_1 u \operatorname{sh} mu + \delta_n C_2 u \operatorname{sh} nu + \frac{ga^4}{5\beta^4 D} \sin^4 \alpha \Big) + \\
&+ (1-v^2) v [7\beta \cos \alpha \, (m\bar{C}_1 \operatorname{sh} mu + n\bar{C}_2 \operatorname{sh} nu) + \\
&+ \eta_m C_1 (\operatorname{sh} mu + mu \operatorname{ch} mu) + \eta_n C_2 (\operatorname{sh} nu + nu \operatorname{ch} nu)].
\end{aligned} \tag{9}
$$

Für $0 < \alpha < 51°14'47''$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
w(u,v) = (1-v^2)\Big[&(c_1 \bar{C}_1 + c_2 \bar{C}_2 + \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2) \operatorname{ch} pu \cos qu + \\
&+ (c_1 C_2 - c_2 C_1 + \beta_3 C_1 + \beta_4 C_2) \operatorname{sh} pu \sin qu + (\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2) u \operatorname{sh} pu \cos qu + \\
&+ (\gamma_3 C_1 + \gamma_4 C_2) u \operatorname{ch} pu \sin qu + \frac{ga^4 \sin^4 \alpha}{5\beta^4 D}\Big] + (1-v^2) v [(c_3 \bar{C}_1 + c_4 \bar{C}_2 + \\
&+ \delta_1 C_1 + \delta_2 C_2) \operatorname{sh} pu \cos qu + (c_3 \bar{C}_2 - c_4 \bar{C}_1 + \delta_3 C_1 + \delta_4 C_2) \operatorname{ch} pu \sin qu + \\
&+ (\eta_1 C_1 + \eta_2 C_2) u \operatorname{ch} pu \cos qu + (\eta_3 C_1 + \eta_4 C_2) u \operatorname{sh} pu \sin qu],
\end{aligned} \tag{10}
$$

wobei $m, n, c_m, c_n, \gamma_m, \gamma_n, \delta_m, \delta_n, \eta_m, \eta_n, C_1, C_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2$, bestimmte, von den geometrischen Elementen der Platte abhängige Konstanten sind.

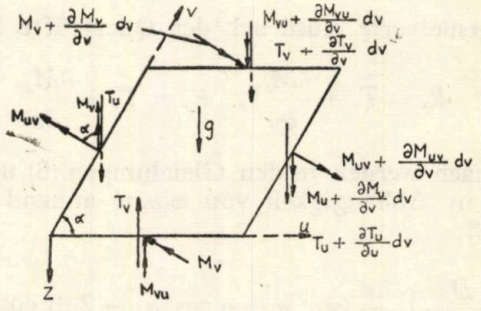


Abb. 2. — Das in Richtung der schiefwinkligen Koordinaten abgetrennte Plattenelement.

An den Rändern $v = \pm 1$ wird der verallgemeinerte Ausdruck der Querkräfte, welche die Randauflagerkräfte bedingen, laut (7) folgendermassen lauten:

$$
R_y = -\frac{D}{a^3 \sin^3 \alpha}\left\{\cos^2 \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial u^3} + \beta\left[3\cos^2 \alpha + (2-\mu)\sin^2 \alpha\right]\frac{\partial^3 w}{\partial^2 u \, \partial v} + \beta^3 \frac{\partial^3 w}{\partial v^3}\right\}. \tag{11}
$$

Zur Bestimmung der verallgemeinerten Querkraft entlang des Randes $u = \pm 1$ muss die Art der Beanspruchung eines nach den schiefwinkligen Koordinaten abgetrennten Plattenelementes berücksichtigt werden (Abb. 2).

Wenn bekannt ist, dass zwischen M_x, M_y und M_{xy} laut (7) die folgenden Beziehungen vorliegen :

$$(12)\quad \begin{cases} M_u = M_x \sin\alpha - 2M_{xy}\cos\alpha + M_y \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}, \\ M_v = \dfrac{M_y}{\sin\alpha}, \quad M_{uv} = M_{vu} = M_{xy} - M_y \operatorname{ctg}\alpha, \\ T_u = \dfrac{\partial M_u}{\partial u} + \dfrac{\partial M_{uv}}{\partial v}, \quad T_v = \dfrac{\partial M_{vu}}{\partial u} + \dfrac{\partial M_v}{\partial v}, \end{cases}$$

so erhalten wir für die verallgemeinerte Querkraft entlang dieser Ränder den Ausdruck:

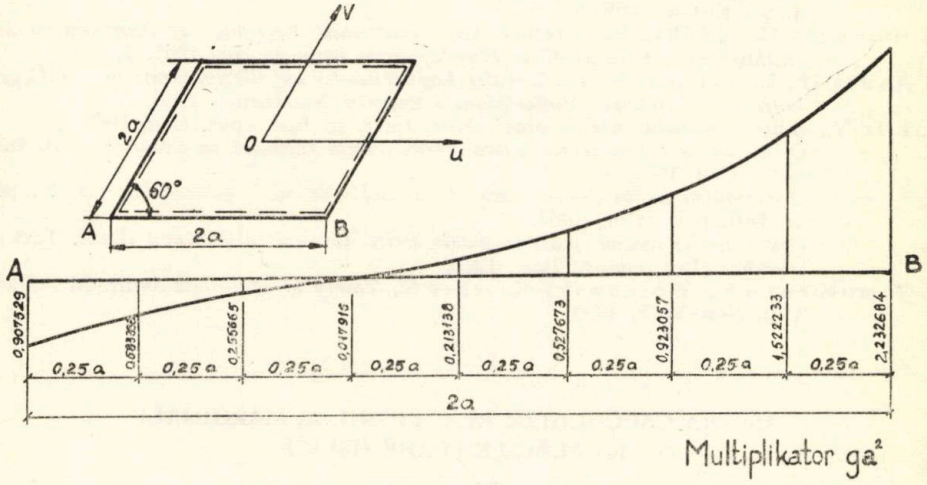


Abb. 3. — Die Verteilung der Auflagerkräfte auf die Plattenränder.

$$(13)\quad R_u = T_u + \frac{\partial}{\partial v}(M_u \cos\alpha + M_{uv}),$$

oder, von (8) und (12) ausgehend,

$$(14)\quad R_u = -\frac{D}{a^3 \sin^3\alpha}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial u^3} - 3\beta\cos\alpha\frac{\partial^3 w}{\partial u^2 \partial v} + (2+\cos^2\alpha - \mu\sin^2\alpha)\beta^2\frac{\partial^3 w}{\partial u\,\partial v^2} + \right.$$
$$\left. + (\cos^2\alpha + \mu\sin^2\alpha - 2)\beta^3\cos\alpha\frac{\partial^3 w}{\partial v^3}\right].$$

4. Abb. 3 zeigt die Ergebnisse der zur Bestimmung der Randauflagerkräfte durchgeführten Berechnung für den Fall der schiefen, an allen Rändern einfach gestützten Platte, mit $\alpha = 60°$ und $\beta = 1$.

Dies bestätigt die Tatsache, dass in der Plattenecke mit anliegenden einfach gestützten Rändern keine Einzelkraft infolge des Verschwindens der Torsionsmomente an den Plattenrändern in diesem Bereich auftritt [7]. Gleichzeitig haben die negativen Auflagerkräfte im Gebiet des spitzen Plattenwinkels die Tendenz, die Platte vom Auflager zu heben. Ebenso kann man am stumpfen Plattenwinkel grosse Auflagerkräfte beobachten, was in der Praxis für die genaue Bemessung von Stützvorrichtungen von besonderer Bedeutung ist.

Technische Hochschule, Cluj

LITERATURVERZEICHNIS

1. Vogt H., *Auflagerkräfte von zweiseitig aufgelagerten schiefwinkligen Einfeldplatten.* Beton u. Stahlbeton, 1956, *8.*
2. Homberg H., Jäckle H., *Einfluss einer elastischen Lagerung auf Biegemomente und Auflagerkräfte schiefwinkliger Einfeldplatten.* Bauingenieur, 1961, *1.*
3. Andrä U., Leonhardt F., *Einfluss des Lagerabstandes auf Biegemomente und Auflagerkräfte schiefwinkliger Einfeldplatten.* Beton u. Stahlbeton, 1960, *7.*
4. Ille V., *Asupra calculului plăcilor plane oblice.* Lucr. şt. Inst. polit. Cluj, 1960.
5. — *O metodă de calcul pentru placa oblică simplu rezemată pe contur.* Bul. şt. Inst. polit. Cluj, 1964.
6. — *O metodă de calcul pentru placa oblică simplu rezemată pe două laturi opuse.* Bul. şt. Inst. polit. Cluj, 1964.
7. — *Contribuţii la studiul plăcilor plane oblice izotrope în domeniul elastic.* Teză de doctorat. Inst. constr., Buc., 1966.
8. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells.* Mc. Graw-Hill, New-York, 1959.

ASUPRA CALCULULUI REACŢIUNILOR MARGINALE LA PLĂCILE PLANE OBLICE

(Rezumat)

Folosind o metodă variaţională de integrare a ecuaţiilor plăcilor plane oblice cu diverse condiţii pe contur, dezvoltată în [4]...[7], se determină expresiile reacţiunilor marginale în funcţie de săgeata $w(u, v)$. Exemplul concret cercetat, (placa cu $\alpha = 60°$, $\beta = a/b = 1$), pune în evidenţă concentrarea reacţiunilor în colţul obtuz precum şi reacţiuni negative în colţul ascuţit.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Placa raportată la sistemul de coordonate oblic.
Fig. 2. — Elementul de placă separat, paralel cu sistemul de coordonate oblic.
Fig. 3. — Distribuţia reacţiunilor marginale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. D. 624.1

DÉPLACEMENTS DES POINTS DU DEMI-ESPACE TRANSVERSAL ANISOTROPE AU CAS DU PROBLÈME DES DÉFORMATIONS PLANES

PAR

AL. EFTIMIE et G. BOTEZ

1. Charge uniformément répartie au long de l'axe x

On considère le demi-espace homogène, transversal anisotrope, chargé à la surface le long de l'axe x avec une charge verticale, uniformément repartie, d'intensité p (fig. 1).

Les équations physiques, données en [3] et [8], ont la forme :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_H}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y) - \frac{\nu_3}{E_V}\sigma_z,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_H}(\sigma_y - \nu_1\sigma_x) - \frac{\nu_3}{E_V}\sigma_z,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_V}\sigma_z - \frac{\nu_2}{E_H}(\sigma_x + \sigma_y);$$

$$\tau_{zx} = G_1\gamma_{zx} = \frac{E_V\nu_2}{\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3}\gamma_{zx},$$

$$\tau_{zy} = G_2\gamma_{zy} = \frac{E_V\nu_2}{\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3}\gamma_{zy}.$$

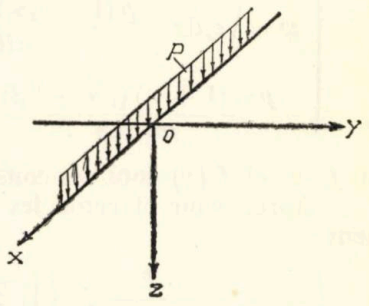


Fig. 1

Compte tenu que $E_H/E_V = n$, nous allons considérer que $E_H = nE_V = nE$.

Si l'on considère le cas de l'état plan de déformation, il résulte de $\varepsilon_x = 0$, que $\sigma_x = \nu_1\sigma_y + n\nu_3\sigma_z$. Par conséquent les équations physiques prennent la forme :

$$(1)\qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y\frac{1-\nu_1^2}{n} - \nu_3(\nu_1+1)\sigma_z\right],\quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[(1-\nu_2\nu_3)\sigma_z - \frac{\nu_2(1+\nu_1)}{n}\sigma_y\right].$$

Les expressions des contraintes établies en [8] sont :

$$(2)\quad \begin{cases} \sigma_y = \dfrac{(p\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\pi\alpha\beta}\cdot\dfrac{zy^2}{y^4+(1/\alpha+1/\beta)\,y^2z^2+z^4/\alpha\beta}, \\ \sigma_z = \dfrac{p(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\pi\alpha\beta}\cdot\dfrac{z^3}{y^4+(1/\alpha+1/\beta)\,y^2z^2+z^4/\alpha\beta}, \\ \tau_{zy} = \dfrac{p(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\pi\alpha\beta}\cdot\dfrac{z^2y}{y^4+(1/\alpha+1/\beta)\,y^2z^2+z^4/\alpha\beta}. \end{cases}$$

Pour le calcul des déplacements on emploie les équations géométriques :

$$(3)\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\varepsilon_y,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=\varepsilon_z.$$

En tenant compte de (1) et (2), les équations (3) permettent à obtenir les expressions ci-dessous :

$$(4)\quad \begin{cases} v=\int\varepsilon_y\,dy=\dfrac{p(1-\nu_1^2)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{n\pi E\alpha\beta}\int\dfrac{zy^2}{y^4+(1/\alpha+1/\beta)\,y^2z^2+z^4/\alpha\beta}\,dy- \\ -\dfrac{p\nu_3(1+\nu_1)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\pi E\alpha\beta}\int\dfrac{z^3}{y^4+(1/\alpha+1/\beta)\,y^2z^2+z^4/\alpha\beta}\,dy+f_1(z), \\ w=\int\varepsilon_z\,dz=\dfrac{p(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\pi E\alpha\beta}\int\dfrac{z^3}{y^4+(1/\alpha+1/\beta)y^2z^2+z^4/\alpha\beta}\,dz- \\ -\dfrac{p\nu_2(1+\nu_1)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{n\pi E\alpha\beta}\int\dfrac{zy^2}{y^4+(1/\alpha+1/\beta)\,y^2z^2+z^4/\alpha\beta}\,dz+f_2(y), \end{cases}$$

où $f_1(z)$ et $f_2(y)$ sont des constantes qui seront déterminées dans ce qui suit.

Après avoir effectué les intégrales indéfinies, les déplacements deviennent :

$$(5)\quad \begin{cases} v=\dfrac{p}{\pi E(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}\left[\left(\sqrt{\beta}\,\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\alpha}}{z}y-\sqrt{\alpha}\,\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\beta}}{z}y\right)-\right. \\ \left.-\nu_3(1+\nu_1)\left(\sqrt{\beta}\,\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\beta}}{z}y-\sqrt{\alpha}\,\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\alpha}}{z}y\right)\right]+f_1(z), \\ w=\dfrac{p}{\pi E}\left((1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})\left\{\dfrac{1}{4}\ln\left[\dfrac{z^4}{\alpha\beta}+\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)y^2z^2+y^4\right]-\right. \\ \left.-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\ln\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{y^2+z^2/\alpha}{y^2+z^2/\beta}\right)\right\}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\nu_2(1+\nu_1)}{n(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})}\ln\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{y^2+z^2/\alpha}{y^2+z^2/\beta}\right)\Bigg)+f_2(y). \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes $f_1(z)$ et $f_2(y)$, on emploie la relation:

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G_2}=\tau_{zy}\frac{\nu_2+\nu_3+2\nu_2\nu_3}{E\nu_2}. \tag{6}$$

En effectuant les dérivées des déplacements et en remplaçant la contrainte τ_{zy} par son expression donnée par (2), la relation (6) devient:

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{p(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\pi nE\alpha\beta}\cdot\frac{y}{(z^2/\alpha+y^2)(z^2/\beta+y^2)}\Big\{(\nu_1^2-1)y^2+n\nu_3(1+\nu_1)z^2+$$

$$+n(1-\nu_2\nu_3)[\alpha\beta y^2+(\alpha+\beta)z^2]+\nu_2(1+\nu_1)z^2\Big\}+\frac{df_1}{dz}+\frac{df_2}{dy}.$$

Ayant en vue que de [2] et [7] il en résulte:

$$n=\frac{\nu_2}{\nu_3},\quad \alpha+\beta=\frac{\nu_2+\nu_3-2\nu_1\nu_2\nu_3}{\nu_2-\nu_2^2\nu_3},\quad \alpha\beta=\frac{\nu_3-\nu_1^2\nu_3}{\nu_2-\nu_2^2\nu_3},$$

on aura, après toutes les simplifications et les réductions possibles:

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{p(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\pi\alpha\beta}\cdot\frac{yz^2}{y^4+(1/\alpha+1/\beta)y^2z^2+z^4/\alpha\beta}\times \tag{7}$$

$$\times\frac{\nu_2+\nu_3+2\nu_2\nu_3}{\nu_2E}+\frac{df_1}{dz}+\frac{df_2}{dz}=\frac{\tau_{zy}}{G_2}+\frac{df_1}{dz}+\frac{df_2}{dy},$$

d'où il résulte

$$\frac{df_1}{dz}+\frac{df_2}{dy}=0$$

Compte tenu de la symétrie, pour les points qui se trouvent sur l'axe z, lorsque $y=0$, il résulte que $v=0$, et donc, de (5) on obtient $f_1(z)=0$ et de (7), $f_2(y)=\text{const.}$

Les déplacements relatifs (w) sont calculés par rapport à une droite de répère qui unit les points $y=+a$, $z=0$, pour lesquels $w=0$.

En introduisant de cette manière les valeurs $y=\pm a$, $z=0$ et $w=0$ dans l'expression (5), on obtient la constante:

$$f_2(y)=\left[\frac{n}{2}(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\ln\frac{\alpha}{\beta}+\nu_2(1+\nu_1)\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\alpha}{\beta}-\right.$$

$$\left.-\frac{n}{2}(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\ln a^4\right]\frac{p}{2\pi nE}.$$

Les déplacements relatifs sont donc donnés par les relations :

$$(8)\quad \begin{cases} v = \dfrac{p}{\pi n E}\left[\dfrac{1-\nu_1^2}{\sqrt{\alpha\beta}\,(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})}\left(\sqrt{\beta}\,\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\alpha}}{z}\,y - \sqrt{\alpha}\,\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\beta}}{z}\,y\right) - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{\nu_2(1+\nu_1)}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\left(\sqrt{\beta}\,\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\beta}}{z}\,y - \sqrt{\alpha}\,\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\alpha}}{z}\,y\right)\right], \\ w = \dfrac{p}{2\pi n E}\left(\dfrac{n}{2}(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left\{\ln\dfrac{1}{a^4}\left[\dfrac{z^4}{\alpha\beta}+\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)y^2z^2+y^4\right] - \right.\right. \\ \qquad \left.\left. - \dfrac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\ln\dfrac{y^2+z^2/\alpha}{y^2+z^2/\beta}\right\} - \dfrac{\nu_2(1+\nu_1)}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\ln\dfrac{y^2+z^2/\alpha}{y^2+z^2/\beta}\right). \end{cases}$$

Le déplacement vertical (w) d'un point défini par les coordonnées $y = y_1$ et $z = 0$, résulte de (8), à savoir :

$$(9)\qquad w = \frac{p}{\pi E}(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\ln\frac{y_1}{a}\cdot$$

Pour $n = 1$ et $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$, la formule (9) devient :

$$(10)\qquad w = \frac{2p}{\pi E}(1-\nu^2)\ln\frac{y_1}{a},$$

justement la formule connue du demi-espace élastique, homogène, isotrope.

On observe que pour obtenir les déplacements w des points situés dans le plan limite $z = 0$, il est nécessaire de multiplier les déplacements donnés par la solution qui correspond au cas du sol isotrope (10) avec la constante

$$(11)\qquad c = \frac{(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{2(1-\nu^2)}\cdot$$

Avec la substitution $\nu_2 = n\nu_3$ et l'approximation $\nu_1 = \nu_3 = \nu = 0{,}22$ pour $n = 3$, on obtient $\sqrt{\alpha} = 1{,}052$, $\sqrt{\beta} = 0{,}582$ et $c = 0{,}720$. La différence entre ce résultat, obtenu avec les dates considérées ci-dessus, et celui du déplacement dans le cas du sol isotrope, a une valeur de 28 %. Lorsque n augmente, la valeur de c diminue et le coefficient de Poisson exerce un effet plus réduit sur c, par rapport au degré d'anisotropie n.

2. Surface élastique en forme de bande avec une charge uniformément distribuée

Dans le cas des fondations élastiques en forme de bande de largeur $2b$, qui transmettent à un sol de fondation à anisotropie transversale une charge uniformément distribuée d'intensité p (fig. 2), le déplacement w du point O, en tenant compte de (9), est donné par

$$w = \frac{2p}{\pi E}\int_0^b (1 - \nu_2\nu_3)\,(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\,\ln\frac{y}{a}\,dy = \tag{12}$$

$$= \frac{2bp}{\pi E}\,(1 - \nu_2\nu_3)\,(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\left(\ln\frac{b}{a} - 1\right).$$

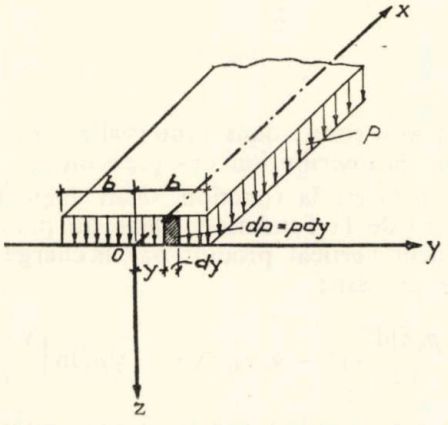


Fig. 2

Pour $n = 1$ et $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$, (9) devient

$$w = \frac{4pb}{\pi E}\,(1 - \nu^2)\left(\ln\frac{b}{a} - 1\right),$$

qui représente la solution du cas isotrope. On observe que pour obtenir le déplacement du point O, dans ce cas aussi, on peut multiplier la solution qui correspond au sol isotrope avec la même constante c, donnée par (11).

L'observation reste valable aussi pour tous les points de la surface de contact.

3. Cas des surfaces rigides en forme de bande

On considère une fondation rigide en forme de bande sous l'action d'une charge verticale P, uniformément distribuée au long de l'axe de la fondation (fig. 3). On pose tout d'abord le problème de la distribution des pressions au niveau de la surface de contact.

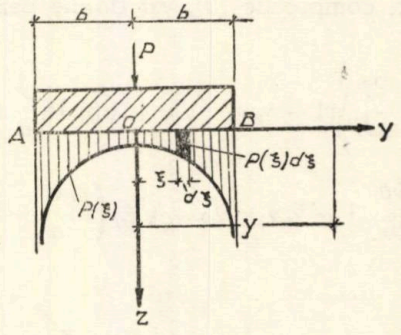


Fig. 3

De la condition $w = \text{const.}$ dans l'intervalle $-b \leqslant y \leqslant +b$, il en résulte le diagramme de la distribution des pressions.

Supposons que $p(\xi)$ est la fonction selon laquelle varient les pressions sur la largeur $2b$ de la fondation. Dans un point de coordonnées y et $z = 0$, le déplacement vertical produit par la charge élémentaire $p(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, en tenant compte de (9), est :

$$\mathrm{d}w = \frac{p(\xi)\mathrm{d}\xi}{\pi E}(1 - \nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\ln\left(\frac{y-\xi}{a}\right).$$

Le déplacement total produit par la charge entière est :

$$w = \frac{(1 - \nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{\pi E}\int_{-b}^{+b} p(\xi)\ln\left(\frac{y-\xi}{a}\right)\mathrm{d}\xi. \tag{13}$$

La condition à la limite este donc :

$$\int_{-b}^{+b} p(\xi)\ln(y-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \text{const.},$$

pour l'intervalle $-b \leqslant y \leqslant +b$, qui représente une équation intégrale du type Fredholm. En remplaçant ξ par y, la solution de cette équation est :

$$p(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{b^2 - y^2}} \int_{-b}^{+b} p(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{P}{\pi\sqrt{b^2 - y^2}}, \tag{14}$$

c'est-à-dire, la même solution que celle utilisée dans le cas du sol isotrope.

La valeur du déplacement constant sous la fondation est obtenue de (13), où l'on remplace la fonction de la presion $p(\xi) = p(y)$ par l'expression donnée par la relation (14) :

$$w_{\text{const.}} = \frac{(1 - \nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{\pi E} \int_{-b}^{+b} \frac{P}{\pi\sqrt{b^2 - y^2}} \ln\left(\frac{y - \xi}{a}\right)\mathrm{d}\xi.$$

Pour $n = 1$ et $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$, on obtient la solution tout comme dans le cas du sol isotrope :

$$w_{\text{const.}} = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^{+b} \frac{P}{\pi\sqrt{b^2 - y^2}} \ln\left(\frac{y - \xi}{a}\right)\mathrm{d}\xi.$$

Il en résulte que d'une façon analogue au cas des fondations élastiques en bande, le déplacement vertical d'un point se trouvant sur la surface de contact, peut être obtenu en multipliant la solution qui correspond à un sol isotrope par la même constante c, donnée par (11).

4. Conclusions

L'anisotropie des terrains de fondation influence l'ampleur des tassements. Lorsque $n > 1$, les tassements sont plus petits que dans le cas des sols isotropes. L'influence exercée par le coefficient de Poisson sur ce phénomène est réduite, par rapport à celle exercée par le degré d'anisotropie n.

Reçue le 10 XII 1968

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Statique et Résistance des Matériaux

BIBLIOGRAPHIE

1. Michell J. H., *The Stress Distribution in an Aelotropic Solid with an Infinite Plane Boundary.* Proc. London Math. Soc., 1900, **32.** pp. 247–258.
2. Barden L., *Distribution of Contact Pressure under Foundations.* Géotechnique, 1962, **12,** *3,* pp. 181–198.
3. — *Stress and Displacements in a Crossanisotropic Soil.* Géotechnique, 1963, **13,** *3,* pp. 190 — 210.
4. Cernătescu A., Silion T., *Curs de geotehnică.* EDP, Buc., 1963.
5. Lehr H., *Fundații,* Vol. I, ESAC, Buc., 1954.
6. Maior N., Păunescu M., *Curs de geotehnică și fundații.* EDP, Buc., 1963.

7. Stănculescu I., *Curs de geotehnică şi fundaţii*. EDP, Buc., 1960.
8. Eftimie Al., *Contributions à l'étude des efforts et des déplacements dans le terrain des fondations*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1—2*, pp. 541 — 550.
9. — *État de tension d'un terrain de fondation à anisotropie transversale au cas du problème plan*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3—4*, pp. 603 — 612.

DEPLASĂRILE PUNCTELOR SEMISPAŢIULUI ELASTIC TRANSVERSAL ANIZOTROP ÎN CAZUL PROBLEMEI DE DEFORMAŢIE PLANĂ

(Rezumat)

Cunoscînd expresiile tensiunilor [9], se stabilesc expresii pentru deplasările punctelor semispaţiului elastic omogen transversal anizotrop încărcat pe planul limită ($z = 0$) cu o sarcină distribuită uniform în lungul unei axe şi în cazul unei sarcini uniforme în formă de fîşie elastică sau rigidă.

Se particularizează formulele pentru punctele planului limită şi se observă că deplasările acestora sînt tocmai cele din ipoteza semispaţiului izotrop, multiplicate cu un factor care este funcţie de constantele elastice anizotrope, depinzînd în special de mărimea gradului de anizotropie şi mai puţin de valorile coeficientului lui Poisson.

Acest coeficient este subunitar cînd gradul de anizotropie $n > 1$ şi supraunitar dacă $n < 1$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. Z. 624.07

CALCULUL DIAFRAGMELOR CU GOLURI FOLOSIND MATRICELE DE TRANSFER

DE

DANIEL DIACONU şi N. UNGUREANU

1. Introducere

Analiza exactă a stării de tensiuni în diafragmele cu goluri la acţiunea sarcinilor verticale şi orizontale (din vînt şi seismicitate) presupune considerarea lor ca şaibe multiplu conexe, calculul constituind o problemă a teoriei elasticităţii, complexă şi greu de soluţionat.

Soluţionarea acestor probleme, cerute acut de practica de proiectare, a antrenat mulţi cercetători din ţară şi de peste hotare, care au abordat metode aproximative de rezolvare, considerînd anumiţi factori cu influenţă hotărîtoare în distribuţia de eforturi pentru un anumit tip de diafragmă şi neglijînd alţii, cărora le-au atribuit influenţe minime.

Metodele aproximative de rezolvare a diafragmelor pleacă de la ideea de bază că mediul discontinuu pe înălţime — constituit din buiandrugi — se înlocuieşte cu legături continui (lamele), de rigiditate echivalentă. Necunoscutele static nedeterminate apar sub forma unor funcţii obţinute din condiţii de compatibilitate a deformaţiilor, scrise sub forma unei ecuaţii diferenţiale în lunecări unitare sau lunecări sumate în dreptul secţiunii verticale a lamelelor. Ecuaţia diferenţială se mai poate exprima şi funcţie de forţa axială sau de rotiri diferenţiate pe înălţime, scrisă în axele verticale ale şpaleţilor.

Acest mod de exprimare a condiţiilor de compatibilitate presupune o rigiditate constantă a plinurilor pe înălţime, goluri de aceeaşi mărime şi buiandrugi de aceeaşi rigiditate.

Alte metode de rezolvare a acestor sisteme folosesc condiţiile de compatibilitate a deformaţiilor (cu influenţa momentului încovoietor, a forţei tăietoare şi a forţei axiale), scrise sub forma generală din metoda eforturilor, considerînd necunoscutele static nedeterminate simple sau grupate. Menţionăm că sub această formă se pun în evidenţă şi diferenţele de rigiditate a plinurilor pe înălţime, însă calcularea coeficienţilor şi rezolvarea sistemului de ecuaţii este anevoioasă.

Avînd în vedere dezideratele menţionate mai sus, în lucrarea de faţă se prezintă un calcul al diafragmelor cu goluri — pentru sarcini de tip seismic, concentrate la nivelul planşeelor — la care condiţiile de compatibilitate a deformaţiilor sînt scrise direct cu ajutorul momentelor factoriale sub forma matricelor de transfer. Acest mod de exprimare prezintă avantajul determinării imediate a stărilor de eforturi în diafragmă atît pe cale obişnuită, cît şi cu ajutorul maşinilor electronice de calcul, deoarece calculele de bază se reduc la produse de matrice.

2. Ipoteze

a) Materialul de alcătuire a diafragmei este omogen şi izotrop, continuu sau variabil în trepte pe înălţime. (Rigiditatea plinurilor poate fi constantă sau variabilă în trepte pe înălţime; de asemenea şi rigiditatea buiandrugilor).

b) Ipoteza lui Navier-Bernoulli este valabilă pe secţiunile transversale ale plinurilor luate individual, dar nu şi pentru ansamblu.

c) Legăturile dintre plinuri la nivelul etajelor sînt punctuale.

d) Plinurile sînt încastrate la nivelul fundaţiei. (Se poate generaliza şi pentru rotiri sau translări ale fundaţiei).

e) Axele medii deformate ale plinurilor au aceeaşi curbură în fiecare punct de legătură a lor cu buiandrugii. Această ipoteză permite aplicarea calculului şi la diafragme cu mai multe şiruri de goluri.

f) Influenţa eforturilor axiale din buiandrugi se neglijează.

g) Calculul se poate aplica la diafragme cu goluri dispuse simetric sau nesimetric, dar rigiditatea plinurilor este necesar să fie apropiată.

h) Calculul ia în considerare şi influenţa forţei tăietoare din buiandrugi şi din plinuri, în cazul forţelor exterioare orizontale, aplicate concentrat la nivelul planşeelor (cazul curent al sarcinilor seismice).

3. Metoda de rezolvare

În cele ce urmează se expune procedeul de calcul al unei diafragme cu un singur şir de goluri, putînd fi extins si la diafragme cu mai multe şiruri de goluri.

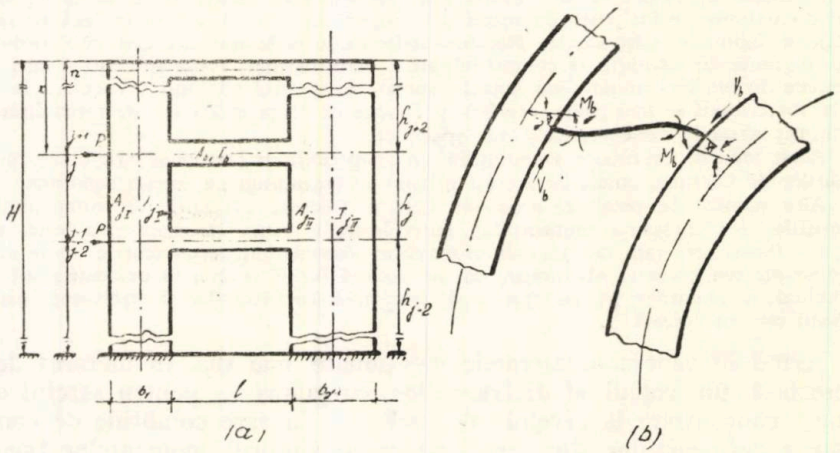


Fig. 1

Întrucît curburile plinurilor sînt aceleaşi, momentele din capetele buiandrugilor, ţinînd seama şi de influenţa forţei tăietoare, vor fi (fig. 1 a şi b)

$$M_b = \frac{1}{2}\left(\frac{6E_bI_b}{l^2} + \frac{G_bA_b}{kl}\right)(b_1 + b_2 + 2l)\theta, \tag{1}$$

valoarea forţei tăietoare din buiandrug fiind

$$V_b = \frac{2M_b}{l} = \frac{1}{l}\left(\frac{6E_bI_b}{l^2} + \frac{G_bA_b}{kl}\right)(b_1 + b_2 + 2l)\theta. \tag{2}$$

Momentele din axele plinurilor, datorită rigidităţii buiandrugilor, vor fi date de:

$$\begin{cases} M_I' = M_b + V_b\dfrac{b_1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6E_bI_b}{l^2} + \dfrac{G_bA_b}{kl}\right)(b_1 + b_2 + 2l)\left(1 + \dfrac{b_1}{l}\right)\theta = K_I^*\theta, \\ M_{II}' = M_b + V_b\dfrac{b_2}{l} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6E_bI_b}{l^2} + \dfrac{G_bA_b}{kl}\right)(b_1 + b_2 + 2l)\left(1 + \dfrac{b_2}{l}\right)\theta = K_{II}^*\theta. \end{cases} \tag{3}$$

Se notează $K^* = K_I^* + K_{II}^*$.

Momentele încovoietoare totale din plinuri rezultă:

$$M_I = M_I^P(x) - \sum_x^n M_I', \quad M_{II} = M_{II}^P(x) - \sum_x^n M_{II}', \tag{4}$$

unde $M_{I,II}^P(x)$ sînt momentele încovoietoare corespunzătoare sarcinilor exterioare în secţiunea x, pentru plinul I şi respectiv II.

La rezolvarea problemei se poate pleca de la ecuaţia diferenţială care ţine seama şi de influenţa forţei tăietoare în plinuri:

$$\frac{dy}{dx} = -\int \frac{M}{EI}dx + \frac{kT}{GA} + C. \tag{5}$$

Întrucît în cazul sarcinii seismice forţa tăietoare variază în trepte (constantă pe înălţimea unui etaj), curburile nu vor fi influenţate de prezenţa forţei tăietoare din plinuri, fapt care rezultă evident din relaţia (5); prin urmare:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{5'}$$

şi deci:

$$\frac{d^2y_I}{dx^2} = \frac{d^2y_{II}}{dx^2} = -\frac{M_I}{EI_I} = -\frac{M_{II}}{EI_2} = -\frac{M}{E(I_1 + I_2)}, \tag{6}$$

sau

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M^P(x) - \sum M'}{E\mathcal{J}}, \tag{7}$$

unde $\mathcal{J} = I_1 + I_2$ şi $\sum M' = \sum_x^n M'_I + \sum_x^n M'_{II}$.

Consideraţii asemănătoare pot fi făcute pentru diafragme cu mai multe şiruri de goluri.

Mărimile y, θ, M şi T se pot considera drept coordonate ale unui vector, numit *vector de stare.*

Dacă se consideră şpaleţii unei diafragme pe înălţimea unui etaj (h_j), între componentele vectorilor de stare din cele două secţiuni (deasupra planşeului inferior şi sub planşeul superior) se poate stabili o relaţie aplicînd momentele factoriale [1], [2]:

$$\begin{cases} y_j = y_{j-1} + \theta_{j-1} h_j - \dfrac{M_{j-1} h_j^2}{2!E\mathcal{J}} - \dfrac{T_{j-1} h_j^3}{3!E\mathcal{J}} + [y^P], \\ \theta_j = \theta_{j-1} - \dfrac{M_{j-1} h_j^2}{E\mathcal{J}} - \dfrac{T_{j-1} h_j^2}{2!E\mathcal{J}} + [\theta^P], \\ M_j = M_{j-1} + T_{j-1} h_j + [M^P], \\ T_j = T_{j-1} + [T^P]. \end{cases} \tag{8}$$

În cazul forţelor concentrate la nivelul etajului: $y^P = 0$, $\theta^P = 0$, $M^P = 0$, $T^P = 0$.

Ecuaţiile (8) pot fi puse sub formă matricială [9]:

$$\begin{bmatrix} y_j \\ \theta_j \\ M_j \\ T_j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_j & -\dfrac{h_j^2}{2!E\mathcal{J}} & -\dfrac{h_j^3}{3!E\mathcal{J}} & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{h_j}{EI} & -\dfrac{h_j^2}{2!E\mathcal{J}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{j-1} \\ \theta_{j-1} \\ M_{j-1} \\ T_{j-1} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

sau:

$$(S)_j = [\tau]_{j-1}^j (S)_{j-1}, \tag{9'}$$

unde $[\tau]_{j-1}^j$ reprezintă matricea de transfer.

Matricea de transfer, la trecerea de la secţiunea de sub planşeu la cea de deasupra planşeului — secţiunile j şi $j+1$ fiind infinit vecine (fig. 1) — se obţine din condiţii de compatibilitate a deformaţiilor şi de echilibru al unui element ($y_{j+1} = y_j$, $\theta_{j+1} = \theta_j$, $M_{j+1} = -K^*\theta_j + M_j$, $T_{j+1} = T_j - P$) sub forma:

$$(10) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K^* & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\tau]_j^{j+1}.$$

Avînd în vedere considerentele expuse, vectorul de stare într-o secţiune j va fi:

$$(11) \qquad (S)_j = [\tau]_0^1 [\tau]_1^2 \dots [\tau]_{j-1}^j (S)_0,$$

sau:

$$(11') \qquad (S)_j = \prod_{i=1}^{j} [\tau]_{i-1}^i (S)_0.$$

Componentele vectorului $(S)_0$ vor fi: $y_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $M_0 \neq 0$, $T_0 \neq 0$ care corespund secţiunii de încastrare, fără translare şi balansare în terenul de fundaţie.

Valorile lui M_0 şi T_0 se deduc din condiţii impuse ultimului planşeu, n:

$$(12) \qquad M_n = K^*\theta_n, \quad T_n = P_n,$$

unde P_n este sarcina seismică orizontală de la ultimul nivel. Astfel, dacă se efectuează produsele matricelor de transfer pînă la nivelul n, conform cu relaţia (11'), rezultă:

$$(13) \qquad \begin{bmatrix} y_n \\ \theta_n \\ M_n \\ T_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{30} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{40} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ T_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cu condiţiile (12) se obţine:

$$(14) \qquad \begin{cases} \theta_n = a_{23}M_0 + a_{24}T_0 + a_{20}, \\ a_{33}M_0 + a_{34}T_0 + a_{30} = K^*(a_{23}M_0 + a_{24}T_0 + a_{20}), \\ a_{34}M_0 + a_{44}T_0 + a_{40} = P_n. \end{cases}$$

Necunoscutele din sistemul (14) sînt M_0, T_0 și θ, care se obțin prin soluționarea lui. Avînd M_0 și T_0 se pot determina direct (deoarece produsele parțiale ale matricelor de transfer sînt calculate) valorile momentelor totale M_j, forțele tăietoare totale T_j și respectiv rotirile θ_j de la orice nivel.

Cunoscînd rotirile θ_j se pot calcula cu relațiile (1) și respectiv (2) valorile momentelor încovoietoare din buiandrugi, M_b, și ale forței tăietoare, V_b.

Momentele încovoietoare M_j se repartizează plinurilor proporțional cu momentele de inerție; forța tăietoare din plinuri se deduce din momentele încovoietoare corespunzătoare fiecărui plin.

În metoda expusă nu s-a ținut seama de influența forței axiale din șpaleți produsă de sarcini orizontale, care pot modifica eforturile cu maximum 15%. Dacă se urmărește să se țină seama și de acest efort, atunci calculele efectuate pînă acum se consideră drept o primă etapă de calcul.

Cu valorile sumate ale lui V_b se determină alungirile, respectiv scurtările din șpaleții *I* și *II* (Δ_I și Δ_{II}). Aceste valori corectează momentele M'_I și M'_{II}, deci valorile lui K_1^* și K_2^*. Cu noile valori ale lui K^* se repetă calculul (9)...(14), obținîndu-se noile valori pentru M_0, T_0 și θ. Astfel se determină valorile M'_b și V'_b modificate. În 2...3 etape se ajunge la valori suficient de exacte pentru $M_b^i \simeq M_b^{i-1}$ și $V_b^i \simeq V_b^{i-1}$.

Ambele procedee de calcul, cu și fără considerarea influenței forței axiale, sînt rezolvabile atît pe cale obișnuită cît și la mașinile de calcul, oferind totodată posibilitatea determinării directe a oricărui efort de la orice nivel.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statică și rezistența materialelor
și
INCERC, filiala Iași

BIBLIOGRAFIE

1. Șesan A., Ciongradi I., *Generalizarea „momentelor factoriale" sub forma operatorilor „momente exponențiale"*. Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 361—366.
2. Șesan A., Vulpe A., Macavei Fl., *Generalizarea „momentelor factoriale" sub forma operatorilor „determinanți factoriali"*. Comunicare prezentată la Ses. șt. a Inst. polit. Iași, 28—30 sept. 1967.
3. Lacroix R, *La méthode des matrices de transfert*. Ann. de l'Inst. Techn. du Bâtiment et des Trav. Publ., 1967, *231—232*.

CALCUL DES CONTREVENTEMENTS DES BÂTIMENTS UTILISANT LES MATRICES DE TRANSFERT

(Résumé)

On présente un calcul des diaphragmes à creux, pour des charges de type séismique, concentrées au niveau des planchés, où les conditions de compatibilité des déformations sont écrites directement à l'aide des moments factoriaux sous forme de matrices de transfert. Ce procédé présente l'avantage de permettre la détermination immédiate des états de tensions dans la diaphragme, tant par voie ordinaire qu'à l'aide des machines électroniques, car les calculs fondamentaux sont réduits à des produits de matrices.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. Z. 624.07

GENERALIZĂRI ÎN REZOLVAREA STRUCTURILOR CU AJUTORUL OPERATORILOR MATRICEALI

DE

ADRIAN VULPE

În rezolvarea structurilor elastice vom folosi — cu avantajele cunoscute — metoda deformaţiilor.

Pentru un sistem cu n componente forţe exterioare $\{F\}$, deplasările nodurilor în aceleaşi coordonate ale structurii fiind $\{\Delta\}$ se poate scrie

$$\{F\} = K\{\Delta\}, \tag{1}$$

unde prin K s-a notat matricea de rigiditate a structurii.

În cazul sistemelor elastice, pe baza teoremei deplasărilor virtuale condiţia de echilibru se exprimă prin:

$$\{\bar{\Delta}\}^T\{F\} = \{\bar{D}\}^T\{P\}, \tag{2}$$

unde $\{P\}$ sînt eforturile interioare, iar $\{\bar{D}\}$ — deformaţiile după direcţiile acestora, rezultate în urma aplicării deplasărilor virtuale $\{\bar{\Delta}\}$:

$$\{\bar{D}\} = A\{\bar{\Delta}\} \text{ respectiv } \{\bar{D}\}^T = \{\bar{\Delta}\}^T A^T \tag{3}$$

şi ca urmare (2) devine:

$$\{\bar{\Delta}\}^T\{F\} = \{\bar{\Delta}\}^T A^T\{P\}. \tag{4}$$

Cum această relaţie se poate scrie pentru orice deplasări virtuale $\{\bar{\Delta}\}$, avem:

$$\{F\} = A^T\{P\}. \tag{5}$$

Pe de altă parte:

$$\{P\} = K_d\{D\}, \tag{6}$$

K_d fiind matricea diagonal celulară a rigidităţilor elementelor structurii — acestea putînd fi simple bare sau substructuri.

Utilizînd (6) şi (3) relaţia (5) devine:

$$\{F\} = A^T K_d A \{\Delta\} \tag{7}$$

şi deci

$$K = A^T K_d A. \tag{8}$$

Matricea operatorială A transformă spaţiul $\{\Delta\}$ în $\{D\}$, K_d aplică pe $\{D\}$ în $\{P\}$, iar A^T pe $\{P\}$ în $\{F\}$.

Dintre deplasările $\{\Delta\}$ unele vor fi cunoscute (cedările reazemelor rigide), iar celelalte — deplasările reazemelor elastice cît şi ale nodurilor libere — sînt necunoscute.

Pentru exprimarea echilibrului în condiţii generale de încărcare şi rezemare, cît şi pentru reducerea numărului de necunoscute, vom înlocui sistemul de bază clasic, din metoda deformaţiilor, cu unul cinematic elastic nedeterminat obţinut prin eliminarea deplasărilor reazemelor elastice.

Fie: $\{\Delta_\alpha\}$ — vectorul deplasărilor necunoscute de bază, $\{\Delta_{\beta_1}\}$ — deplasările reazemelor elastice, $\{\Delta_{\beta_2}\}$ — deplasările impuse ale celorlalte reazeme: Deci:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_\alpha \\ \Delta_{\beta_1} \\ \Delta_{\beta_2} \end{Bmatrix}$$

şi corespunzător:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_\alpha \\ F_{\beta_1} \\ F_{\beta_2} \end{Bmatrix}.$$

Matricele A ai A^T vor fi compartimentate în acelaşi mod:

$$A = [A_\alpha \mid A_{\beta_1} \mid A_{\beta_2}], \quad A^T = \begin{bmatrix} A_\alpha^T \\ A_{\beta_1}^T \\ A_{\beta_2}^T \end{bmatrix},$$

încît relaţiile (8) şi (1) devin:

$$K = \begin{bmatrix} A_\alpha^T \\ A_{\beta_1}^T \\ A_{\beta_2}^T \end{bmatrix} [K_d] [A_\alpha \mid A_{\beta_1} \mid A_{\beta_2}] \tag{9}$$

şi respectiv:

$$(10)\qquad \begin{Bmatrix} F_\alpha \\ F_{\beta_1} \\ F_{\beta_2} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta_1} & K_{\alpha\beta_2} \\ \hline K_{\beta_1\alpha} & K_{\beta_1\beta_1} & K_{\beta_1\beta_2} \\ \hline K_{\beta_2\alpha} & K_{\beta_2\beta_1} & K_{\beta_2\beta_2} \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_\alpha \\ \Delta_{\beta_1} \\ \Delta_{\beta_2} \end{Bmatrix},$$

unde submatricele K_{ij} au expresiile:

$$K_{ij} = A_i^T K_d A_j, \quad (i,j = \alpha, \beta_1, \beta_2),$$

ceea ce rezultă şi din graful operatorial din fig. 1.

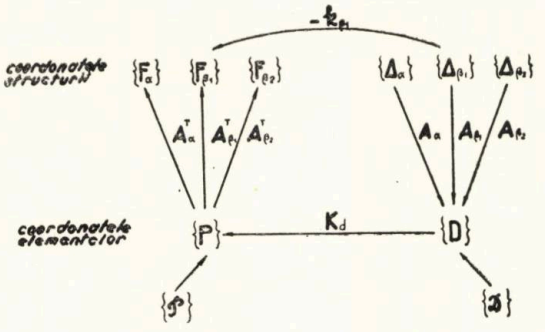


Fig. 1

Tratînd submatricele ca elemente se poate scrie ecuaţia (10) sub forma următoarelor trei ecuaţii matriceale:

$$(10\,a)\qquad \{F_\alpha\} = K_{\alpha\alpha}\{\Delta_\alpha\} + K_{\alpha\beta_1}\{\Delta_{\beta_1}\} + K_{\alpha\beta_2}\{\Delta_{\beta_2}\},$$

$$(10\,b)\qquad \{F_{\beta_1}\} = K_{\beta_1\alpha}\{\Delta_\alpha\} + K_{\beta_1\beta_1}\{\Delta_{\beta_1}\} + K_{\beta_1\beta_2}\{\Delta_{\beta_2}\},$$

$$(10\,c)\qquad \{F_\beta\} = K_{\beta_2\alpha}\{\Delta_\alpha\} + K_{\beta_2\beta_1}\{\Delta_{\beta_1}\} + K_{\beta_2\beta_2}\{\Delta_{\beta_2}\}.$$

Deformîndu-se cu $\{\Delta_{\beta_1}\}$ resoartele vor acţiona cu forţele $\{F_{\beta_1}\}$ — proporţionale şi de sens contrar acestora — asupra nodurilor:

$$(11)\qquad \{F_{\beta_1}\} = -k_{\beta_1}\{\Delta_{\beta_1}\},$$

k_{β_1} fiind matricea diagonală a rigidităţilor reazemelor elastice.

Substituind $\{F_{\beta_1}\}$ în (10 b) se obţine:

$$(12)\qquad (K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1})\{\Delta_{\beta_1}\} = -(K_{\beta_1\alpha}\{\Delta_\alpha\} + K_{\beta_1\beta_2}\{\Delta_{\beta_2}\}),$$

de unde rezultă deplasările $\{\Delta_{\beta_1}\}$ funcţie de necunoscutele $\{\Delta_\alpha\}$ şi cedările de reazem cunoscute $\{\Delta_{\beta_2}\}$:

$$\{\Delta_{\beta_1}\} = -(K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1})^{-1}(K_{\beta_1\alpha}\{\Delta_\alpha\} + K_{\beta_1\beta_2}\{\Delta_{\beta_2}\}). \tag{13}$$

Introducînd deplasările în ecuația (10 a) se realizează eliminarea lor completă:

$$\begin{aligned}\{F_\alpha\} = &[K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta_1}(K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1})^{-1}K_{\beta_1\alpha}]\{\Delta_\alpha\} + \\ &+ [K_{\alpha\beta_2} - K_{\alpha\beta_1}(K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1})^{-1}K_{\beta_1\beta_2}\{\Delta_{\beta_2}\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Menționăm că în vectorul $\{\Delta_{\beta_1}\}$, eliminat, s-au inclus atît deplasările reazemelor elastice cît și cele după coordonatele cu forțe exterioare nule (aceasta fiind posibil considerînd după coordonatele celor din urmă resoarte de rigiditate zero). O astfel de tratare permite ca numărul de necunoscute nu numai să nu crească față de cazul cînd toate reazemele sînt considerate rigide, ci dimpotrivă să scadă prin eliminarea deplasărilor după care forțele exterioare sînt nule.

Cel de-al doilea termen al membrului drept din ecuația (14) reprezintă echivalentul în forțe exterioare — acționînd după coordonatele α — al cedărilor cunoscute de reazeme.

Notînd cu:

$$\{F_\alpha\} - [K_{\alpha\beta_2} - K_{\alpha\beta_1}(K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1})^{-1}K_{\beta_1\beta_2}]\{\Delta_{\beta_2}\} = \{F_\alpha\}^* \tag{15}$$

necunoscutele de bază $\{\Delta_\alpha\}$ capătă forma:

$$\{\Delta_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta_1}(K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1})^{-1}K_{\beta_1\alpha}]^{-1}\{F_\alpha\}^*. \tag{16}$$

Dacă pe lîngă forțele exterioare $\{F_\alpha\}$ și cedările $\{\Delta_{\beta_2}\}$ există deformații ale elementelor datorită temperaturii sau inexactităților de execuție, fie acestea $\{\mathcal{D}\}$, cît și încărcări între noduri reprezentate prin forțele de încastrare perfectă spre nod $\{\mathcal{P}\}$, atunci, conform grafului din fig. 1, $\{F_\alpha\}^*$ va include și termenii $A_\alpha^T\{\mathcal{P}\} + A_\alpha^T K_d\{\mathcal{D}\}$.

În lipsa reazemelor elastice $\{\Delta_{\beta_1}\}$ va reprezenta doar deplasările după coordonatele cu forțe exterioare nule, încît (16) devine:

$$\{\Delta_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta_1}K_{\beta_1\beta_1}^{-1}K_{\beta_1\alpha}]^{-1}\{F_\alpha\}^*. \tag{17}$$

Dacă la absența acestora se adaugă și aceea a deformațiilor $\{\mathcal{D}\}$, cît și a cedărilor cunoscute $\{\Delta_{\beta_2}\}$ vectorul $\{F_\alpha\}^*$ va mai cuprinde doar forțele din noduri și cele de încastrare perfectă, (17) căpătînd de data aceasta semnificația relației stabilite în mod independent în [1], [2].

Tratarea generală prezentată aici permite luarea în considerare atît a rezemărilor elastice, cît și a oricărui gen de încărcare.

În cazul în care toate rigiditățile k_{β_1} sînt infinite, matricea $(K_{\beta_1\beta_2} + k_{\beta_1})$ va avea pe diagonală valori infinite, încît inversa ei este matricea nulă, relația (17) luînd forma cunoscută:

$$\{\Delta_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1}\{F_\alpha\}^*. \tag{18}$$

Odată determinate necunoscutele $\{\Delta_\alpha\}$ se pot afla din relația (13) deplasările reazemelor elastice $\{\Delta_{\beta_1}\}$ cît și eforturile $\{P\}$, care conform fig. 1, au în cazul general expresia:

$$(19) \quad \{P\} = -\{\mathcal{P}\} + K_d\{\mathcal{D}\} + K_d A_\alpha\{\Delta_\alpha\} + K_d(A_{\beta_1}\{\Delta_{\beta_1}\} + A_{\beta_2}\{\Delta_{\beta_2}\}).$$

Semnul vectorului $\{\mathcal{P}\}$ arată că forțele considerate în relația (19) sînt cele orientate spre bară.

Pentru o utilizare rațională a calculatorului este de dorit ca ordinele celor două matrice care trebuie inversate: $(K_{\beta_1\beta_2} + k_{\beta_1})$ și $K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta_1}(K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1})^{-1}K_{\beta_1\alpha}$, să fie cît mai apropiate, ceea ce se poate realiza acționînd structura cu forțele exterioare întîi la jumătate din coordonate, apoi la celelalte și suprapunînd efectele.

Exemplu numeric

Pentru a ilustra rezolvarea structurilor elastice prin procedeul propus se va considera cadrul reprezentat în fig. 2 cu:

$EI = 6{,}2.10^3\ \text{t m}^2$, $k_5 = 3{,}33.10^3\ \text{t m}$; valori reduse: $EI = 1$, $k_5 = 0{,}53$.

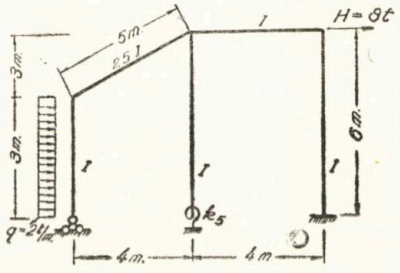


Fig. 2

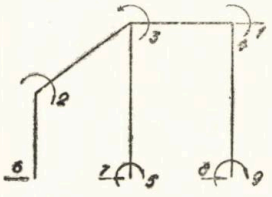


Fig. 3

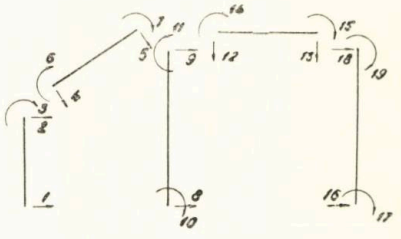


Fig. 4

Sistemul de coordonate al structurii la care se raportează vectorii $\{F\}$ și $\{\Delta\}$ este reprezentat în fig. 3.

Pentru alegerea celor trei tipuri de coordonate (α, β_1 și β_2) se observă că după coordonata 1 acționează forța H, după coordonata 2 un moment rezultat din sarcina distribuită q; structura nu este acționată de forțe exterioare după coordonatele 3 și 4, deci în aceste noduri

putem considera resoarte de rigiditate zero ($k_3 = 0$, $k_4 = 0$), în timp ce $k_5 = 0{,}53$. Deplasările după celelalte coordonate sînt nule. Deci:

$$\alpha = 1, 2; \quad \beta_1 = 3, 4, 5; \quad \beta_2 = 6, 7, 8, 9,$$

$$\{F_\alpha\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta_\alpha\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}, \quad \{F\ \} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta_{\beta_1}\} = \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \end{Bmatrix},$$

$$\{F_{\beta_2}\} = \begin{Bmatrix} F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta_{\beta_2}\} = \begin{Bmatrix} \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{Bmatrix}.$$

Sistemul de coordonate al elementelor la care se raportează vectorii $\{P\}$ şi $\{D\}$ este reprezentat în fig. 4.

Coloana i a matricei A — care realizează trecerea de la coordonatele structurii la cele ale elementelor (relaţia (3)) — se obţine impunînd deplasarea $\Delta_i = 1$ şi $\Delta_j = 0$, pentru toţi $j \neq i$:

$A =$

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	
0	0	0	0		1	0	0	0	*1*
1	0	0	0		0	0	0	0	*2*
0	1	0	0	0	0	0	0	0	*3*
0,60	0	0	0	0	0	0	0	0	*4*
0,60	0	0	0	0	0	0	0	0	*5*
0	1	0	0	0	0	0	0	0	*6*
0	0	1	0	0	0	0	0	0	*7*
0	0	0	0	0	0	1	0	0	*8*
1	0	0	0	0	0	0	0	0	*9*
0	0	0	0	1	0	0	0	0	*10*
0	0	1	0	0	0	0	0	0	*11*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	*12*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	*13*
0	0	1	0	0	0	0	0	0	*14*
0	0	0	1	0	0	0	0	0	*15*
0	0	0	0	0	0	0	1	0	*16*
0	0	0	0	0	0	0	0	1	*17*
0	0	0	1	0	0	0	0	0	*18*
1	0	0	0	0	0	0	0	0	*19*
A_α		A_{β_1}			A_{β_2}				

Matricea rigidităţilor elementelor care apare în relaţia (6) se obţine considerînd separat fiecare din barele sistemului şi impunînd o deplasare unitară numai după cîte o coordonată de element (fig. 4).

$$K_d =$$

$$\begin{bmatrix}
0{,}1111 & -0{,}1111 & 0{,}3333 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
-0{,}1111 & 0{,}1111 & -0{,}3333 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0{,}3333 & -0{,}3333 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 0{,}24 & -0{,}24 & 0{,}6 & 0{,}6 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & -0{,}24 & 0{,}24 & -0{,}6 & -0{,}6 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 0{,}6 & -0{,}6 & 2 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 0{,}6 & -0{,}6 & 1 & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 0{,}0555 & -0{,}0555 & 0{,}1666 & 0{,}1666 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & -0{,}0555 & 0{,}0555 & -0{,}1666 & -0{,}1666 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 0{,}1666 & -0{,}1666 & 0{,}6666 & 0{,}3333 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 0{,}1666 & -0{,}1666 & 0{,}3333 & 0{,}6666 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0{,}1875 & -0{,}1875 & 0{,}35 & 0{,}375 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & -0{,}1875 & 0{,}1875 & -0{,}35 & -0{,}375 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0{,}375 & -0{,}375 & 1 & 0{,}5 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0{,}375 & -0{,}375 & 0{,}5 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0{,}0555 & 0{,}1666 & 0{,}1666 & -0{,}0555 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0{,}1666 & 0{,}6666 & 0{,}0333 & -0{,}1666 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0{,}1666 & 0{,}3333 & 0{,}6666 & -0{,}1666 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & -0{,}0555 & -0{,}1666 & -0{,}1666 & 0{,}0555
\end{bmatrix}$$

Matricea de rigiditate a structurii (relația (9)) este în acest caz:

$$K = \begin{array}{c|ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 0{,}2222 & -0{,}3333 & -0{,}1666 & -0{,}1666 & 0{,}1666 & -0{,}1111 & 0{,}0555 & -0{,}0555 & -0{,}1666 \\ 2 & -0{,}3333 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0{,}3333 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -0{,}1666 & 1 & 3{,}6666 & 0{,}5 & 0{,}3333 & 0 & 0{,}1666 & 0 & 0 \\ 4 & -0{,}1666 & 0 & 0{,}5 & 1{,}6666 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1666 & 0{,}3333 \\ 5 & -0{,}1666 & 0 & 0{,}3333 & 0 & 0{,}6666 & 0 & 0{,}1666 & 0 & 0 \\ \hline 6 & -0{,}1111 & 0{,}3333 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1111 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -0{,}0555 & 0 & 0{,}1666 & 0 & 0{,}1666 & 0 & 0{,}0555 & 0 & 0 \\ 8 & -0{,}0555 & 0 & 0 & 0{,}1666 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0555 & 0{,}1666 \\ 9 & -0{,}1666 & 0 & 0 & 0{,}3333 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1666 & 0{,}1666 \end{array} \quad \begin{array}{l} \} \alpha \\ \} \beta_1 \\ \} \beta_2 \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad}_{\alpha} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\beta} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\beta_2}$$

Vom trece de la sistemul de bază cinematic elastic determinat — în care s-au scris coeficienții matricei K — la unul cu blocajele β_1 eliberate (folosind submatricele lui K):

$$K_{\beta_2\beta_1} + k_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3{,}6666 & 0{,}5 & 0{,}3333 \\ 0{,}5 & 1{,}666\,0 & \\ 0{,}3333 & 0 & 0{,}6666 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0{,}53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}6666 & 0{,}5 & 0{,}3333 \\ 0{,}5 & 1{,}6666 & 0 \\ 0{,}3333 & 0 & 1{,}1966 \end{bmatrix},$$

$$[K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}292065 & -0{,}08762 & -0{,}08136 \\ -0{,}08762 & 0{,}626286 & 0{,}024406 \\ -0{,}08136 & -0{,}024406 & 0{,}858317 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}16666 & 1 \\ -0{,}16666 & 0 \\ -0{,}016666 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow K_{\beta_1\alpha},$$

$$[K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1}]^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}29206 & -0{,}0872 & -0{,}08136 \\ -0{,}08762 & 0{,}62628 & 0{,}24440 \\ -0{,}08136 & 0{,}02440 & 0{,}85831 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}020514 & 0{,}29206 \\ -0{,}093845 & -0{,}08762 \\ -0{,}13356 & -0{,}08131 \end{bmatrix} \leftarrow (K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1})^{-1} K_{\beta_1\alpha},$$

$$K_{\alpha\beta_1} \rightarrow \begin{bmatrix} -0{,}16666 & -0{,}16666 & -0{,}16666 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}04132 & -0{,}020514 \\ -0{,}020514 & 0{,}292065 \end{bmatrix} \leftarrow K_{\alpha\beta_1}(K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1})^{-1} K_{\beta\alpha},$$

$$K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta_1}(K_{\beta_1\beta_1} + k_{\beta_1})^{-1} K_{\beta_1\alpha} = \begin{bmatrix} 0{,}22222 & -0{,}33333 \\ -0{,}33333 & 3 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0{,}04132 & -0{,}020514 \\ 0{,}020514 & 0{,}292065 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}18090 & -0{,}312819 \\ -0{,}312819 & 2{,}707935 \end{bmatrix}.$$

Eliminarea necunoscutelor $\{\Delta_{\beta_1}\}$ — ceea ce fizic reprezintă calculului pe un sistem de bază parţial eliberat — conduce, cum era şi de aşteptat, la valori mai mici pentru coeficienţii de rigiditate (a se compara ultima matrice obţinută cu $K_{\alpha\alpha}$).

Determinarea necunoscutelor $\{\Delta_\alpha\}$ pentru orice sistem de încărcare $\{F_\alpha\}^\star$ — relaţia (17) — se realizează prin inversarea ultimei matrice:

$$[K - K_{\alpha\beta_1}(K_{\beta_1\beta} + k_{\beta_1})^{-1}K_{\beta_1\alpha}]^{-1} = \begin{bmatrix} 6{,}897829 & 0{,}797989 \\ 0{,}797989 & 0{,}461468 \end{bmatrix}.$$

De observat că pentru structura considerată nu toate forţele acţionează în dreptul coordonatelor. Reducerea acestora la coordonatele sistemului se realizează în fig. 5:

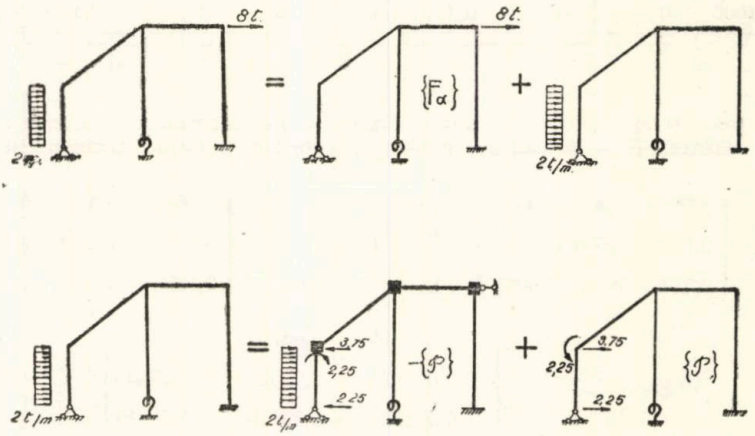


Fig. 5

$$\{F_\alpha\}^\star = \{F_\alpha\} + A_\alpha^T\{P\} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} + A^T \begin{Bmatrix} 2{,}25 \\ 3{,}75 \\ -2{,}25 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3{,}75 \\ -2{,}25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11{,}75 \\ -2{,}25 \end{Bmatrix},$$

$$\{\Delta_\alpha\} = \begin{bmatrix} 6{,}897829 & 0{,}797989 \\ 0{,}797987 & 0{,}461468 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 11{,}75 \\ -2{,}25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 79{,}254 \\ 8{,}338067 \end{Bmatrix}.$$

Ţinînd cont că $\{\Delta_{\beta_2}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, relaţia (13) devine:

$$\{\Delta_{\beta_1}\} = -(K_{\beta_1\beta_1} + k_1)^{-1} K_{\beta_1\alpha} \{\Delta_\alpha\} =$$

$$= -\begin{bmatrix} -0{,}020514 & 0{,}292065 \\ -0{,}093845 & -0{,}08762 \\ -0{,}13356 & -0{,}08136 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 79{,}254 \\ \\ 8{,}338067 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}80943 \\ 8{,}16817 \\ 11{,}263545 \end{Bmatrix}.$$

Odată determinate necunoscutele $\begin{Bmatrix} \Delta_\alpha \\ \Delta_\beta \end{Bmatrix}$ se trece la calculul eforturilor:

$$\{P\} = -\{\mathfrak{P}\} + K_d[A_\alpha \mid A_{\beta_1}] \begin{Bmatrix} \Delta_\alpha \\ \Delta_{\beta_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2{,}25 \\ -3{,}75 \\ +2{,}25 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -6{,}0266 \\ +6{,}0266 \\ -18{,}0943 \\ \hdashline +4{,}51714 \\ -4{,}51714 \\ \hdashline 15{,}8483 \\ 6{,}71921 \\ \hdashline -2{,}66065 \\ +2{,}66055 \\ -5{,}9698 \\ -9{,}9941 \\ \hdashline +2{,}75952 \\ -2{,}75952 \\ +3{,}27465 \\ +7{,}76346 \\ \hdashline -3{,}04164 \\ -10{,}4363 \\ -7{,}76346 \\ +3{,}04164 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8{,}27666 \\ +2{,}2766 \\ -15{,}8483 \\ \hdashline +4{,}51714 \\ -4{,}51714 \\ \hdashline 15{,}8483 \\ +6{,}71921 \\ \hdashline -2{,}66065 \\ +2{,}66065 \\ -5{,}9698 \\ -9{,}9941 \\ \hdashline +2{,}75952 \\ -2{,}75952 \\ +3{,}27465 \\ +7{,}76346 \\ \hdashline -3{,}04164 \\ -10{,}4863 \\ -7{,}76346 \\ +3{,}04164 \end{Bmatrix}$$

Reprezentarea grafică a componentelor vectorului $\{P\}$ conduce la diagrama de eforturi trasată în fig. 6.

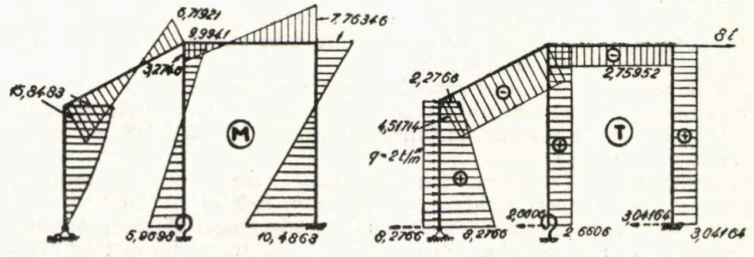


Fig. 6

Din compararea celor două rînduri de diagrame (fig. 6 şi 7) rezultă că prin considerarea unei încastrări elastice în reazemul central se obţine o nouă distribuţie a eforturilor în structură (eforturile se scurg spre legăturile rămase nemodificate).

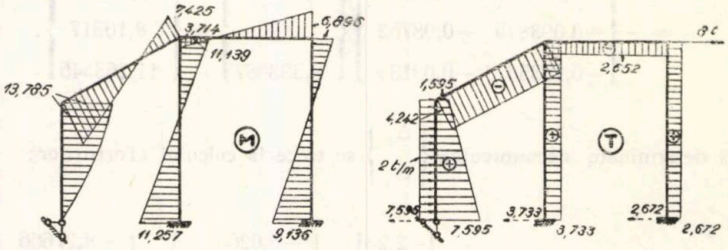


Fig. 7

În proiectarea unei structuri luarea în calcul a gradului real de încastrare — ceea ce se realizează uşor în forma matriceală prezentată — permite o dimensionare corectă, conducînd totodată la o siguranţă controlată a proiectării.

Primită la 27 VI 1969

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de statică şi rezistenţa materialelor

BIBLIOGRAFIE

1. Rubinstein M. F., *Matrix Computer Analysis of Structures.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1968.
2. Pestel C. E., Leckie F. A., *Matrix Methods in Elasto-Mechanics.* Mc Graw-Hill N. Y., 1963.
3. Livesley R. K., *Matrix Methods of Structural Analysis.* Pergamon Press, Mac Millan, N. Y., 1964.
4. Ramaswamy G. S., Ramaiah M., Ballal B. Y., *Matrix Methods in Structural Analysis.* The Indian Concrete Journal, 1964, 38, *12.*

GENERALIZATIONS IN SOLVING THE STRUCTURES WITH MATRIX OPERATORS

(Summary)

The use of matrices as operators — in the transformation of vector spaces — leads to a general approach of the stiffnes method.

The consideration of the actual constraint degree at the supports and the consideration of elastic springs in the direction of the co-ordinates where do not act external loads, allows an unitary treatment of the problem.

Eliminating the unknowns corresponding to the elastic supports (11)...(13), the basic unknowns — displacements at the external forces co-ordinates — are directly expressed in terms of the known actions (16). Particularizing the last relation (17) and (18) are obtained. (They are deduced independently in [1] and [2]).

The graph drawn up for linear transformations enables to catch easily all kinds of loadings (external forces, support yieldings, temperature, lack of fit, etc.).

The numerical example (fig. 2) points out the advantages of the proposed procedure.

All operations involved in the solving being of matricial form, they are easily performed by computers.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V: CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. D. 624.1; 518

FONDATIONS SUR PIEUX AVEC DALLE ÉLASTIQUE

PAR

N. UNGUREANU

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. On présente ci-dessous l'analyse des fondations de type dalle qui s'appuie sur une série de pieux verticaux; les pieux sont identiques et situés à des distances égales.

La dalle est de forme rectangulaire et on suppose que les appuis sont ponctuels, en considérant les pieux articulés à la dalle. Les longueurs des pieux sont assez grandes, en les pouvant considérer comme appuis élastiques pour la dalle.

La résolution du problème implique l'intégration de l'équation différentielle de la dalle déformée:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}, \tag{1}$$

qui, pour le cas considéré, présente de grandes difficultés.

Dans cette situation, la solution fournie par le calcul numérique est tout à fait utile compte tenu que les calculateurs électroniques modernes permettent la résolution d'un grand nombre d'équations algébriques. À cet égard on emploie, par exemple la méthode des différences finies.

2. Soit une dalle appuyée sur pieux (fig. 1) chargée d'un système quelconque de forces. On trace sur la dalle un réseau orthogonal, ayant des intervalles égaux dans les deux directions. Ce réseau contient les pieux dans ses noeuds.

Nous désignons les flèches des noeuds du réseau avec deux indices (fig. 1), le premier indiquant la ligne et la second, la colonne.

L'équation différentielle, écrite en différences finies, est de la forme:

$$20\,w_{ik} - 8(w_{i-1,k} + w_{i+1,k} + w_{i,k-1} + w_{i,k+1}) + 2(w_{i-1,k-1} + w_{i-1,k+1} + \\ + w_{i+1,k-1} + w_{i+1,k+1}) + w_{i,k-2} + w_{i,k+2} + w_{i-2,k} + w_{i+2,k} = \frac{p_{ik}\lambda^4}{D}, \tag{2}$$

où λ est l'intervalle du réseau et $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ — la rigidité cylindrique de la dalle, E — le module d'élasticité de la dalle, h — l'épaisseur de la dalle, μ — le coefficient de Poisson.

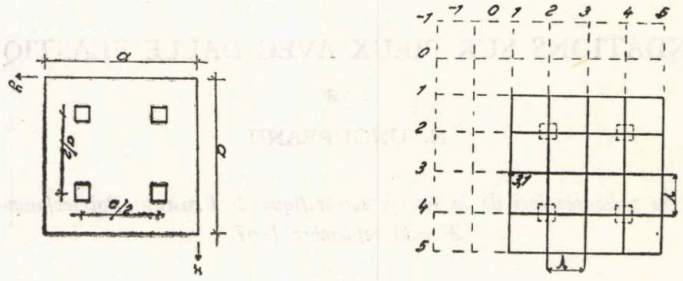


Fig. 1

La dalle ayant le bord libre, le nombre d'équations qui en résulte est égal au nombre des noeuds intérieurs du réseau tracé sur la dalle, au quel on ajoute le nombre des points du réseau situés sur le bord de la dalle.

La difficulté de résolution croît par rapport à la dalle appuyée ou encastrée sur le bord, dû à l'augmentation du nombre d'équations et aussi aux conditions à la limite plus compliquées.

Dans le système d'équations (2) il y a des points qui se trouvent en dehors du bord; les flèches de ces points s'expriment à l'aide des conditions à la limite.

Pour le bord libre ces conditions s'écrivent:

$$M_n = 0, \quad T_n^* = 0 \tag{3}$$

où

$$M_n = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right), \tag{4}$$

$$T_n^* = T_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial n\,\partial t^2}\right].$$

L'indice n indique la normale du bord et t la tangente.

3. On écrit la première condition à la limite dans le point 3,1 (fig. 1):

$$(M_x)_{3,1} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{3,1} = 0,$$

ou en différences finies,

$$(M_x)_{3,1} = -D\left(\frac{w_{3,0} - 2w_{3,1} + w_{3,2}}{\lambda^2} + \mu\frac{w_{2,1} - 2w_{3,1} + w_{4,1}}{\lambda^2}\right) = 0,$$

d'où il en résulte:

$$w_{3,0} = 2w_{3,1}(1 + \mu) - w_{3,2} - \mu(w_{2,1} + w_{4,1}).$$

Pour la dalle de béton armé on peut prendre $\mu = 0{,}2$, et alors :

$$w_{3,0} = 2{,}4w_{3,1} - w_{3,2} - 0{,}2(w_{2,1} + w_{4,1}).$$

On peut présenter cette condition à la limite sur un schéma simple comme celui de la fig. 2:

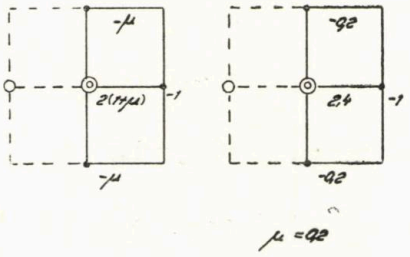


Fig. 2

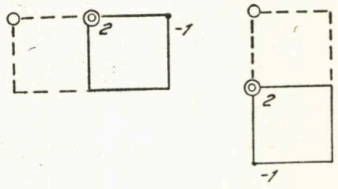


Fig. 3

Cette condition est modifiée pour le coin (par exemple dans le point 1,1) comme il suit:

$$(M_x)_{1,1} = 0, \quad w_{1,0} = 2w_{1,1} - w_{1,2}; \quad (M_y)_{1,1} = 0, \quad w_{0,1} = 2w_{1,1} - w_{2,1}.$$

Elle est présentée, sous une forme schématique, dans la fig. 3.

La seconde condition à la limite, écrite dans le point 3,1, conduit à l'expression:

$$w_{3,-1} = 2(3 - \mu)w_{3,0} - 2(3 - \mu)w_{3,2} + w_{3,3} + (2 - \mu)(w_{2,2} - w_{2,0} - w_{4,0} + w_{4,2}).$$

Pour la dalle de béton armé, avec $\mu = 0{,}2$ on obtient:

$$w_{3,-1} = 5{,}6w_{3,0} - 5{,}6w_{3,2} + w_{3,3} + 1{,}8(w_{2,2} - w_{2,0} - w_{4,0} + w_{4,2}).$$

Les schémas pour les dernières rélations sont donnés dans la fig. 4.

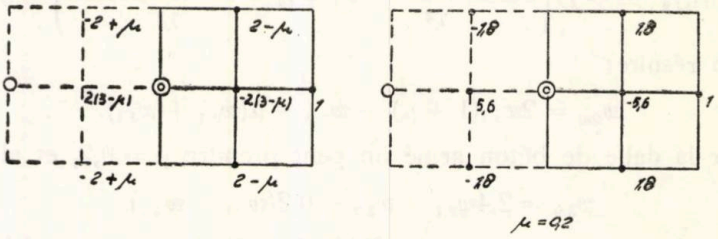
Si l'on tient compte de la première condition à la limite, alors, pour le cas $\mu = 0{,}2$, on aura le schéma de la fig. 5.

Pour les points se trouvant immédiatement près des coins, le schéma ci-dessus se modifie comme il suit de la fig. 6.

Les autres conditions à la limite pour les coins sont:

$$M_{nt} = 0, \quad T_n^* = 0, \tag{5}$$

T_n^* étant considéré pour les deux directions; on présente dans ce cas seulement les schémas correspondants (fig. 7).



Flg. 4

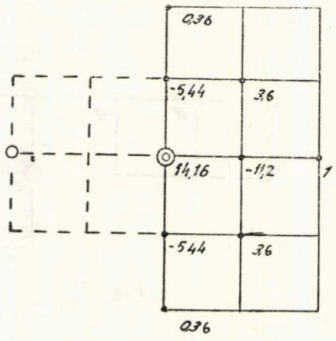


Fig. 5

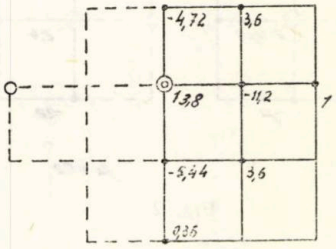


Fig. 6

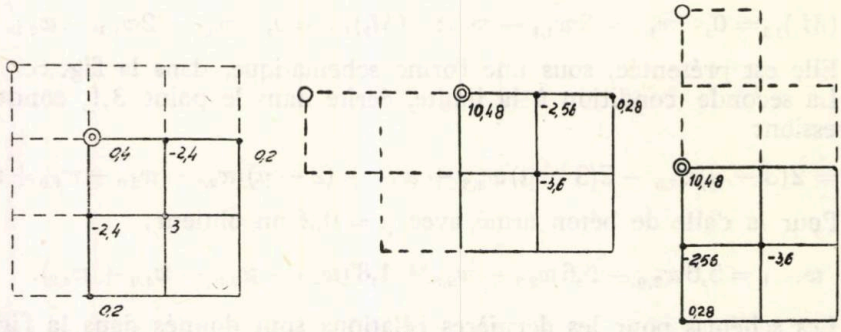


Fig. 7

4. Les forces qui se manifestent dans les pieux sont proportionelles aux déplacements de leurs têtes, et donc, aux flèches de la dalle dans leur points d'articulation. Pour le pieu i, k on a

(6) $$y_{ik} = \rho_N w_{ik},$$

où ρ_N représente la force du pieu pour un déplacement unitaire, en le déterminant à l'aide de la relation:

$$\rho_N = \frac{E_p A}{sL}, \tag{7}$$

avec E_p — le module d'elasticité du pieu, A — l'aire de la section transversale du pieu, L — la longueur du pieu, s — coefficient sans dimensions, qui est déterminé par voie expérimentale. Pour les pieux ayant les sommets dans un sol résistant on peut prendre $s = 1$.

Les forces des pieux y_{ik}, ayant les signes changés, sont considérées des actions pour la dalle, de sorte qu'elles s'introduisent dans le système d'équations aux différences finies (2) comme des forces extérieures:

$$20\, w_{ik} - 8 \sum_{\substack{i,k-1 \\ i,k+1 \\ i-1,k \\ i+1,k}} w + 2 \sum_{\substack{i-1,k-1 \\ i-1,k+1 \\ i+1,k-1 \\ i+1,k+1}} w + \sum_{\substack{i,k-2 \\ i,k+2 \\ i-2,k \\ i+2,k}} w = \frac{p_{ik}\lambda^4}{D} - \frac{y_{ik}\lambda^2}{D}. \tag{8}$$

Tenant compte de la relation (6) on élimine les forces des pieux en obtenant par cette voie un système d'équations ayant comme inconnues les flèches de la dalle dans les noeuds du réseau, tracé sur sa surface.

Dans les noeuds du réseau sans pieux, les équations s'ecrivent sous la forme (2), tandis que dans les noeuds avec pieux elles s'écrivent comme il suit:

$$\left(20 + \frac{\rho_N \lambda^2}{D}\right) w_{ik} - 8 \sum_{\substack{i,k-1 \\ i,k+1 \\ i-1,k \\ i+1,k}} w + 2 \sum_{\substack{i-1,k-1 \\ i-1,k+1 \\ i+1,k-1 \\ i+1,k+1}} w + \sum_{\substack{i,k-2 \\ i,k+2 \\ i-2,k \\ i+2,k}} w = \frac{p_{ik}\lambda^4}{D}. \tag{9}$$

Le système d'équations ainsi obtenu est résolu par un procédé itératif, ou par relaxation, en déterminant les flèches de la dalle dans les noeuds du réseau.

Si l'on connaît les flèches on peut déterminer les moments de flexion, les moments de torsion et les efforts tranchants.

Avec la relation (6) on détermine les forces des pieux.

Si le nombre des pieux est grand et le réseau est choisi tel que dans tous les noeuds il y ait des pieux, alors toutes les équations seront écrites sous la forme (9).

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Statique et Résistance
des Matériaux

BIBLIOGRAPHIE

1. Salvadori M. G., *Métodos numéricos aplicados à engenharia.* Belo Horizonte, Brasil, 1956.
2. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells.* Mc. Graw-Hill, Book Company Inc., New York-Toronto-London, 1959.

FUNDAŢII PE PILOŢI CU DALĂ ELASTICĂ

(Rezumat)

Se prezintă un procedeu de calcul al plăcilor rezemate punctual şi cu reazemele elastice, întîlnite la fundaţii pe piloţi.

Integrarea ecuaţiei diferenţiale a plăcii deformate prezentînd dificultăţi, s-a adoptat procedeul numeric de rezolvare folosind ecuaţiile cu diferenţe finite.

Forţele din piloţi se introduc în calcul în acelaşi mod ca şi sarcinile exterioare care încarcă placa radierului.

Forţele din piloţi fiind proporţionale cu deplasările capetelor lor, sînt totodată proporţionale şi cu săgeţile plăcii din punctele de articulaţie ale piloţilor. Această condiţie permite eliminarea forţelor din piloţi, din ecuaţiile cu diferenţe finite.

Se indică pentru calcul procedee de relaxare, iar pentru o reţea deasă, calculatoare electronice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

D. K. 534,8 ; 624

ZUR VERBESSERUNG DER HÖRSAMKEIT EINER VORTRAGSSAAL

VON

VIRGIL FOCŞA, MICA POPPEL, LEOPOLD BIBOROSCH und AL. VEREŞ

1. Vorwort

Bei der akustischen Untersuchung von grösseren Räumen für Sprachdarbietung macht man oft die Erfahrung das die tatsächlich erreichte Horverhältnisse ungenügend sind. Dieser Fall liegt auch bei einer Vortragssaal der Fakultät für Bauwesen aus Jassy vor. Es hat sich also die Frage gestellt, ob durch die Regelung der Nachhallzeit und durch die Senkung des Störspiegels eine bessere Hörsamkeit im Raum zu erreichen war. Ihre Beantwortung sezt aber zunächst eine genauere Kenntnis der Silbenverständlichkeit und der Nachhallzeit in der Vortragssaal voraus.

2. Messung der Silbenverständlichkeit

Die Silbenverständlichkeit, eine der wichtigsten Kennzeichen, insbesondere für die Akustik von Vortragssälen, kann bestimmt werden, indem man die Gleichung :

$$S = 100\ [1-(1-VK^2)^{0,9}]\quad [\%],$$

mit VK — der Hundersatz, richtig verstandenen Vokalen und Konsonanten oder die in Abb. 1 dargestellte Diagramm verwendet. Eine genauere Wiedergabe der mindestens hundert zusammenhanglose Silben, mit einer Lautstärke und Sprechgeschwindigkeit, die gleich der Sprache des Vorlesers sein soll, konnte leicht über einen Tonbandgerät erzeugt werden. Man erhält somit, für der übliche Besetzung der

Vortragssaal (vgl. Abb. 2) Silbenverständlichkeitswerten die zwischen 40...85% liegen und deren Verteilung im untersuchten Raum aus der Tabelle 1 ersichtlich ist. Ein geringerer Besetzungsgrad (22 Personen) bewirkt eine Silbenverständlichkeitserhöhung, d. h. von 60% bis 90%.

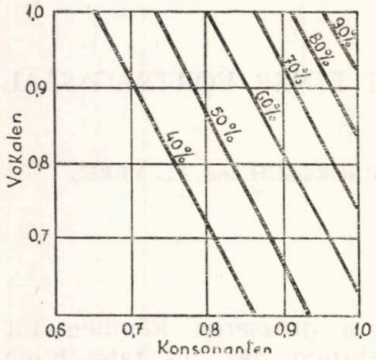


Abb. 1. — Berechnungskurven für die Silbenverständlichkeit *S*.

Tabelle 1

Verteilung der Silbenverständlichkeit in dem besetzten und nicht ausgestattetem Vortragssaal

Personen zahl	Personen-zahl %	Silben-verständlich-keit *S* %
1	1,1	40
1	1,1	45
2	2,2	50
1	1,1	55
10	11,1	60
17	18,8	65
14	15,5	70
22	24,4	75
15	18,4	80
5	5,5	85

Im allgemeinen kann aus der Fachliteratur [1], [2] der folgende Zusammenhang zwischen die Silbenverständlichkeit und die Verständlichkeit entnohmen werden (der allerdings nur für leere Räume gültig ist) : a) $96\% < S$—ausgezeichnete Verständlichkeit, b) $85\% < S < 96\%$—sehr gute Verständlichkeit, c) $75\% < S < 85\%$—zufriedenstellende Verständlichkeit, d) $65\% < S < 75\%$—ermüdende Verständlichkeit, e) $S < 65\%$ schlechte Verständlichkeit.

Weiter ist zu berücksichtigen, dass die Silbenverständlichkeit mit der am Ohr des Zuhörers vorhandenen Lautstärke der Sprache steigt und mit dem Störspiegel sinkt.

Weil die Silbenverständlichkeit auch mit der Nachhallzeit und Raumgrösse sinkt, so müssen besondere Anforderungen an die von der Raumform praktisch unabhängige Nachhallzeit gestellt werden.

3. Nachhallmessungen

Der untersuchte Raum welcher hauptsächlich als Vortragssaal geplant wurde, fast bei einem Volumen von etwa 1 000 m³ maximal 148 Zuhörer.

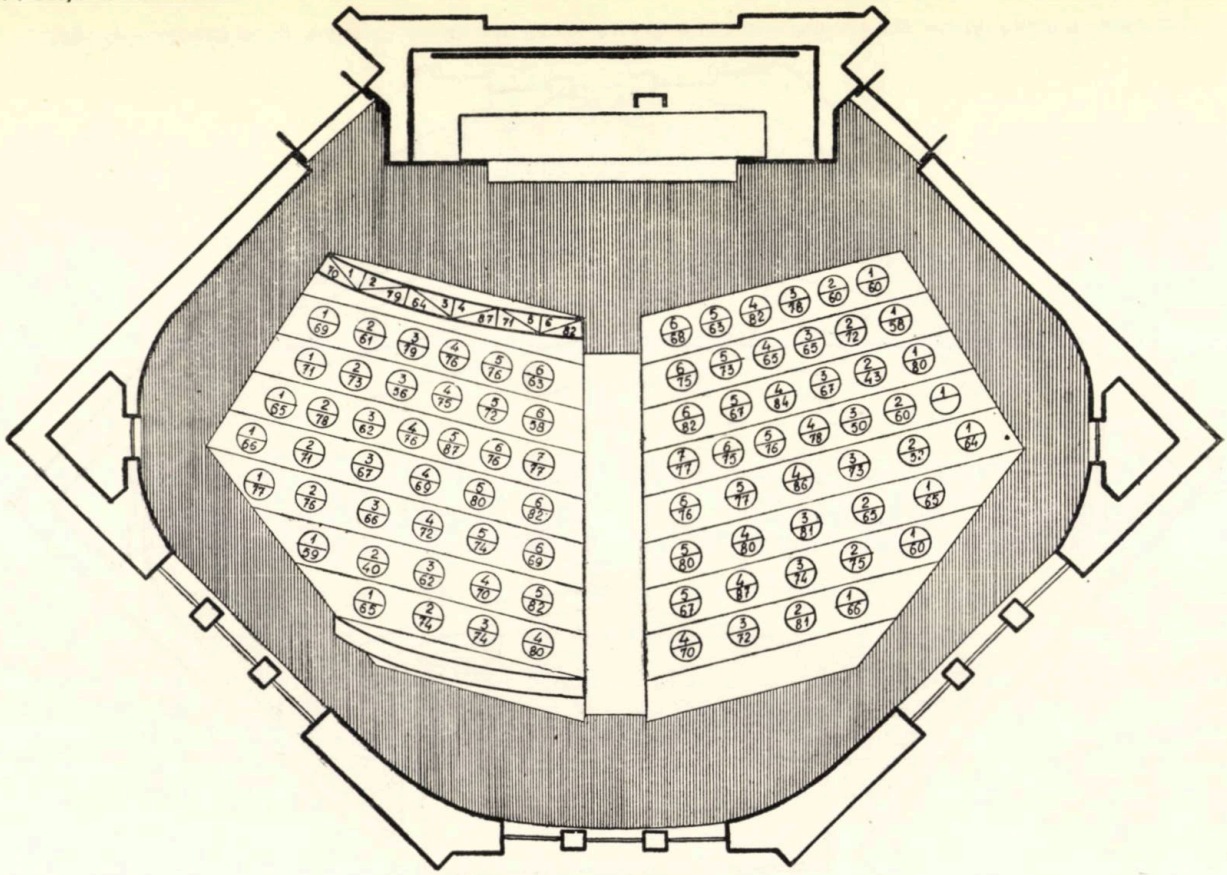


Abb. 2. — Grundriss des Vortragssaales C_1 bei üblicher Besetzung.

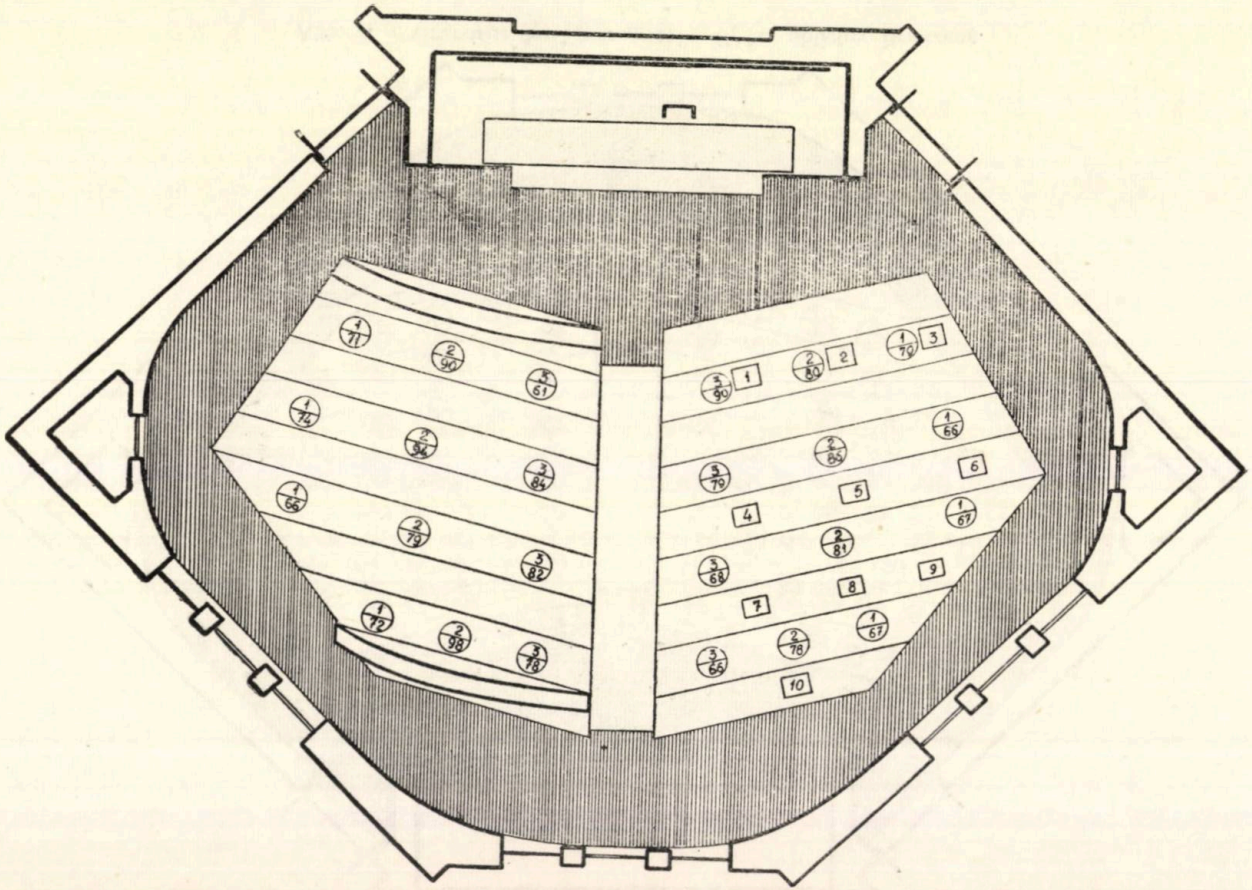


Abb. 3. — Grundriss des Saales C_1 bei kleiner Bezetzungsdichte mit den Punkten für die Nachhallzeitmessungen.

Wegen die geringen Schallschluckflächen (äquivalente Absorbtionsfläche) im unausgestatteten Zustand, die in Tabelle 2 zussammen mit denen für einen ausgestattaten Zustand verzeichnet sind, beträgt die gemessene Nachhallzeit etwa 2 Sek (für mittlere Frequenzen), während die Vorausberechnung auf eine Nachhallzeit von 2,4 Sek führte.

Tabelle 2

Werte der Schallschluckflächen bei verschiedenen Frequenzen

Frequenz Hz	Schallschluckgrad α für Sillanplatten	Schallschluckgrad α der ausgestatteten Raumbegrenzung	Schallschluckflächen (A) in unausgestattetem Zustand	Schallschluckflächen (A) in ausgestattetem Zustand
125	0,18	0,07	67,5	79,8
250	0,44	0,17	68,5	98
500	0,79	0,32	72,5	125,5
1 000	1,03	0,39	76	142,5
2 000	1,03	0,39	76	142,5
4 000	1,17	0,44	76	149

Kann man aus den Schallschlucksgraden der Teilflächen, die gesamte Schallschluckfläche A berechnen, dann ergeben sich mit der S a b i nsche Gleichung die vorberechneten Nachhallzeiten.

Für die Nachhallmessungen wurde der Raum mit einem Knall angeregt; die Ausgangsspannung des in verschiedenen Messpunkten (Abb. 3), befindlichen Mikrofons wurde auf Magnetband aufgezeichnet.

Zur Auswertung wurde der Nachhall mit einer gleichen Bandgeschwindigkeit abgespielt, mit einen Oktavfilter gefiltert und auf einen Pegelschreiber registriert. Diese Geräteanordnung ist in Abb. 4 dargestellt.

Bei leerem und unausgestattetem Saal ergeben sich gemessene und berechnete Nachhallzeiten die zwischen 1,6 bis 2,3 Sek (Kurve A) undzwischen 2,08 bis 3,52 Sek (Kurve B) liegen. Abb. 5 zeigt, dass die Nachhallzeiten in unausgesttaten Zustand, viel länger sind als die für einer Vortragssall zu empfehlen wären (Kurve D). Man erhält also Werte welche auch den hohen Störspiegel der durch den Ausenlärm und Zuhörerunruhe verursacht wird, erklären.

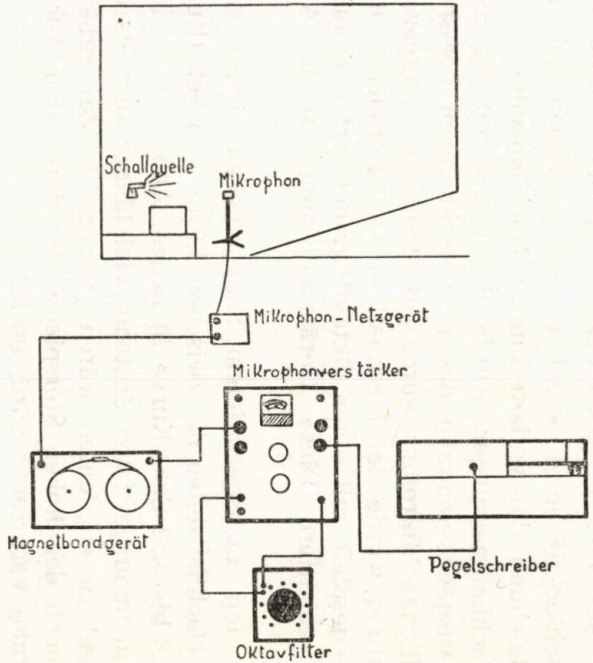


Abb. 4. — Geräteanordnung für Nachallmessungen mit Hilfe von Magnetbandaufnahmen.

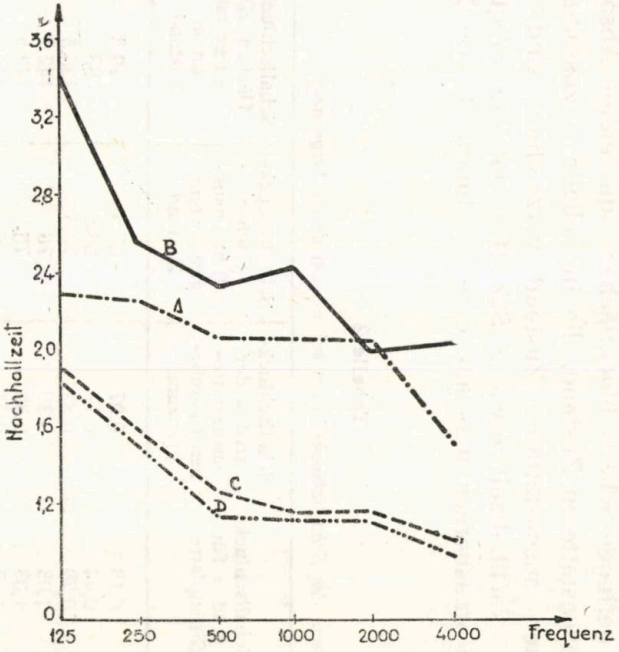


Abb. 5. — Nachhallzeiten des Vortragssaales ohne akustische Austattung (Kurve *A*), experimentelle Werte (Kurve *B*), berechnete Werte mit akustischer Austattung (Kurve *C*) und die Empfehlungswerten (Kurve *D*).

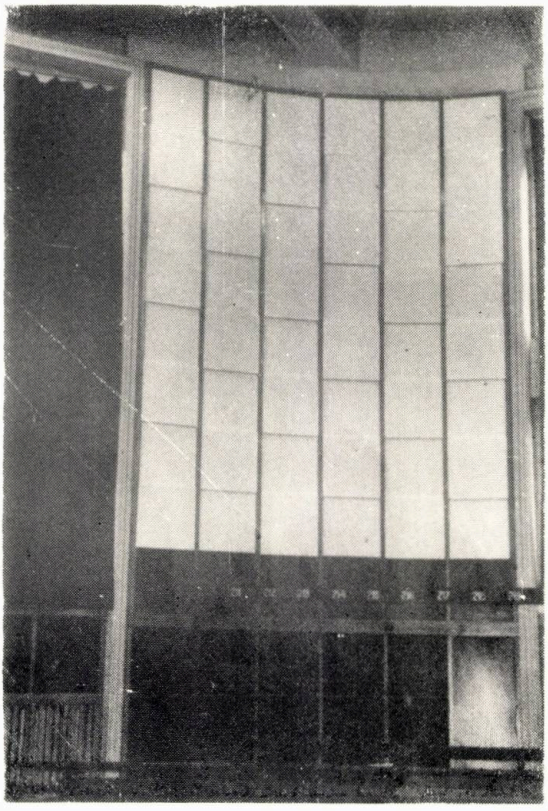


Abb. 6. — Ansicht der Raumflächen die akustisch mit Sillanplatten ausgestattet wurden.

4. Die akustische Austattung

Eine gute Hörsamkeit in einer Saal erfordert ausserdem die Beachtung der bis jetzt nicht betrachteten Raumform.

Wie in Abb. 2 und 3 zu sehen war, bilden in unseren Fall die Seitenwandreflexionen zu einem langen abklingenden Nachhall Anlass ungunstig gelegt sind. Aus allen diesen Berücksichtigungen kann man schliessen das die Seitenwänden, besonders dort wo sie Hohlkrümmungen bilden, mit hochabsorbierenden Material verkleiden muss, was auch eine Nachhallverminderung verursachen wird. Das allein die Seitenwandreflexionen zu einem langen abklingenden Nachhall Anlass geben können, zeigen Messungen, die in manche Arbeiten an Modelräume ohne Decke und Boden ausgeführt wurden [3].

Wir besprechen also den Einfluss gewisser Einbauten auf die Nachhallzeit und Silbenverständlichkeit, nämlich von Sillanplatten von 0,50×0,50 m² die an die Seitenwände angebracht wurden. Da diese Austattung in unteren Raumbereich, bei Vorhandensein der Zuhörer fast unwirksam ist, wurde diese, ganz unten, aus eine einzige Reihe von dauerfestigere, gelochte Hartfaserplatten, ausgeführt.

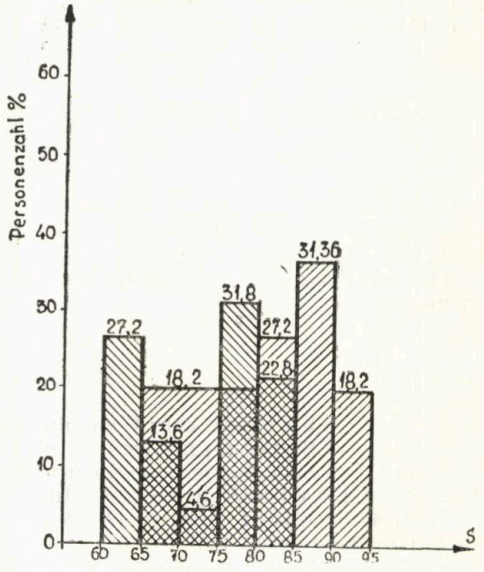


Abb. 7. — Die Silbenverständlichkeit verteilung $S[\%]$ als Funktion der Personenzahl vor und nach der Verkleidung (gestrichelte Diagramm).

Wie in Abb. 6 gezeigt ist sind die schallschluckende Platten, zwecks einer günstigere Richtungsdifusität, etwas besonders angebracht. Diese Einrichtung ist auch architektonisch sehr wertvoll. Die nach der Fertigstellung durchgeführten Nachhallmessungen brachten Werten (Kurve C) welche sehr nahe den Empfehlungswerten zwischen 0,65 und 2,1 Sek stehen. Diese günstigere Nachhallzeiten haben eine sehr gute Silbenverständlichleit von etwa 85% als Folge (s. Abb. 7) und sind von keinerlei subjektiven Nachteilen begleitet.

5. Schlussfolgerungen

Es ist festzustellen, dass die in dieser Vortragssaal der Fakultät für Bauwesen schlechte Silbenverständlichkeit, auf die Ausbildung eines horizontallen Nachhallschallfeldes zurückzuführen ist, das nur langsam abklingt. Grosse Nachteile hat auch die Raumform.

Es zeigt sich, das es grundsätzlich möglich ist, eine gute Silbenverständlichkeit, durch eine zweckmässige akustische Austattung, zu erreichen war.

Eingegangen am 10. III 1969

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Bauwesen

LTERATURVERZEICHNIS

1. Grumăzescu M., *Măsurători acustice în construcţii.* Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1960.
2. Bruckmayer F., *Schalltechnik in Hochbau.* Franz Deutike, Wien, 1962.
3. Kuttruff H., Acustica, 1965/66, **16**, S. 166.

ASUPRA IMBUNĂTĂŢIRII AUDIBILITĂŢII INTR-O SALĂ DE CONFERINŢE

(Rezumat)

În lucrarea prezentă se studiază modalităţile de influenţare a procentului de articulaţie în scopul îmbunătăţirii audibilităţii într-un amfiteatru de dimensiuni mari de la facultatea de construcţii. Pe baza unor măsurători ale duratei de reverberaţie şi ale procentului de articulaţie în sala netratată acustic se propun măsuri de ameliorare.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Curbe de calcul ale procentului de articulaţie S [%].
Fig. 2. — Secţiune prin amfiteatrul C_1 la un grad de ocupare obişnuit.
Fig. 3. — Secţiune prin amfiteatrul C_1 la un grad mic de ocupare cu punctele de măsură ale duratei de reverberaţie.
Fig 4. — Schema bloc a aparaturii experimentale folosite pentru măsurarea duratei de reverberaţie.
Fig. 5. — Durata de reverberaţie în amfiteatrul C_1 înainte de tratament: curba A — valori experimentale, curba B — valori calculate, curba C — valori pentru o tratare acustică, curba D — valorile recomandate.
Fig. 6. — Vedere de ansamblu a suprafeţelor tratate acustic cu plăci de Sillan.
Fig. 7. — Procentul de articulaţie S [%] funcţie de gradul de ocupare înainte şi după tratament (diagrama haşurată).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

D. K. 691.328-2 ; 624

INDUSTRIALISIERUNG DER GRUNDBAUTEN

VON

ANATOLIE MIHUL

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

1. Vorwort

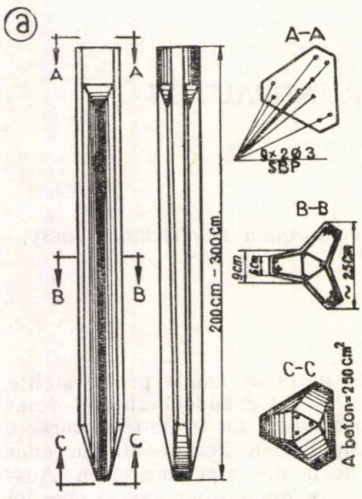
Indem man die Entwicklungsart der Bauwerke in unserem Lande prüfte stellte man bedeutende Erfolge im Industrialisierungsprozess des Gebäudeüberbaues fest : eine grosse Zahl Wohn- und Industriebaustellen ist Montageplatz für in Betriebswerken, Fabriken, Werkstätten sowie auf Arbeistsständen ausgeführten Fertigbauteilen oder Fertigbauteiluntergruppen geworden. Dazu kommen noch die mechanisierten Ausführungssysteme, unmittelbar auf den Baustellen, wie Betoneinbringungssysteme in Gleitschalungen und Raumschalungen.

Nicht dasselbe fand man bei den Ausführungsarbeiten der Grundbauten, welche noch gemäss traditionellen Verfahren, aus bewehrten oder unbewehrten, im Freien eingebrachten Monolithbeton, durchgerführt sind. Dieses Zurückbleiben der Fundamentenausführung, welchen mit einem bedeutenswerten Gewicht in die Gesamtarbeiten eines Bauwerkes eintreten, führt zu einer Verlängerung der Ausführungsdauer (so wird die Investitionseffizienz vermindert), ermässigt die Arbeitsleistung und, im allgemeinen, wirkt genau wie eine bedeutende Bremse über die Bauentwicklung in unserem Lande. So, zum Beispiel, beträgt die Ausführung eines Fundaments etwa 20...40% der nötigen Errichtungszeit des ganzen Gebäudes, obwohl die Kosten des unterirdschen Teiles, durchschnittlich nur 6...15% des Gesamtpreises darstellen und der verwendete Arbeitsleistungsumfang für Grundbau nur etwa 30% von dem Ganzen beträgt.

Um diese Fehler aus dem Bausektor zu beseitigen, nahm sich der Lehrstuhl für Stahlbetonbau an der Technischen Hochschule, Jassy, unter Mitwirkung einiger Baubetriebe und Entwurfsinstitute aus Moldova (TRC und DSAPC Bacău und Jassy) vor, sich in seinem Forschungsplan für die wissenschafliche Organisierung der Produktion, mit dem Studium einiger Stahlbetongrundbautensysteme zu befassen, welche dieses Problem beim Niveau der aktuellen Industrialisierungsbedürfnisse und Mechanisierung der Nullzyklusarbeiten lösen könnten.

Von den studierten Systemen, die in der Praxis verwirklicht wurden, vermerken wir folgende : a) Pfahlgründungssysteme, b) kontinuerliche Grundbalkensysteme, c) Einzelfundamentesysteme.

Sie wurden zur Herstellung der Zivil- und Industriebauten und landwirtschaflichen Bauten verwendet, und erlauben die zwei wichtigen Fragen welche die moderne Herstellung der Bauausführung stellte: 1° Industrialisierung des Nullzyklus, 2° Verminderung der Differenzialsetzungen (besonders für die Gründungsgruppen a) und b), in besonders vorteilhaften Bedingungen zu lösen.



Von den zur Zeit angewandten Grundbausystemen, die Neuigkeitselemente in diesem Bausektor bringen, heben wir folgende hervor.

2. Pfahlgründungssyteme

a) *Die kurzen vorgespannten Pfähle mit sternförmigem Querschnitt* [1]) (Abb. 1) die bei einem Lagerbau von TRC, Bacău, verwendet wurden, charakterisieren sich durch eine zweckmässige Verteilung des Betons und der Bewehrung, was, wie sich aus dem Experiments ergab, zu einem zusätzlichen Zuwachs der Tragfähigkeit im Verhältniss von rund um 35% gegenüber der bei den üblichen Pfählen, mit quadrat-

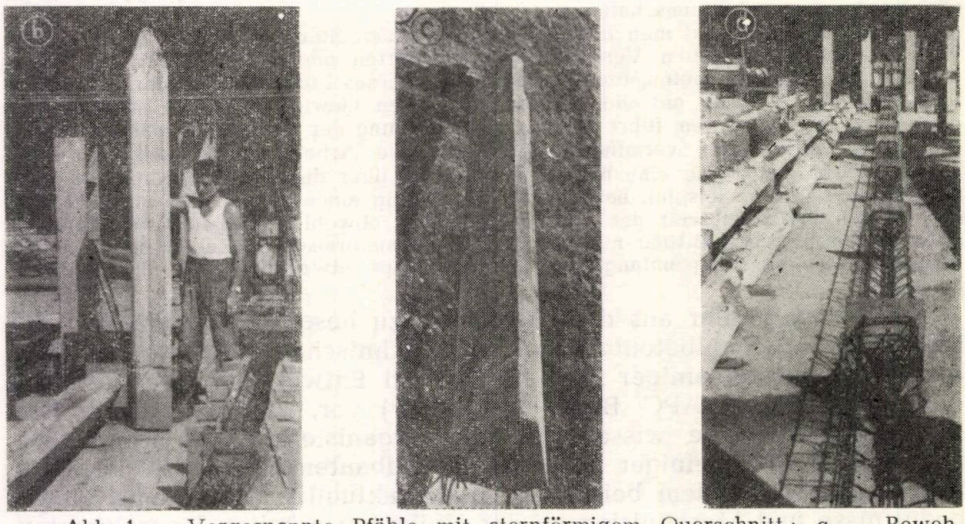


Abb. 1. — Vorgespannte Pfähle mit sternförmigem Querschnitt: *a* — Bewehrungsdetail für die 2,20 m langen Pfähle, *b* — Anblick, 2,20 m lange Pfähle, *c* — 3,60 m lange Pfähle, *d* — Ausführung der Pfähle.

[1]) Kollaborierten Ing. A. Cuciureanu, Şt. Enescu und Victor Gherman.

oder kreisförmigem Querschnitt, in denselben Bedingungen, führte. Die longitudinale Vorspannung versichert zugleich besonders vortreffliche Bedingungen für Transport, Handhabung, Einbauen mit Hilfe der Vibroramme, sowie neue Möglichkeiten für die Übernehmung der Horizontalkräfte oder der aus Erdbeben und Windwirkung entstandenen Zugbeanspruchungen. Der Kopf der sternförmigen Pfähle ist beim Übergang von dem sternförmigen zu dem polygonalförmigen Querschnitt ausgeweitet; dadurch versicherte man ein gutes Verhalten des Pfahles beim Einstecken, vortreffliche Bedingungen für die Verbin-

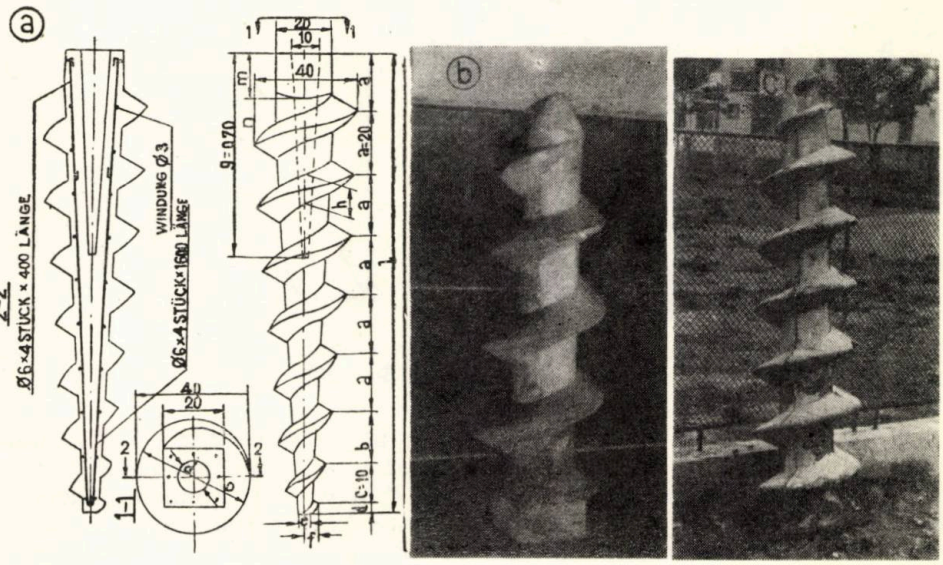


Abb. 2. — Schraubenpfähle: *a* — Ausführungsdetail der 1,60 m langen Pfähle, *b* — Anblick — 80 cm lange Pfähle mit einem Gewicht von 75 Kg, *c* — Anblick — 1,60 m lange Pfähle mit einem Gewicht von 120 Kg.

dung mit dem Bauwerk sowie, in manchen Fällen, eine Zunahme der Pfahltragfähigkeit (von etwa 20% für die kurzen Pfällen (2,5 m) mit einer Tragfähigkeit von rund 6,5 t). Für die 2,5 m langen Pfähle entstand ein SBP-Stahlverbrauch von 2,48 kg/Pfahl, ein OL 38-Stahlverbrauch von 4,42 Kg/Pfahl und ein Betonverbrauch von 0,064 m^3 per Pfahl, aus welchen die Stahlersparniss hervorgeht.

Aus den praktischen Ergebnissen die beim Einstecken mittels Vibrorammen der 2,5 m langen sternförmigen Pfähle gesammelt wurden, stellte man die nötige Einsteckungsdauer fest, die etwa 30...50 Sek beträgt.

b) *Kegelförmige Schraubenpfähle* (Abb. 2) aus Stahlbeton hergestellt. Sie haben ein Gewicht von Maximum 115 Kg bei einer Länge von

1,8 m und einer Tragfähigkeit von rund 6.5 t, wie es sich aus den Versuche ergiebt (Abb. 3). Der Hauptkörper auf welchen sich die Windungen entwickeln ergiebt eine gute Verbindung zwischen der Gründung und dem Oberbau und sichert gleichfalls eine Eigengewichtsverminderung de Pfähle.

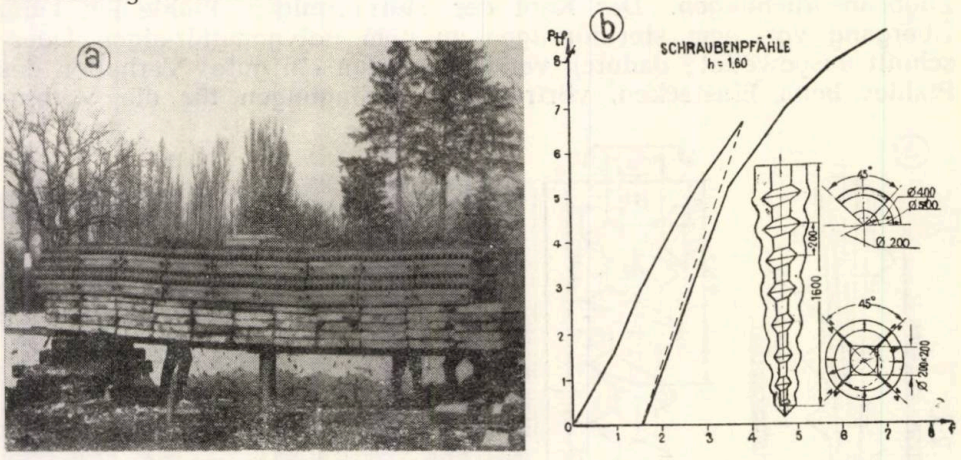


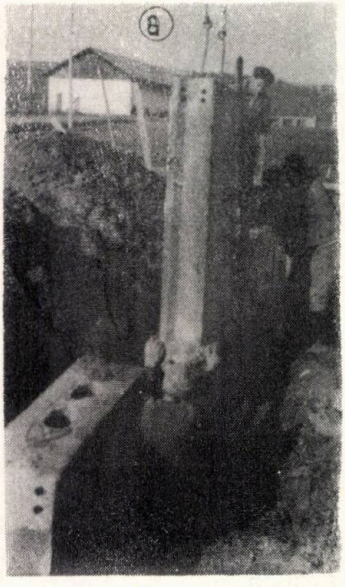
Abb. 3. — Versuch von Schraubenpfähle : *a* — Anblick während des Versuches, *b* — Versuchsergebnisse bei einem Pfahl in lehmstaubigem Boden.

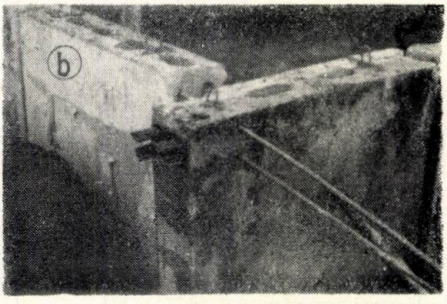
Bemerkenswert dass solche Pfähle, nach Bedürfniss, durch Handmittel (die Hebelschraube Abb. 4 a) oder durch mechanischen Antrieb eingeschraubt und ausgeschraubt (Abb. 4 b) werden können, indem sie gänzlich rückgewonnen werden. Durch ihre Anwendung erhielt man eine Verminderung des Betonverbrauches von etwa 90% im Vergleich zu den laufenden Lösungen, versicherte man die Industrialisierung der Grundbauausführung für jedes Bauwerk, löste man das Herstellungsproblem der provisorischen und der zerlegbaren Bauten, so dass auf diesem Weg die Grundbauten gänzlich wiedergewonnen werden können.

Das obige System ist besonders vorteilhaft für die Ausführung der landwirtschaftlichen Bauten infolge der bequemen Transportmöglichkeit und leichten Handhabung (ihr Gewicht ist vergleichmässig klein) ; in der ersten Versuchsphase wurde das System beim Bau einiger Tierkrankenbehandlungsstellen in Popeşti — Bezirk Jassy, verwendet.

c) *Die kurzen Stahlbetonpfähle mit quadratförmigem Querschnitt*, mit mittlerem Hohlraum (Abb. 5), wurden von TRC, Bacău, verwendet diese Pfähle charakterisieren sich durch eine rationelle Verteilung des Betons. Ihre Ausführung ist durch eine einfache Technologie gekennzeichnet, welche von jeder Werkstatt oder Vorfertigungspunkt organisiert werden kann. Die Beseitigung des Materials aus der mittleren Zone führt zu der Erzielung leichter Elemente, mit derselben Tragfähig-

Abb. 4. — Manuale Einsteckung der Schraubenpfähle im Boden: *a* — Einschrauben, *b* — Ausschrauben um die Schraubenwiedergewinnung.





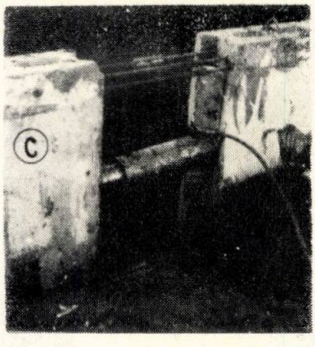


Abb. 6. — Anblick über die Ausführung der Grundbauten aus vorgefertigten Hohlgrossplatten: *a* — Montieren der Platten im Boden, *b* — Einführung der Bewehrung für das Vorspannen, *c* — Vorspannung der Bewehrungen

keit wie die der vollwandigen Pfähle die in den Bauwerken laufend angewandt.

Die Ausführung des Zentralhohlraumes erhielt man mittels einer Metallröhre die zu Ende des Betonsrüttelns herausgezogen wurde (genau wie bei der Ausführung der hohlräumigen Platten).

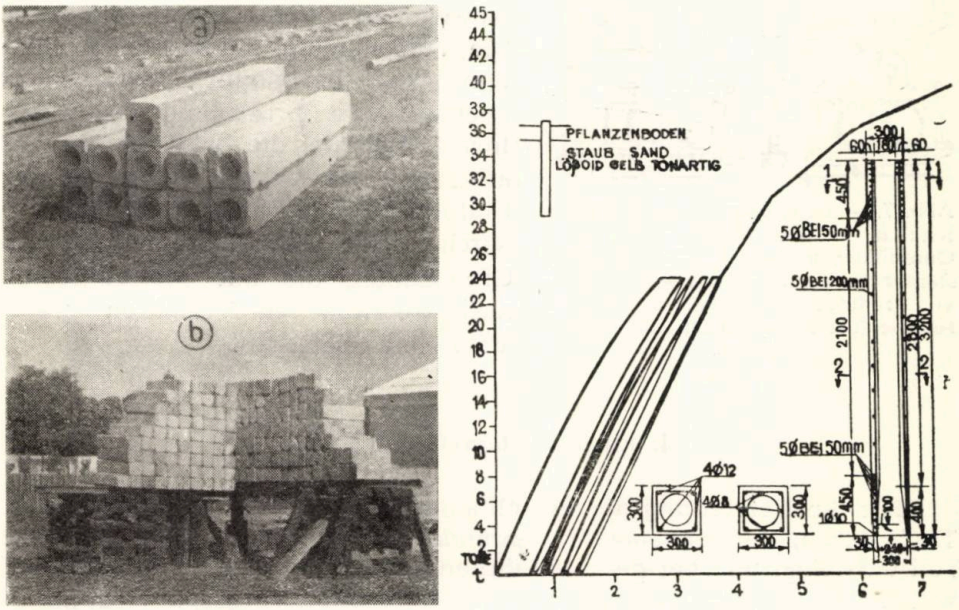


Abb. 5. — Pfähle mit mittleren Höhle : *a* — Aussehen der Pfähle auf der Arbeitsstelle, Stivelartig gelegt oder festgestampft, *b* — Anblick während des Versuches, *c* — experimentelle Ergebnisse.

3. Kontinuerliche Grundbalkensysteme

Ein anderes vorgefertigtes Grundbausystem das studiert und in der Praxis verwendet wurde bilden die kontinuerlichen Grundbalken aus Grossplatten die mit Quer-, Längs- und Vertikalhohlräumen versehen, und durch Vorspannung verbunden sind (Abb. 6). Dieses System wurde bei der Ausführung einiger Lagerbauten auf Baustellen in der Stadt Roman experimentiert ; es hob die Möglichkeit einer industriellen Herstellung von Grundwerken die aus Grossplattengrundbalken zusammengesetzt sind hervor. Bei solchen Grundbausystemen gibt es kein Differenzialsetzungsproblem, was im allgemeinen ein Hinderniss betreffs der Vorfertigungsanwendung im Grundbau bildet.

Das Vorhandensein der Hohlräume in den wenig beanspruchten Zonen sichert eine rationelle Verwendung der Materialien betreffs zu

den traditionellen Grundbauten dergleichen Form die man heutzutage in der Praxis, in unserem Lande anwendet, was zu einer grossmässigen Verminderung des Betonsverbrauchs (bis 50%), zugleich mit dem des Eigengewichtes führt (Abb. 7). Die Höchstverminderung des Betonsverbrauchs erhielt man im Falle der Anwendung von Querhohlräumen. Die Vorspannung, indem sie den Plattenverbund bestmöglich löst, sichert ebenfalls die Erreichung kontinuierlicher Bauteile die wie ein Ganzes arbeiten. Das erlaubt eine bessere Uniformisierung der Setzung und dadurch ist die dargestellte Lösung den Grundbauten die aus Monolithbeton nach traditionellen Verfahren ausgeführt sind überlegen.

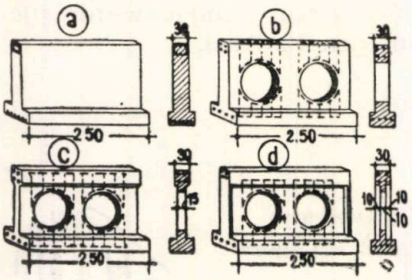


Abb. 7. — Grossplatten mit Querhöhlen: *a* — ohne Höhle, *b* — mit Querhöhlen mit einem Kern von konstanter Dicke, *c* — mit einem Kern von reduzierter Dicke, *d* — mit reduziertem Kern (10 cm) und Querhöhlen.

4. Einzelfundamentensysteme

Für die Herstellung der Einzelfundamente wurden bis jetzt die von TRC, Bacău, verwendeten Hülsenfundamente (die aus einem einzigen Teil entstehen und bei der Ausführung der Höhlengruppen angewendet wurden) sowie die hyparförmigen Fundamente mit vorgespanntem Basisring) mittels ungeteilter Ringe entworfen und experimentiert unter Mitwirkung des DSAPC [2]) und TRC, Iaşi [3]), verarbeitet (Abb. 8). Beim Bau dieser Gründungstypen verfolgte man drei grundsätzliche Elemente: Verminderung der Betonmenge beim Grundbau durch eine rationelle Stoffanordnung und durch Vorspannen, um das Eigengewicht zu reduzieren (besonders wichtig für Industrialisierungserfolg), Festigkeitserhöhung beim Transport und Handhabung sowie die Erzielung von Glockenformen deren Wirkung bei den wenig gebundenen Böden bekannt ist. Das erste und das dritte Erforderniss wurden durch Annahme einer räumlichen, aus vier symetrischen Hypars bestehenden Form erhalten; indem sie zugleich geregelte Flächen sind (erhalten zwei Familien gerader Erzeugenden), sichern sie besonders vorteilhafte Ausführungsbedingungen (Schalungs-und Bewehrungsanordnung). Die zweite Bedingung wurde durch Vorspannen — nach einem originelen

[2]) Der Entwurf wurde von Ing. C. Mihai, Ing. O. Banu und V. Aur verarbeitet.
[3]) Ausgeführt am Stande des Lehrstuhles für Stahlbeton unter der Leitung der Ing. Şt. Enescu und Ing. Al. Popovici.

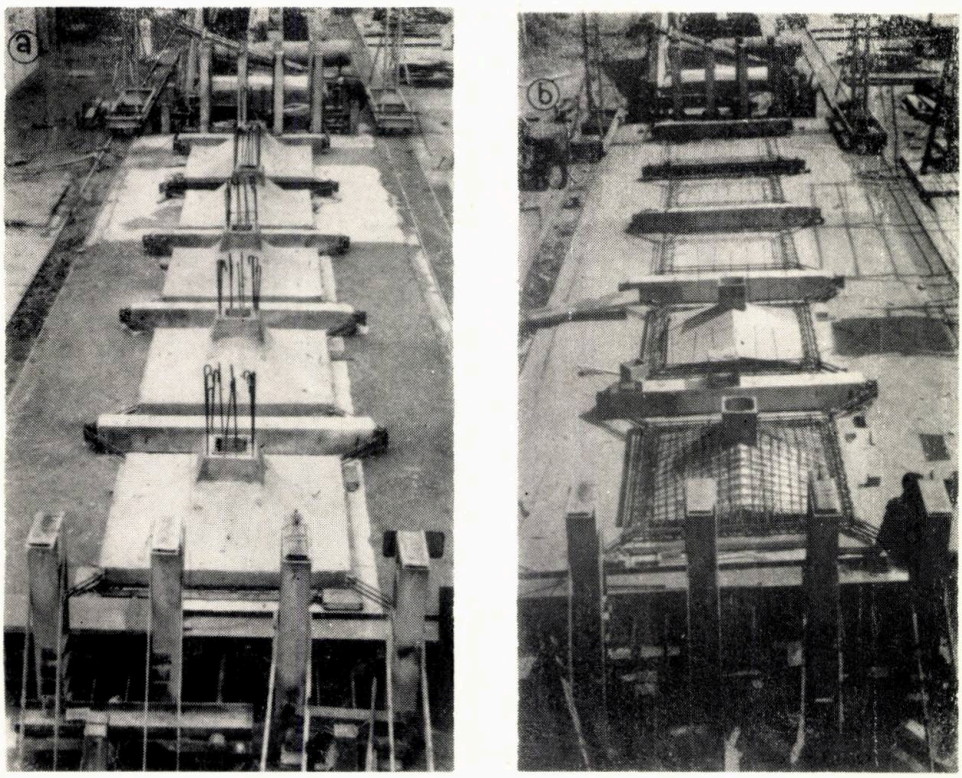


Abb. 9. — Anblick über die Ausführung hyparförmiger vorgefertigten Fundamente: *a* — nach dem Einbetonieren, *b* — Vorspannung der ringförmigen Bewehrung und Plattenbewehrung.

Verfahren — des Basisringes erfolgt (Abb. 9 — Bestellungsbrief No. 48 260 — Verfasser A. M i h u l).

Die Vorspannung des Basisringes räumlicher Elemente erlaubte zugleich eine gute Spannungslenkung in dem verwendeten Raumelemente und die Beseitigung der Rissbildung ; diese führten zu einer Stahlverbrauchsverminderung und zu der Versicherung eines guten Schutzes der Grundbauten gegen schädliche Mittel des Bodens.

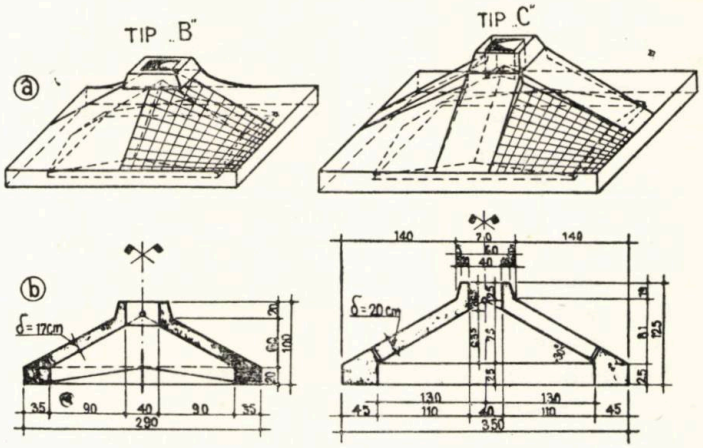


Abb. 8. — Hyparartige vorgefertigte Fundamente : *a* — Typus B, von mittlerem Fassungsvermögen, *b* — Typus C, von grossem Fassungsvermögen.

Um die Einspannung der vorgefertigten Pfeiler zu sichern, wurde am Oberteil ein Stahlbetonkragen vorgesehen. Der Hyparpfeil beträgt 1/3 der Spannweite.

Wir bemerken dass die angewandten Bewehrungen für das Vorspannen des Bodenringes aus Rippenstahlstäbe mit grossem Durchmesser des PC 90 Typus bestehen, deren Empfindsamkeit gegen Korrosion geringer als die Drahtcharakteristiken für Spannbeton ist.

5. Wirtschaftliche Betrachtungen

Aus dem eingehenden Untersuchungen der Reduzierungen des Betonsverbrauchs, der für die Ausführung der dargestellten Grundbautypus nötig ist, (bei Widerstandsfähigkeit unter 20 t auf laufenden Meter der Gründung mit Gründungsboden bei 2 m Tiefe, mit $R_t = 2$ Kg/cm^2) im Vergleich mit den traditionellen, zur Zeit, in der Praxis verwendeten Systeme, ergaben sich folgende Orientierungsangaben :

a) Für kontinuerliche Gründunsbalken aus vorgespannten Grossplatten mit vertikalen Hohlräumen, die durch Vorspannen verbunden werden, erhielt man eine Betonreduzierung von rund 16% im Vergleich mit den traditionellen Gründungsbauten.

b) Für Grundbauten die aus vorgespannten Platten mit Horizontalhohlräumen bestehen, nimmt die Betonverminderung mit etwa 19% zu.

c) Für die Grundbauten aus vorgespannten Platten mit Querhohlräumen, nimmt die Betonverminderung etwa 25% zu.

d) Für die Grundbauten die aus vorgespannten Platten mit I-förmigem Querschnitt und Querhohlräumen bestehen (versehen mit, am Oberteil bewehrten, Rippen), mit einer Wandstärke von nur 10 cm, erhielt man eine Betonverminderung die auch 50% überschreiten kann.

e) Für die kurzen Pfahlgründungsbauten mit vollwandigem Quadratquerschnitt erhielt man eine Betonverminderung von etwa 59% im Vergleich mit den traditionellen Grundbauten.

f) Für Pfahlgrundbauten mit quadratförmigem Querschnitt und mittleren Hohlräumen ist die Betonverminderung mit 70% vergrössert.

g) Für Pfahlgrundbauten mit sternförmigem Querschnitt, erhielt man eine Betonreduzierung von 75%.

h) Für Schraubenpfahlgrundbauten erhielt man eine maximale Betonverminderung, geschätzt mit rund 90%.

i) Für Grundbauten des PH-Typus erhielt man, gegenüber der obeliskförmigen Stahlbetoneinzelfundamente, eine Betonverminderung von etwa 60%.

In allen Fällen in welchen die Grundbauten bewehrt werden sollen (infolge der Böden die ungleichförmige Setzungen zeigen oder im Falle der Stahlbetoneinzelfundamente) ergibt sich ein Stahlverbrauch der unter oder gleich dem Wert der klassischen Lösungen steht.

Die vorgelegten und in der Praxis eingeführten Lösungen stellen Systeme dar die, vom Fall zum Fall, in vorteilhafteren Bedingungen als die traditionellen anwendbar sind, indem die Herstellungsart des Überbaues aus Fertigteilen mit der Herstellungsart durch industriellem Verfahren des Grundbaues übereinstimmt so dass die Baustelle Montageplatz für die Bausysteme wird, wo die Ausführung mechanisiert ist.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Stahlbetonbau

INDUSTRIALIZAREA FUNDAŢIILOR

(Rezumat)

Se prezintă cercetările efectuate de catedra de beton armat de la Institutul politehnic, Iaşi, în vederea elaborării unor elemente prefabricate din beton armat obişnuit şi beton armat precomprimat pentru industrializarea fundaţiilor.

Dintre sistemele studiate care au fost introduse în practică se pun în evidență următoarele :

1. *Fundații pe piloți scurți din beton armat sau beton precomprimat*, care fiind aplicați la execuția clădirilor civile, industriale și agricole, permit rezolvarea în condiții deosebit de avantajoase a celor două probleme importante ridicate de execuția construcțiilor moderne : α) industrializarea ciclului zero și β) reducerea la valori convenabile a tasărilor diferențiate.

Dintre tipurile de fundații aplicate pînă în prezent, care aduc elemente de noutate în acest sector, reținem :

a) *Piloții scurți din beton armat cu secțiunea pătrată, cu gol central*, utilizați în cadrul TRC, Bacău, se caracterizează prin distribuția rațională a betonului, execuția lor fiind asigurată prin aplicarea unei tehnologii simple care poate fi organizată de oricare atelier sau bază de prefabricate. Eliminarea materialului din zona centrală conduce la realizarea unor sisteme ușoare, care prezintă aceeași capacitate portantă ca și piloții cu secțiune plină, utilizați în construcții.

b) *Piloții scurți precomprimați cu secțiunea în stea*, aplicați în cadrul TRC, Bacău, care se caracterizează printr-o distribuție rațională a betonului și a armăturii, ceea ce permite sporirea capacității de rezistență a sistemului cu circa 35% față de piloții folosiți în acest scop în sisteme obișnuite. Precomprimarea asigură condiții deosebit de avantajoase pentru transport, manipulare și introducere în pămînt cu ajutorul vibrosonetelor.

c) *Piloții cu forme de șurub conic*, executați din beton armat, a căror greutate nu depășește, pentru lungimea de 1,80 m, 115 kg, fiind numai de 75 kg pentru lungimea de 1,10 m și a căror capacitate portantă variază între 4 t și 12 t. Corpul central cu forma conică pe care se desfășoară spirele este prevăzut cu un gol central, care asigură condiții bune pentru legătura fundației cu suprastructura și totodată asigură reducerea greutății proprii a piloților. Important este de reținut că astfel de piloți se înșurubează manual cu ajutorul unei pîrghii sau mecanic și se pot deșuruba, la nevoie fiind recuperați în întregime. Prin aplicarea lor se obține o reducere a consumului de beton în proporție de 90% față de soluțiile curente, se asigură industrializarea executării fundațiilor pentru oricare construcție, se rezolvă problema recuperării lor în totalitate la execuția construcțiilor provizorii ș.a.

2. Un alt sistem studiat și aplicat în practică îl constituie *fundațiile pe tălpi continue*, realizate din trei panouri mari cu goluri transversale, longitudinale și verticale, asamblate prin precomprimare. Sistemul experimentat la execuția unor depozite în cadrul grupului de șantiere Roman a scos în evidență posibilitatea realizării unor fundații sub formă de tălpi continue din elemente prefabricate, la care problema tasărilor diferențiate nu mai constituie un impediment pentru aplicarea panourilor prefabricate.

Preconizarea golurilor în zonele puțin solicitate asigură o utilizare rațională a materialelor, ceea ce permite reducerea consumului de beton, de armătură și conduce totodată la reducerea greutății proprii față de fundațiile tradiționale de aceeași formă, utilizate astăzi, pînă la 50%. Precomprimarea care rezolvă asamblarea panourilor asigură obținerea unor sisteme care, prin continuitatea pe care o prezintă, lucrează ca un tot, fiind superioare fundațiilor din beton armat monolit.

3. Pentru executarea fundațiilor izolate, pînă în prezent au fost elaborate *sistemele de tipul pahar* utilizate în cadrul TRC, Bacău, executate dintr-o singură bucată și cele de forma unor *paraboloizi hiperbolici*, cu inelul de bază precomprimat cu inele nesegmentate, proiectate și experimentate în colaborare cu DSAPC, Iași, în curs de introducere în practică pentru construcții industriale.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Piloți precomprimați cu secțiunea în stea : *a* — detaliu de armare a piloților de 2,20 m, *b* — aspect al piloților de 2,20 m, *c* — piloți de 3,60 m, *d* — execuția piloților.

Fig. 2. — Piloţi şurub: *a* — detaliu de execuţie pentru piloţi de 1,60 m, *b* — aspect al piloţilor de 80 cm cu greutatea de 75 kg, *c* — aspect al piloţilor de 1,60 m cu greutatea de 120 kg.

Fig. 3. — Încercarea piloţilor şurub: *a* — aspect de la încercare, *b* — rezultate obţinute la încercarea unui pilot în teren argilos prăfos.

Fig. 4. — Introducerea manuală a piloţilor şurub în teren: *a* — înşurubarea, *b* — deşurubarea pentru recuperarea piloţilor.

Fig. 5. — Piloţi cu gol central: *a* — aspectul piloţilor pe şantier în stivă şi bătuţi, *b* — aspect de la încercare, *c* — rezultatele încercărilor.

Fig. 6. — Aspecte de la execuţia fundaţiilor din panouri mari, prefabricate, cu goluri: *a* — montarea panourilor în teren, *b* — introducerea armăturilor pentru precomprimare, *c* — pretensionarea armăturilor.

Fig. 7. — Panouri mari: *a* — fără goluri, *b* — cu goluri transversale, *c* — cu inimă de grosime redusă şi goluri transversale, *d* — cu o grosime a inimei redusă la 10 cm şi goluri transversale.

Fig. 8. — Fundaţii prefabricate de tip paraboloid hiperbolic: *a* — capacităţi mai mici, *b* — capacităţi mari.

Fig. 9. — Aspecte de la execuţia pe stand a fundaţiilor prefabricate de tip paraboloid hiperbolic: *a* — după turnarea betonului, *b* — armarea.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. D. 691.3; 531.92

INFLUENCE DU RÉGIME DE VIBRATION SUR LES BÉTONS À AGRÉGATS DE FORME PLATE ET ACICULAIRE

PAR

ARIADNA BOGHIAN et LIVIU GROLL

1. Introduction

Les normatifs en vigueur n'admettent pas l'emploi des agrégats ayant le rapport des dimensions $< 1 : 0{,}66...0{,}33$, car ils exercent une influence négative sur la résistance, l'ouvrabilité et la consommation du ciment.

Mais dans plusieures ballastières la proportion des agrégats plats et aciculaires est élevée nécessitant ainsi des opérations couteuses de sortage en vue d'obtenir des agrégats polyédriques correspondant aux conditions standard.

Le choix de quelques procédés qui puissent permettre une large utilisation des agrégats aciculaires et plats à la préparation des bétons rendra d'importantes économies.

Dans cet ouvrage on présente les résultats de quelques recherches concernant la possibilité d'améliorer, par vibration, la qualité des bétons à agrégats plats et aciculaires.

Les recherches ont eu comme point de départ l'hypothèse ci-dessous :

La surface spécifique de l'agrégat de grandes dimensions en béton est rélativement petite par rapport à celle du sable, donc sous ce rapport la forme des granules n'exerce pas une influence essentielle sur la consommation de ciment.

En échange, dans les bétons à agrégats plats et aciculaires, le volume des trous est plus grand que dans les agrégats prismatiques, ce qui conduit à une augmentation nécessaire du sable, ayant une surface spécifique grande et par conséquent une plus grande consommation de ciment [1].

Les études effectuées [2] démontrent que par l'augmentation du contenu des granules plates et aciculaires, le surplus de consommation de ciment augmente jusqu'à 12%.

Il résulte que l'une des voies par laquelle on peut intervenir dans la limitation de la consommation du ciment chez les bétons à agrégats de forme aciculaire et plate c'est la réduction du volume des trous, en vibrant le béton en conditions spéciales.

Une première confirmation de cette hypothèse est obtenue par la vibration même de l'agrégat en état sec lorsque le volume des trous est réduit avec 12% pour l'agrégat court-prismatique, avec 17,5% pour les agrégats lamélaires et avec 18,9% pour les agrégats aciculaires. Ce phénomène est d'autant plus accentué chez les agrégats mélangés avec mortier de ciment où le frottement entre les granules est plus petit, que pour l'agrégat sec.

2. Conditions des recherches

Les recherches ont été effectuées avec du gravier de la ballastière de Lespezi-Paşcani, d'où on a extrait trois différentes formes de granules : courte-prismatiques (fig. 1), plates (fig. 2) et aciculaires (fig. 3), ayant le rapport entre les dimensions données dans le tableau 1.

Tableau 1

La forme des granules	Sortage 7/15 mm		Sortage 15/30 mm	
	b/a	*c/a*	*b/a*	*c/a*
Courte-prismatique	0,74	0,5	0,77	0,59
Plate	0,807	0,317	0,732	0,318
Aciculaire	0,32	0,316	0,311	0,323

On a employé du sable de la ballastière de Doaga et du ciment RIM 200. Le volume des trous a été déterminé correspondant aux conditions STAS 4606-62, en employant une cuve de 5 l. Les résultats se trouvent inscrits dans la tableau 2.

Tableau 2

La forme des granules	Courte-prismatiques	Plates	Aciculaires
Volume des trous [%]	37	46,7	50

De chacune de ces trois formes d'agrégats on a confectionné une série d'éprouvettes de béton sous forme de : cubes de 20 cm de côté prismes ayant les dimensions $10\times10\times55$ cm, prismes avec les extrémités évasées ayant une section 10×10 cm, pour l'essai à l'extension.

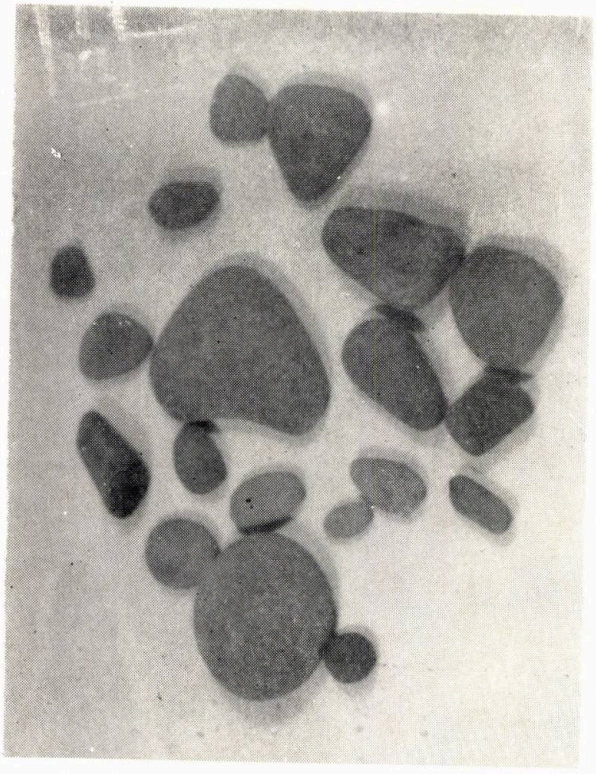


Fig. 1. — Granules polyédriques (courte-prismatiques).

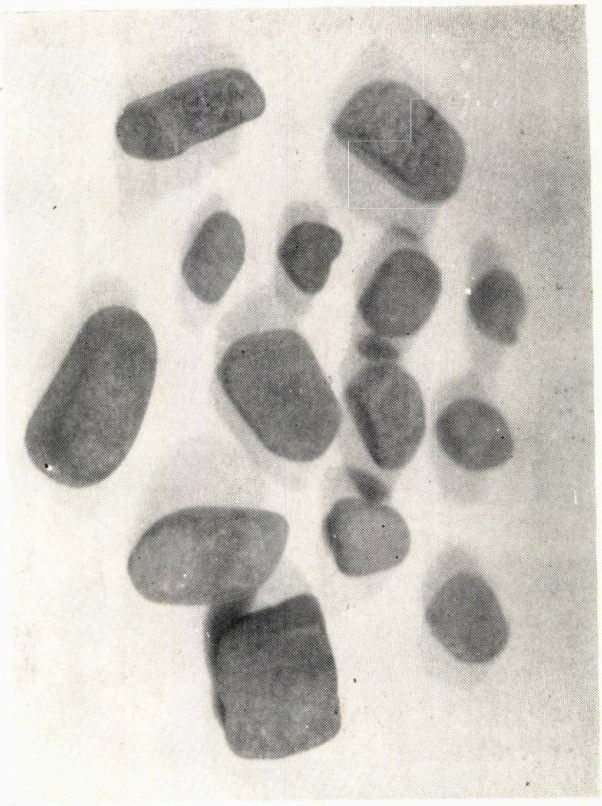


Fig. 2. — Granules plates.

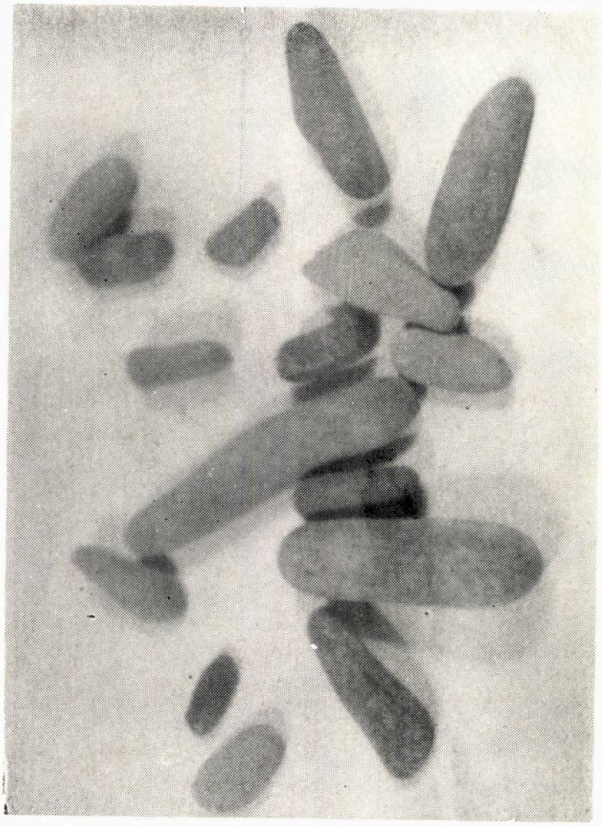


Fig. 3. — Granules aciculaires.

Toutes ces trois séries d'éprouvettes ont été confectionnées de béton dosé à 300 kg ciment/m³, ayant le même rapport $E/C=0,5$ et les mêmes quantités d'agrégats : sable 750 kg/m³, gravier 7...15, 15,5 kg/m³, gravier 15...30, 700 kg/m³.

Le béton a été préparé dans une bétonnière de type „Steaua Roşie" d'une capacité de 100 l, en l'agitant 3 minutes.

Le béton coulé dans des moules a été compacté en vibrant la table vibrante (à une fréquence de 3 000 vibr./min et à une amplitude de 0,5 mm) et à l'aide d'un pervibrateur à une fréquence de 12 000 vibr./min, introduit dans la masse du béton.

Le régime de vibration était différent quant à la durée et la fréquence. On a appliqué les régimes suivants : 40 sec avec 300 vibr./min, 80 sec avec 1 200 vibr./min, 80 sec avec 3 000 vibr./min et un régime double de vibration de 40 sec avec 3 000 vibr./min et 80 sec avec 12 000 vibr./min.

Après les avoir confectionnées, les éprouvettes ont été gardées dans les mêmes conditions de durcissement (régime mixte).

On a étudié l'influence de la vibration sur les principales caractéristiques physico-mécaniques du béton : la résistance à la compression, la résistance à l'extension au fléchissement, la résistance à l'éxtension centrique, le poids spécifique, etc.

Chaque résultat a été établi après l'essai de six éprouvettes.

Les essais ont été effectuées selon une direction perpendiculaire à celle du coulage du béton. On a calculé la dispersion des résultats et la moyenne des écarts.

3. Résultats expérimentaux

De l'analyse des résultats obtenus (tableau 3) on a constaté une influence particulièrement favorable de la vibration sur les performances mécaniques du béton des agrégats étudiés, ce qui est dû, premièrement, au volume du grand agrégat.

Cette influence est mise en évidence par l'augmentation du poids du béton (fig. 4). Ainsi, tandis que pour le béton à agrégat polyédrique on a obtenu une augmentation de 1,96%, à l'agrégat plat on a enregistré une augmentation de 2,05% et à l'agrégat aciculaire — 2,06%.

L'augmentation de la résistance à la compression (fig. 5) pour les bétons à agrégats aciculaires est de 5...22,5%, pour ceux à granules plates de 14...37,5% et pour les bétons à agrégats court-prismatiques les résistances augmentent de 10 à 52,4%, par rapport à la résistance obtenue au béton nonvibré.

Les meilleurs résultats sont obtenus en appliquant la vibration à deux fréquences : 3 000 et 12 000 vibr./min., avec une durée totale de 40+80 sec. Dans ce cas, avec le dosage de 300 kg ciment/m³ on obtient

Tab leau 3

Forme des granules	Nonvibré	Frequence, [vibrations/min] / durée, [sec]			
		3 000 / 40	3 000 / 80	12 000 / 80	3 000+12 000 / 40+80
Poids spécifique apparent du béton, [kg/m³]					
Courte-prismatiques	2 342	2 360	2 370	2 382	2 388
Aciculaires	2 310	2 340	2 350	2 370	2 372
Plates	2 300	2 323	2 335	2 355	2 364
Résistance à la compression du béton, [kgf/cm²]					
Courte-prismatiques	110	230	241	263	320
Aciculaires	206	217	230	236	250
Plates	285	211	220	222	245
Résistance à l'extension au fléchissement, [kgf/cm²]					
Courte-prismatiques	37	39	39	40	43
Aciculaires	45	48	50	53	60
Plates	44	47	49	51	54
Résistance à l'extension, [kgf/cm²]					
Courte-prismaques	18	20	21	24	25
Aciculaires	22	25	27	30	34
Plat s	21	24	25	27	29

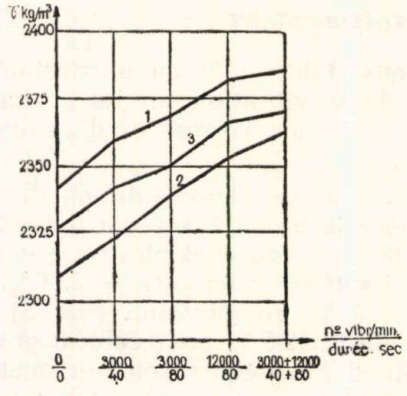


Fig. 4. — La variation du poids spécifique du béton durci, en fonction du régime de vibration:
1 — béton à granules polyédriques, *2* — béton à granules plates, *3* — béton à granules aciculaires.

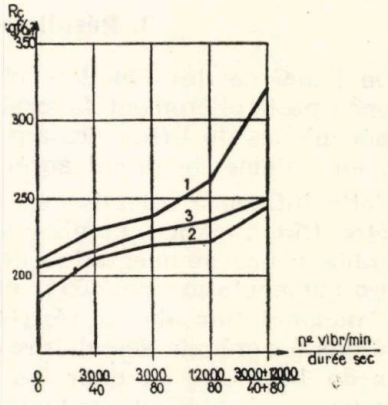


Fig. 5. — Variation de la résistance cubique en fonction du régime de vibration:
1 — béton à granules polyédriques, *2* — béton à granules plates, *3* — béton à granules aciculaires.

des résistances à la compression de 250 kgf/cm² pour le béton à agrégats aciculaires et de 255 kgf/cm² pour les bétons à agrégats plats.

Les résistances à l'extension centrique (fig. 6), par vibration, augmentent avec 33% pour le béton à agrégat aciculaire et avec 23% au béton à agrégat plat. Une situation similaire est observée aussi en ce qui concerne les résistances à l'extension du fléchissement (fig. 7), à savoir, aux bétons à agrégats plats une augmentation de 38% et aux agrégats aciculaires de 54%.

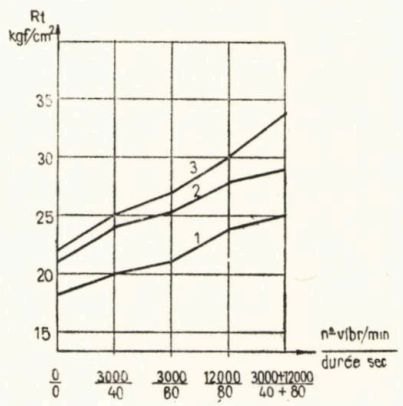


Fig. 6. — Variation de la résistance à l'extension en fonction du régime de vibration :
1 — béton à granules polyédriques, *2* — béton à granules plates, *3* — béton à granules aciculaires.

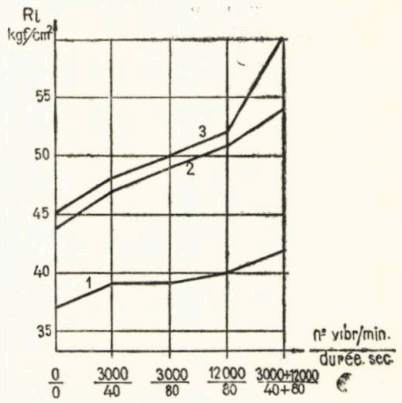


Fig. 7. — Variation de la résistance à l'extension au fléchissement en fonction du régime de vibration :
1 — béton à granules polyédriques, *2* — béton à granules plates, *3* — béton à granules aciculaires.

On constate en même temps que les résistances à l'extension au fléchissement et à l'extension centrique chez les bétons à agrégats plats, et surtout à ceux ayant des agrégats aciculaires, sont plus grandes que celles des bétons confectionnés d'agrégats court-prismatiques, ce qui s'explique tant par le tissage des granules que par leur rangement d'après la direction des efforts. Ce phénomène est mieux mis en évidence chez les bétons à granules aciculaires ayant les résistances R_t et R_{ti} les plus élevées.

4. Conclusions

En appliquant des régimes différents de vibration du béton, on peut utiliser, lors du confectionnement des éléments de constructions, des bétons à agrégats lamélaires et aciculaires, sans y avoir besoin d'un surplus de ciment. Les meilleurs résultats sont obtenus en appli-

quant une double vibration, la première à une fréquence de 3 000 vibr./min, 40 sec, et la seconde à une fréquence de 12 000 vibr./min, 80 sec.

En appliquant des régimes correspondants de vibration, selon la forme des granules de l'agrégat, on peut utiliser dans les constructions, des agrégats locaux, sans surplus de ciment, qui ne correspondent pas aux conditions imposées par les normatifs. Par cette voie on peut éliminer nombre d'opérations de sortage couteuses, ce qui conduit à une baisse sensible du prix des bétons.

Reçue le 10 XI 1968

Institut Polytechnique, Jassy,
Chair de Béton armé

BIBLIOGRAPHIE

1. Plagemann W., *Zum Einfluss der Kornform auf der Porenvolumen und die Verdichtungswilligkeit stelig zusammengesetzter Zuschlagstoff-Gemenge.* Baustoffindustrie, 1966, *1.*
2. Березин Д. В., Галактйонов В. И., Строит. мат., 1963, *7.*

INFLUENŢA REGIMULUI DE VIBRARE ASUPRA BETONELOR CU AGREGATE DE FORMĂ PLATĂ ŞI ACICULARĂ

(Rezumat)

Se prezintă rezultatele unor cercetări privind posibilitatea îmbunătăţirii prin vibrare a proprietăţilor mecanice ale betoanelor cu agregate aciculare şi plate.

La baza studiului stă ipoteza că supraconsumul de ciment se datoreşte suprafeţei mari specifice a nisipului care umple golurile agregatului mare. Micşorarea prin vibrare, în anumite condiţii, a golurilor, conduce la reducerea consumului de ciment şi la creşterea rezistenţelor mecanice.

Aplicarea acestui procedeu permite extinderea folosirii agregatelor aciculare si plate în betoane fără ca acestea să mai necesite prelucrări costisitoare de reconcasare-sortare.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Granule poliedrice (scurte-prismatice).
Fig. 2. — Granule plate.
Fig. 3. — Granule aciculare.
Fig. 4. — Variaţia greutăţii specifice a betonului întărit în funcţie de regimul de vibrare : *1* — beton cu granule poliedrice, *2* — beton cu granule plate, *3* — beton cu granule aciculare.
Fig. 5. — Variaţia rezistenţei cubice în funcţie de regimul de vibrare : *1* — beton cu granule poliedrice, *2* — beton cu granule plate, *3* — beton cu granule aciculare.
Fig. 6. — Variaţia rezistenţei la întindere în funcţie de regimul de vibrare : *1* — beton cu granule poliedrice, *2* — beton cu granule plate, *3* — beton cu granule aciculare.
Fig. 7. — Variaţia rezistenţei la întindere, la încovoiere în funcţie de regimul de vibrare : *1* — beton cu granule poliedrice, *2* — beton cu granule plate, *3* — beton cu granule aciculare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. Z. 691.234

REZISTENŢA CHIMICĂ A CIMENTULUI SILICIOS CU ADAOS DE BARITINĂ

DE

C. BRANIŞTE, ELENA BOTEZ şi I. BURLACU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Betonul a căpătat o largă întrebuinţare în executarea construcţiilor de locuit, industriale, hidrotehnice, tehnico-sanitare şi în diferite alte construcţii.

Prin alegerea cît mai potrivită a cimenturilor, a agregatelor precum şi a compoziţiei lor în beton, se pot obţine betoane rezistente la acizi, baze şi săruri. În acelaşi timp cercetătorii din acest domeniu au căutat să găsească metode de a conferi betonului o durabilitate în timp, în orice condiţii de exploatare, în special pentru construcţiile din uzinele şi fabricile industriei chimice, unde mediile sînt deosebit de agresive şi durabilitatea betonului pentru unele elemente de construcţie se reduce la cîteva luni.

Pentru mărirea durabilităţii betonului faţă de mediile agresive se folosesc unele adaose la ciment (sistof, tripoli trass, puzzolane, sgură metalurgică etc.). Aceste adaose leagă prin absorbţie şi în mod chimic hidroxidul de calciu liber din piatra de ciment şi ca urmare contribuie la micşorarea vitezei de coroziune a betonului. Pe de altă parte adaosele respective măresc considerabil compactitatea betonului şi în acest mod se micşorează gradul de permeabilitate a betonului faţă de agenţii agresivi.

În lucrarea de faţă s-a folosit ca adaos la cimentul silicios *P*400 baritina, şi s-a urmărit comportarea mortarului de ciment cu adaos de baritină, în mediile de acizi (H_2SO_4, HCl, HNO_3), baze (NAOH) şi săruri (Na_2CO_3).

Baritina folosită ca adaos la cimentul portland *P*400, are următoarea compoziţie chimică : $BaSO_4$ — 90%, $BaCO_3$ — 2,81%, $CaSO_4$ — 0,66%, $CaCO_3$ — urme, CaF_2 — urme, Fe — 0,41%, Al şi SiO_2 — 6,12%. Din analiza chimică reiese că baritina are un conţinut ridicat în sulfat de bariu şi conform regulei lui W e i m a r n [1] gradul de dispersie al produşilor insolubili ($BaSO_4$) este înaintat (coloidal) la o suprasaturare a reactanţilor ($BaSO_4$, H_2O şi $Ca(OH)_2$ liber din ciment) trecînd printr-un maximum ce corespunde domeniului de formare a solilor cu particule coloidale caracteristice.

Pentru a se obţine soli stabili, substanţa respectivă trebuie să fie foarte puţin solubilă. În cazul sulfatului de bariu s-au obţinut rezultate bune în soluţii diluate deoarece se realizează uşor o suprasaturare a reactanţilor.

Menţinerea particulelor coloidale liofobe în stare independentă un timp mai îndelungat se poate explica şi pe cale chimică prin adsorbţia anumitor substanţe chimice, care măresc insolubilitatea particulelor, ca de pildă adsorbţia $BaSO_4$ pe particulele solului de $BaCO_3$ formînd micele coloidale. În cazul adaosului de baritină la cimentul portland, particulele coloidale liofobe de sulfat de bariu pot fi stabilizate de gelurile de silicaţi ce se formează în procesul de hidratare şi hidroliză a particulelor de ciment, cînd cimentul este tratat cu apa de amestecare la alcătuirea mortarelor.

Această stabilitate a micelelor coloidale, constituite din sulfat de bariu adsorbit pe solul de gelurile de silicaţi din ciment imprimă mortarului unele caracteristici speciale ca : rezistenţe mecanice mari, rezistenţă chimică faţă de unii agenţi agresivi, absorbţia radiaţiilor γ (măreşte densitatea mortarului, deoarece baritina are o densitate superioară cimentului).

2. Partea experimentală

Pentru a determina rezistenţele la coroziune ale cimentului cu adaos de baritină s-a folsit un mortar cu dozajul 1 : 3 (liant şi nisip normal) la care s-a adăugat baritina în proporţie de 60% faţă de liant şi apoi s-a stabilit apa de amestecare. Din acest mortar s-au confecţionat cuburi de 7×7×7 cm şi brichete ; probele au fost încercate după 28 zile de la confecţionare, atît la compresiune cît şi la tracţiune.

Iniţial s-au realizat probe de mortar fără adaos de baritină, ce au servit ca termen de comparaţie pentru probele cu adaos de baritină. Rezultatele obţinute sînt indicate în tabelul 1. În acelaşi tabel sînt redate şi rezultatele obţinute la probele cu adaos de baritină după 28 zile.

În continuare s-au confecţionat probe fără şi cu adaos de baritină şi după 28 zile s-au introdus în mediul agresiv de NaOH, în soluţii de 3% şi 10%, în care au fost păstrate timp de 180 zile şi 360 zile.

Rezultatele probelor sînt date de asemenea în tabelul 1.

Tabelul 1

Acțiunea mediului bazic (NaOH) *asupra probelor cu adaos de baritină*

Nr. crt.	Denumirea probei	Dozaj				Mediu agresiv	σ_c kgf/cm²			σ_{tr} kgf/cm²		
		Ciment P400 g	Nisip normal g	Baritină g	Apa de amestec g	NaOH %	la 28 zile	la 180 zile	la 360 zile	la 28 zile	la 180 zile	la 360 zile
1	M_p	500	1 500	—	160	—	412	—	—	28,00	—	—
2	M_b	500	1 500	300	160	—	570	—	—	40,81	—	—
3	*I*	500	1 500	—	160	3	—	360,50	353	—	43,40	39,70
4	*II*	500	1 500	300	160	3	—	436,00	472	—	44,80	46,45
5	*III*	500	1 500	—	160	10	—	304,00	287	—	38,40	35,00
6	*IV*	500	1 500	300	160	10	—	370,50	414	—	40,70	45,00

Din datele tabelului 1 se constată că rezistența la compresiune (σ_c [kgf/cm²]) a probelor scade față de probele martor atît a celor cu baritină cît și a celor fără baritină, după ce au fost ținute în mediul bazic (NaOH) în soluție de 3% și 10% timp de 180 zile și 360 zile. Totuși rezistența la compresiune a probelor cu baritină rămîne superioară celei a probei de mortar fără adaos de baritină (M_p). În ceea ce privește rezistența la tracțiune a probelor cu și fără adaos de baritină (după ce au fost păstrate în aceleași condiții ca și probele pentru încercarea la compresiune) este superioară celei a probelor martor (M_p și M_b). Coroziunea probelor de ciment și de ciment cu adaos de baritină se accentuează în funcție de concentrația soluțiilor de NaOH și de durata expunerii. Acest aspect este consecința faptului că agregatul silicios este atacat de baze; de aceea se recomandă folosirea agregatelor tari de calcar. De asemenea, dacă cimentul conține un procent de 12...15% C_3A [1] rezistența cimentului se reduce considerabil. Dacă ne referim la probele de ciment cu adaos de baritină, procesul de corodare se inversează fiindcă atît rezistențele la compresiune cît și cele la tracțiune cresc în timp pînă la atingerea unei concentrații a soluției de NaOH de 10%. Explicația constă probabil în faptul că micelul format din gelul silicios și solul de baritină atinge în timp maximum de stabilitate și devine mai rezistent la acțiunea alcalilor, iar pe de altă parte se realizează o aderiune mai bună între granulele de ciment și agregat datorită micelului stabilizat rezultînd un mortar mai compact.

În continuare s-a cercetat acțiunea acizilor H_2SO_4, HNO_3 și HCl asupra mortarului cu adaos de baritină; datele experimentale sînt înscrise în tabelul 2.

Tabelul 2

Acțiunea mediului acid (H_2SO_4, HCl și HNO_3) *asupra mortarului cu adaos de baritină*

Nr. crt.	Denumirea probelor	Dozaj				Mediile agresive			σ_c kgf/cm²			σ_{tr} kgf/cm²		
		Ciment *P*400	Nisip normal	Baritină	Apa de amestec	H_2SO_4 sol.	HCl sol.	HNO_3 sol.	la 28	la 180	la 360	la 28	la 180	la 360
		g	g	g	ml	%	%	%	zile	zile	zile	zile	zile	zile
1	M_p	500	1 500	—	160	—	—	—	412	—	—	28	—	—
2	M_b	500	1 500	300	160	—	—	—	570	—	—	40,81	—	—
3	*I*	500	1 500	—	160	3	—	—	—	324	distruse	—	39,70	distruse
4	*II*	500	1 500	300	160	3	—	—	—	360,50		—	46,20	
5	*III*	500	1 500	—	160	10	—	—	—	343	distruse	—	30,70	distruse
6	*IV*	500	1 500	300	160	10	—	—	—	355		—	27,80	
7	*V*	500	1 500	—	160	—	—	3	—	313	244	—	40,90	36,30
8	*VI*	500	1 500	300	160	—	—	3	—	377	263	—	38,00	37,50
9	*VII*	500	1 500	—	160	—	—	10	—	212	162	—	30,00	12,90
10	*VIII*	500	1 500	300	160	—	—	10	—	232	202,60	—	31,40	17,34
11	*IX*	500	1 500	—	160	—	3	—	—	344	216	—	44,90	37,00
12	*X*	500	1 500	300	160	—	3	—	—	384	320	—	45,80	45,33
13	*XI*	500	1 500	—	160	—	10	—	—	200	187	—	31,00	19,00
14	*XII*	500	1 500	300	160	—	10	—	—	306	300	—	39,00	28,00

Dintre acizii anorganici care acționează cel mai des asupra construcțiilor din beton din industria chimică sînt : acidul sulfuric, acidul azotic și acidul clorhidric. Datele experimentale din tabelul 2 ilustrează stabilitatea mortarului de ciment cu și fără adaos de baritină, în soluție de H_2SO_4 de 3% și 10%, timp de 180 zile și 360 zile.

Sub acțiunea acidului sulfuric, piatra de ciment se distruge datorită reacției chimice dintre acidul sulfuric și hidroxidul de calciu liber din ciment și a oxidului de calciu legat sub formă de componenți mineralogici, conform reacțiilor :

(a) $$Ca(OH)_2+H_2SO_4=CaSO_4+2H_2O,$$

(b) $$n\text{CaO}.m\text{SiO}_2+pH_2SO_4+H_2O=n\text{CaSO}_4+m\text{Si(OH)}_4.$$

Din reacțiile (a) și (b), ca produși de reacție rezultă sulfatul de calciu (gipsul) și acidul ortosilicic (gel) ; ambii componenți chimici sînt dizolvați sau îndepărtați din ciment.

Acțiunea acidului sulfuric este dublă : la început prin formarea gipsului el tinde să astupe porii pietrei de ciment și să-i ofere un anumit grad de protecție ; așa se explică de ce probele *I...IV* din tabelul 2, care au fost ținute în soluții de H_2SO_4 de 3% și 10% timp de 180 zile, au rezistențele la compresiune cuprinse între 325...360 kgf/cm^2, iar rezistențele la tracțiune între 27,80...46,20 kgf/cm^2. Dacă se prelungește timpul de acțiune a acidului sulfuric pînă la 360 zile, în aceleași condiții piatra de ciment este distrusă.

Această distrugere a pietrei de ciment se explică prin expansiunea gipsului ce se formează în piatra de ciment ; în acest caz micelul constituit din gelurile de silicați și solul de baritină este expandat înainte de a atinge maximul de stabilitate și nu mai posedă capacitate liantă.

Procesul de distrugere a pietrei de ciment, atunci cînd se află în contact cu acidul clorhidric, se explică astfel : acidul clorhidric acționează asupra $Ca(OH)_2$ liber din ciment și pune în libertate $CaCl_2$, conform reacției :

(c) $$Ca(OH)_2+2HCl=CaCl_2+2H_2O.$$

Clorura de calciu este foarte solubilă în apă și poate fi spălată din ciment sau poate să cristalizeze ; în ambele cazuri duce la distrugerea pietrei de ciment.

În literatura de specialitate [3] se menționează faptul că acidul clorhidric produce cele mai mari stricăciuni construcțiilor din beton ; de aceea acidul clorhidric în concentrație de 10% este luat drept standard pentru măsurarea rezistenței la acizi a celor mai multe materiale.

Probele *V...VIII* din tabelul 2 pun în evidență comportarea pietrei de ciment, cu și fără adaos de baritină, în soluții de acid clorhidric de 3% și 10%, timp de 180 zile și 360 zile. Pentru piatra de ciment fără adaos de baritină, rezistențele mecanice scad în funcție de concentrația

soluţiei şi funcţie de timp (probele *V şi VII* — tabelul 2) datorită proceselor chimice menţionate. În cazul probelor cu adaos de baritină *(VI şi VIII)* scăderea rezistenţelor mecanice ale pietrei de ciment este mai redusă. Acest aspect se explică prin faptul că sub influenţa adaosului de baritină se produce hidratarea mai completă a granulelor de ciment şi datorită micelului format, hidroxidul de calciu liber din piatra de ciment se reduce, în urma absorbţiei lui de către micel sau datorită formării hidrosilicaţilor şi uneori chiar a hidroaluminaţilor de calciu, care se depun la suprafaţa de contact cu mediul agresiv şi ca urmare procesul de coroziune este încetinit.

Tot în tabelul 2 este redată şi comportarea în mediu de acid azotic a probelor *IX...XII* de ciment cu şi fără adaos de baritină. În literatura de specialitate [4] se menţionează faptul că piatra de ciment este distrusă de acidul azotic datorită reacţiei chimice dintre hidroxidul de calciu liber din ciment şi acidul azotic, formîndu-se azotatul de calciu foarte solubil, conform reacţiei :

$$\text{(d)} \qquad Ca(OH)_2 + 2HNO_3 = Ca(NO_3)_2 + 2H_2O\,.$$

Acest fapt se confirmă şi în cazul nostru (probele *IX* şi *XI*), cînd piatra de ciment a stat timp de 180 zile şi 360 zile în soluţie de HNO_3 3% şi 10%, deoarece s-a ajuns la rezistenţe mecanice scăzute (σ_c = = 187 kgf/cm^2, σ_{tr} = 19 kgf/cm^2). Totuşi, în cazul pietrei de ciment cu adaos de baritină, rezistenţele mecanice rămîn mai ridicate (σ_c = 384 şi 300 kgf/cm^2, σ_{tr} = 45,80 şi 28,00 kgf/cm^2). Acest aspect dovedeşte că adaosul de baritină în structura mortarului de ciment influenţează în sens pozitiv, cînd piatra de ciment se găseşte în mediu de acid azotic.

Deoarece acidul azotic intră în reacţie chimică şi cu ionii de bariu (Ba^{2+}) din micelul format şi îi transformă în azotat de bariu, o sare insolubilă, care compactează piatra de ciment, accesul ionilor acizi (NO_3^-) este frînat, iar procesul de coroziune decurge mai lent şi durabilitatea betonului se măreşte faţă de cea a probelor martor *(IX şi XI)*.

În continuare vom examina comportarea pietrei de ciment cu şi fără adaos de baritină, în soluţie de carbonat de sodiu, de 3% şi 10%, timp de 180 zile şi 360 zile. Datele experimentale sînt indicate în tabelul 3.

Din datele acestui tabel rezultă că soluţiile de carbonat de sodiu nu exercită o influenţă destructivă asupra probei de ciment conform indicaţiilor din literatură. S-a examinat în special comportarea pietrei de ciment cu adaos de baritină şi în acest caz rezistenţele mecanice se menţin apropiate de cele ale probei martor (M_b). S-au obţinut rezistenţe mărite la tracţiune datorită micelului format cu solul de ioni de bariu, care realizează o bună coeziune între particolele de ciment şi agregat.

Studiul mortarului cu adaos de baritină va continua şi pentru alte medii agresive.

Tabelul 3

Acţiunea soluţiilor de săruri (Na_2CO_3) *asupra mortarului cu adaos de baritină*

Nr. crt.	Denumirea probei	Dozaj				Mediu agresiv	σ_c kgf/cm²			σ_{tr} kgf/cm²		
		Ciment P 400 g	Nisip normal g	Baritină g	Apa de amestec g	Na_2CO_3 %	la 28 zile	la 180 zile	la 360 zile	la 28 zile	la 180 zile	la 360 zile
1	M_p	500	1 500	—	160	—	412	—	—	28	—	—
2	M_b	500	1 500	300	160	—	570	—	—	40,81	—	—
3	*I*	500	1 500	—	160	3	—	400	390,5	—	40,00	38,50
4	*II*	500	1 500	300	160	3	—	560	535	—	46,60	45
5	*III*	500	1 500	—	160	10	—	393	372	—	39,30	32,40
6	*IV*	500	1 500	300	160	10	—	520	516	—	46,40	35

3. Concluzii

În lucrarea de faţă s-a studiat rezistenţa chimică a mortarului normal 1 : 3 cu adaos de baritină în proporţie de 60%, faţă de mediile agresive : NaOH, H_2SO_4, HCl, HNO_3 şi Na_2CO_3.

a) Rezistenţa chimică a mortarului cu adaos de baritină este superioară în mediu de NaOH faţă de cea a mortarului obişnuit. De exemplu, în soluţie de NaOH de 3%, mortarul normal are σ_c=353 kgf/cm² şi σ_{tr} = 39,70 kgf/cm² după 360 zile, iar mortarul cu baritină, în aceleaşi condiţiuni, are σ_c= 472 kgf/cm² şi σ_{tr}= 46,45 kgf/cm². În soluţie de 10% NaOH, mortarul normal îşi reduce rezistenţele mecanice la valorile : σ_c = 287 kgf/cm² şi σ_{tr} = 35 kgf/cm², iar mortarul cu baritină la σ = 414 kgf/cm² şi σ_{tr}= 45,00 kgf/cm². Mortarul cu baritină poate fi folosit la elementele de construcţie ce lucrează în mediu bazic.

b) Mortarul normal cît şi cel cu adaos de baritină nu sînt rezistente din punct de vedere chimic cînd se află în mediu de acid sulfuric un timp mai îndelungat, iar în mediu de HCl, în soluţii de 3% şi 10%, mortarul cu baritină are rezistenţe mecanice superioare celui normal însă viteza de coroziune în timp este mărită. Acelaşi mortar, cu adaos de baritină, în mediu de acid azotic se comportă mai bine decît în mediu de acid clorhidric şi poate înlocui mortarul normal, cînd piatra de ciment se găseşte în mediu de acid azotic.

c) Mortarul normal cît şi cel cu adaos de baritină sînt rezistente în mediu de carbonat de sodiu de 3% şi 10%. Mortarul cu baritină poate fi folosit cu succes la elementele de construcţie ce lucrează în mediu agresiv de carbonat de sodiu.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de geotehnică şi fundaţii,
Laboratorul de materiale de construcţii

BIBLIOGRAFIE

1. Tilenschi S., *Chimia coloidală.* Ed. Tehn., Buc., 1964, pp. 330—388.
2. Biczok I., *Coroziunea și protecția betonului.* Ed. Tehn., Buc., pp. 95—361. (trad. din l. engleză).
3. Moskvin V. M., *Coroziunea betonului.* ESAC, Buc., 1955, pp. 32—319, (trad. din l. rusă).
4. Steopoe Al., *Materiale de construcții.* Ed. Tehn., Buc., 1964, pp. 217—224.

RÉSISTANCE CHIMIQUE DU CIMENT SILICIEUX AVEC ADDITION DE BARITINE

(Résumé)

On étudie la résistance chimique du mortier normal 1 : 3 avec addition de baritine en proportion de 60%, par rapport aux milieux agressifs : NaOH, H_2SO_4, HCl, HNO_3 et Na_2CO_3.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. Z. 626.8

CONTRIBUTIONS À L'AMÉLIORATION DU SÉPARATEUR SUSPENSIONNEL POUR L'ÉVACUATION CONTINUE DE LA VASE ET LA RÉCUPERATION DE L'EAU DE LA CHAMBRE DE CONCENTRATION

PAR

V. ZBEGAN, CORNEL JURA, M. GIURCONIU et GH. CREŢU

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. Considérations en ce qui concerne le processus d'éclairage de l'eau dans des séparateurs suspensionnels cylindriques

Nombre d'études effectués antérieurement dans le Laboratoire d'Alimentations de l'Institut Polytechnique de Timişoara en ce qui concerne le processus d'éclairage de l'eau dans les séparateurs suspensionnels cylindriques ont permis à aboutir à des conclusions extrêmement importantes, à savoir :

a) L'éfficience des séparateurs suspensionnels cylindriques est supérieure à celle des décanteurs horizontaux. Ainsi par exemple le degré d'efficacité, défini par la relation :

$$e = \frac{c_a - c_d}{c_a}, \tag{1}$$

a des valeurs contenues dans l'intervalle 0,72...0,85 dans le cas du séparateur suspensionnel cylindrique, tandis que pour le décanteur horizontal on obtient seulement 0,5...0,57. La réalisation de l'équilibre dans la couche suspensionnelle détermine aussi une valeur constante de l'efficacité du décantement.

b) L'apparition de la couche suspensionnelle avec une concentration optimum, nécessite aproximativement 3 heures dans le cas des eaux qui ont une turbidité réduite et jusqu'à 4 heures pour celles qui ont une charge de suspensions plus grande. La vitesse moyenne, qui augmente dans l'espace d'éclairage, peut croître de 0,5 à 0,8 mm/s, ce qui contribue à l'augmentation de la capacité du séparateur de circa 60%.

À la mise en fonction du séparateur suspensionnel, avant l'apparition de la couche de suspensions avec une concentration optimum, celui-ci travaille comme un décanteur vértical de section circulaire et après l'apparition de la couche, dans une situation intermédiaire.

Dans l'espace suspensionnel, la concentration des suspensions augmente en commençant par la partie inférieure, en réalisant graduellement l'uniformisation de celle-ci avec des valeurs qui augmentent dans la partie supérieure, où se produit un saut prononcé.

Dans l'espace d'éclairage la concentration en suspensions diminue graduellement en atteignant des valeurs sous 50 mg/l dans l'auge après 3...4 heures de fonctionnement du séparateur.

e) Les coefficients de répartition des débits ont des valeurs élevées, la productivité du séparateur en augmentant d'une manière apréciable.

On a défini un coeficient de répartition des débits dans le séparateur suspensionnel et un coefficient de répartition des débits dans la chambre de concentration de la vase :

(2) $$\alpha = \frac{Q_d}{Q_a},$$ (3) $$\beta = \frac{Q_r}{Q_s}.$$

Dans ce qui suit on étudie deux problèmes importants, à savoir :

1. L'influence de l'évacuation continuelle de la vase sur le fonctionnement de la chambre de concentration.

2. Les conditions dans les quelles on récupère l'eau séparée de la vase, dans la chambre de concentration.

3. L'étude quantitatif de la séparation suspensionnelle impose la vérification — après avoir établi l'équilibre dans la couche suspensionnelle pendant la période utile de la séparation suspensionnelle — des équations du bilan des suspension :

(4) $$Q_a c_a - Q_d c_d = Q_s c_s,$$

réspectivement des débits

(5) $$Q_a = Q_d + Q_s$$

et

(6) $$Q_s = Q_n + Q_r.$$

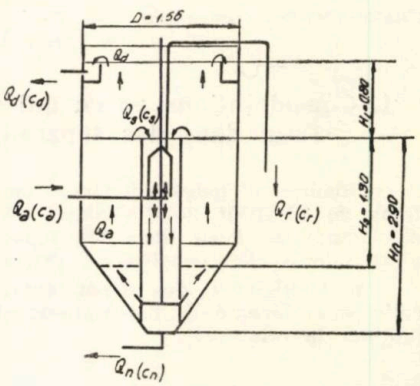


Fig. 1. — Débits et concentrations caractéristiques.

Le débit d'eau récuperé de la chambre de concentration de la vase est donné par

(7) $$Q_r = K_r Q_a,$$

où

(8) $$K_r = \beta (1 - \alpha).$$

Le débit de la vase est :

(9) $$Q_n = K_n Q_a,$$

où

(10) $$K_n = (1 - \beta)(1 - \alpha).$$

Le débit total d'eau, dans le cas de la récuperation de l'eau de la chambre de concentration de la vase, est donné par la relation :

(11) $$Q_u = Q_d + Q_r = K_u Q_a,$$

où le coefficient de productivité totale du décanteur suspensionnel est:

(12) $$K_u = \alpha + \beta - \alpha\beta.$$

En tenant compte aussi de la concentration en suspension de l'eau récupérée, la concentration de l'eau obtenue se détermine à l'aide de la rélation :

(13) $$c_u = \frac{Q_d c_d + Q_r c_r}{Q_u},$$

tandis que l'efficacité de la séparation suspensionnelle est

(14) $$c = \frac{c_a - c_u}{c_a}.$$

Une fois connues les conditions de la formation de la couche suspensionnelle, de liaison entre la concentration de celle-ci et la qualité de l'eau éclairée, on présente ci-dessous les résultats obtenus en ce qui concerne l'augmentation de la production du séparateur cylindrique et l'amélioration de la qualité de l'eau usinée par l'évacuation continuelle de la vase et la récuperation de l'eau de la chambre de concentration.

2. Installation de laboratoire

En fonction de l'objet de la recherche proposée, l'installation d'étude, dans le laboratoire, a été réalisée à l'aide d'une chambre de réactifs et d'un séparateur suspensionnel. On a utilisé comme réactifs le sulfat d'aluminium et la chaux. Les doses optimum de réactifs industriels déterminées dans des recherches antérieures effectuées sur des échantillons, en tenant compte aussi d'une réduc-

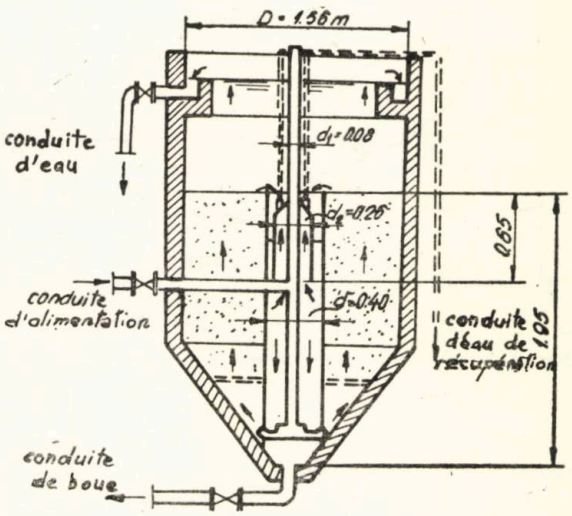


Fig. 2. — Schéma du séparateur suspensionnel.

tion de la quantité de coagulant consommée jusqu'à 10% de la dose établie, ont été en moyenne de 30 ml/l sulfat d'aluminium et 7 ml/l chaux.

Le séparateur suspensionnel cylindrique (réalisé dans le récipient d'un décanteur vertical à section circulaire, où l'on a aménagé une chambre centrale pour la concentration, de la vase) est muni d'un dispositif circulaire (d_2=0,26 m), placé dans la partie supérieure de la chambre de concentration (à l'intérieur et concentriquement à celle-ci) pour récuperer une partie du débit dévié. Les expériences ont été effectuées dans les conditions de l'évacuation continuelle de la vase de la chambre de concentration.

3. Résultats expérimentaux

Il est connu que dans la chambre de concentration de la vase, pendant le processus de sédimentation qui a lieu, on distingue deux zones d'éclairage, une zone de sédimentation en masse et une de compression. L'eau récupérée dans la zone d'éclairage de la chambre de concentration, présente des variations de la concentration en suspension, en fonction du temps, en devenant, après que l'on a réalisé l'équilibre dans la zone suspensionelle, extrêmement claire (C_r varie entre 2,2...0,45 mg/l en fonction du début récupéré).

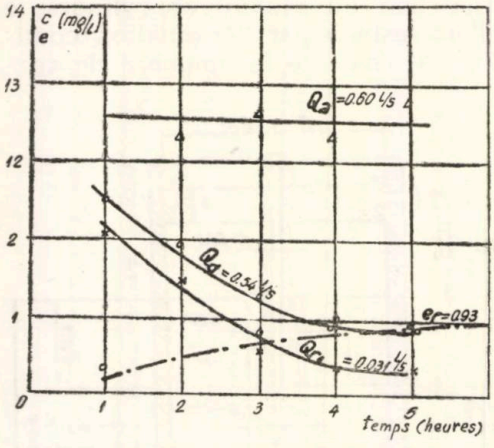


Fig. 3. — Variation de la concentration en fonction du temps.

Cet aspect peut être mis en liaison avec l'efficience de la séparation. En effet, on constate du diagramme, qu'à un moment donné, la concentration en suspensions de l'eau récuperée est une fonction du débit de celle-ci (en augmentant avec l'accroissement du debit). Ainsi même l'efficience de la séparation suspensionnelle peut avoir différentes valeurs, en fonction du débit récupére. On a réussi dans les conditions de cette étude-ci, à obtenir différents degrés d'efficacité, e=0,4... 0,93, pour des débits récupérés qui ont des valeurs K_r =0,04...0,08 de celle du débit initial introduit dans le séparateur.

En étudiant ensuite la réparttion des débits dans le séparateur suspensionnel et dans la chambre de concentration de la vase on a constaté que: a) le coefficient de répartion des débits dans la chambre de concentration de la vase atteint des valeurs jusqu'à 0,91 et b) le coefficient de répartition des débits dans la chambre de concentration de la vase atteint la valeur 0,80.

En récupérant de la chambre de concentration des débits variables on est arrivé à un coefficient de productivité (K_u) dépassant 98 %, dans les conditions d'une efficience autour de 0,93 (c'est-à-dire sans diminuer la qualité de l'eau). Le coefficient de productivité peut être encore augmenté dans les conditions d'une surface spécifique plus grande du débit récuperé.

4. Conclusions

La récuperation de l'eau de la chambre de concentration augmente la productivité du séparateur suspensionnel cylindrique jusqu'à 98% ; en même temps elle améliore la qualité de l'eau (la concentration en suspensions de l'eau récupérée est plus petite que celle de l'eau séparée, ce qui conduit à une concentration totale plus petite).

Le débit d'eau récupéré a varie jusqu'à 8% du débit introduit au commencement dans le séparateur et peut atteindre des valeurs encore plus grandes.

Notations

Q_a [m³/h], C_a [gf/m³] — le débit et la concentration en suspension de l'eau traitée avec des réactifs et introduite dans le séparateur,

Q_d [m³/h], C_d [gf/m³] — le débit et la concentration en suspension de l'eau séparée,

Q_s [m³/h], C_s [gf/m³] — le débit et la concentration de l'eau qui entraine les suspensions en excès de la zone suspensionnelle, dans la chambre de concentration de la vase,

Q_n [m³/h], C_n [gf/m³] — le débit de la concentration de la vase au lavage continuel des sédiments,

Q_r [m³/h], C_r [gf/m³] — le débit et la concentration de l'eau récuperée de la chambre de concentration de la vase,

Q_u [m³/h], C_u [gf/m³] — le débit total de l'eau séparée obtenue et la concentration correspondante en suspensions.

Institut Polytechnique, Timişoara

CONTRIBUŢII LA AMELIORAREA SEPARATORULUI SUSPENSIONAL PENTRU EVACUAREA CONTINUĂ A VASULUI ŞI RECUPERAREA APEI ÎN CAMERA DE CONCENTRARE

(Rezumat)

Se prezintă principalele rezultate obţinute în creşterea productivităţii şi ameliorarea apei uzinate într-un separator suspensional cilindric prin evacuarea continuă a vasului şi recuperarea apei din camera de concentrare. S-a obţinut un debit total de apă care reprezintă 95...98% din debitul introdus în separator (debitul separat poate atinge 4...8% din debitul iniţial).

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Debite şi concentraţii caracteristice.
Fig. 2. — Schema separatorului suspensional.
Fig. 3. — Variaţia concentraţiei în funcţie de timp.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia V : CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. Z. 626.8

CONTRIBUŢII CU PRIVIRE LA CALCULUL HIDRAULIC AL CANALELOR DE IRIGAŢII

DE

ECATERINA BLIDARU, CORNELIU CISMARU şi VALERIU BLIDARU

Extras din comunicarea prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Scopul lucrării de faţă este acela ca prin unele cercetări şi determinări experimentale, privind diferite canale de irigaţii, să se facă o verificare a legilor de rezistenţă în albii deschise şi a coeficienţilor de rugozitate admişi în calcule.

Cercetările întreprinse pînă în prezent, referitoare la problemele legate de mişcarea uniformă a apei în canale şi a coeficienţilor de rugozitate [1]...[3], scot în evidenţă atît necesitatea de a se ţine seama în proiectarea amenajărilor de irigaţii de rezultatele celor mai noi studii, cît şi de a se continua cercetările, cel puţin pentru cazurile prezentate de unele canale de irigaţie cu condiţii particulare de funcţionare şi exploatare.

2. Observaţii în legătură cu folosirea legilor de rezistenţă pentru canalele de irigaţii. Alegerea coeficienţilor de rugozitate pentru formulele empirice

Calculul hidraulic al canalelor poate fi efectuat pe baza unor formule cu structură diferită; pe de o parte literatura de specialitate oferă o serie de relaţii empirice, de largă circulaţie practică datorită simplităţii lor şi uşurinţei de efectuare a calculelor, ca acele de tip polinominal ale lui Bazin (1897), Ganguillet-Kutter (1869) şi Kutter simplă, sau formule monome de tip Gauckler-Manning (1890), Forchheimer (1923), Pavlovski (1925), Strickler etc.; asemenea formule reprezintă de fapt efortul de adaptare a rezultatelor obţinute de diferiţi autori şi sînt discutabile din punct de vedere dimensional şi al acordului lor cu concepţiile moderne asupra turbulenţei. În ţara noastră s-a adoptat formula Ganguillet—Kutter prin folosirea tabelelor G. Schewior, iar mai recent, relaţia lui Pavlovski, pe baza căreia s-au întocmit îndrumătoare de dimensionarea canalelor [4].

În acelaşi timp, literatura de specialitate indică o serie de relaţii de calcul cu structură teoretică bine fundamentată, însă cu o formă mai complexă şi cu coeficienţi discutabili ca apreciere cantitativă.

Privind problema formulelor care exprimă legea de rezistenţă în regim turbulent, acestea sînt fundate pe legea logaritmică de distribuţie a vitezelor şi sînt exprimate prin relaţii de tipul

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = c \log \left(a \frac{R}{\varepsilon} \right), \tag{1}$$

în care : λ este coeficientul de rezistenţă, a şi c — coeficienţi, care în cazul formulelor teoretice sînt stabiliţi pe baza elaborărilor teoretice şi a cercetărilor experimentale, R/ε — netezimea relativă a albiei.

În funcţie de diferitele valori atribuite coeficienţilor a şi c, au fost elaborate o serie de formule, ca acele ale lui Keulegan, Nikuradze, Martinec, Marchi, ultimele trei fiind indicate de literatura de specialitate ca susceptibile de o mai bună adaptare la situaţia albiilor deschise[1], [3]; din acest motiv, în cadrul prezentării rezultatelor cercetărilor noastre ne vom opri numai asupra lor.

Confruntarea — chiar formală — a relaţiilor cu structură empirică şi a celor cu structură teoretică ne permit cîteva observaţii de care am ţinut seama în experienţele noastre :

1° Complexitatea formală a formulelor teoretice este compensată de valabilitatea lor teoretico-ştiinţifică.

2° Formulele empirice pun problema alegerii coeficientului de rugozitate γ, n sau m. Din punct de vedere conceptual nu există nici o justificare în a prefera una sau alta dintre formulele empirice. În determinarea rezistenţelor hidraulice cu ajutorul formulelor empirice accentul se pune, mai ales, *pe modul de alegere al coeficienţilor de rugozitate*, astfel cîncit să corespundă cazului respectiv.

Este foarte justă observaţia că tabelele coeficienţilor de rugozitate, care însoţesc diferitele formule, sînt pur calitative, întrucît nu este posibil de a îngloba într-o cifră exactă acea totalitate de factori pe care o sintetizăm sub denumirea de rugozitate şi este cu atît mai puţin posibil ca această cifră să oglindească repercusiunile pe care rugozitatea le are în timp asupra caracterului mişcării curenţilor.

3° Formulele teoretice cuprind la rîndul lor — în afara coeficienţilor a şi c, cărora diferiţii autori le-au atribuit valori diferite — şi coeficientul de rugozitate absolută ε.

a) În privinţa determinării rugozităţii absolute ε literatura de specialitate ne pune puţine date le dispoziţie, dintre care sînt demne de luat în consideraţie cele indicate în referatul ASCE după Ackers şi Zegjda [2], pentru ε(în m). De asemenea G. Suppino indică valoarea coeficienţilor de rugozitate absolută [6].

b) În privinţa alegerii coeficienţilor de rugozitate este de observat că ne putem încadra cu multă uşurinţă într-o valoare precedentă sau imediat următoare a sa, cît şi într-o valoare minimă sau maximă, ceea ce are repercusiuni asupra vitezei, în cazul problemelor de verificare, şi exercită o influenţă şi mai pronunţată asupra pantei hidraulice ; dato-

rită acestui fapt cercetările experimentale de verificare a coeficienţilor de rugozitate trebuie efectuate cît mai minuţios şi ţinîndu-se seama de toţi parametrii care-i determină (natura materialului în care este construit canalul, vegetaţia — deci condiţiile de întreţinere şi de exploatare, debitul transportat şi deci ordinul de mărime al canalului, cît şi conţinutul de aluviuni al apei transportate).

3. Caracteristicile canalelor luate în studiu: modul de desfăşurare a lucrărilor

Cercetările s-au efectuat în mai multe etape, în perioada 1965-1967, pe canalele principale de irigaţie ale sistemelor Letea-Bacău şi Popricani-Iaşi.

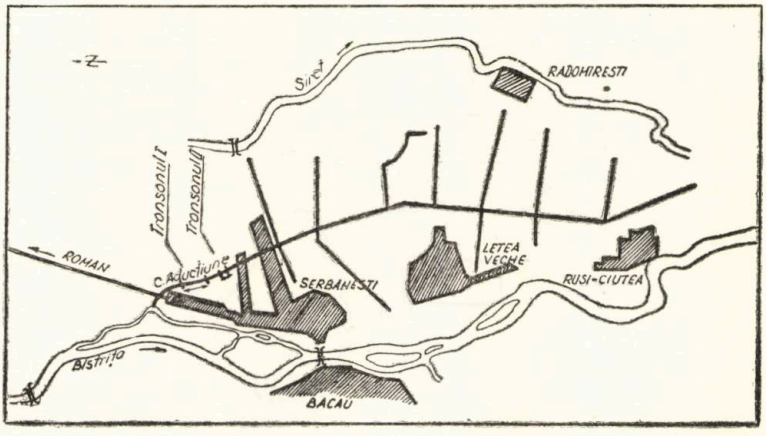


Fig. 1. — Schiţa sistemului de irigaţii Letea-Bacău.

Canalul sistemului de irigaţie Bacău, dat în exploatare în 1956, a fost proiectat pentru a deservi o suprafaţă de 2 000 ha. El captează gravitaţional apă din rîul Bistriţa, străbate aproape pe la mijloc unitatea şi se varsă în rîul Siret (fig. 1).

Canalul a fost executat în semirambleu şi prezenta iniţial următoarele caracteristici [7]: lăţimea la fund — 2 m; adîncimea totală — 1,5 m; înclinarea taluzelor — 1 : 2; adîncimea apei — 1 m; debitul maxim — 2,5 m^3/s; panta medie — 0,6‰.

Canalul sistemului de irigaţie Popricani este alimentat prin pompare din rîul Prut şi a fost realizat în semirambleu cu următoarele caracteristici geometrice şi hidraulice: $b = 1$ m; $H_{tot} = 1{,}05$ m, $m_1 = 1{,}25$, $m_2 = 1$, $h_a = 0{,}7$ m, pentru $Q_{max} = 0{,}640$ m^3/s şi $I = 0{,}6‰$ (fig. 2).

Din punct de vedere al stării de întreţinere, canalul Letea-Bacău prezenta, pe un tronson, condiţii mai rele; adăugînd la aceasta durata de funcţionare relativ redusă a canalului Popricani şi condiţiile mai

bune de întrebuinţare ale acestuia, se explică de ce canalul Popricani şi-a menţinut o secţiune transversală mult mai apropiată de cea iniţială, aşa cum reiese din profilele executate (fig. 3).

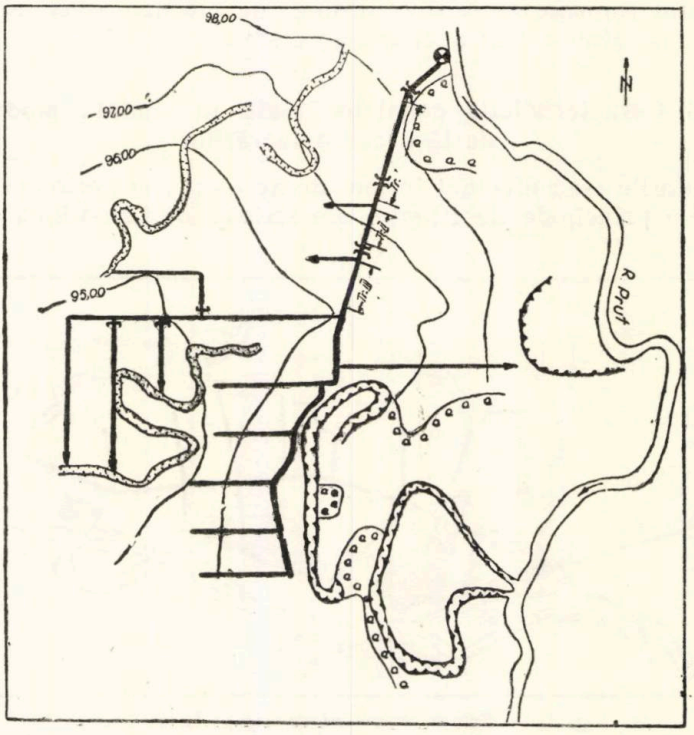


Fig. 2. — Sistemul de irigaţie Popricani–Trupul Pruteţ — Iaşi

Canalul Letea-Bacău, supus şi unor fluctuaţii de debite care influenţează cu totul defavorabil caracteristicile hidraulice de scurgere, prezintă abateri importante de la secţiunea proiectată şi executată iniţial, cu colmatări care au afectat taluzul cu strat de depuneri ce au atins uneori grosimea de 25...30 cm (fig. 4).

În ambele situaţii au fost luate următoarele măsuri înainte de efectuarea experienţelor şi anume:

a) S-au eliminat distribuţiile din canale prin închiderea stăvilarelor de derivaţie.

b) S-au asigurat, pe cît a fost posibil, condiţiile unui regim permanent uniform, lucru extrem de dificil pentru canalul principal de la Bacău, datorită fluctuaţiilor de nivel în faţa prizei, impuse de sistemul hidroenergetic Bistriţa.

Fig. 5

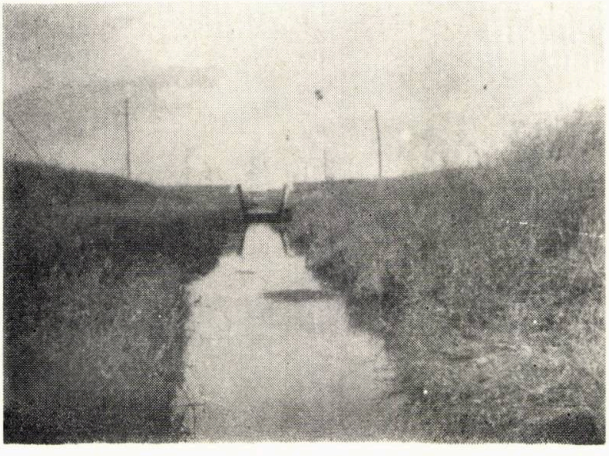


Fig. 6

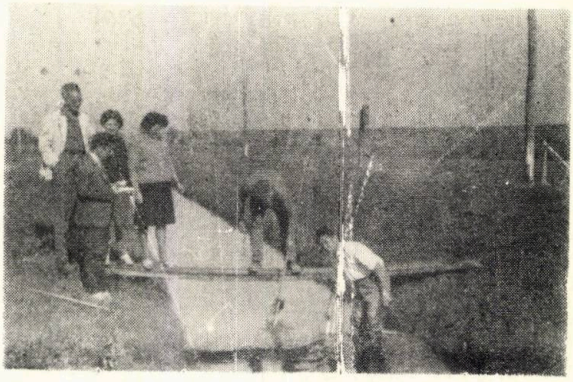


Fig. 7

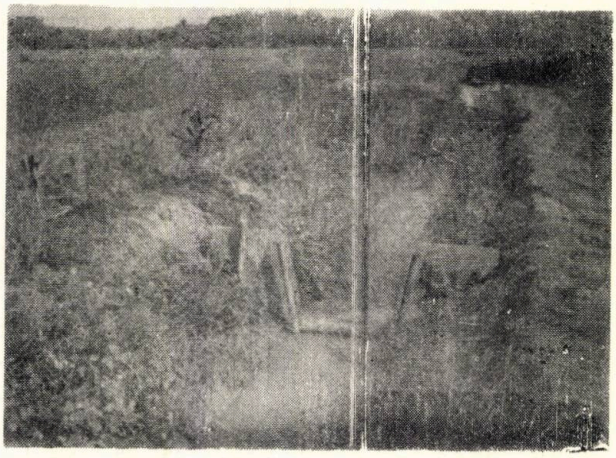


Fig. 8

c) S-a căutat ca tronsoanele luate în studiu să prezinte o rugozitate a fundului şi a taluzelor, cît mai uniformă, prin observarea înălţimii şi desimii vegetaţiei. Totodată s-a urmărit să se aleagă pe fiecare canal studiat, tronsoane cu caracteristici diferite de întreţinere: pe

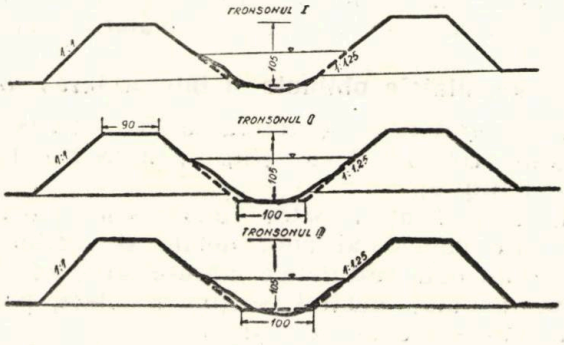


Fig. 3. — Secţiuni transversale prin canalul Popricani–Prut.

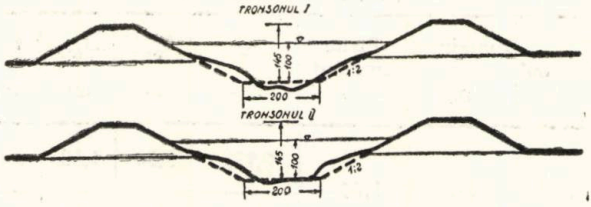


Fig. 4. — Secţiuni transversale prin canalul Letea-Bacău.

canalul Popricani s-au ales trei tronsoane cu condiţii bune de întreţinere, în perioada cînd vegetaţia de pe taluze era cosită (fig. 5), iar pe canalul Bacău două tronsoane; s-au efectuat şi experienţe într-o perioadă în care un anumit tronson necesit prezenta condiţii mai proaste de întreţinere (fig. 6).

S-au efectuat următoarele lucrări:

a) Împărţirea canalului în tronsoane cu caracteristici geometrice şi hidraulice cît mai uniforme.

b) Ridicarea profilelor transversale prin măsurători cît mai minuţioase, măsurîndu-se adîncimile din 10 în 10 cm pe linia luciului apei (fig. 7); aceste profile naturale au fost confruntate cu cele proiectate (v. fig. 3 şi 4).

c) Determinarea pantei longitudinale a fundului fiecărui tronson s-a efectuat cu ajutorul unui nivelment de precizie.

d) Panta suprafeţei libere a fiecărui tronson s-a determinat prin nivelment şi a fost verificată cu ajutorul a o serie de hidrometri legaţi de nivelmentul general al fundului.

Măsurătorile de debit s-au efectuat cu ajutorul deversoarelor trapezoidale cu pereţi subţiri (fig. 8); pe unele tronsoane s-au făcut măsurători de viteze cu ajutorul moriştii Ott, determinîndu-se apoi debitul.

În afara acestor date, s-au măsurat lungimile tronsoanelor şi s-a determinat temperatura apei în vederea calculării numărului Reynolds.

4. Rezultatele obţinute şi interpretarea lor

Rezultatele măsurătorilor se referă la două tronsoane caracteristice ale canalului principal Bacău (fig. 1) şi la trei tronsoane de pe canalul Popricani (fig. 2).

Pentru tronsonul *I* al ambelor canale s-au efectuat două serii de măsurători care corespund unor debite şi secţiuni diferite.

În tabelul 1 sînt date rezultatele măsurătorilor efectuate pe teren : lungimea, panta fundului, debitul, secţiunea udată, perimetrul muiat, raza hidraulică, viteza medie de scurgere.

Tabelul 1

Rezultatele măsurătorilor

Canalul	Tronsonul	Lungimea m	Panta fundului ‰	Q m³/sec	h_{med} m	A_{med} m²	v_{med} m/s	P_{med} m	R_{med} m
Letea-Bacău	*I*	491	1,05	0,728	0,60	1,52	0,479	4,176	0,364
				1,142	0,82	2,03	0,562	4,616	0,440
	II	192	0,926	0,446	0,54	1,168	0,382	3,680	0,3174
Popricani-Iaşi	*I*	997	0,600	0,192	0,45	0,656	0,292	2,24	0,293
				0,128	0,35	0,520	0,246	2,17	0,240
	II	300	0,600	0,225	0,54	0,830	0,271	2,76	0,301
	III	400	0,600	0,202	0,498	0,670	0,300	2,36	0,286

Pentru fiecare tronson s-au calculat pierderile de sarcină pe unitatea de lungime, avînd măsurate diferenţa de nivel $\triangle H$ dintre cotele liniei de sarcină totală în cele două secţiuni extreme (amonte şi aval) şi lungimea tronsonului respectiv. Valoarea pantei suprafeţei libere a fost introdusă în formula vitezei în scopul determinării coeficientului C.

Coeficientul lui D a r c y (λ) s-a calculat cu relaţia :

$$\lambda = \frac{R_1}{\rho v^2} = \frac{g}{C^2}, \tag{2}$$

în care R_1 reprezintă rezistenţa opusă mişcării pe unitatea de suprafaţă a conturului udat [3].

În funcţie de rezultatele obţinute au fost calculaţi coeficienţii de rugozitate, coeficienţii de rezistenţă λ şi numerele lui Reynolds $\mathcal{R}e$ (tabelul 2).

Tabelul 2

Coeficienţii de rugozitate, coeficienţii de rezistenţă şi numerele Reynolds rezultaţi din măsurători

Canalul	Tronsonul	Panta luciului apei (‰)	C	m	γ	n formula Pavlovski	n formula Manning	λ	$\mathcal{R}e$
Letea-Bacău	*I*	0,81	27,9	1,56	1,28	0,0276	0,030	0,0125	602,500
		0,76	30,7	1,50	1,21	0,0266	0,0284	0,0104	853,000
	II	1,16	19,9	2,265	1,90	0,0355	0,0415	0,0247	418,500
Popricani-Iaşi	*I*	0,55	23	1,812	1,507	0,0308	0,0354	0,0185	341,000
		0,55	21,4	1,80	1,503	0,0312	0,0368	0,0214	235,200
	II	0,505	22,2	1,923	1,600	0,0322	0,0369	0,0199	323,000
	III	0,50	25,04	1,605	1,320	0,0287	0,0324	0,0156	340,000

Coeficienţii de rugozitate au fost determinaţi după relaţiile :

$$C = \frac{87}{1 + \gamma/\sqrt{R}}, \text{ (Bazin)}, \tag{3}$$

$$C = \frac{1}{n} R^y, \text{ (Pavlovski)}, \tag{4}$$

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}, \text{ (Manning)}, \tag{5}$$

$$C = \frac{100}{1 + m/\sqrt{R}}, \text{ (Kutter)}. \tag{6}$$

Tot în tabelul 2 sînt incluse şi valorile numărului $\mathcal{R}e$ raportate de asemenea la caracteristicile secţiunii medii :

$$\mathcal{R}e = \frac{4\rho v R}{\mu}, \tag{7}$$

în care : $10^6\mu = \begin{cases} 133 \text{ kgf. s/m}^2\text{—pentru temperatura de } 10^\circ\text{C}, \\ 102 \text{ kgf. s/m}^2 \text{ — pentru temperatura de } 20^\circ\text{C}. \end{cases}$

Confruntarea profilelor iniţiale ale canalelor cu cele existente la data efectuării experienţelor, ca şi diferenţele dintre panta fundului şi panta luciului apei — mai importantă în cazul canalului Bacău— ne îndreptăţesc să tragem concluzia că uniformitatea mişcării nu a fost întotdeauna respectată, mai ales după mai mulţi ani de exploatare şi în condiţii de întreţinere necorespunzătoare, fără să infirme totuşi valabilitatea rezultatelor obţinute, deoarece ne-am referit mereu la caracteristicile hidraulice ale secţiunii medii pentru fiecare tronson.

Din observarea coeficienţilor de rugozitate obţinuţi rezultă că ei diferă de la un tronson la altul al aceluiaşi canal, şi chiar pentru acelaşi tronson, în cazul unor debite diferite.

Astfel, tronsonul *I* de la Bacău prezintă coeficienţi de rugozitate mai mici decît tronsonul *II* care, după cum s-a arătat, a oferit condiţii deosebite de întreţinere şi exploatare.

Canalul Popricani a prezentat condiţii bune de întreţinere şi deci coeficienţi de rugozitate mai reduşi decît tronsonul *II*, Bacău.

Din analizarea comparativă a datelor prezentate în tabelele 1 şi 2 se pot desprinde următoarele observaţii:

a) Creşterea debitului (canalul Bacău) de la 0,728 m^3/s la 1,142 m^3/s a produs o uşoară modificare a coeficientului de rugozitate pe primul tronson, de la 1,2805 la 1,21 (după Bazin).

b) Starea de insuficientă întreţinere a tronsonului *II*, Bacău, a produs creşterea coeficientului de rugozitate cu mult peste limita obişnuită cu care se lucrează în practică şi anume $\gamma=1,90$ în loc de 1,30 (după Bazin) şi $n=0,0355$ (în loc de 0,0225 cu care, de asemenea se lucrează în mod obişnuit).

c) În ceea ce priveşte canalul Popricani, valoarea medie a coeficientului de rugozitate (după Bazin) este de 1,50, iar după Pavlovski, de 0,0305 în loc de 0,0225. Aceste rezultate ne îndreptăţesc ca, pentru canalele executate în soluri aluvionare de luncă în cazul cînd ele funcţionează cu debite cuprinse între 0,1...0,225 m^3/s, să adoptăm coeficientul de rugozitate de 1,50 după Bazin şi 0,03 după Pavlovski. Coeficientul $\gamma=1,30$ ($n=0,027$), corespunde canalelor cu debite cuprinse între 0,7...1,200 m^3/s în cazul unei întreţineri foarte bune a fundului şi a taluzelor.

d) În privinţa coeficienţilor de rezistenţă λ se constată că nici aceştia nu rămîn constanţi şi independenţi de numărul Reynolds, deşi ne aflăm în zona turbulenţei patratice.

Graficul (fig. 9) scoate în evidenţă abaterile legii de rezistenţă la canale faţă de conducte, fapt arătat de V a r w i c k precum şi de specialiştii italieni [3] şi explicat prin variaţiile razei medii de la un tronson la altul şi de la o serie de măsurători la alta; la creşterea numerelor Reynolds, rugozitatea relativă descreşte şi totodată descreşte şi λ.

Pentru calculul coeficienților de rugozitate absolută s-au folosit formulele teoretice :

(8) $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -5{,}66 \log \frac{\varepsilon}{14{,}86\, R}, \quad \text{(Nikuradze)},$$

(9) $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\left(17{,}7 \log \frac{R}{\varepsilon} + 13{,}6\right), \quad \text{(Martinec)}.$$

Rezultatele sînt date în tabelul 3, fiind comparabile cu cele date de S u p p i n o.

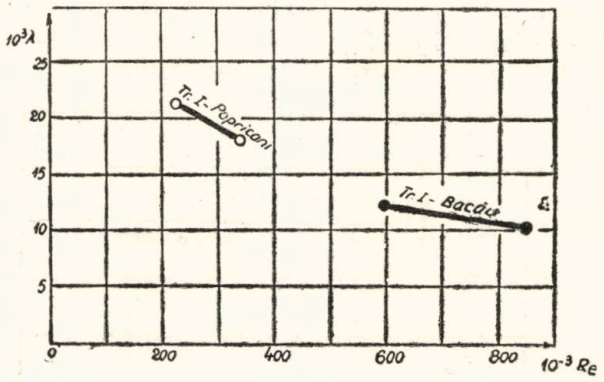


Fig. 9. — Dependența lui λ de $\mathcal{R}e$ la canale.

Valorile coeficientului ε sînt, după Suppino, următoarele :
a) pentru canale de pămînt — 0,015...0,030 m,
b) pentru canale cu iarbă pe fund — 0,070 m,
c) pentru canale de pămînt în condiții rele — 0,120...0,200 m,
d) pentru canale în completă părăsire cu vegetația mare — 0,300...0,400 m.

Tabelul 3

Valorile rugozităților absolute (ε)

Canalul	Transonul	După formula Nicuradze (m)	După formula Martinec (m)
Letea-Bacău (Bistrița)	*I*	0,1435 0,121	0,057 0,0476
	II	0,352	0,1396
Popricani-Iași (Prut)	*I*	0,179 0,221	0,0707 0,0867
	II	0,251	0,0988
	III	0,164	0,0647

BUDAPESTI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Plecînd de la observaţia că formula lui Martinec este mai corespunzătoare, rezultă că pentru tronsonul *I*, Bacău, ne încadrăm în condiţiile unor canale de pămînt cu iarbă pe fund, pentru tronsonul *II*, Bacău, în categoria unor canale de pămînt în condiţii rele, iar pentru tronsoanele de la Popricani între condiţiile unor canale cu iarbă pe fund şi cele ale unor canale de pămînt în condiţii rele, fiind mult mai apropiate de primele.

Pentru a confrunta formulele teoretice Nikuradze, Martinec şi Marchi s-a întocmit un grafic (fig. 10) în care s-a luat pe axa abciselor $10^{-3}\ R$, iar pe axa ordonatelor : a) $1/\sqrt{\lambda}$, b) $1/\sqrt{\lambda} - 5{,}66 \log R$, după formula lui Martinec, c) $1/\sqrt{\lambda} - 5{,}66 \log 14{,}86\ R$, după formula lui Nikuradze, d) $1/\sqrt{\lambda} - 2 \log 3{,}71 f(4R)$, după formula lui Marchi, considerîndu-se $\varepsilon = \text{const.}$ pentru fiecare dintre formule.

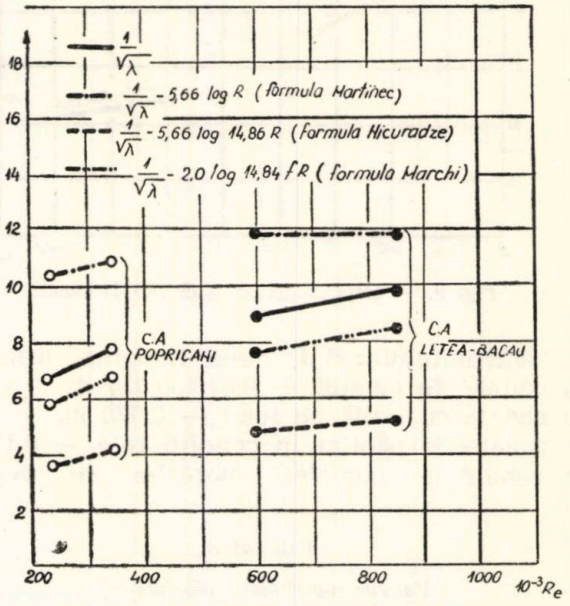


Fig. 10. — Confruntarea formulelor Nikuradze, Martinec, E. Marchi.

Se constată că formula lui Martinec se adaptează mai bine condiţiilor albiilor prismatice, iar formula lui Marchi este cea mai corespunzătoare ; formula lui Nikuradze nu corespunde cazurilor analizate.

Analizînd problema influenţei coeficientului de rugozitate asupra vitezei şi pantei, s-a procedat în modul următor : s-a comparat viteza şi panta reală rezultată din coeficienţii de rugozitate experimentali, cu viteza şi panta obţinută pe baza alegerii coeficientului de rugozitate după tabelele întocmite de Bazin, Manning, Pavlovski. Astfel, pentru

Tabelul 4

Influenţa alegerii coeficienţilor de rugozitate asupra vitezei şi pantei luciului apei

Canalul	Tronsonul	γ şi C după Bazin	n şi C după Manning	n şi C după Pavlovski	Viteza (m/sec) cu C calculat cu formula			Viteza reală (m/sec)	Diferenţa (%) dintre viteza reală şi viteza calculată cu C după:			Panta luciului apei (‰) în funcţie de coeficientul de rugozitate şi C după:			Panta reală a luciului apei	Diferenţa (%) între i real şi i calculat cu C după:		
					Bazin	Manning	Pavlovski		Bazin	Manning	Pavlovski	Bazin	Manning	Pavlovski		Bazin	Manning	Pavlovski
Letea-Bacău	*I*	(1,3) 27,55	(0,027) 28,88	(0,025) 31,42	0,473	0,476	0,539	0,4795	−1,4	+3,63	+12,4	0,829	0,756	0,642	0,81	+2,3	−6,66	−20,7
		(1,3) 29,41	(0,027) 32,28	(0,0225) 37,1	0,537	0,590	0,678	0,562	−4,46	+5,0	+22,3	0,832	0,687	0,520	0,76	+9,5	−9,6	−31,55
	II	(1.75) 21,2	(0,035) 21,43	(0,03) 24,35	0,406	0,411	0,467	0,382	+6,4	+7,6	+22,0	1,023	1,004	0,770	1,16	−11,8	−13,45	−33,6
Popricani-Iaşi	*I*	(1,3) 25,5	(0,03) 27,175	(0,025) 29,72	0,324	0,345	0,378	0,292	+10,9	+18,15	+29,4	0,4485	0,395	0,330	0,55	−18,45	−28,2	−40,0
		(1,3) 23,8	(0,03) 26,26	(0,025) 28,3	0,273	0,301	0,325	0,245	+11,5	+23,16	+32,0	0,446	0,365	0,300	0,55	−18,9	−33,6	−45,4
	II	(1,3) 25,8	(0,03) 27,2	(0,025) 29,9	0,318	0,335	0,368	0,271	+17,3	+23,70	+36,0	0,367	0,329	0,270	0,505	−27,3	−34,9	−46,5
	III	(1,3) 25,35	(0,025) 32,4	(0,025) 29,56	0,303	0,387	0,353	0,300	+1,0	+1,0	+17,8	0,490	0,300	0,300	0,50	−2,0	−40,0	−28,0

coeficienții de rugozitate din formula propusă de Bazin s-au ales tabelele indicate de G. Marchi [8] care dau 13 clase de rugozități, spre deosebire de tabelele obișnuite în care găsim 7 categorii de coeficienți de rugozitate.

Pentru coeficienții de rugozitate calculați după formula lui Pavlovski, valorile date în [9] sînt cele mai corespunzătoare referindu-se chiar la canalele de irigații, pentru care dau un coeficient maxim, mediu, minim.

În sfîrșit, raportul comisiei ASCE indică valorile coeficientului n din formula propusă de Manning (după C h o w) pentru canale îmbrăcate sau artificiale, separat de cele ale canalelor săpate sau dragate, cu o precizie mai mare în ceea ce privește cazurile ce se pot întîlni în practică și cu specificarea coeficienților minimi, normali și maximi [2].

Rezultatul calculelor vitezelor și pantelor, în condițiile amintite, se află cuprins în tabelul 4 din care reies variații ale vitezei cuprinse între 4,46% și 17,3% (după Bazin), iar ale pantei între — 18,9% și + 9,5% (Bazin), cu toate precauțiile luate în aprecierea coeficienților tabelari.

Viteza variază, în condiții medii, între 5% și 15%, iar panta, de la simplu la dublu.

Aceste rezultate ne îndreptățesc să socotim ca indispensabilă determinarea coeficienților de rugozitate experimentali în diferite situații caracteristice întîlnite în practică, în funcție, în principal, de timpul de exploatare.

4. Concluzii

Documentarea, observațiile și determinările întreprinse ne permit să tragem următoarele concluzii generale:

a) Coeficienții de rugozitate ai canalelor de irigații prezintă valori mai mari decît cele adoptate uzual, în funcție în primul rînd de condițiile de întreținere și exploatare a acestora.

b) Executarea canalelor de irigație pentru un debit maxim și funcționarea lor ulterioară cu debite variabile — de obicei mai mici la început și apoi mai mari, pe măsura dării în exploatare a unor suprafețe crescînde, iar alteori variațiile mari de debit din cursul unei perioade de irigație — înrăutățesc condițiile hidraulice de funcționare a canalelor. Deformarea secțiunilor transversale, colmatările și dezvoltarea vegetației acvatice (sporite uneori cu stricăciunile produse de populație) justifică îndeajuns creșterea acestui parametru esențial în aplicarea legilor de rezistență.

c) Dintre formulele empirice, cea a lui Bazin dă abaterile cele mai mici față de datele experimentale, fapt ce se observă atît din tabelul 2 cît și din tabelul 4.

d) Dintre formulele teoretice, cea a lui G. Marchi se adaptează cel mai bine albiilor deschise prismatice.

e) Variaţiile vitezei şi pantei în cazul folosirii coeficienţilor de rugozitate tabelari dovedesc încă o dată în plus necesitatea determinărilor experimentale a coeficienţilor de rugozitate, în vederea completării tabelelor existente cu valori reprezentative corespunzătoare unor situaţii caracteristice de exploatare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de hidraulică
Catedra de hidroameliorații

BIBLIOGRAFIE

1. Marchi E., *Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chuisi e aperti.* L'Energia Elettrica, 1961, *4*, 5.
2. Siniscalchi Cl., *Coefficienti di scabrezza nei canali ad alveo fisse.* L'Acqua, 1964, *1*.
3. Romita L., *Determinazioni esperimentali della caracteristiche del moto in un canale irriguo della Pianura Lombarda,* L'Acqua, 1963, *3*.
4. * * * *Îndrumător de dimensionarea canalelor.* Ed. Agro-Silvică, Buc., 1960.
5. Leliavsky S., *Irrigation and Hydraulic Design.* London, 1959.
6. Suppino G., *Le reti idrauliche.* Bologna, 1964.
7. Blidaru V. şi colaboratori, *Hidroameliorațiile în R.P.R.*, Ed. Agro-Silvică, Buc., 1962.
8. Marchi G., *Nozioni di idraulica.* Bologna, 1953.
9. Blidaru V., *Irigaţii.* Ed. Agro-Silvică, Buc., 1954.

CONTRIBUTIONS CONCERNANT LE CALCUL HYDRAULIQUE DES CANAUX D'IRRIGATION

(Résumé)

Dans cette Note on donne les résultats basés sur les observations et les expériences effectuées en conditions de terrain. On étudie les caractéristiques hydrauliques de deux canaux principaux d'irrigations et on confronte les résultats obtenus par les formules théoriques de la résistance avec ceux obtenus à l'aide des formules empiriques.

Enfin, on établit les coefficents de rugosité dans les conditions d'exploitation des canaux.

Explications des figures

Fig. 1. — Esquisse d'aménagement d'irrigation Letea—Bacău.
Fig. 2. — Esquisse d'aménagement d'irrigation Popricani—Prutet.
Fig. 3. — Sections transversales pour le canal Popricani—Prutet.
Fig. 4. — Sections transversales pour le canal Letea—Bacău.
Fig. 5. — Le canal d'irrigation Popricani—Prut.
Fig. 6. — Le canal d'irrigation Letea—Bacău (l'aspect du tronson *II* pendant les déterminations).
Fig. 7. — Aspect pendant les expériences sur le canal Letea—Bacău.
Fig. 8. — Déversoir pour la mesure des débits.
Fig. 9. — Dépendance entre λ et $\mathcal{R}e$ pour les canaux.
Fig. 10. — Confrontation des formules Nikuradze, Martinec, E. Marchi.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECŢIA VI

INDUSTRIE UŞOARĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 1—2, 1969

СЕКЦИЯ VI

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECTION VI

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia VI : INDUSTRIE UŞOARĂ

C. Z. 331.041 : 677.01

PRELUCRAREA MECANIZATĂ A DATELOR ÎN INDUSTRIA UŞOARĂ

DE

D. RUSU, TH. NEAGU şi GH. BĂNĂŢEANU

1. Dezvoltarea în ritm susţinut a tuturor ramurilor economiei naţionale, creşterea şi diversificarea producţiei, amplifică sarcinile aparatului de conducere şi administrativ din întreprinderile şi organizaţiile economice.

Conducerile de întreprinderi pot lua măsuri operative pentru îmbunătăţirea activităţii productive sau a activităţii privind aprovizionarea cu materii şi materiale şi desfacerea produselor finite cu condiţia să dispună de o evidenţă exactă şi operativă care să cuprindă toţi indicatorii necesari.

Operativitatea şi exactitatea sînt cele două condiţii de bază pe care trebuie să le îndeplinească informaţiile economice care stau la baza deciziilor. Nu se poate concepe luarea unor decizii optime fără o fundamentare ştiinţifică bazată pe informaţii operative şi exacte.

Ţinînd seama de complexitatea fenomenelor economice, luarea deciziilor de către cadrele de conducere, numai pe baza priceperii, a intuiţiei, a calităţilor de bun gospodar, de bun organizator este imposibilă.

Pe de altă parte este greu de conceput procurarea materialului informativ necesar şi mai ales realizarea celor două condiţii de exactitate şi operativitate, fără o dotare a unităţilor economice cu mijloace tehnice de calcul corespunzătoare.

După cum este cunoscut, conducerea de partid şi de stat a preconizat o serie de măsuri pe linia raţionalizării şi modernizării activităţii de conducere şi administraţie menite să transforme sistemul informaţional economic într-un instrument legat organic de activitatea productiv-economică.

Directivele Congresului al X-lea privind planul cincinal pe anii 1971—1975 şi liniile directoare ale dezvoltării economiei naţionale pe perioada 1976—1980, acordă o atenţie deosebită măsurilor de extindere a tehnicii de calcul, creerii în mod progresiv a unui sistem naţional de prelucrare a datelor, folosirii ciberneticii şi informaticii în producţie şi gestiune.

În directive se arată că „Promovarea largă a progresului tehnic, extinderea proceselor tehnologice avansate, introducerea tehnicii electronice de calcul în producţie şi gestiune, constituie unul din obiectivele principale ale dezvoltării economiei pe perioada 1971—1980".

2. În industria uşoară există serioase preocupări atît din partea întreprinderilor, cît mai ales din partea organelor centrale pentru găsirea celor mai eficiente soluţii de dotare a întreprinderilor cu mijloace moderne de calcul şi evidenţă.

Spre deosebire de alte ramuri industriale unde se întîlnesc tipuri variate de mașini, în industria ușoară s-a urmărit introducerea și extinderea unui sistem unitar de prelucrare a informațiilor.

Acest lucru este demonstrat de faptul că majoritatea întreprinderilor care folosesc tehnica modernă de calcul sînt dotate cu mașini de contabilizat cu taste de tipul Ascota. Aceste mașini prezintă mari posibilități de mecanizare dacă sînt dezvoltate și folosite la maximum funcțiunile automate de care dispun și dacă se extinde gama de lucrări asupra întregului flux informațional din întreprindere.

Cuplarea mașinilor de contabilizat Ascota cu dispozitive electronice pentru înmulțire de tipul T.M. 20 a adus unele îmbunătățiri în metoda de prelucrare a datelor, extinzîndu-se posibilitățile de lucru și accelerîndu-se procesul de calcul. Din analiza modului de utilizare a acestor mașini în industria ușoară se poate constata că nu toate întreprinderile se situează la același nivel al folosirii integrale a capacității și posibilităților masinilor. Dacă în unele întreprinderi cum sînt Întreprinderea „Proletarul"-Bacău, „Dacia"-București, „Clujana"-Cluj s-au obținut rezultate foarte bune, în alte întreprinderi unde capacitatea mașinilor nu este folosită integral, nu s-a demonstrat în suficientă măsură eficiența economică a mecanizării lucrărilor.

Fiind vorba de aceleași mașini de contabilizat folosite în majoritatea întreprinderilor, a existat și preocuparea stabilirii unei metode de tehnică contabilă mecanografică unitară pentru toate întreprinderile. S-a preconizat astfel folosirea jurnalelor și fișelor pentru înregistrări concomitente și împărțirea operațiunilor în patru mari grupe.

În spațiul restrîns afectat acestei lucrări este greu a face aprecieri în legătură cu fiecare din cele 4 grupe de operațiuni. Ne vom referi numai la contabilitatea analitică și sintetică a materiilor și materialelor care prin volumul mare de muncă pe care-l necesită ocupă un loc important față de celelalte lucrări.

3. Principiul de bază care trebuie să călăuzească stabilirea conceptului lucrărilor și în funcție de aceasta a proiectelor de programare trebuie să fie acela de a obține toate informațiile necesare pentru contabilitate, planificare, postcalcul, producție, analiză etc., printr-o singură prelucrare a aceluiași document primar. Trebuie evitată trecerea documentelor de mai multe ori în procesul de prelucrare mecanizată a datelor. Ori, în toate variantele prezentate nu s-a reușit să se rezolve acest lucru, de cele mai multe ori documentele trecînd cel puțin de două ori în procesul de prelucrare.

Mergînd pe linia introducerii unei mecanizări complexe, preconizăm aici un nou concept al lucrării și proiecte de program noi în care folosind la maximum elementele de automatizare ale mașinii să se asigure prelucrarea integrată a datelor printr-o singură tastare de către operator după documentele primare.

D. Rusu și colaboratori

Tabelul 1

SCHEMĂ DE PROGRAMARE

PENTRU MAȘINA DE CONTABILIZAT ASCOTA CLASA 170/45-TM-20

TEMA: EVIDENȚA ANALITICĂ ȘI SINTETICĂ A INTRĂRILOR DE MATERIALE ȘI A CREDITULUI CONTULUI - FURNIZORI -

Distanța minimă primul oprifer col. div. 12 — Ultimul oprifer col. div. 157

PROGRAM PENTRU EVIDENȚA ANALITICĂ A INTRĂRILOR DE MATERIALE

PROGRAM PENTRU EVIDENȚA ANALITICĂ A FURNIZORILOR

POZIȚIA 1 LUCRU

Capul coloanei	GOLIRE AUTOMATĂ	PRELUĂRI ȘI NUMĂR CONTROL: STOC R.C.D	SOLD R.C.C	NUMĂR CONTROL	SIMBOL MATERIAL SIMBOL FIȘE	CONTROL ZERO	DATA	DOCUMENT NUMĂR	DOCUMENT FEL	PREȚ UNITAR	CANTITATE INTRATĂ	VALORI DEBIT	BONIFICATE CANT.	BONIFICATE VALOARE	CHELTUIELI TRANSPORT	STOC	SOLD	NUMĂR CONTROL	GRUPA	DATA	DOCUMENT NUMĂR	DOCUMENT FEL	SOLD VECHI	VALOAREA	SOLD
Proba de mașină				2467		0	5 X 69	1342	2	10,00	236,00	2360,00	43,00		536,00		3.360,00	2848,67 *		5 X 69	1342	2		2.817,00	3.051,00
				2467		0	5 X 69	1356	2	10,00	250,00	2500,00	156,00		786,00		5.860,00	5.098,67 *		5 X 69	1356	2		2.544,00	5.595,00
Comenzi funcționale	NS	NS	NS	NS	NS	NS	OK	NSF			OK	OK	F1 DATUM	F2 R		aP-4		F2 R	aP-4	NS	NSF	NSF		NS			NSF OK	NSF OK	NS		NSF	NSF
Totalizatoare I	aS I			+I										+I															+I		aS-I
II		aS II					+II									+K			-K	+K		-II	+II	aS-II-							aSK	
III K			-III	+III	-III	+III	aS III									+IV									aS IV							
V			aS00	+00				7/4			+01	+02				+00			+03	+04	aS00						aS01	aS02			+05		
Mișc. cărului	WR2 aus.			WR2 ein				WR2 ein								+10									RZWX							WR1 ein

POZIȚIA 2 LUCRU

Capul coloanei	DATA	RULAJ CURENT DEBITOR	RULAJ CURENT CREDITOR	RULAJ CUMULAT DEBITOR	RULAJ CUMULAT CREDITOR	SOLD	NUMĂR DE CONTROL
Proba de mașină	5 X 69	4.860,00	1281	84.696,84	24.360,54	60.336,30	60332,80 *
Comenzi funcționale	NS	NSF	NSF DATUM ROT	NSF	NSF	NSF	
Totalizatoare I		+I		aZI	-I	aSI	
II				-II	+II		aSII
III K	+K		+K		aSK		
IV		+IV					
V	aS00						
Mișc. cărului							WR1 ein

Format: Jurnal _____ Fișe _____

Data

Semnătura,

D. Rusu și colaboratori

Tabelul 2

SCHEMĂ DE PROGRAMARE

PENTRU MAȘINA DE CONTABILIZAT **ASCOTA** CLASA **170/45 - TM - 20**

TEMA: EVIDENȚA ANALITICĂ ȘI SINTETICĂ A EȘIRILOR DE MATERIALE

Distanța minimă primul opritor col. div. 12 — Ultimul opritor col. div. 157

NS

POZIȚIA 1 LUCRU

Capul coloanei	GOLIRE AUTOMATĂ	PRELUĂRI ȘI NUMĂR CONTROL: STOC / RULAJ C. DEB.	SOLD / R.C. CRED.	NUMĂR CONTROL	SIMBOL MATERIAL / SIMBOL FIȘE	CONTROL ZERO	DATA	DOCUMENT: NUMĂR	FEL	PREȚ UNITAR	CANTITATE EȘITĂ	VALORI CREDIT	STOC	SOLD	NUMĂR CONTROL	GRUPAJ PE: CONT. ANAL. DEBIT	CONT. SINT. DEBIT	CONT. ANAL. CREDIT	CONT. SINT. CREDIT	
Proba de mașină					2467	0	5 X 69	231	5	10,00	130,00	1.300,00	656,00	4.560,00	3.928,67 *		|12|	|13|	|14|	|19|
					2467	0	5 X 69	254	5	10,00	26,00	260,00	630,00	4.300,00	3.694,67 *		|12|	|13|	|14|	|19|
Comenzi funcționale	NS	NS	NS	NS	NS	NS	OK	NSF		OK	OK	F1 DATUM	F2 R	rot aP-4	NSF	NSF		NS	NS	NS	NS
Totalizatoare I	aSI			+I									-I		aSI						
Totalizatoare II		aSII					+II								-II	+II	aSII				
Totalizatoare K				-K	+K	-K	+K	aSK						+K				aZK	aZK	aZK	aSK
Totalizatoare III			aSIII		+III									-III		aSIII					
Totalizatoare V								7/4						+10							
Misc. cărului	WR2 aus			WR1 aus				WR2 ein										RZWX	RZWX	RZWX	WR1 ein RZWX

POZIȚIA 2 LUCRU

Capul coloanei				DATA	RULAJ CURENT: DEBITOR	CREDITOR	RULAJ CUMULAT: DEBITOR	CREDITOR	SOLD	NUMĂR DE CONTROL
Proba de mașină	342	0	5 X 69		1.560,00	|12|	84.696,84	25.920,54	58.776,30	58.772,88 *
Comenzi funcționale					NSF	NSF ROT DATUM	NSF	NSF	NSF	
Totalizatoare I					+I		aZI	-I	aSI	
Totalizatoare II							-II	+II		aSII
Totalizatoare K										
Totalizatoare III						+III		aSIII		
Totalizatoare V										
Misc. cărului										WR1 ein

Format: Jurnal _____ Fișe _____

Data

Semnătura,

Astfel, în cazul contabilității materialelor s-au întocmit proiecte separate pentru operațiunile de intrări și separat pentru ieșiri. Se putea întocmi și un singur proiect pentru ambele operațiuni însă prin aceasta s-ar fi îngreuiat munca operatorului în procesul de prelucrare ceea ce ar fi scăzut din valoarea lucrării. S-a avut în vedere lipsa de operatori calificați în cea mai mare parte a întreprinderilor industriale.

Pornind de la imperativul că datele din documentele primare să fie tastate o singură dată de către operator, la întocmirea proiectului de programare pentru intrările de materiale (anexat) s-a ținut seama ca evidența analitică să se întocmească concomitent cu cea sintetică.

În poziția *I-a* de lucru a barei de comandă este programată evidența analitică, iar în poziția a *II*-a de lucru cea sintetică. Se efectuează înregistrările mai întîi în fișele analitice și apoi prin preluarea datelor necesare în diferite totalizatoare și programarea totalizatoarelor pentru grupaj se redau valorile în fișele sintetice. Rulajul curent în fișa sintetică se obține prin redarea conținutului totalizatorului ales pentru grupaj în poziția *I*-a de lucru. În coloana „valori debit" totalizatorul *IV* este programat pentru grupaj pe conturi de materiale, iar totalizatorul *10* de pe tamburi pentru grupaj pe gestiuni.

Înregistrînd datele mai întîi în fișele analitice și apoi prin redare din diferite totalizatoare în fișele sintetice se realizează o concordanță deplină între evidența sintetică și cea analitică înlăturîndu-se acele nepotriviri care în condițiile lucrului manual se întîlnesc la tot pasul. Mai mult decît atît în condițiile prezentate nu mai sînt necesare verificările periodice prin întocmirea balanțelor de verificare analitice, concordanța deplină fiind asigurată permanent prin înregistrări.

O problemă deosebit de importantă rezolvată prin proiect este realizarea concomitentă a evidenței analitice a materialelor și furnizorilor, fără tastări repetate. În mașină se introduc simultan atît fișa analitică a materialului cît și fișa furnizorului.

Unele elemente comune (numărul și felul documentului) odată tastate în fișa analitică a materialului sînt preluate în totalizatoare și apoi redate automat în fișa analitică a furnizorului. De asemenea proiectul este astfel conceput, încît în procesul de înregistrare a elementelor componente ale facturii (valoarea la prețul cu ridicata al industriei, bonificația, cheltuielile de transport) în fișele analitice ale materialelor, să se formeze creditul contului furnizori, adică suma ce urmează a fi plătită de către întreprindere. Această sumă se preia în totalizatoarele programate și se redă automat în fișa furnizorului.

Prin această înregistrare concomitentă în cele două fișe analitice, se efectuează și verificarea calculelor din factura furnizorului precum și a preluării elementelor facturii de către operator. În cazul cînd suma de plată obținută în procesul de înregistrare la mașină nu coincide cu cea din factura furnizorului, înseamnă că s-au strecurat erori fie la furnizor, fie în procesul de înregistrare de către operator a ele-

mentelor facturii : preț unitar, cantitate, bonificație sau cheltuieli de transport.

Dacă avem în vedere și preluările pentru realizarea controlului prin zero, putem afirma că prin modul cum este concepută problema mecanizării evidenței analitice și sintetice a materialelor și furnizorilor sînt excluse posibilitățiile de a greși. Întrucît materialele se evidențiază în contabilitate la prețul de vînzare cu ridicata al industriei, iar facturarea se face la prețul de vînzare cu amănuntul, este necesară întocmirea unei liste cu prețurile de vînzare cu ridicata ale industriei pentru toate materialele, prețuri care vor fi tastate în coloana preț unitar.

În prezent, în întreprinderile industriale bonificațiile sînt evidențiate global și apoi repartizate pe produs în momentul calculului prețului de cost pe baza unor chei de repartizare, ca și cheltuielile de transport-aprovizionare. Aceasta conduce la denaturarea prețului de cost al unor produse.

Și această problemă se rezolvă aici în sensul că în fișa fiecărui material (pentru cele care au bonificații) se reflectă și valoarea bonificației. În acest scop se tastează cantitatea bonificată care se preia ca factor 2 (*F2*) și se înmulțește automat cu prețul unitar preluat ca factor 1 (*F1*) imprimîndu-se valoarea în fișă. Cheltuielile de transport se tastează și în continuare mașina redă în mod automat stocul, soldul și numărul de control. Grupajul materialelor intrate se face pe conturi de materiale și gestiuni în vederea redării în fișele sintetice ale conturilor respective.

Proiectul de program pentru ieșirile de materiale este întocmit după același principiu, de corelare a evidenței analitice cu cea sintetică. Deși proiectul este mai simplu, sînt prevăzute posibilități largi de grupare a consumului de materiale atît pe conturi analitice și sintetice debitoare (conturi de cheltuieli) cît și pe conturi analitice și sintetice creditoare. Acest lucru este posibil prin programarea totalizatorului *K* cu plus în coloana „valori credit" și prin alegerea manuală a registrelor în coloanele de grupaj.

4. În anexe (tabelele 1...5) sînt prezentate proiectele de program pentru evidența analitică și sintetică a materialelor și a creditului contului furnizori, precum și fișele analitice și sintetice. Proiectul de program s-a verificat prin întocmirea barelor de comandă și efectuarea înregistrărilor pe o mașină de contabilizat Ascota clasa 170/45 cuplată cu dispozitiv electronic T.M. 20.

Structura numărului de control pentru verificarea exactității preluării datelor, pentru evidența analitică a materialelor este : nr. control = — stoc + sold + simbol materiale. Pentru evidența sintetică numărul de control cuprinde aceeași programare numai că elementele componente diferă : nr. control = — rulaj cumulat debitor (R.C.D.) + rulaj cumulat creditor (R.C.C.) + simbol fișă.

Întreprinderea_____
Simbol material 2467
U/M_____

Tabelul 3

Fișa de evidență analitică a materialului_____

Parafa	Simbol cont	Număr fișe	Pagina

Data	Document		Preț unitar	Cantitate		Valoare		Bonificație (valoare)	Stoc	Sold	Număr de control
	Număr	Fel		Intrată	Ieșită	Debit	Credit				
5 X 69	1342	2	10,00	236,00		2 360,00		43,00	536,00	3 360,00	2 848,67 *
5 X 69	1356	2	10,00	250,00		2 500,00		156,00	786,00	5 860,00	5 098,67 *
5 X 69	231	5	10,00		130,00		1 300,00		656,00	4 560,00	3 928,67 *
5 X 69	254	5	10,00		26,00		260,00		630,00	4 300,00	3 694,67 *

Tabelul 4

Întreprinderea
_____

Fișa de evidență analitică
a furnizorului_____

Parafa	Simbol furnizor	Pagina

Data	Document		Valoare		Sold
	Număr	Fel	Debit	Credit	
5 X 69	1342	2	2 817,00		3 051,00
5 X 69	1356	2	2 544,00		5 595,00

Tabelul 5

Întreprinderea

Fișa sintetică a contului_____

Parafa	Simbol cont	Număr fișe	Pagina

Data	Rulaj curent		Rulaj cumulat		Sold	Număr de control
	Debitor	Creditor	Debitor	Creditor		
5 X 69	4 860,00 |28|		84 696,84	24 360,54	60 336,30	60 332,88
5 X 69	1 560,00		|12| 84 696,84	25 920,54	58 776,30	58 772,88

Restul simbolurilor și prescurtărilor sînt cele cunoscute și folosite în programarea mașinilor de contabilizat Ascota.

Rezolvînd în acest fel problema prelucrării mecanizate a datelor privind evidența materialelor și furnizorilor, se respectă principiile calculului digrafic prin înregistrări în fișe, fără debitări și creditări suplimentare de conturi. Pe baza fișelor de evidență sintetică și analitică se poate întocmi direct balanța de verificare, bilanțul și anexele, fără o prelucrare prealabilă.

Lucrîndu-se numai cu fișe, fără alte situații centralizatoare, se simplifică și se reduce foarte mult numărul documentelor. Operațiile de înmulțire fiind efectuate automat de către mașină, se verifică și exactitatea calculelor făcute de furnizor fără eforturi suplimentare.

Organizarea unei evidențe analitice cît mai complexe, alături de evidența sintetică, permite obținerea unor informații suficiente pentru analiza activității desfășurate și pentru luarea deciziilor. În felul acesta prin prelucrarea datelor cu ajutorul mijloacelor moderne și prin folosirea la maximum a tuturor elementelor de automatizare ale mașinilor se asigură reducerea costului lucrărilor, îmbunătățirea calității acestora prin exactitate și rapiditate.

Primită la 9 VIII 1969

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de evidență contabilă

LE TRAITEMENT MÉCANISÉ DES DONNÉES DANS L'INDUSTRIE LÉGÈRE

(Résumé)

Les auteurs analysent quelques aspectes concernant la mécanisation complexe dans les entreprises industrieles et proposent des solutions concrètes en ce qui concerne l'élaboration des projets de program et des travaux de comptabilité synthétique et analytique des matières et du crédit des furniseurs.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia VI : INDUSTRIE UŞOARĂ

C. D. 621.01:677.05

SYNTHÈSE DU SYSTÈME PLAN À QUATRE ARTICULATIONS ADMETTANT LA PAUSE APPROCHÉE DE L'ÉLÉMENT MENÉ

PAR

P. A. LEBEDEV et N. A. TIKHONOV

1. Lors de la réalisation des procédés technologiques bien différents à l'aide des machines automatiques qui interviennent dans l'industrie textile, il est souvent nécessaire de garantir les pauses des éléments menés. À cette fin on utilise actuellement les systèmes articulés plans à six éléments [1]...[9], qui donnent la possibilité de garantir d'habitude les pauses au cours du mouvement des éléments menés de façon approchée. La tendence de simplifier la structure de tels systèmes a déterminé en particulirer le choix des mécanismes spatieux à quatre éléments [10] admettant l'arrêt approché des éléments menés. Les investigations plus détaillées ont donné

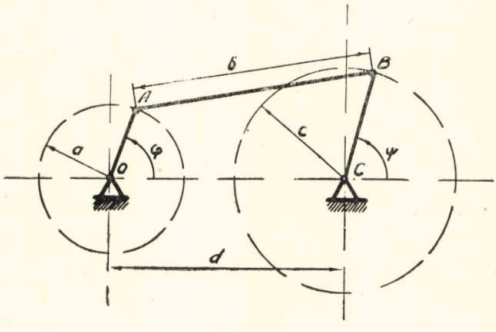


Fig. 1

aux auteurs la possibilité de découvrir la propriété analogue chez certains mécanismes plans articulés à quatre éléments et particulièrement à une sousclasse dont la distance d interaxiale (fig. 1) este égale à la longueur a de l'élément en mouvement rotatif et dont la bielle possède la longueur b égale à celle du second élément en rotation.

Il est bien connu qu'un tel mécanisme admet l'existence de deux manivelles. Cette proposition n'est pas difficile à démontrer sous forme analytique. Pour cela appliquons la relation obtenue auparavant [11] entre les paramètres du système plan articulé à quatre éléments

$$(1)\quad b^2 = a^2 + c^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi + 2cd\cos\psi - 2ac\cos\varphi\cos\psi - 2ac\sin\varphi\sin\psi.$$

Si $a = d > 0$ et $b = c > 0$ on a la dépendence du genre particulier suivant

$$(2)\qquad a = a\cos\varphi - b\cos\psi + b\cos\varphi\cos\psi + b\sin\varphi\sin\psi.$$

Dans ce qui suit supposons que $a < b$.

2. En dérivant l'égalité (2) nous obtenons la fonction de transmission

$$(3)\qquad \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi + \lambda\sin(\varphi - \psi)}{\lambda[\sin\psi + \sin(\varphi - \psi)]},$$

où $\lambda = b/a$. En réduisant l'égalité (2) à la forme équivalente

$$(2')\qquad \sin\frac{\varphi}{2}\left[(1 + \lambda\cos\psi)\sin\frac{\varphi}{2} - \lambda\cos\frac{\varphi}{2}\sin\psi\right] = 0,$$

nous remarquons que l'angle ψ peut prendre n'importe quelle valeur, si φ vérifie la condition $\sin(\varphi/2) = 0$. Lorsque l'angle φ prend des autres valeurs l'angle ψ est déterminé par

$$(4)\qquad \begin{cases} \sin\psi = \dfrac{1}{\lambda}\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} \pm \sin\dfrac{\varphi}{2}\sqrt{\lambda^2 - \sin^2\dfrac{\varphi}{2}}\right), \\ \cos\psi = \dfrac{1}{\lambda}\left(-\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \pm \cos\dfrac{\varphi}{2}\sqrt{\lambda^2 - \sin^2\dfrac{\varphi}{2}}\right). \end{cases}$$

Après avoir transformé l'expression (3) à l'aide de ces relations, nous obtenons pour la fonction de transmission

$$(5)\qquad \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\cos\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2\dfrac{\varphi}{2}}}\right),$$

relation valable pour toutes les valeurs de φ à l'exception de $\varphi = 0$ ou 2π.

Il faut pourtant remarquer que l'égalité (5) fournit de même les valeurs de la fonction de transmission quand $\varphi = 0$ ou 2π et $\psi = 0$ ou π.

On peut montrer que la fonction de transimission (5) est toujours positive. En vérité rappelons d'abord que λ est supposé supérieur à l'unité ($\lambda > 1$). Le remplacement de λ par l'unité diminue la valeur du radical et

par conséquent la valeur absolue du rapport $\frac{\cos(\varphi/2)}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2(\varphi/2)}}$ augmente. Cela veut dire que ce rapport ne dépasse pas l'unité en raison de quoi l'expression entre les parenthèses de (5) est strictement positive. Du point de vue cinématique cela signifie que le sens des vecteurs vitesses angulaires des éléments a et c, de même que celui de leurs déplacements, coïncident.

Notons que la fonction de transmission (5) est symmétrique par rapport à φ. Il en résulte que l'égalité (5) est valable indépendamment du sens de rotation de l'élément a.

Si $\sin(\varphi/2) = 0$ et $\sin\psi \neq 0$ la fonction de transmission prend des valeurs infinies. Son signe s'obtient de la relation

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin(\pm 0)}, \tag{6}$$

où le signe alternatif de l'argument de sinus correspond au choix de l'accroissement soit positif soit négatif de cet argument. L'égalité (6) signifie que lorsque $\varphi = 0$ ou 2π les éléments b et c confondus peuvent occuper une position arbitraire (ψ arbitraire). Afin que le mouvement du mécanisme puisse être décrit par l'expression (5) autrement dit pour éviter la destruction du mécanisme au cours de sa mise en marche de la position $\varphi = 0$ ou $\varphi = 2\pi$ et $\psi \neq 0$ ou $\psi \neq \pi$ il faut ramener l'élément c à la position initiale $\psi = 0$ (ou $\psi = \pi$).

La fonction de transmission (5) est bornée et par conséquent la fonction primitive $\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right) d\varphi$ est continue.

Donc si dans les formules (4) le facteur ± 1 conditionne l'alternation des signes alors cette alternation ne peut avoir lieu dans la formule (4_1) qu'aux points où $\sin(\varphi/2) = 0$ et dans la formule (4_2) qu'aux points où $\cos(\varphi/2) = 0$. Or $\sin(\varphi/2)$ et $\cos(\varphi/2)$ ne peuvent pas s'annuler simultanément. Donc, l'alternation des signes est principialement impossible. Le choix des signes en question est conditionné par les positions de départ des éléments a et c. Ainsi $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ correspondent au signe „plus" dans les formules (5), (4_1) et (4_2). En déterminant l'angle ψ balayé par l'élément c pendant la rotation de l'élément a de l'angle φ de zéro à 4π on a

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \left(1 + \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}\right) d\varphi = 2\pi.$$

Ce résultat doit être considéré comme la démonstration du fait qu'au cours de deux tours entiers de l'élément a, l'élément c n'effectue qu'un tour entier sans que le signe positif de la fonction de transmission soit

changé, comme nous l'avons déjà démontré. Au même temps on a démontré que le mécanisme étudié possède obligatoirement deux manivelles, la valeur moyenne de sa fonction de transmission à l'intervalle $[0, 4\pi]$ étant égale à $\frac{1}{2}$.

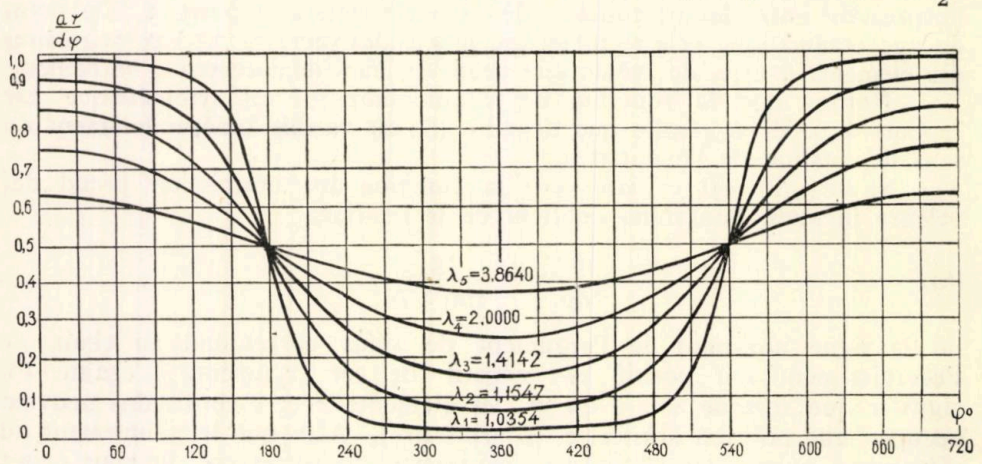


Fig. 2

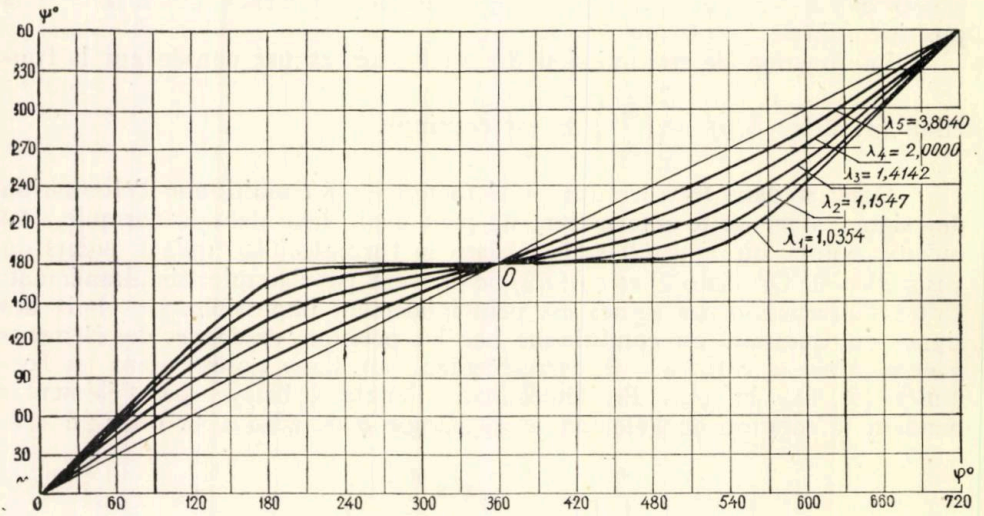


Fig. 3

Les vraies valeurs de la fonction de transmission varient dans l'intervalle ouvert de 0 à 1, fait visible sur la fig. 2 où sont réunis les graphiques de la fonction de transmission dans l'intervalle $[0, 4\pi]$ de variation de φ, pour une série de cinq valeurs de $\lambda = b/a$.

L'analyse de ses graphiques permet d'affirmer que le mécanisme étudié fournit la possibilité de réaliser la pause approchée de l'élément *c* au cours de la rotation uniforme continue de l'élément *a*. Cette pause est d'autant mieux réalisée que λ est plus proche de l'unité, ce qu'on peut voir aisément sur la fig. 3 où on a représenté l'angle ψ en fonction de l'angle φ pour la même série des valeurs de λ. Ces graphiques permetent aussi d'apprécier les valeurs absolues respectives des angles φ et ψ. Il convient de noter que les courbes tracées sur la fig. 3 sont symétriques par rapport au point *O*, dont les coordonnées sont $(\varphi, \psi) = (2\pi, \pi)$. Par exemple, pour $\lambda = 1{,}0354$, à la variation de l'angle φ de 210° à 510 correspond une variation absolue de l'angle ψ égale à 12°14′. Le défau° correspondant maximum de la pause approchée peut être pris égal à $2°4'/300° = 0{,}0408 \approx 4{,}1\,\%$. L'angle φ étant varié de 240° à 480°, la variation absolue respective de l'angle ψ est égale à 6°30′. Le défaut correspondant maximum est $6°30'/240° = 0{,}027 = 2{,}7\,\%$. De façon analogue on peut trouver les caractéristiques de la pause approchée de l'élément *c* pour des autres valeurs de λ.

Afin de synthétiser un mécanisme du genre étudié selon la valeur de la déviation de l'angle ψ dans l'intervalle de variation de l'angle φ il est préférable d'user les graphiques de la fig. 4. Le point *C* dont les coordonnées sont $(\varphi, \psi) = (0, \pi)$ ou $(2\pi, \pi)$ (voir fig. 3) est le point de symmétrie du mouvement du mécanisme en tel sens que les déplacements φ et ψ respectifs sont symétriques. À ce point correspond sur la fig. 4 l'origine *O* du système de coordonnées symétriquement à partir de laquelle sont mises les déviations $\delta\psi$ de l'angle ψ et sont construites des courbes $\lambda = \lambda(\delta, \psi)$ pour différentes valeurs $\delta\varphi$ de l'angle de rotation de l'élément *a*, compté à partir du point $(\varphi, \psi) = (0, \pi)$.

Supposons, par exemple, qu'il soit nécessaire de synthétiser un mécanisme dont le déplacement angulaire de l'élément *c* en rotation est égal à 90° et celui de l'élément menant — égal à 300°. Il est évident en raison de symétrie que $\delta\psi = 90°/2 = 45°$. Du point *A* correspondant à $\delta\psi = 45°$ sur l'axe des abscisses (fig. 4) élevons la perpendiculaire *AB* jusqu'à l'intersection au point *B* avec la courbe construite pour la valeur $\delta\varphi = 300°/2 = 150°$. Au point *C* sur l'axe $O\lambda$ on trouve la valeur respective $\lambda = b/a = 1{,}86$.

Les graphiques analogues de la dépendance mutuelle des grandeurs $\delta\psi$, $\delta\varphi$, λ, dans le domaine de $\lambda \approx 1$, représenté à une échelle plus grande sur la fig. 5, donnent la possibilité de déterminer les dimensions. nécessaires du mécanisme dans le domaine des meilleures pauses de l'élément *c*t

Supposons qu'on doit synthétiser un mécanisme admettant la pause approchée de l'élément mené *c* pour que son déplacement de 15° puisse correspondre à celui de l'élément menant *a* égal à 240°. De façon analogu e à la construction ci-dessus, du point *A* sur l'axe des abscisses correspondant à $\delta\psi = 15°/2 = 7{,}5°$ menons une perpendiculaire jusqu'à l'intersection avec la courbe $\delta\varphi = 240°/2 = 120°$ au point *B*, d'où traçons l'horizontale *BC* qui fournit le point *C* qui détermine le rapport convenable des longueurs des éléments $\lambda = b/a = 1{,}092$

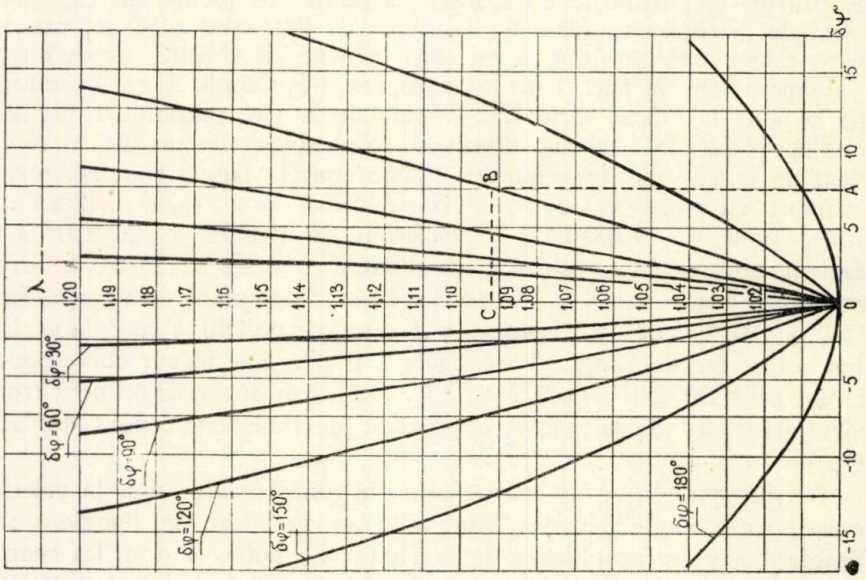

λ
δψ°
δφ=180°
δφ=150°
δφ=120°
δφ=90°
δφ=60°
δφ=30°
A
B
C

Fig. 5

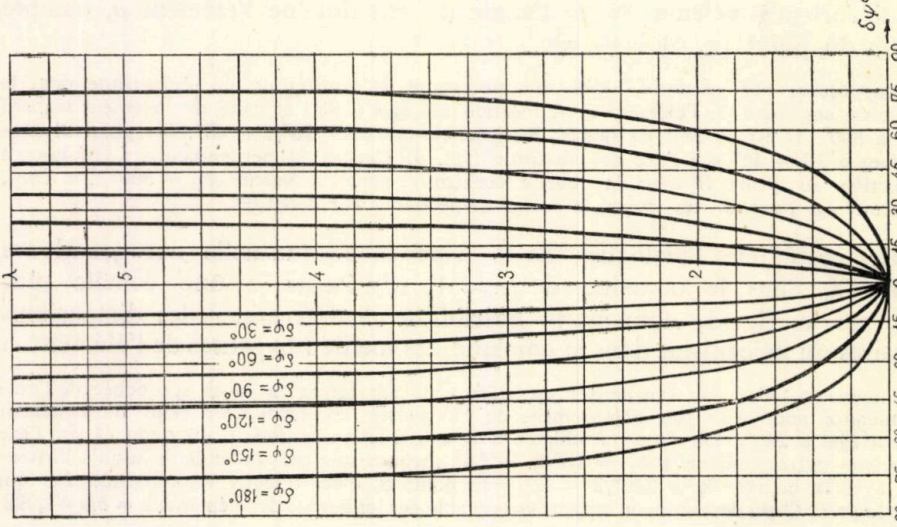

λ
δψ°
δφ = 180°
δφ = 150°
δφ = 120°
δφ = 90°
δφ = 60°
δφ = 30°

Fig. 4

3. Il est intéressant de noter que les aires delimitées par les courbes $d\psi/d\varphi = f(\varphi, \lambda)$ représentées sur la fig. 2, l'axe des abcisses et les ordonnées dans les extrémités valent toujours 2π. Ce résultat corréspond au fait que l'élément c effectue un tour complet pendant deux tours de l'élément a. La même propriété est propre au graphique de la fonction représentée sur la fig. 5 où les aires analogues délimitées par les courbes $d\varphi/d\psi = g(\psi)$, l'axe horizontale correspondant à $d\varphi/d\psi = 0$ (qui n'est pas indiquée sur la fig. 5) et les ordonnées dans les extrémités sont égales constamment à 4π. Remarquons que plus λ est petit, plus est grande la différence entre les valeurs maximum et minimum de la fonction de transmission. Par exemple, si $\lambda = 1{,}0354$ on a le maximum $d\varphi/d\psi = 56{,}83$ pour $\psi = 180°$; la valeur minimum de la même fonction est égale à 1,018 pour $\varphi = 0$ ou 2π.

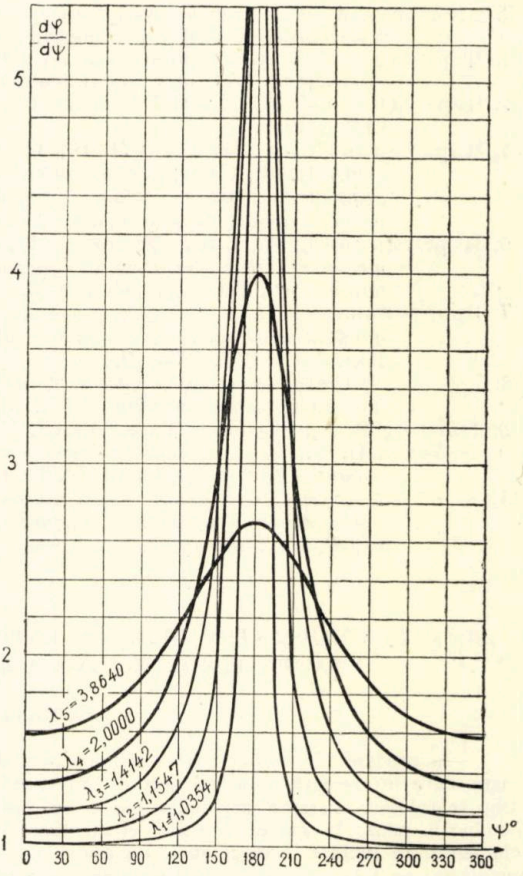


Fig. 6

Ce graphique illustre la possibilité d'obtenir la pause autant proche de l'idéale lorsque l'élément a peut effectuer un tour complet à la condition que l'élément c soit immobile. Dans cette situation la fonction $d\varphi/d\psi$ tend à la limite vers une fonction généralisée

$$\lim_{\lambda \to 1} \frac{d\varphi}{d\psi} = 1 + 2\pi\delta(\psi - \pi),$$

où $\delta(\psi - \pi)$ désigne la fonction connue sous le nom de δ-fonction (fig. 6).

Reçue le 16 IV 1969

Institut Textile de Leningrad
USSR

BIBLIOGRAPHIE

1. Гродзенская Л. С., *К проектированию шарнирных механизмов с остановкой в машинах-автоматах.* Вторая научно-техническая конференция аспирантов и младших научных сотрудников ИМАШ АН СССР, т. **1**, М., 1959.
2. Lichtenheldt W., *Einfache Konstruktionsverfahren zur Ermittlung der Amberssungen in Kurbelgetrieben.* VDI-Forschungsheft, 1941, *408.*
3. Черкудинов С. А., Майсюк Л. Б., *Синтез шарнирно-зубчатого механизма с остановкой.* Тр. инст. машиноведения, Изд. АН СССР, 1960, *82.*
4. Черкудинов С. А., *Синтез плоских шарнирно-рычажных механизмов.* Изд. АН СССР, 1959.
5. Черкудинов С. А., Майсюк Л. Б., Олейник И. Г., Усков М. К., Сперанский Н. В., *Составление справочных карт по синтезу механизмов машин-автоматоз с использозанием электронной цифровой машины.* Тр. III сов. по осн. пробл. теории машин и механизмов, Машгиз, 1963.
6. Черкудинов С. А., Сперанский Н. В., Олейник И. Г., *К синтезу шарнирного шестизвенного механизма с остановкой.* Сб. „Анализ и синтез машин-автоматов", Изд. „Наука", 1965.
7. Гродзенская Л. С., *К проектированию шарнирных механизмов по заданной продолжительности остановки ведомого звена.* Тр. инст. машиноведения, Изд. АН СССР, 1958, *II.*
8. — *Применение методов проектирования шарнирных механизмов с остановкой.* Тр. инст. машиноведения, Изд. АН СССР, 1959, *76.*
9. Harding B. L., *Hesitation.* Trans. ASME, 1965, **B. 87**, *2.*
10. Лебедев П. А., *Условия существования кривошипа в пространственных четырехзвенниках.* Изв. ВУЗов СССР, Технология легкой промышленности, 1966, *5.*
11. — *О статическом и динамическом условиях проворачиваемости пространственного четырехзвенного кривошипно-коромыслого механизма.* Изв. ВУЗов СССР, Технология легкой промышленности, 1967, *4.*

SINTEZA UNUI SISTEM PLAN CU PATRU ARTICULAŢII CARE ADMITE O PAUZĂ APROXIMATIVĂ A ELEMENTULUI CONDUS

(Rezumat)

În procesul de realizare a diferitelor procedee tehnologice cu ajutorul maşinilor automate, care interesează industria uşoară, sînt necesare pauze ale elementelor conduse. În acest scop se folosesc sisteme articulate plane cu şase elemente care cu o anumită aproximaţie conduc la pauze în cursul mişcării elementelor conduse, precum şi sisteme plane cu patru elemente. În lucrare se cercetează un astfel de sistem cu două manivele, avînd lungimea manivelei mici egală cu distanţa interaxială şi lungimea manivelei mari egală cu lungimea bielei.

1. Se demonstrează analitic existenţa a două manivele şi se analizează ecuaţiile care descriu proprietăţile cinematice ale mecanismului.

2. Se determină proprietăţile şi valorile posibile ale funcţiei de transmisie a mecanismului, precum şi ale inversei sale, stabilindu-se că functia generalizată $1 + 2\pi\delta(\psi - \pi)$ (unde $\delta(\psi - \pi)$ este funcţia delta) constituie o limită a valorilor inverse.

3. Se arată că mecanismul poate realiza la limită o pauză oricît de bună a manivelei conduse, pentru un parcurs destul de mare al manivelei conducătoare.

4. Se dă un exemplu de sinteză a mecanismului, utilizind graficele din text.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia VI : INDUSTRIE UŞOARĂ

C.Z. 621—13 : 677.05

ASUPRA DETERMINĂRII TURAŢIILOR CRITICE LA ARBORII PRINCIPALI DE LA MAŞINILE DE FILAT ŞI DE RĂSUCIT

DE

V. HANGANU, VICTOR BAUŞIC, I. ASANDEI, CARMEN CUZIC
şi D. MARFIEVICI

1. Introducere

Funcţionarea corectă şi sigură a unui arbore este condiţionată de o serie de factori, mai importanţi fiind rezistenţa suficientă la solicitările din cursul exploatării, deformaţii elastice limitate, vibraţii reduse.

În legătură cu realizarea funcţionării cu vibraţii reduse se ştie că este necesar ca frecvenţele oscilaţiilor proprii ale sistemului (arborele cu piesele respective montate) să fie suficient de depărtate de frecvenţele oscilaţiilor de regim. Dintre oscilaţiile de regim, în cazul arborilor principali de la maşinile de filat şi de răsucit, prezintă importanţă oscilaţiile de încovoiere provenite de la masele dezechilibrate aflate în mişcare de rotaţie (roţi de curea, cuplaje, roţi dinţate).

Funcţionarea corectă a arborilor are loc atunci cînd turaţiile de regim se află în afara zonelor de rezonanţă.

În cazul maşinilor de filat şi de răsucit arborii principali funcţionează cu regimuri de viteze cuprinse în limite destul de depărtate, corespunzătoare regimurilor de lucru ale fuselor. Datorită acestui fapt, pentru evitarea primei zone de rezonanţă este recomandabil ca valoarea turaţiei critice fundamentale să fie mai mare decît turaţia maximă de regim, cu cel puţin 15... 20 % .

În literatura de specialitate [1]...[3] sînt indicate metode pentru determinarea turaţiilor critice la arbori pe mai multe reazeme.

În lucrarea de faţă se prezintă o metodă simplă de calcul pentru turaţiile critice ale arborilor lungi, de secţiune constantă, pe reazeme multiple, cum este cazul arborilor principali de la maşinile de filat şi de răsucit prevăzuţi cu roţi pentru antrenarea fuselor.

2. Ecuaţia turaţiilor critice

Ţinînd seama de particularităţile pe care le prezintă arborii principali ai maşinilor de filat şi de răsucit se admit următoarele ipoteze de calcul : a) arborele principal se consideră grindă static nedeterminată pe

reazeme simple (se folosesc rulmenţi oscilanţi) ; b) reazemele sînt nedeplasabile, întrucît batiul maşinii este suficient de rigid ; c) secţiunea grinzii constantă pe întreaga lungime, arborele avînd acelaşi diametru pe toate deschiderile ; d) masa grinzii uniform repartizată pe întreaga lungime (arbore, roţi de curea, cuplaje) ; e) se neglijează influenţa roţilor aşezate pe capetele arborelui (roata de curea de la acţionare şi roata dinţată de la cealaltă extremitate a arborelui), ca fiind apropiate de lagărele de capăt.

Pentru grinzile pe mai multe reazeme, a căror secţiune este constantă, cu masa uniform repartizată, ecuaţia pulsaţiilor se obţine pe calea expusă în continuare [1], [3].

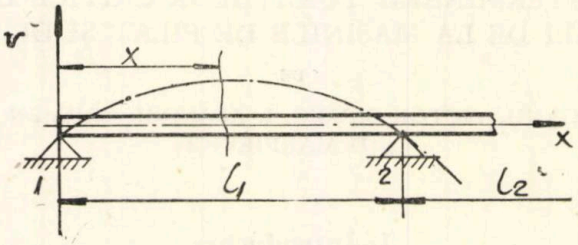


Fig. 1

Considerînd o grindă simplu rezemată, cu n deschideri şi $n+1$ reazeme, de lungime $l = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$ (fig. 1), ecuaţiile oscilaţiilor pentru fiecare deschidere sînt de forma:

$$(1)\begin{cases} v_1 = A_1 \mathrm{S}(\alpha x) + B_1 \mathrm{T}(\alpha x) + C_1 \mathrm{U}(\alpha x) + D_1 \mathrm{V}(\alpha x), \\ v_2 = A_2 \mathrm{S}[\alpha(x - l_1)] + B_2 \mathrm{T}[\alpha(x - l_1)] + C_2 \mathrm{U}[\alpha(x - l_1)] + D_2 \mathrm{V}[\alpha(x - l_1)], \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_n = A_n \mathrm{S}[\alpha(x - l + l_n)] + B_n \mathrm{T}[\alpha(x - l + l_n)] + \\ \qquad + C_n \mathrm{U}[\alpha(x - l + l_n)] + D_n \mathrm{V}[\alpha x - l + l_n)], \end{cases}$$

în care : v_i este amplitudinea oscilaţiilor; S, T, U şi V — combinaţii de funcţii circulare şi hiperbolice (introduse de A. N. Krîlov) ; A_i, B_i, C_i şi D_i — constante de integrare, iar $\alpha^4 = \omega^2 \frac{q}{EI}$, unde ω este pulsaţia oscilaţiilor proprii, q — masa redusă pe unitatea de lungime a arborelui, EI — rigiditatea la încovoiere a arborelui.

Pentru determinarea celor $4n$ constante de integrare (A_i, B_i, C_i şi D_i) sînt necesare $4n$ condiţii iniţiale :

$$(2)\quad \begin{cases} v_{1(x=0)}=0, \quad v_{2(x=l_1)}=0, \quad v_{3(x=l_1+l_2)}=0,\ldots, v_{n(x=l-ln)}=0; \\ v_{1(x=l_1)}=0, \quad v_{2(x=l_1+l_2)}=0, \quad v_{3(x=l_1+l_2+l_3)}=0,\ldots, v_{n(x=l)}=0; \\ \left(\frac{dv_1}{dx}\right)_{x=l_1}=\left(\frac{dv_2}{dx}\right)_{x=l_1}, \quad \left(\frac{dv_2}{dx}\right)_{x=l_1+l_2}=\left(\frac{dv_3}{dx}\right)_{x=l_1+l_2},\ldots; \\ \left(\frac{d^2v_1}{dx^2}\right)_{x=0}=0, \left(\frac{d^2v_1}{dx^2}\right)_{x=l_1}=\left(\frac{d^2v_2}{dx^2}\right)_{x=l_1},\ldots,\left(\frac{d^2v_n}{dx^2}\right)_{x=l}=0. \end{cases}$$

Condițiile (2_1) și (2_2) $(2n$ condiții) se scriu în ipoteza unor reazeme nedeplasabile. Relațiile (2_3) $(n-1$ condiții) exprimă faptul că la două deschideri alăturate rotirile pe reazeme sînt egale, iar (2_4) $(n+1$ condiții) se referă la egalitatea momentelor în reazemele dintre două deschideri alăturate $(n-1$ condiții) și la inexistența momentelor în reazemele de capăt (2 condiții).

Utilizînd (2_1) rezultă $A_1=A_2=\ldots=A_n=0$.

În consecință, după aplicarea celorlalte condiții, se obține un sistem omogen de $3n$ ecuații cu $3n$ necunoscute (constantele de integrare B_i, C_i și D_i).

Egalînd cu zero determinantul acestui sistem rezultă ecuația pulsațiilor.

În cazul arborelui principal de la mașinile de filat și de răsucit se obțin rezultate satisfăcătoare, cu privire la stabilirea pulsațiilor proprii, printr-un calcul simplificat, confirmat de experiență, luînd în considerare porțiuni de arbore alcătuite din cîte două deschideri alăturate, neglijîndu-se influența celorlalte deschideri (fig. 2), cu masa redusă q provenind de la arbore, roțile de curea și cuplajele montate pe deschiderile considerate.

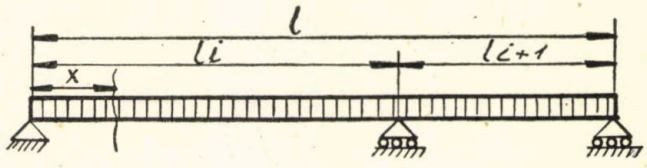


Fig. 2

Ecuațiile oscilațiilor de încovoiere pentru cele două deschideri sînt în baza lui (1):

$$(3)\quad \begin{cases} v_1=B_1\,\mathrm{T}(\alpha x)+C_1\,\mathrm{U}(\alpha x)+D_1\,\mathrm{V}(\alpha x), \\ v_2=B_2\,\mathrm{T}[\alpha(x-l_1)]+C_2\,\mathrm{U}[\alpha(x-l_1)]+D_2\,\mathrm{V}[\alpha(x-l_1)]. \end{cases}$$

Aplicînd condițiile inițiale (2) și introducînd funcțiile propuse de Prager și Hochenemser [5], ecuația pulsațiilor devine

$$(4)\qquad \mathrm{B}(\alpha l_1)\,\mathrm{S}_1(\alpha l_2)+\mathrm{B}(\alpha l_2)\,\mathrm{S}_1(\alpha l_1)=0.$$

Introducînd notația $\xi=l_1/(l_1+l_2)=l_1/l$, ecuația (4) capătă forma

$$(5)\qquad \mathrm{B}(\alpha l\xi)\,\mathrm{S}_1[\alpha l(1-\xi)]+\mathrm{B}[\alpha l(1-\xi)]\,\mathrm{S}_1(\alpha l\xi)=0.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

La valori determinate ale lui ξ, ecuația (5) este satisfăcută pentru anumite valori ale parametrului αl, care conține pulsația ω. Utilizînd valorile tabelate ale funcțiilor B și S_1, prin aproximări succesive se obține grafic legătura dintre αl și ξ, conform fig. 3; pentru un ξ dat se găsește pe curbă valoarea corespunzătoare αl care satisface ecuația (5).

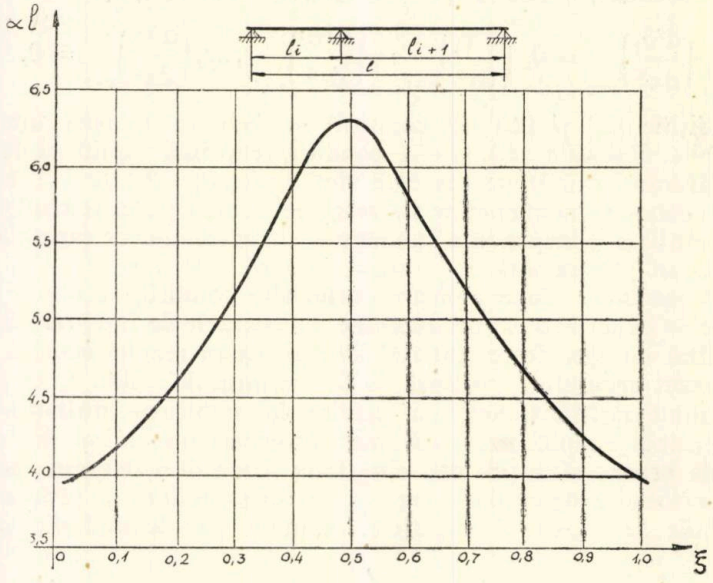


Fig. 3

Avînd parametrul αl se obține pulsația critică:

$$\omega = \left(\frac{\alpha l}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{q}},$$

cu care, după înlocuirea $\omega = \pi n/30$, se găsește pentru turația critică expresia:

$$n_{cr} = 9{,}55 \left(\frac{\alpha l}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{q}}. \tag{6}$$

2. Rezultatele cercetării

Rezultatele teoretice și experimentale de mai jos se referă la arborii principali de la mașinile de filat FBC (aceeași construcție se întîlnește și la mașina FBP) și de răsucit 4R, fabricate în țara noastră. Schemele de calcul respective sînt prezentate în fig. 4 și 5, în care: *I* reprezintă roată curea, *II*—cuplaj, *III*—roată bachelită, *IV*—roată dințată, *V*—frînă.

Calculul turațiilor critice fundamentale s-a efectuat cu relația (6) utilizînd și datele de bază din tabelul 1 și admițînd că: a) este neglijabilă

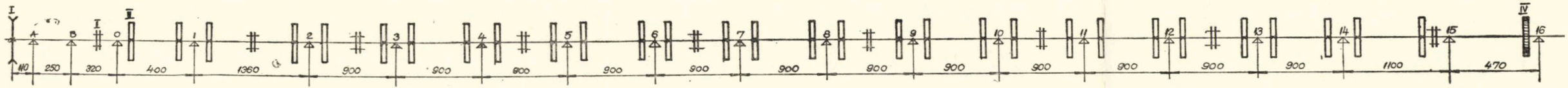

I
II
IV
110
250
320
400
1360
900
900
900
900
900
900
900
900
900
900
900
900
1100
470

Fig. 4

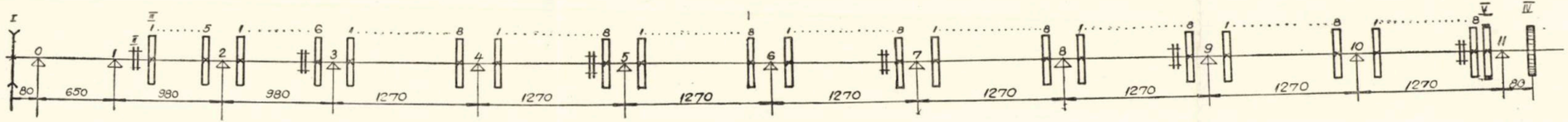

I
II
V
IV
80
650
980
980
1270
1270
1270
1270
1270
1270
1270
1270
1270
80

Fig. 5

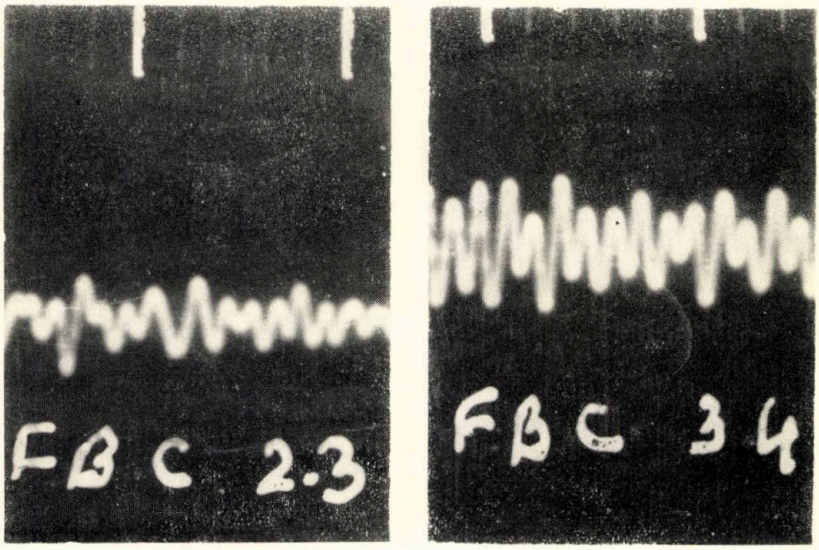


Fig. 6

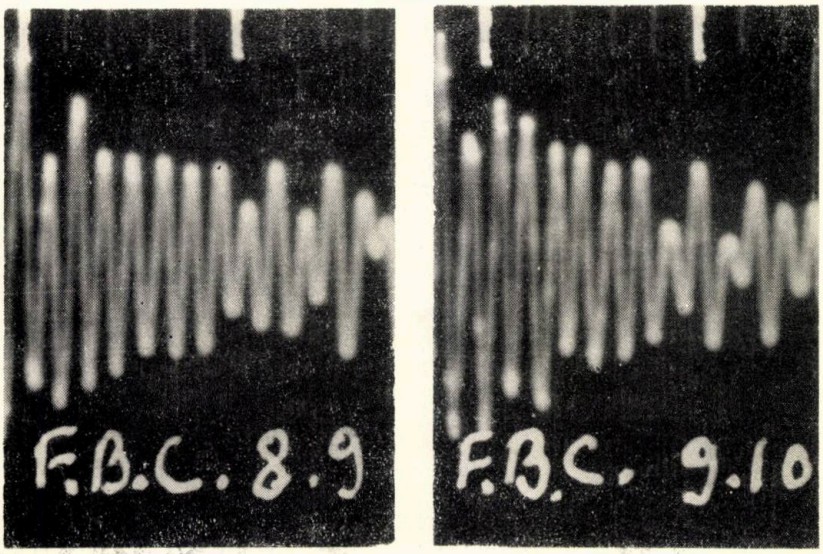


Fig. 7

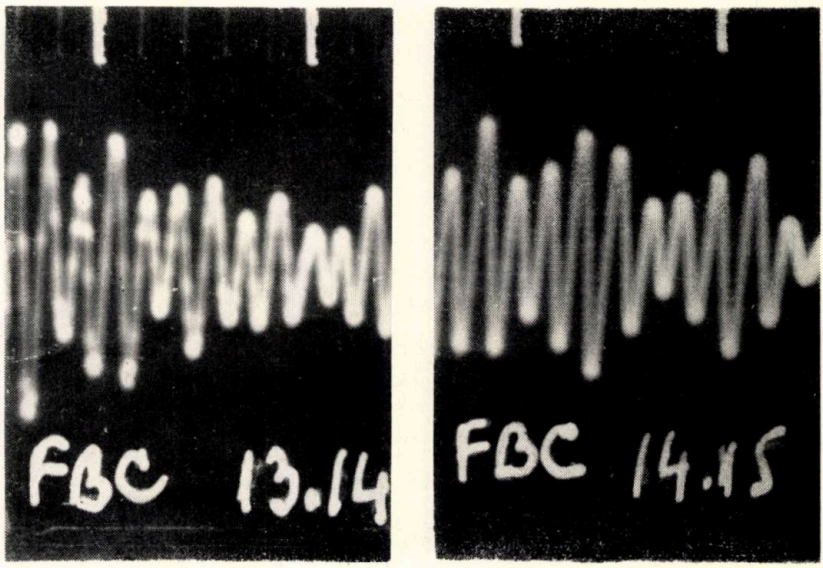


Fig. 8

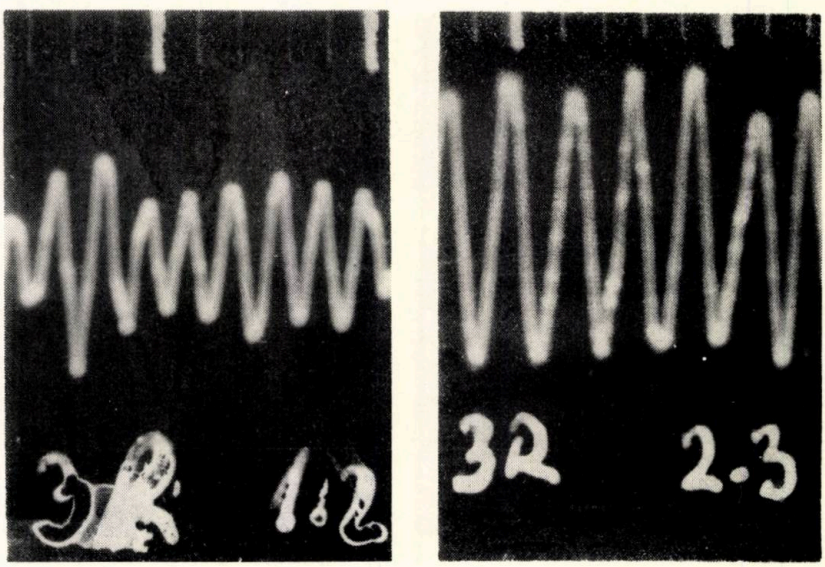


Fig. 9

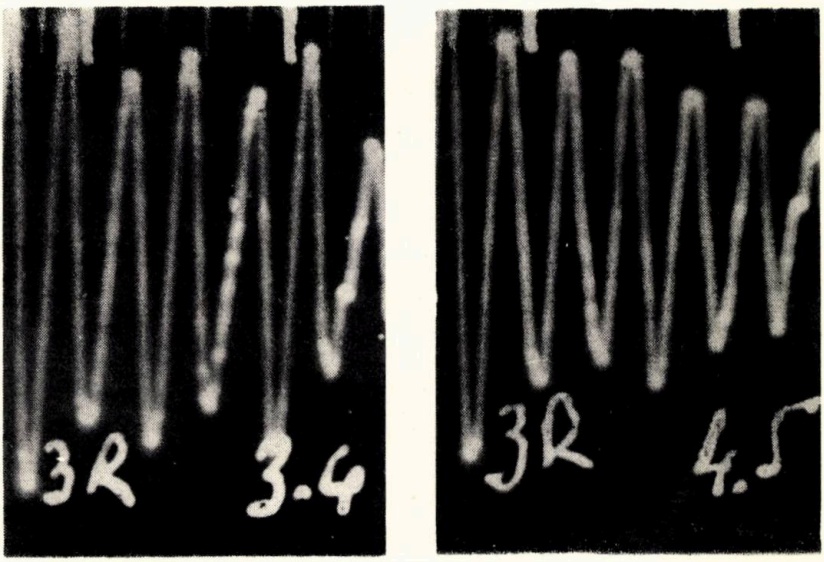


Fig. 10

influenţa roţilor de curea *I*, a roţilor dinţate *IV* şi a roţilor de frînă *V*, ca fiind amplasate în apropierea lagărelor respective ; b) masele cuplajelor şi a roţilor de bachelită, conform ipotezelor formulate anterior, sînt distribuite uniform pe grupe de cîte două deschideri alăturate; c) este neglijabilă influenţa tronsoanelor de arbore $A - B - O$ (fig. 4) şi $O - I$ (fig. 5) care sînt scurte şi cu încărcări mai reduse (turaţiile critice ridicate).

Tabelul 1

Denumirea \ Maşina	FBC (FBP)	3R
Diametrul arborelui principal (mm)	40	35
Greutatea cuplajului (kgf)	2,6	3,06
Greutatea roţii de bachelită (kgf)	0,9	1,06

Pentru determinarea experimentală a pulsaţiilor oscilaţiilor libere s-a excitat succesiv fiecare deschidere prin lovire transversală şi prin intermediul unui traductor de pulsaţii s-au ridicat oscilogramele respective.

În fig. 6... 10 sînt prezentate oscilogramele reprezentative (baza de timp între reperele groase este de 1/10 sec).

Rezultatele obţinute sînt trecute în tabelele 2 şi 3.

Tabelul 2

Tronson arbore [1])	q_2 (kgfs^{2}cm^{-2})	ξ	αl	Turaţia critică	
				calculată	determinată experimental [2])
0— 1— 2	$0{,}1725\,10^{-3}$	0,2275	4,70	2 645	2 640...2 760
1— 2— 3	$0{,}1845\,10^{-3}$	0,399	5,70	2 300	2 760...2 620
2— 3— 4	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	2 620...4 760
3— 4— 5	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	4 760...4 440
4— 5— 6	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	4 440...4 500
5— 6— 7	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	4 500...4 680
6— 7— 8	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	4 680...4 380
7— 8— 9	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	4 380...4 440
8— 9—10	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	4 440...4 500
9—10—11	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	4 500...4 680
10—11—12	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	3 680.. 4 440
11—12—13	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	4 440...3 900
12—13—14	$0{,}1758\,10^{-3}$	0,500	6,28	4 500	3 900...3 600
13—14—15	$0{,}1732\,10^{-3}$	0,450	6,17	3 580	3 600
14—15—16	$0{,}1772\,10^{-3}$	0,300	5,10	3 880	3 800

[1]) Cifrele din coloană indică poziţiile reazemelor.

[2]) Datele din prima coloană se referă la deschiderile de lungime l_i, iar celelalte la deschiderile l_{i+1}.

Tabelul 3

Tronson arbore	q_2 (kgf s^2 cm^{-2})	ξ	αl	Turația critică	
				calculată	determinată experimental
1— 2— 3	$0{,}170\,10^{-3}$	0,500	6,28	2 744	2 940...2 160
2— 3— 4	$0{,}163\,10^{-3}$	0,434	6,28	2 100	2 160...2 040
3— 4— 5	$0{,}162\,10^{-3}$	0,500	6,28	1 830	2 040...1 980
4— 5— 6	$0{,}162\,10^{-3}$	0,500	6,28	1 830	1 980...2 040
5— 6— 7	$0{,}162\,10^{-3}$	0,500	6,28	1 830	2 040...2 100
6— 7— 8	$0{,}162\,10^{-3}$	0,500	6,28	1 830	2 100...2 220
7— 8— 9	$0{,}162\,10^{-3}$	0,500	6,28	1 830	2 220...2 100
8— 9—10	$0{,}162\,10^{-3}$	0,500	7,28	1 830	2 100...2 220
9—10—11	$0{,}162\,10^{-3}$	0,500	6,28	1 830	2 220...2 160

3. Concluzii

Analiza rezultatelor teoretice și experimentale obținute cu privire la valorile turațiilor critice, atît pentru arborele principal al mașinilor de filat FBC și FBP (tabelul 2) cît și al mașini de răsucit 3R (tabelul 3) denotă o bună concordanță între datele experimentale și cele teoretice.

1. La arborii mașinilor FBC și FBP, pentru tonsoanele cuprinse între reazemele *3....13*, valorile turațiilor critice determinate experimental coincid cu cele calculate.

2. La arborele mașinii 3R, pentru marea majoritate a tronsoanelor, turațiile critice au valori de cca 2 000 rot/min, apropiate de valoarea calculată 1 830 rot/min.

3. Micile diferențe care apar între valorile experimentale și cele teoretice, în special la tronsoanele dinspre capetele arborilor, se datoresc ipotezelor simplificatoare adoptate.

Rezultă deci că metoda de calcul propusă pentru arborii mașinilor de filat și de răsucit, cu luarea în considerare a grupelor de cîte două tronsoane alăturate, este cea mai indicată, întrucît reduce volumul calculelor și oferă în plus posibilitatea depistării unor eventuale rezonanțe pe diferite porțiuni de arbore.

Primită la 25 V 1969

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de filatură
și
Catedra de rezistența materialelor

BIBLIOGRAFIE

1. Harris M. C., Crede E. Ch., *Şocuri şi vibraţii.* Vol. **I, II, III,** Ed. tehn., Buc., 1968, 1969 (trad. din l. engleză).
2. Ripianu A., *Mişcările vibratorii ale arborilor drepţi şi cotiţi.* Ed. Acad. R. S. R., Buc., 1969.
3. Ponomarev S. E., şi colab., *Calculul modern de rezistenţă în construcţia de maşini.* Ed. tehn., Buc., 1966 (trad. din l. rusă).
4. Ripianu A., Albu A., *Osii şi arbori rectilinii.* Ed. tehn., Buc., 1964.
5. Ананиев И. В., *Справочник по расчету собственых колебаний упругих систем.* Гостехиздат, М., 1952.
6. Гольденбахт И. И. и с., *Справочник по расчету строительных констукций на устоичивости и колебания.* М., 1952.

SUR LA DÉTERMINATION DES VITESSES CRITIQUES DES ARBRES PRINCIPAUX DES CONTINUS À FILER ET À RETORDRE

(Résumé)

On propose une méthode simple pour le calcul des vitesses critiques fondamentales des arbres principaux des continus à filer et à retordre, équipés avec des roues pour l'entrainement des broches.

L'arbre principal est considéré comme une poutre à section constante sur appuis simples indéplaçables, chaque tronçon (entre deux paliers voisins) étant chargé par la masse propre et les masses des roues et des couplages uniformément répartis.

Avec l'équations des pulsations établie pour des portions d'arbre comprises entre deux tronçons voisins, on obtient des valeurs satisfaisantes pour les vitesses critiques fondamentales, qui sont verifiées par l'expérience.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia VI : INDUSTRIE UŞOARĂ

C. Z. 677.021

INFLUENŢA VITEZELOR MARI DE CARDARE ASUPRA CALITĂŢII CARDĂRII ŞI CARACTERISTICILOR PRODUSULUI LA CARDA CU GARNITURĂ RIGIDĂ PENTRU BUMBAC

DE

V. COPILU şi N. COJOCARU

Comunicare prezentată la a IV-a conferinţă tehnico-ştiinţifică textilă, Bucureşti, septembrie 1968

1. Introducere

Dintre maşinile existente în filatura de bumbac, carda a înregistrat în ultimii 5 ani, după laminor, cea mai mare creştere de productivitate. Faţă de carda clasică, la care productivitatea nu depăşea 2...5 kg/h, cardele moderne lucrează în mod curent cu 15...20 kg/h, iar la expoziţia internaţională de maşini textile de la Basel din septembrie 1967, firmele Toyoda, Trutzschler şi Roberts, au prezentat prototipuri de carde cu o productivitate pînă la 40...45 kg/h.

Acest progres enorm se datoreşte desigur studierii profunde a fenomenelor care au loc în complexul proces al cardării. Investigaţiile făcute au scos la iveală trei factori principali care determină creşterea producţiei cardei: a) utilizarea unor garnituri rigide speciale pentru tambur şi perietor şi semirigide pentru capace; b) mărirea vitezei tamburului, respectiv a perietorului; c) perfecţionarea subansamblului cilindrului rupător.

În ce priveşte eficienţa garniturii rigide, este cunoscută caracteristica acesteia, datorită profilului dinţilor, de a asigura fibrelor o mai mare mobilitate, cu influenţe favorabile asupra condiţiilor de cardare, de uniformizare a stratului de fibre şi de transferare a fibrelor de pe tambur pe perietor.

Viteza mărită a tamburului asigură în aceeaşi proporţie o creştere a intensităţii de cardare, iar prin perfecţionarea subansamblului cilindrului rupător se oferă zonei de cardare tambur-capace un material fibros cu un grad mai mare de destrămare şi curăţire, ceea ce uşurează efortul de cardare în această zonă.

Fenomenele şi efectele care au loc la cardă, prin aplicarea celor trei elemente, au fost obiectivele a numeroase investigaţii care arată că la creşterea productivităţii cardei se modifică în mod deosebit două elemente importante ale cardării, anume încărcarea tamburului cu fibre şi formarea cîrligelor. Astfel s-a constatat că:

1. La creşterea producţiei cardei, cu menţinerea constantă a fineţei benzii, încărcarea tamburului creşte [1], iar numărul de fibre cu cîrlige majoritare (cu cîrligul în urmă) scade, în timp ce numărul fibrelor cu cîrlige minoritare (cu cîr-

ligul în față crește [2]. La o creștere puternică a încărcării tamburului, numărul cîrligelor minoritare crește și el foarte pronunțat, concomitent cu creșterea numărului de nopeuri în văl și a neregularității benzii [2].

2. La creșterea productivității cardei pe seama măririi densității liniare a benzii, menținînd vitezele organelor de lucru constante, are loc o creștere apreciabilă a încărcării tamburului, însă cu o influență relativ mică asupra formării cîrligelor [2].

3. Indicele de transfer al fibrelor de pe tambur pe perietor este mai mare la carda cu viteză mărită a tamburului, ceea ce micșorează încărcarea tamburului [3].

4. Unii cercetători [4] afirmă că la cardarea bumbacului cu garnitură rigidă și viteză mărită a tamburului, gradul de vătămare al fibrelor ar crește și el, iar alții [5], [6] dimpotrivă, au păreri opuse.

Autorii și-au propus să analizeze și să cerceteze comparativ efectele cardării bumbacului cu carda de mare productivitate prevăzută cu garnitură rigidă, îndeosebi la cardarea bumbacului cu fibră lungă. În lucrare s-a urmărit efectul cardării asupra scurtării fibrelor, purității vălului, cantității și calității deșeului rezultat și calității firelor obținute.

2. Metoda de cercetare

Experimentarea s-a făcut cu trei tipuri de cardă: a) tipul *I*, cardă clasică cu garnitură elastică; b) tipul *II*, cardă clasică cu garnitură rigidă pe tambur și perietor și elastică pe capace; c) tipul *III*, cardă de mare productivitate tip Platts 600, cu garnitură rigidă pe tambur și perietor și semirigidă pe capace.

Caracteristicile garniturilor sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Tipul cardei	Denumirea organelor	Grosimea bazei mm	Înălțimea totală a dintelui mm	Unghiul de cardare grade	Desimea ace/cm²
I	tambur			75	93
	cilindru perietor	—	—	72	101
	liniale			75	—
II	tambur	0,9	4	80	55
	cilindru perietor	0,8	4	75	62
	liniale	—	—	75	101
III	tambur	0,9	3,10	80	86
	cilindru perietor	0,9	4,05	70	60
	liniale	0,4/0,25	8	78	58

Detașarea vălului la primele două tipuri de carde se realizează cu pieptene oscilant, iar la al treilea tip cu un dispozitiv cu cilindri urmat de dispozitiv Crosrol.

Diametrele și vitezele organelor de lucru la cele trei tipuri de carde sînt prezentate în tabelul 2.

Tabelul 2

Denumirea organelor	Tipul cardei					
	I		*II*		*III*	
	diametrul mm	viteza de lucru rot/min	diametrul mm	viteza de lucru rot/min	diametrul mm	viteza de lucru rot/min
Tambur	1260	180	1280	206	1279,5	300
Cilindru rupător	245	415	225	730	232	670
Cilindru întorcător	—	—	52	590	—	—
Capace (mm/min)	—	80	—	80	—	180
Cilindru perietor	670	5; 7,5; 10	662	6; 7,5; 10	659,3	7 trepte

La tipurile de carde *I* și *II*, experimentarea s-a făcut cu trei trepte de productivitate : 2,5 ; 3,7 ; 5 kg/h, iar la tipul al treilea cu 7 trepte : 3,7 ; 5 ; 7,5 ; 10 ; 12,5 ; 15 și 17,5 kg/h.

Pentru experimentare s-a folosit un singur tip de bumbac și anume Menoufi cu $l_f = 36/37$ mm, finețea micronaire de 3,2...3,5 și maturitatea 2,0...2,2.

Pentru a evita influența variației calității bumbacului, experimentarea s-a făcut cu pături rezultate din aceeași partidă de amestec avînd aceeași densitate liniară de 420 g/m, obținînd o bandă de 4,2 g/m, adică s-a lucrat cu un laminaj la cardă de 100. Din banda obținută la cardele tip *I* și *III* cu productivitățile respective, și cu sistemul de pieptănare obișnuit, s-au produs și două sortimente de fire, 7,2 tex și 10 tex.

3. Rezultatele obținute și interpretarea lor

3.1. Încărcarea tamburului

Deoarece cantitatea de fibre de pe tambur are o influență mare asupra calității cardării s-au determinat, prin măsurători, încărcările tamburului corespunzătoare la treptele de productivitate experimentate la cardele tip *II* și *III*. Rezultatele prezentate în fig. 1 arată o creștere a încărcării tamburului cu fibre o dată cu creșterea productivității la ambele tipuri de carde, dar la un nivel mai scăzut la carda cu viteză mărită a tamburului (tipul *III*).

S-a determinat și coeficientul de transfer al fibrelor de pe tambur pe perietor, K_t %, cu relația

$$K_t = \frac{q}{Q} 100\ \%, \tag{1}$$

în care q este cantitatea de fibre ce trece pe perietor la o rotație a tamburului (g), iar Q_T — cantitatea de fibre existentă pe tambur, sau încărcarea tamburului (g).

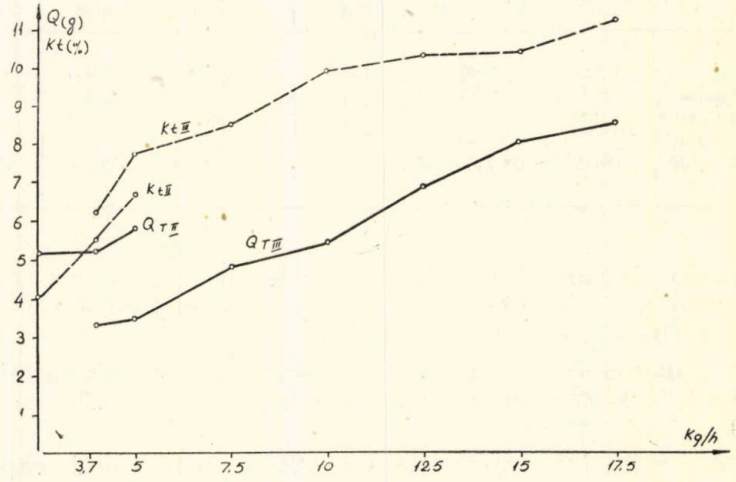


Fig. 1

Valoarea lui q se determină cu relația

$$T_t = \frac{q}{L_0}, \tag{2}$$

în care T_t este finețea stratului de fibre de pe perietor (g/m), L_0 — lungimea stratului de fibre depus la o rotație a tamburului (m),

$$L_0 = \frac{V_p}{n_T}, \tag{3}$$

unde V_p este viteza perietorului (m/min), iar n_T — turația tamburului (rot/min). Valoarea lui V_p se poate deduce din formula productivității cardei

$$P_t = \frac{60\ V_p\ T_t}{1000}\ \text{(kg/h)} \quad \text{și atunci} \quad L_0 = \frac{1000\ P_t}{60\ T_t\ n_T}. \tag{4}$$

Din (4_2) și (2) se obține

$$q = \frac{1000\,P_t}{60\,n_T}, \tag{5}$$

care înlocuit în (1) dă

$$K_t = \frac{10^4}{6n_T}\,\frac{P_t}{Q_T}\,(\%). \tag{6}$$

Pentru carda clasică

$$K_{tII} = \frac{10^4}{6\cdot 208}\,\frac{P_t}{Q_T} = 8{,}0\,\frac{P_t}{Q_T}\,(\%), \tag{7}$$

iar pentru carda de mare productivitate

$$K_{tIII} = \frac{10^4}{6\cdot 300}\,\frac{P_t}{Q_T} = 5{,}55\,\frac{P_t}{Q_T}\,(\%). \tag{8}$$

Reprezentînd pe același grafic (fig. 1) pe K_t alături de încărcarea tamburului, se constată o creștere a coeficientului de transfer în același sens cu încărcarea tamburului, dar cu o pantă mai mică, deoarece Q_T prezintă o creștere mai puțin pronunțată decît creșterea productivității cardei.

La analiza celorlalți factori ai cardării se va constata influența puternică a gradului de încărcare a tamburului și a coeficientului de transfer asupra calității cardării.

3.2. Scurtarea fibrelor

Pentru a obține o precizie mai mare, măsurarea lungimii fibrelor din pătură și din banda obținută s-a efectuat cu aparatul și metoda Jukov.

S-au scos în evidență lungimea modul și lungimea filatorului și nu lungimea medie care este afectată și de fibrele scurte eliminate în deșeuri. De asemenea, s-au analizat modificările variației lungimii fibrelor prin indicele B în procente.

La măsurarea lungimii fibrelor din pătură s-au obținut următoarele rezultate : $l_m = 33{,}32$ mm, $l_f = 36{,}7$ mm și $B = 32{,}25\%$. Aceleași măsurători s-au efectuat și la benzile obținute la fiecare tip de cardă și treaptă de productivitate a cardei.

Scurtarea fibrelor rezultată în urma acțiunii de cardare s-a calculat procentual față de lungimea fibrelor din pătură, iar rezultatele sînt prezentate în fig. 2a, 2b, 2c.

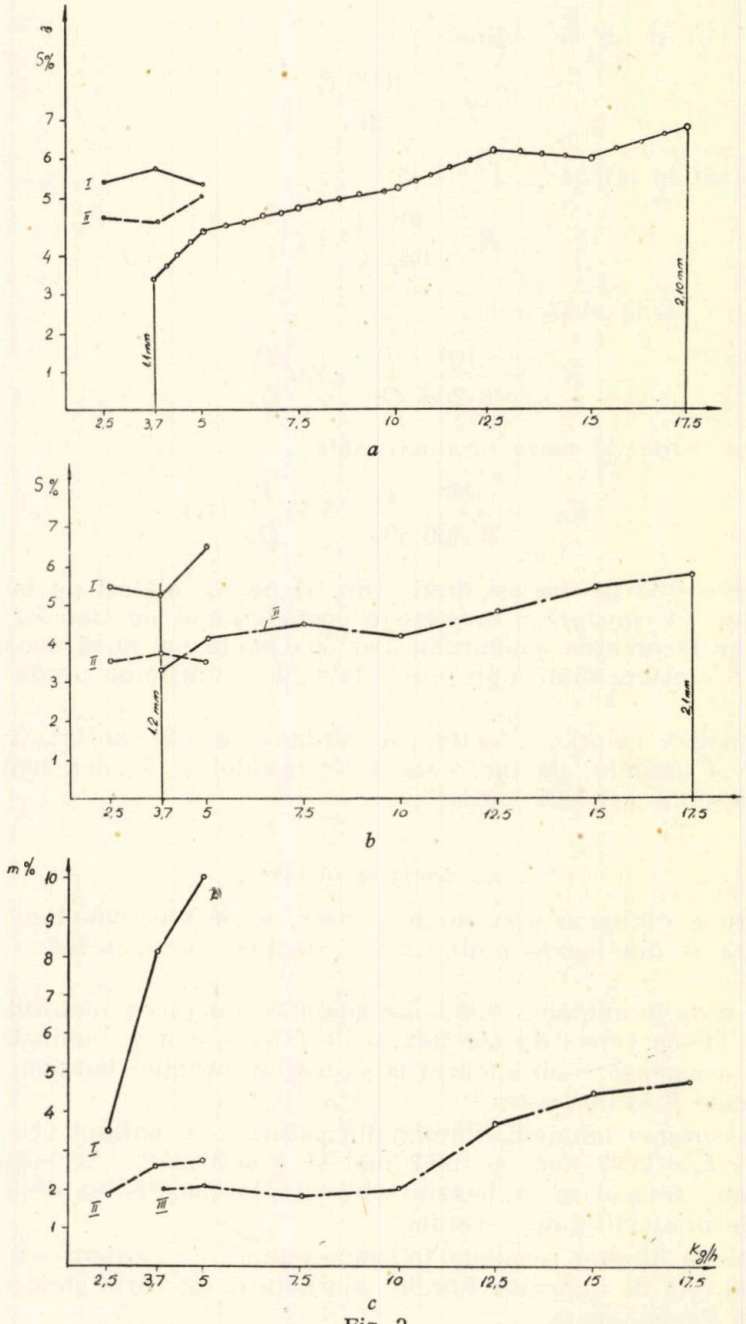

S%
I
II
1,1mm
2,10mm
2,5 3,7 5 7,5 10 12,5 15 17,5
a
S %
I
II
III
1,2 mm
2,1mm
2,5 3,7 5 7,5 10 12,5 15 17,5
b
m %
I
II
III
kg/h
2,5 3,7 5 7,5 10 12,5 15 17,5
c

Fig. 2

Din rezultatele obținute se desprind următoarele concluzii :

a) La productivități egale ale cardelor, scurtarea fibrelor este mai mare la carda tip *I* și la carda tip *II* în raport cu carda de mare productivitate (tip *III*).

b) O dată cu creșterea productivității cardei crește și scurtarea fibrelor la cele trei tipuri de carde ; astfel la carda de mare productivitate la o creștere de la 3,7 la 17,5 kg/h, scurtarea fibrelor (l_m) crește de la 3,5% (1,1 mm) la 6,6% (2,1 mm), iar micșorarea lungimii filatorului crește de la 3,4% (1,2 mm) la 5,8% (2,1 mm).

c) Micșorarea lungimii fibrelor, deși reprezintă o pierdere însemnată din valoarea de utilizare a materiei prime, nu depășește însă nivelul de scurtare a fibrelor de către carda clasică.

d) Din compararea graficelor de scurtare a fibrelor (fig. 2a și 2b) cu cel de încărcare a tamburului (fig. 1), se constată că nivelul scurtării este aproximativ proporțional cu gradul de încărcare a tamburului ; de aici rezultă că pentru a spori și mai mult productivitatea cardei este necesar să se mărească coeficientul de transfer al fibrelor pe perietor.

e) În ceea ce privește neregularitatea lungimii fibrelor din bandă (fig. 2c), se constată și aici o creștere în același sens cu productivitatea, însă mai puțin pronunțată la carda cu viteză mărită *(III)*, chiar și la valori mai mari ale productivității.

3.3. Nopeurile și impuritățile în văl

Nivelul la care se găsesc în văl nopeurile, impuritățile și alte defecte reprezintă gradul de cardare. Acesta este determinat în primul rînd de calitatea păturii alimentate, sortul bumbacului, mărimea ghemotoacelor, numărul nopeurilor și uniformitatea păturii. În al doilea rînd, de importanță mai mare decît calitatea păturii alimentate, calitatea vălului este determinată de capacitatea de destrămare a cardei (grad avansat de individualizare a fibrelor) și de eliminare a impurităților. Acestea, după cum se cunoaște, depind de construcția și parametrii tehnologici ai organelor de lucru și de reglajul și întreținerea acestora. În fig. 3a și 3b se prezintă variația numărului de nopeuri și impurități în văl pe 1 g la două din cele trei tipuri de carde în experimentare (carda tip *I* și tip *III*).

La carda tip *I* (cu garnitură elastică) determinările s-au efectuat la intervale de 12 minute între două deburaje (2 ore). La carda tip *III* (cu garnitură rigidă) s-au făcut determinări tot între două deburaje (48 ore) la intervale de 4 ore.

Trebuie precizat că la garniturile și bumbacul din prezenta experimentare, datorită încărcării tamburului și perietorului cu sfărîmături de semințe și frunze, s-a aplicat un deburaj ușor cu peria la intervale de 48 ore.

Din analizele efectuate rezultă următoarele observaţii :

a) La carda cu garnitură rigidă (fig. 3b) numărul de nopeuri în văl are o creştere lentă, în comparaţie cu carda cu garnitură elastică la care numărul de nopeuri are o creştere puternică, aproape liniară (fig. 3a).

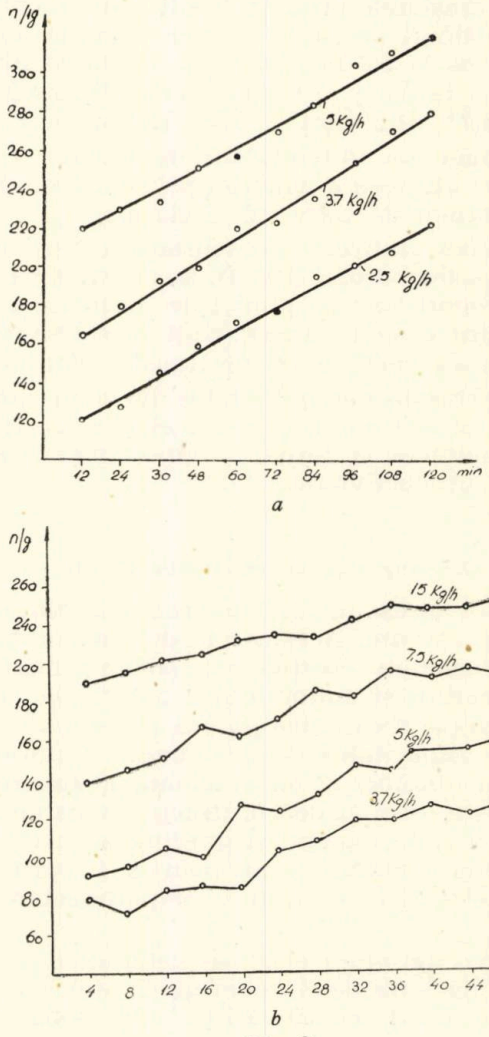


Fig. 3

b) La ambele tipuri de cardă nivelul nopeurilor şi al impurităţilor creşte o dată cu creşterea productivităţii cardei.

c) La carda cu viteză mărită a tamburului nivelul nopeurilor şi al impurităţilor se găseşte sub cel al cardei clasice, cu garnitură elastică.

Aceasta se datorește intensității mărite de cardare (care este proporțională cu viteza tamburului), unei încărcări mai reduse a tamburului și contribuției mecanismului îmbunătățit al cilindrului rupător.

Tipul garniturii rigide are de asemenea o mare influență asupra calității cardării, rezultatele obținute pentru carda tip *III* fiind valabile numai pentru tipul de garnitură rigidă, respectiv semirigidă, folosit.

3.4. Deșeurile rezultate

Din analiza graficelor din fig. 4a, 4b, 4c se desprind concluziile:

a) Cantitatea totală de deșeuri rezultate la carda de mare productivitate, la productivități egale, este inferioară cantităților rezultate la cardele clasice și scade invers proporțional cu creșterea productivității cardei; astfel la creșterea productivității de la 3,7 kg/h la 15 kg/h procentul de deșeuri scade de la 3,5% la 2%, adică cu cca. 43% (fig. 4a).

b) Scăderea procentului total de deșeuri se datorește îndeosebi micșorării cantității de deșeuri de la capace (fig. 4b); la productivitatea de 17,5 kg/h a rezultat cu aproximativ 2% mai puțin deșeu decît la carda clasică.

c) Scăderea cantității de deșeu eliminat de cardă nu înrăutățește calitatea firului deoarece carda cu garnitură semirigidă la capace reține un procent mai mic de fibre în deșeu decît carda cu garnitură elastică la capace (fig. 4c).

3.5. Neregularitatea benzii

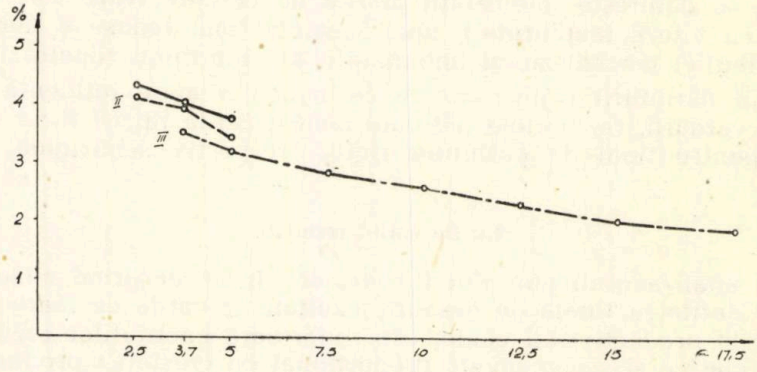
În fig. 5a și 5b sînt prezentate neregularitățile benzii obținute la diferite productivități ale cardelor.

Se remarcă că deși pătura alimentată are o neregularitate mică ($C_{v\ (3\ cm)} = 2{,}6\%$), neregularitatea benzii crește puternic o dată cu mărirea productivității cardei. La producții peste 15 kg/h, neregularitatea benzii ajunge în zona normativului Uster „neregulat" (carda Platts 600 cu care s-a făcut experimentarea are o productivitate curentă de 10 kg/h pentru bumbacul cu fibră lungă).

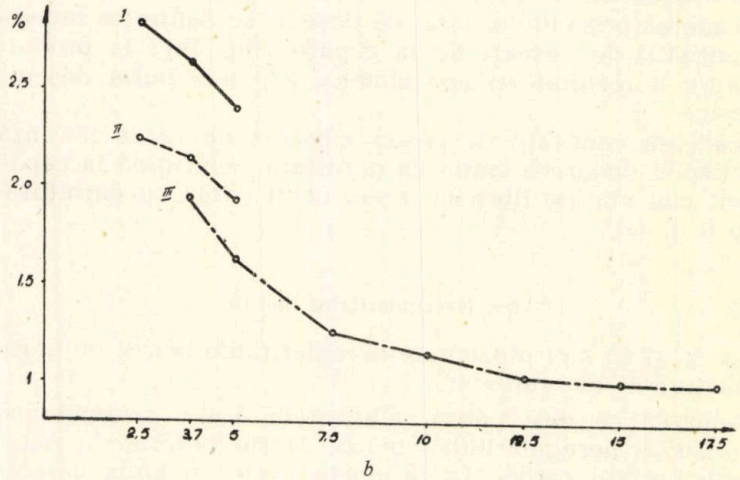
Pe porțiuni lungi neregularitatea benzii la carda de mare productivitate se încadrează la calificativul „bună", chiar la 17,5 kg/h. La aceleași productivități, carda clasică produce o bandă cu neregularitate mai mare.

3.6. Calitatea firelor

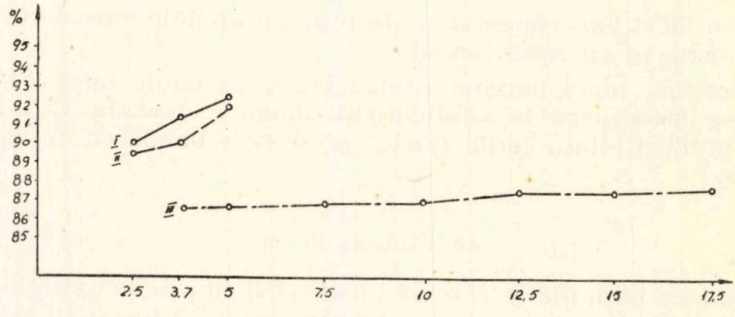
Din banda obținută la cardele tip *III* și *I*, cu productivitățile respective s-au produs, cu sistem de pieptănare, firele 7,2 tex și 10 tex, la care s-au analizat următoarele caracteristici, reprezentate în fig. 6a... 6d.


%
5
4
3
2
1
II
III
2,5
3,7
5
7,5
10
12,5
15
17,5

a


%
2,5
2,0
1,5
1
I
II
III
2,5
3,7
5
7,5
10
12,5
15
17,5

b


%
95
94
93
92
91
90
89
88
87
86
85
I
II
III
2,5
3,7
5
7,5
10
12,5
15
17,5

c

Fig. 4

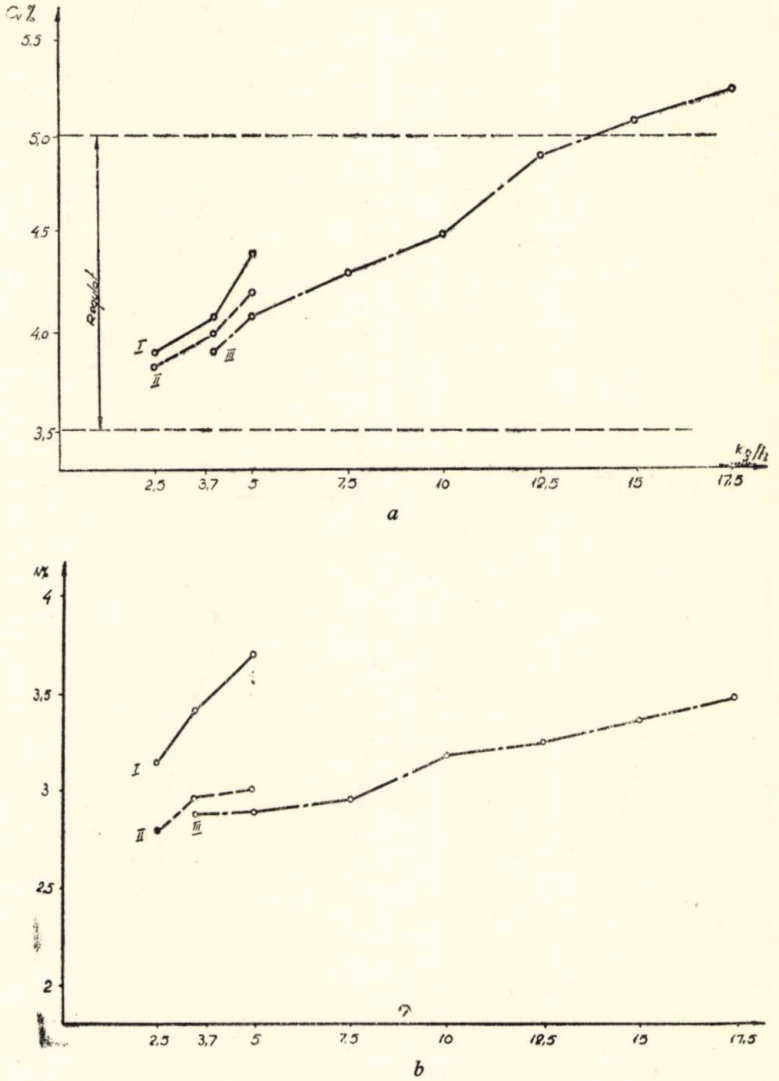

Cv %
5,5
5,0
4,5
4,0
3,5
Regiuni
I
II
III
kg/l
2,5
3,7
5
7,5
10
12,5
15
17,5
a
%
4
3,5
3
2,5
2
I
II
III
2,5
3,7
5
7,5
10
12,5
15
17,5
b

Fig. 5

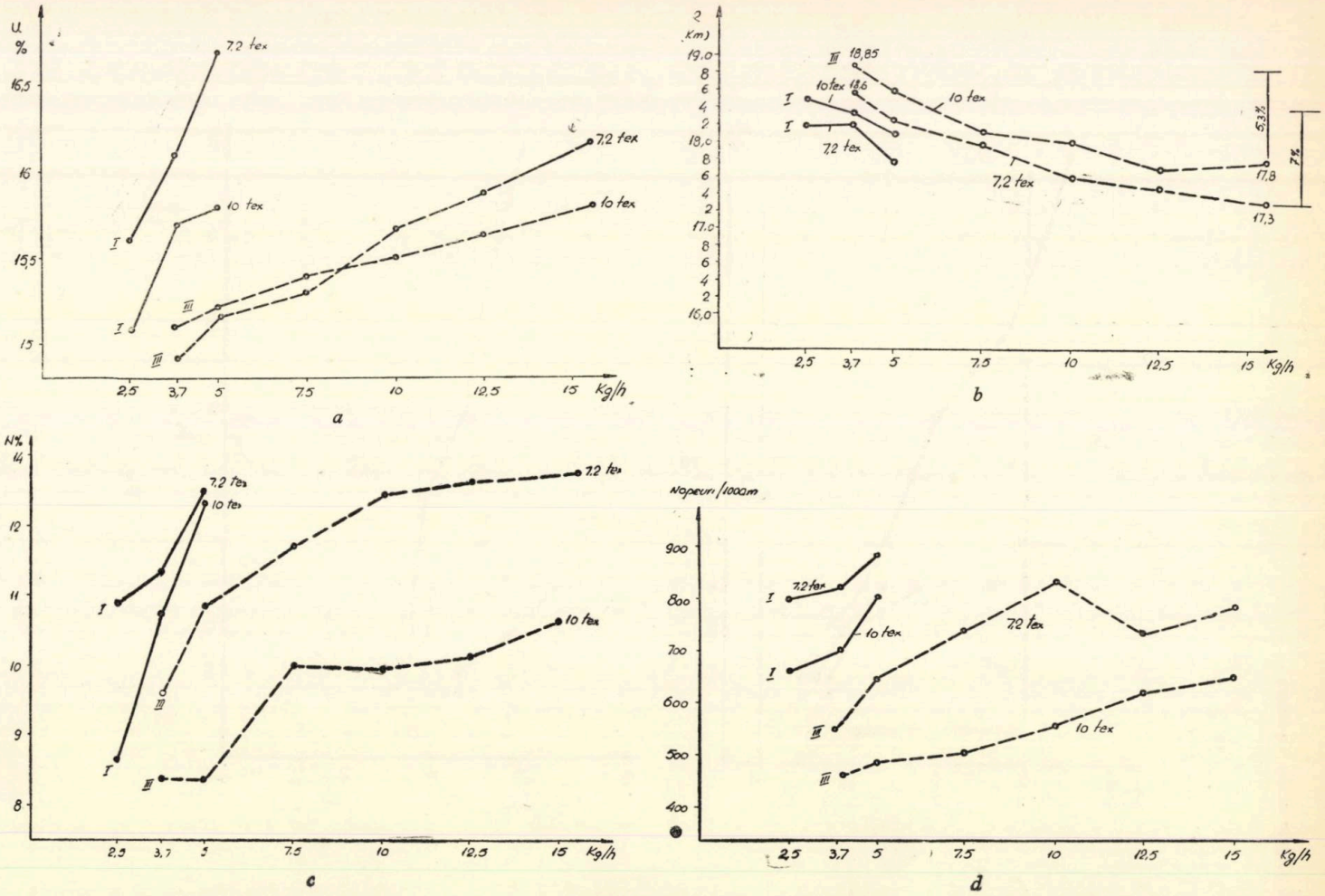

U %
16,5
16
15,5
15
7,2 tex
10 tex
I
III
2,5
3,7
5
7,5
10
12,5
15
Kg/h
a
Km)
19,0
18,0
17,0
16,0
18,85
18,6
17,8
17,3
5,3%
7%
b
N%
14
12
11
10
9
8
c
Napeuri/1000m
900
800
700
600
500
400
d

Fig. 6

Neregularitatea la finețe (fig. 6a). Se constată o creștere puternică a neregularității firelor obținute din banda de la carda clasică *(I)*. Firele din banda produsă de carda de mare productivitate înregistrează de asemenea o creștere pe măsura măririi productivității cardei, dar această creștere este mai puțin accentuată, firele încadrîndu-se în normativul Uster „regulat" chiar la productivitatea de 15 kg/h.

Rezistența la sarcina de rupere a firelor (fig. 6b). La ambele tipuri de carde rezistența firelor scade ușor cu creșterea productivității cardei. Astfel, la 7,2 tex, la creșterea productivității de la 3,7 la 15 kg/h, rezistența scade de la 18,6 la 17,3 km, adică cu 7%. Micșorarea rezistenței o dată cu mărirea productivității, ar putea fi atribuită creșterii efectului de vătămare a fibrelor, creșterii numărului de fibre, în banda de cardă, cu cîrlige în față [2] și neregularității firelor.

Neregularitatea rezistenței la sarcina de rupere a firelor (Sommer) (fig. 6c). Se constată că, asemănător cu neregularitatea la finețe, și neregularitatea la rezistență a firelor crește o dată cu productivitatea cardei. La productivități peste 12,5 kg/h neregularitatea ajunge la calificativul III.

Nopeuri, îngroșări și subțieri în fir (fig. 6d). Deși benzile produse cu treptele respective de productivitate a cardei au trecut prin același proces de pieptănare, în firele obținute numărul de nopeuri, îngroșări și subțieri (determinate cu aparatul Imperfection) crește o dată cu productivitatea cardei. Dar, chiar la o productivitate de 15 kg/h, numărul acestor defecte nu depășește pe cel existent în firele obținute din banda produsă la carda clasică.

4. Concluzii

Din rezultatele investigațiilor făcute la cele trei tipuri de carde și trepte de productivitate stabilite, precum și din analizeze firelor obținute, se desprind următoarele concluzii :

1. Încărcarea tamburului cu fibre crește o dată cu productivitatea la toate tipurile de carde experimentate, dar la carda cu viteză mărită a tamburului nivelul încărcării este sub cel al cardei clasice. Cunoașterea acestui aspect prezintă o deosebită importanță deoarece nivelul încărcării tamburului cu fibre are o puternică influență asupra calității cardării.

2. O dată cu creșterea productivității cardei, gradul de scurtare a fibrelor crește, dar pînă la o productivitate de cca. 17,5 kg/h, scurtarea fibrelor la carda de mare productivitate nu depășește nivelul de scurtare la carda clasică cu garnitură elastică. Vătămarea fibrelor poate fi micșorată prin reducerea încărcării tamburului, deci la menținerea constantă a fineței benzii, prin creșterea coeficientului de transfer al fibrelor de pe tambur pe perietor. O dată cu reducerea gradului de încărcare se poate micșora și neregularitatea lungimii fibrelor din banda

rezultată la cardă, iar reducerea gradului de scurtare a fibrelor îmbunătățește și regularitatea la lungime a fibrelor din bandă.

3. Numărul de nopeuri și impurități în vălul obținut crește o dată cu productivitatea cardei. La aceeași productivitate numărul lor crește în timpul funcționării, fiind necesară deburarea cardei la intervale de 48...96 de ore (la carda de mare productivitate), în funcție de calitatea bumbacului. Numărul de nopeuri și impurități în vălul obținut la carda de mare productivitate, chiar la o producție de 15 kg/h și deburaj la 48 ore, nu depășește pe cel rezultat în vălul de la carda clasică (cu garnitură elastică) la o producție de 3,7 kg/h și deburaj la 2 ore. Totuși numărul mare de nopeuri și impurități în vălul de la cardă constituie o problemă care necesită găsirea unor soluții mai eficace.

4. La carda de mare productivitate procentul de deșeuri scade pe măsura creșterii productivității, fără a avea o influență deosebită asupra calității firelor, datorită unei selectivități mai bune a fibrelor în zona de cardare, capacele reținînd un procent mai mic de fibre bune.

5. O dată cu creșterea productivității cardei se mărește și neregularitatea benzii. Astfel la o productivitate peste 15 kg/h neregularitatea intră în zona normativului Uster „neregulat". Acest fenomen arată că la cardele de mare productivitate trebuie să se intervină cu alte elemente asupra neregularității benzii, fiind de considerat alimentarea cardei cu pătură care prezintă o neregularitate minimă, aplicarea unui regulator de finețe a benzii debitate etc.

6. Firele obținute din banda produsă la carda de mare productivitate prezintă o creștere a neregularității proporțională cu productivitatea, dar care se situează sub nivelul de neregularitate a fibrelor obținute la carda clasică. Totuși la productivități peste 15 kg/h neregularitatea firelor ajunge în zona normativului Uster „neregulat". Acest defect poate fi atribuit neregularității benzii de la cardă, nopeurilor și impurităților conținute de vălul produs la productivități mai mari ale cardei.

7. Se remarcă o micșorare ușoară a lungimii de rupere a firelor, o dată cu creșterea productivității cardei, care poate fi atribuită vătămării fibrelor, creșterii numărului de fibre cu cîrlige în banda de cardă și neregularității firului. Tot acestor cauze li se datorește și creșterea ușoară a neregularității la rezistență a fibrelor, o dată cu creșterea productivității cardei.

Defectele menționate, care se accentuează o dată cu creșterea productivității cardei, îndeosebi peste 15 kg/h, pot fi diminuate prin: a) mărirea intensității de cardare, atît în zona capacelor cît și a cilindrului rupător; b) reducerea încărcării tamburului prin mărirea coeficientului de transfer al fibrelor de pe tambur pe perietor. Aceasta poate fi realizată prin micșorarea unghiului garniturii tamburului, mărirea vitezei tamburului și micșorarea diametrului perietorului și a coeficientului de frecare dintre fibre și dinții garniturii [7].

Pe lîngă cele semnalate, pentru a obţine o eficienţă maximă, carda de mare productivitate necesită o atenţie sporită faţă de carda clasică privind întreţinerea ei : reglaje, ungere, curăţire şi supraveghere. Cu aceste condiţii şi cu alte perfecţionări aduse cardelor moderne (dispozitiv Crosrol, dispozitiv de detaşare a vălului cu cilindri, curăţire pneumatică, etc.), *se întrevăd posibilităţi de a obţine productivităţi şi mai mari la carde fără a se înrăutăţi calitatea benzii produse.*

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de filatură

BIBLIOGRAFIE

1. Browen R. S. a.o., Tex. Bull., 1966, *11*, pp. 1—3.
2. Simson T., Tex. Research Journal, 1965, *35*, pp. 504—519.
3. Snitler G., Moron B., Bull. I.T.F., 1966, *4*.
4. Harnald E., Browen R. S., Tex. Bull., 1967, *12*, pp. 25—28.
5. * * * L'Industrie Textile, 1968, 2, pp. 101—108.
6. Copilu V. ş.a., *Eficienţa tehnologică a cardei de mare productivitate cu garnitură rigidă pentru cardarea bumbacului cu fibră lungă*. Ind. textilă, 1967, *18*.
7. Батурин Я. и. с., Технол. текст. пром., 1964, *4*.

THE INFLUENCE OF COTTON HIGH-SPEED CARDING ON THE PROCESSES AND YARN QUALITY

(Summary)

This work presents the results of researches regarding the influence of carding the long staple cotton on cards covered with metallic card clothing and a high cylinder speed.

The tests have been carried out on the same cotton (Menoufi 36/37 mm) on three different types of cards : a) Type *I* cards with flexible clothing ; b) Type *II* cards with mettallic card clothing on the doffer and cylinder and flexible wire flats ; c) Type *III* cards (Type 600 Platts) with metallic card clothing for cylinder and doffer and semiflexible wire flats.

The cylinder speeds for the *I*-st type has been 180 R.P.M., on the *II*-nd type 206 R.P.M. and the *III*-rd type 300 R.P.M.

The results for eight steps of doffer speed or of production card (Kg/h) that are presented in the graphs show the following. Fig. 1 : both the transfering coefficient of fibres on the doffer and the cylinder stuffing have a linear variation, increasing with card production. Fig. 2a, 2b and 2c show that on the card with a high speed of cylinder, the shortening of fibres even at a high production does not exceed the level of shortening obtained at classical cards. Fig. 3a, 3b reveal that the number of trashes and neps in web have a linear increasing with production and interval of stripping. In that case on the cards of the *III*-rd type have been obtained lower values than of classical ones. Fig. 4a, 4b, 4c show that on the cards of the *III*-rd type the percentage of waste are decreasing with production increasing, having lower values than on the classical cards. Fig. 5a, 5b denote that the irregularity of sliver increases with production, at the same speeds, the Uster values of sliver from the *III*-rd type of cards are lower than on the classical cards, yet at a production over 15 kg/h CV is higher than „good" Uster standard value.

At the same production of cards, the yarns irregularity obtained from sliver from the *III*-rd types of cards is lower than that of the *II*-nd types of cards, yet, over a 15 kg/h production, the Uster value is higher than „good" standard (fig. 6a). It has been found out a slightly reduction of yarn strength with an increasing of card production (fig. 6b). The phenomenon is due to fibres deterioreting and to sliver irregularity.

As a conclusion at a card with metallic clothing and a higher cylinder speed there are some posibilities of a higher production through increasing of carding intensity in cylinder-flats zone, reducing of cylinder stuffing through increasing of transffering coefficient of fibres on the doffer and increasing of regularity of the material after and before carding.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia VI : INDUSTRIE UŞOARĂ

C. D. 677.84

RECHERCHES SUR LE MÉCANISME DE LA TEINTURE DE LA LAINE AVEC LES COLORANTS ACIDES

PAR

TANIA FORST, I. OPREA et MIŞILIM GRINDEA

Communication présentée lors de la III-ème Conférence Républicaine de Chimie, Jassy, juin 1966

1. Introduction

Le mécanisme de la teinture de la laine avec les colorants acides est une ancienne préoccupation de la chimie tinctoriale ; en 1889 Knecht a étudié le problème de la réaction des colorants acides avec la fibre de laine [1]. Des contributions importantes dans l'éclaircissement de ce mécanisme ont été apportées plus tard par Elöd [2], Speakman [3], Ender et Müller [4].

Cependant le simple mécanisme de la formation des électrovalences est considéré comme insuffisant ; on peut aussi envisager l'existence d'autres liaisons, particulièrement des liaisons secondaires considérées comme spécifiques pour le phénomène de la substantivité dans le cas de la cellulose. D'autre part, de la multitude des phénomènes pratiques, il y a encore de nombreux problèmes insuffisamment élucidés et particulièrement celui de la teinture de la laine en bain neutre.

Aussi constate-t-on que dans la pratique il n'y a pas encore de juste orientation concernant certains facteurs qui influencent le phénomène tinctorial, par exemple les électrolytes neutres.

Notre étude a pour but d'apporter certaines contributions à la connaissance de la corrélation qui existe entre la structure des colorants et leur comportement tinctorial. On a choisi une série de colorants dérivés de la pyrazolone qui diffèrent entre eux par la nature et la position des substituents.

L'influence de la structure des colorants sur leur comportement tinctorial a été établie par la connaissance „à-priori" des formules structurales, du comportement en solutions acqueuses, de la tendence d'association avec — ou sans — électrolyte neutre (Na_2SO_4), de la balance hydrophyle-hydrophobe, du comportement tinctorial vis-à-vis de la laine et du cotton à pH différents.

2. Partie expérimentale

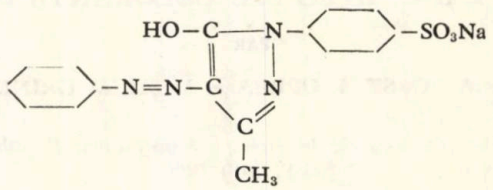
2.1. Matériel

Pour la teinture on a choisi des rubans de laine peignée, lavés avec un détergent nonionique.

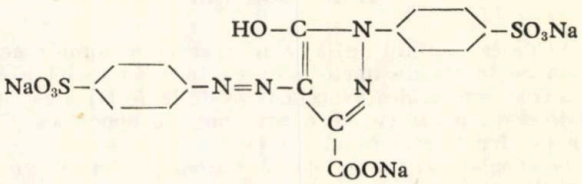
Les colorants ont étés purifiés selon une méthode indiquée pour les colorants réactifs et qui consiste en la dissolution dans la diméthylformamide suivie par la précipitation avec un solvent organique [5].

Les formules structurales des colorants sont les suivantes :

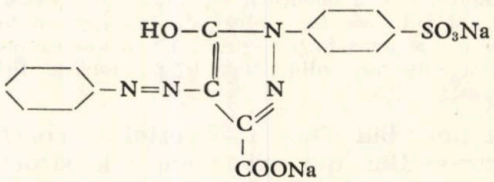
1. Jaune acide L (C. I. 18820)



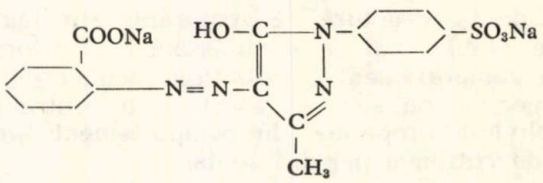
2. Tartrazine (C. I. 19140)



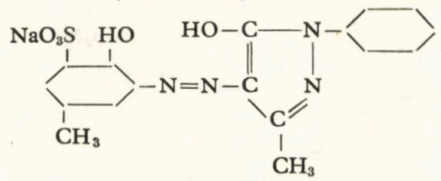
3. Flavazine S (C. I. 19130)



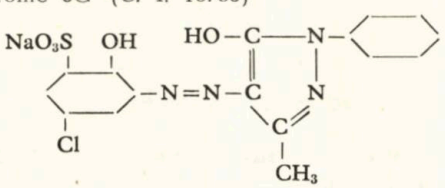
4. Jaune acide au chrome 2R (C. I. 18821)



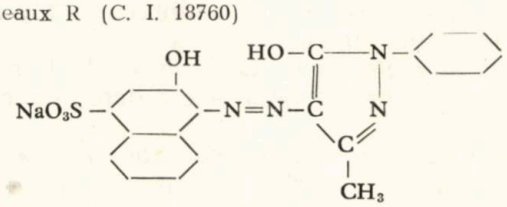
5. Rouge alizarine acide G (C. I. 18750)



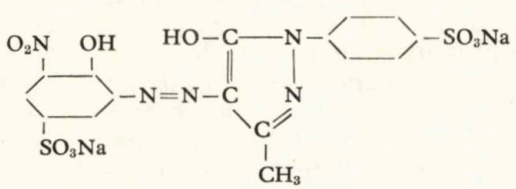
6. Rouge monochrome 5G (C. I. 18735)



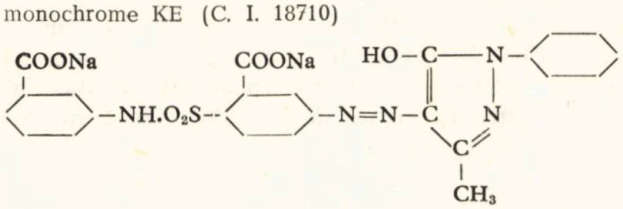
7. Salicin bordeaux R (C. I. 18760)



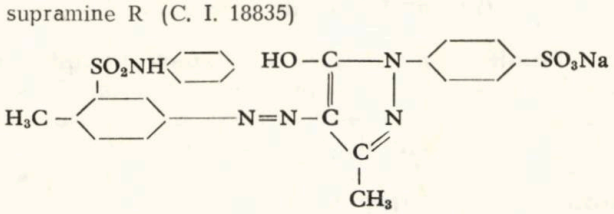
8. Orange solide au chrome 3RL (C. I. 18845)



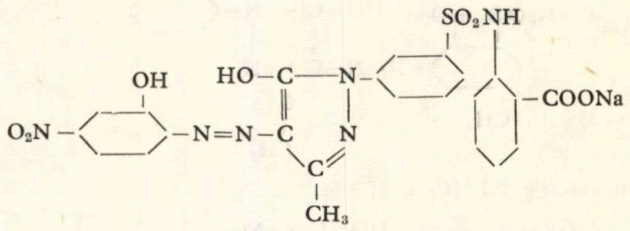
9. Jaune monochrome KE (C. I. 18710)



10. Jaune supramine R (C. I. 18835)



11. Rouge métachrome BB (C. I. 18885)



2.2. Mode opératoire

Les teintures ont été effectuées dans les conditions suivantes : a) 3% colorant, 3% acide sulfurique ; b) 3% colorant, 3% acide acétique ; c) 3% colorant, 10% sulfate de sodium ; d) 3% colorant (toutes les quantités se rapportent au matériel textile).

Le module du bain a été 1 : 50, la durée de la teinture, 30 min. La quantité de colorant prise par la laine a été déterminée par voie colorimétrique.

Le comportement des colorants en solutions acqueuses a été déterminé à l'aide des spectres d'absorbtion pour des différentes concentrations avec et sans électrolyte. On a déterminé les spectres en mesurant l'extinction pour des différentes longueurs d'onde et des différentes concentrations des solutions de colorants, en prenant des couches à épaisseurs inversement proportionnelles à la longueur d'onde.

Au cas de l'existence d'une dispersion moléculaire, les spectres restent les mêmes, mais si les molécules du colorant sont associées — soit par l'augmentation de la concentration, soit par la présence de l'électrolyte — les spectres sont différents et on constate un déplacement du maximum d'absorbtion.

La répartition des colorants dans les deux solvents immiscibles (alcool butylique-eau) a été déterminée par la méthode de Hadfield et Lemin [6]. La balance hydrophile-hidrophobe d'un colorant est caracterisée par le rapport entre la concentration du colorant dans l'alcool butylique et dans l'eau.

3. Interprétation de résultats

Les colorants étudiés ont été groupés tenant compte de leur ressemblence structurale et de leur comportement, comme il suit.

1) Les colorants nr. *1*, *2*, *3*, *4* ne manifestent aucune tendance à l'association, autant à l'augmentation de la concentration, qu'à la présence d'électrolyte, ce que l'on constate d'après les spectrogrammes des quatres colorants étudiés (fig. 1...4).

Un caractère plus hydrophobe du colorant ne signifie pas toujours une tendence vers l'association ; le colorant *1* est le plus hydrophobe de toute la série ($K=6,4$) et cependant il présente le même manque de tendence vers l'association que les autres.

Le colorant nr. *2* ne teint pas en milieu neutre et le 3-ème et *4*-ème teintent très peu ; au contraire, la colorant nr. *1* teint remarquablement bien, et ce fait est en concordance avec son caractère hydrophobe plus accentué (tableau 1).

Tableau 1

Nr.	Coeficient de distribution (K)	Epuisement (mg. colorant/1 g. laine)			
		H_2SO_4	CH_3COOH	Na_2SO_4	—
1	6,40	2,54	1,58	1,16	1,16
2	0,90	2,85	2,10	—	—
3	0,40	2,90	2,30	0,30	0,28
4	1,40	2,90	1,50	0,50	0,35
5	2,30	2,93	2,24	1,10	0,40
6	9,70	2,83	2,50	1,48	1,40
7	3,41	2,97	2,75	1,60	1,60
8	11,30	2,98	2,73	1,62	1,18
9	23	le colorant précipite	2,42	1,1	0,8
10	4	2,90	2,42	1,9	0,9
11	8	le colorant précipite	2,85	1,65	1,60

2) Les colorants nr. *5*, *6*, *7*, *8* se caractérisent par une très forte tendence vers l'association ce qui est dû à la présence des substituents supplémentaires par rapport à la première série, substituents qui favorisent l'association des molécules. L'association a été déterminée dans tous les cas par voie spectrophotométrique (fig. 5...8).

Le colorant nr. 5 possède 2 groupes méthyliques et la position du groupe SO_3H n'est pas défavorable à l'association comme dans le cas du colorant nr. 7 qui, bien qu'ayant un cycle benzénique de plus dans sa structure, n'associe que très peu.

Dans le cas du colorant nr. *6*, la substitution du groupe CH_3 par un atome de chlore est favorable à la tendence d'association du colorant. Ce fait permet l'hypothèse que le substituent en méta par rapport au

groupe azo contribue à l'association. Dans le cas du colorant nr. *8*, la présence d'un groupe polaire — NO_2, augmente la tendence vers l'association.

Tous les colorants de ce groupe teintent la laine en bain neutre et „salissent" très peu le cotton. Si ce dernier fait peut être attribué au second hydroxyle présent dans la molécule du colorant, il ne peut tout de même pas expliquer la teinture de la laine en bain neutre. Ceci peut être attribué au fait que tous les quatres colorants ont un caractère hydrophobe plus accentué que les colorants nr. *2*, *3* et *4* de la I-ère série (tableau 1).

3) La 3-ème série est caractérisée par l'augmentation de la molécule ce qui se reflète d'abord dans la tendence accentuée d'association (fig. 9...11).

Tous les trois colorants teintent la laine en bain neutre mais ne „salissent" pas le cotton, à l'exception du dernier qui „salit" très peu, ce qui est dû probablement à la présence d'un groupe —OH supplémentaire.

A cette tendence plus accentuée d'association dans le cas du colorant nr. *10* contribue aussi le fait que dans sa structure on retrouve un système restreint de doubles liaisons conjuguées. Ce sistème est interrompu par les groupes sulphonamidiques, mais elles permettent la mobilité de tout le système d'électrons, ce qui est dû aux électrons „isolés" de l'atome d'azote.

Il est bien probable que cette partie de la molécule contribue à l'association mais pas à la faible teinture („salissure") du cotton.

Le fait que tous ces colorants teintent la laine en milieu neutre est en bonne concordance avec leur caractère hydrophobe.

4. Conclusions

1. Le fait que tous les colorants étudiés ne possèdent pas de système de doubles liaisons conjuguées, ce qui explique en grande mesure leur comportement vis-à-vis du cotton, permet l'hypothèse du rôle important — dans la teinture neutre de la laine — de la dissolution du colorant dans les fibres — les liaisons hydrophobes.

Un caractère hydrophobe plus accentué ne signifie pas toujours aussi une tendence plus grande vers l'association, le cas du colorant nr. *1* qui a un caractère plus hydrophobe dû au manque de groupes solubilisantes. Il n'y a pas de corrélation entre le caractère hydrophobe et la capacité de teindre en milieu neutre pour toute la gamme des colorants choisis. Dans les groupes restreints on entrevoit certaines corrélations entre ces deux aspects.

2. Il n'y a pas de corrélation entre la tendance vers l'association des colorants et la capacité de teinture en milieu neutre. Quoique le colorant nr. *1* ne soit pas associé, il teint en milieu neutre, à cause de

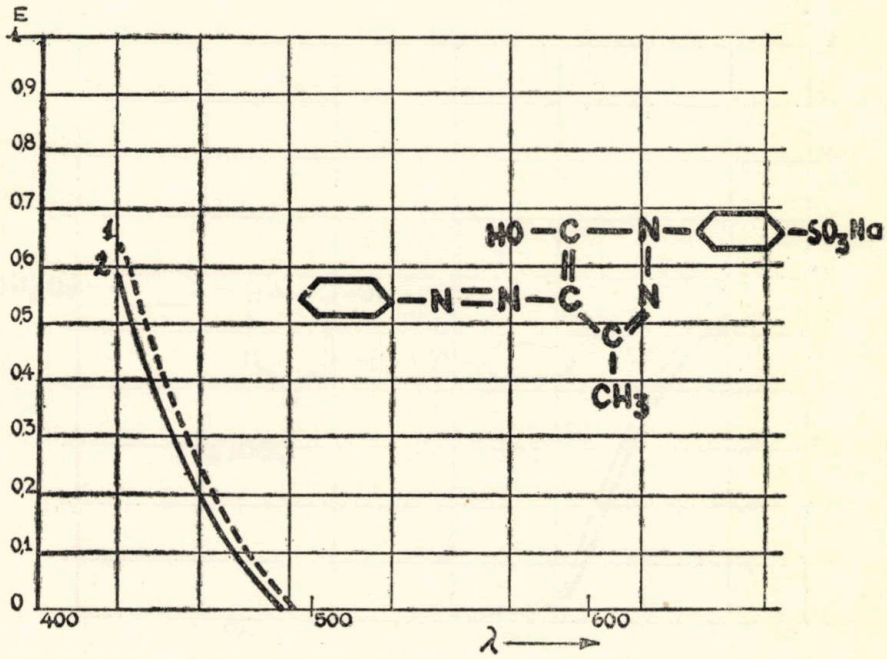


Fig. 1. — Colorant Jaune acide L (C. I. 18820). *1*—1000 mg/l colorant ; *2*—1000 mg/l colorant + 100 g/l Na_2SO_4.

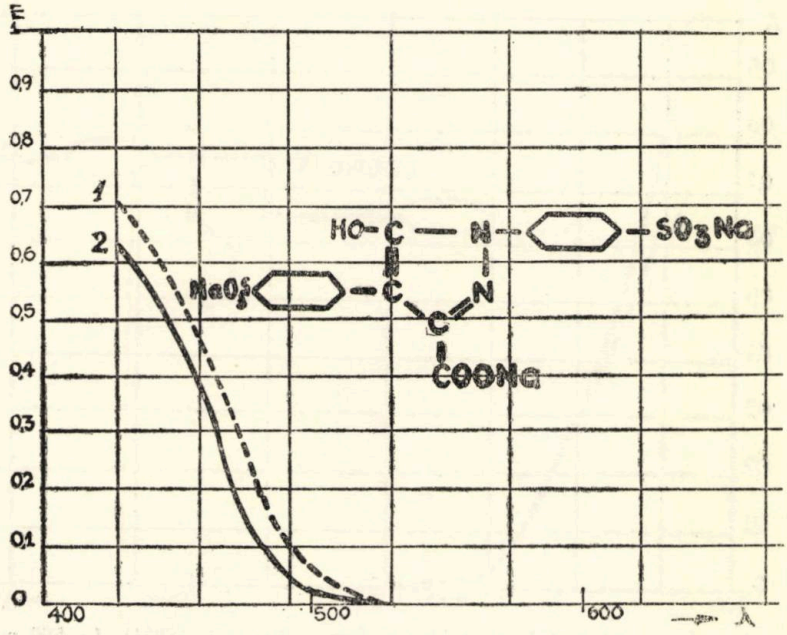


Fig. 2. — Colorant Tartrazine (C. I. 19140). *1*—1000 mg/l colorant ; *2*—1000 mg/l colorant + 100 g/l-Na_2SO_4.

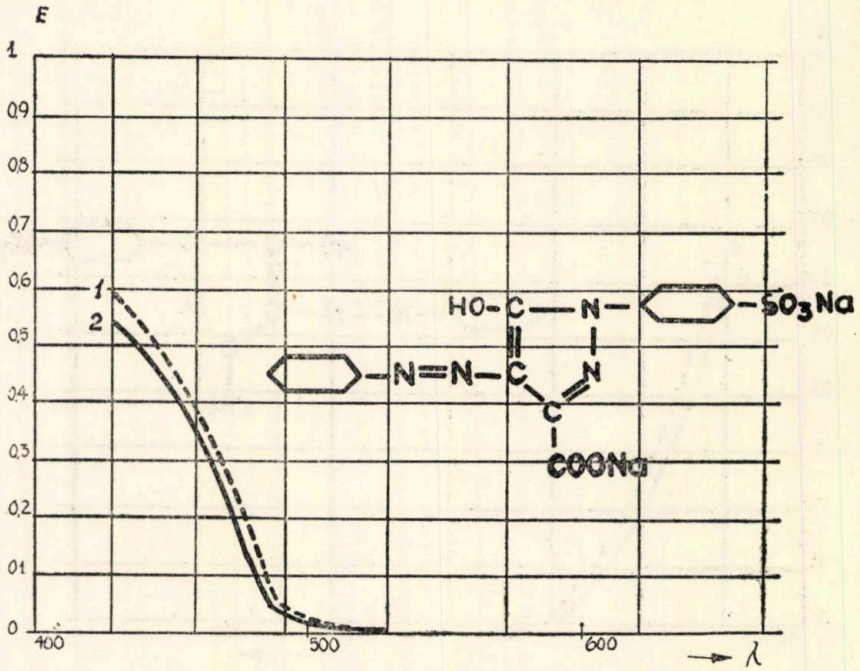


Fig. 3. — Colorant Flavazine S (C. I. 19130). *1*—250 mg/l colorant ; *2*—250 mg/l colorant + 100 g/l Na_2SO_4.

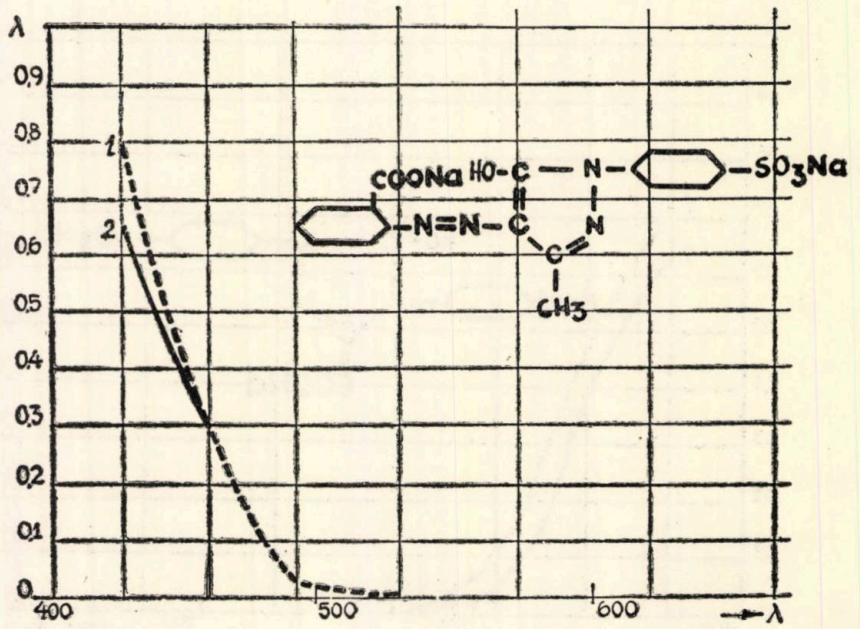


Fig. 4. — Colorant Jaune acide au chrome 2R (C. I. 18821). *1* — 500 mg/l colorant ; *2* — 500 mg/l colorant + 100 g/l Na_2SO_4.

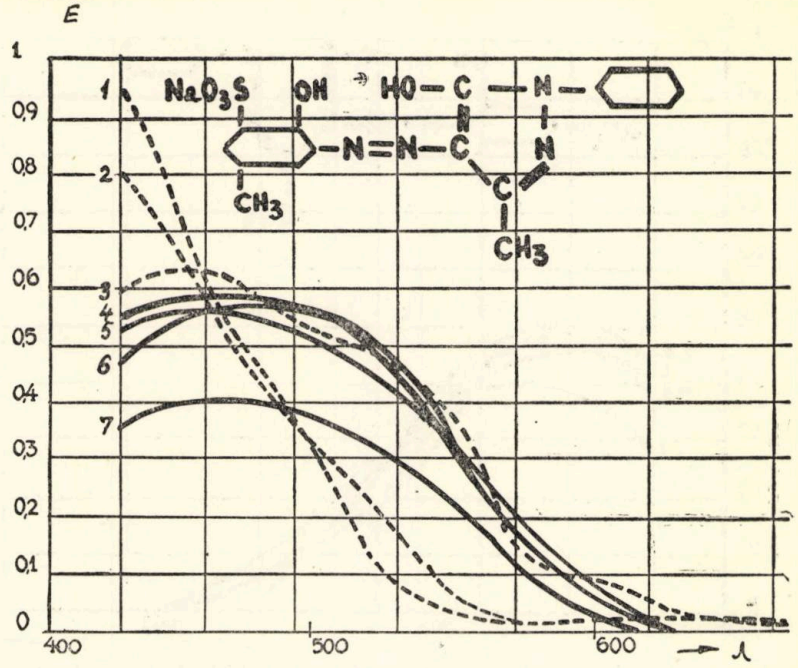


Fig. 5. — Colorant Rouge alizarine acide G (C. I. 18750). *1*—10 mg/l colorant; *2*—50 mg/l colorant; *3*—500 mg/l colorant; *4*—500 mg/l colorant+10 g/l Na_2SO_4; *5* — 500 mg/l colorant+20 g/l Na_2SO_4; *6* — 500 mg/l colorant+5 g/l Na_2SO_4; *7* — 500 mg/l colorant+100 g/l Na_2SO_4.

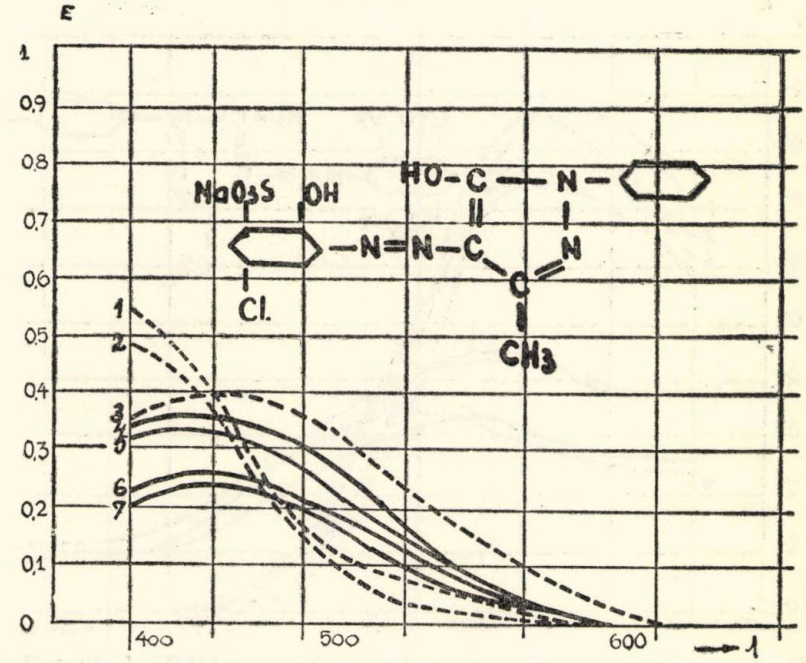


Fig. 6. — Colorant Rouge monochrome 5G (C. I. 18735). *1*—10 mg/l colorant; *2*—50 mg/l colorant; *3* — 500 mg/l colorant; *4* — 500 mg/l colorant + 10 g/l Na_2SO_4; *5* — 500 mg/l colorant+20 g/l Na_2SO_4; *6*— 500 mg/l colorant + 50 g/l Na_2SO_4; *7* — 500 mg/l colorant+100 g/l Na_2SO_4.

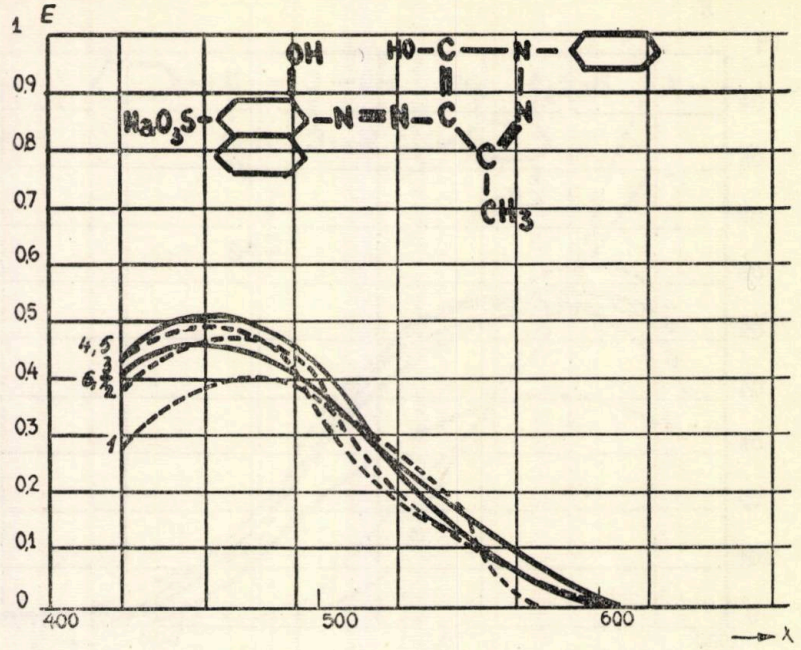


Fig. 7. — Colorant Salicin bordeaux R (C. I. 18760). *1*—20 mg/l colorant; *2*—100 mg/l colorant; *3*—1000 mg/l colorant; *4*—1000 mg/l colorant+10 g/l Na_2SO_4; *5*—1000 mg/l colorant+20 g/l Na_2SO_4; *6*—1000 mg/l colorant + + 50 g/l Na_2SO_4; *7*—1000 mg/l colorant+100 g/l Na_2SO_4.

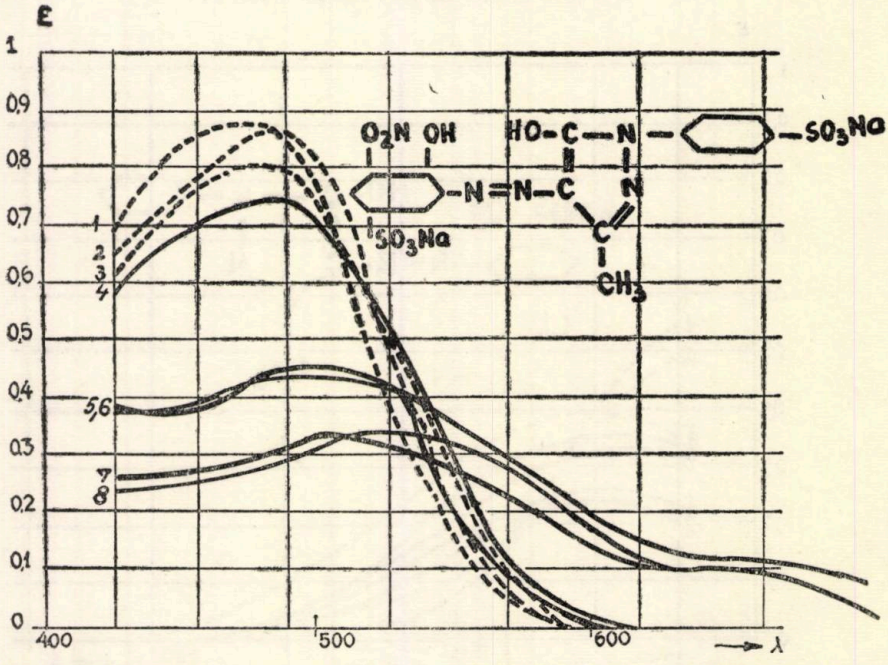


Fig. 8. — Colorant Orange solide au chrome 3RL (C. I. 18845). *1*—10 mg/l colorant; *2* — 50 mg/l colorant; *3* — 500 mg/l colorant; *4* — 500 mg/l colorant+5 g/l Na_2SO_4; *5*—500 mg/l colorant+10 g/l Na_2SO_4; *6*—500 mg/l colorant+20 g/l Na_2SO_4; *7*—500 mg/l colorant+50 g/l Na_2SO_4; *8*—500 mg/l colorant+ 100 g/l Na_2SO_4.

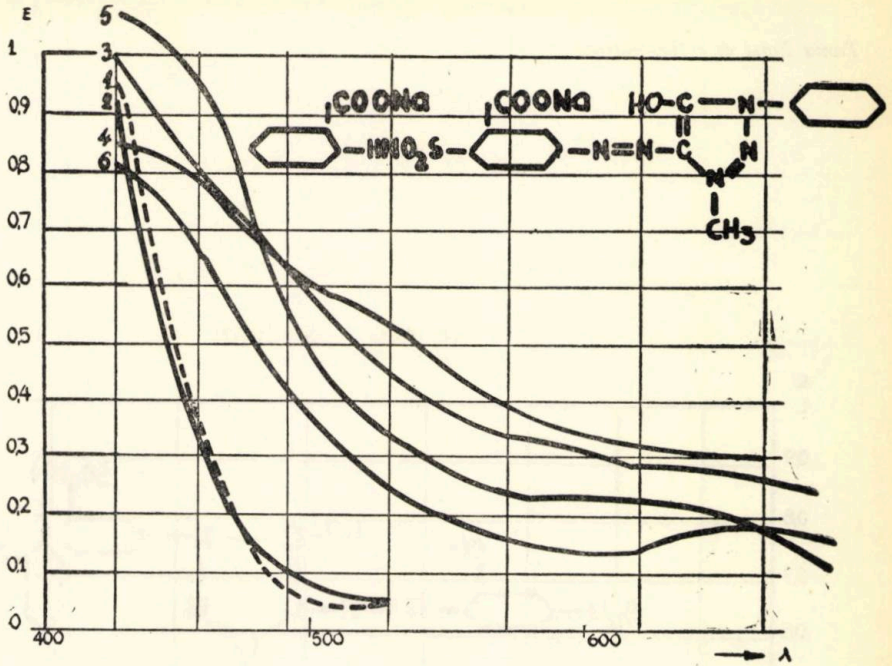


Fig. 9. — Colorant Jaune monochrome KE (C. I. 18710). *1* — 1000 mg/l colorant; *2* — 1000 mg/l colorant + 5 g/l Na_2SO_4; *3* — 1000 mg/l colorant + 10 g/l Na_2SO_4; *4* — 1000 mg/l colorant + 20 g/l Na_2SO_4; *5* — 1000 mg/l colorant + 50 g/l Na_2SO_4; *6* — 1000 mg/l colorant + 100 g/l Na_2SO_4.

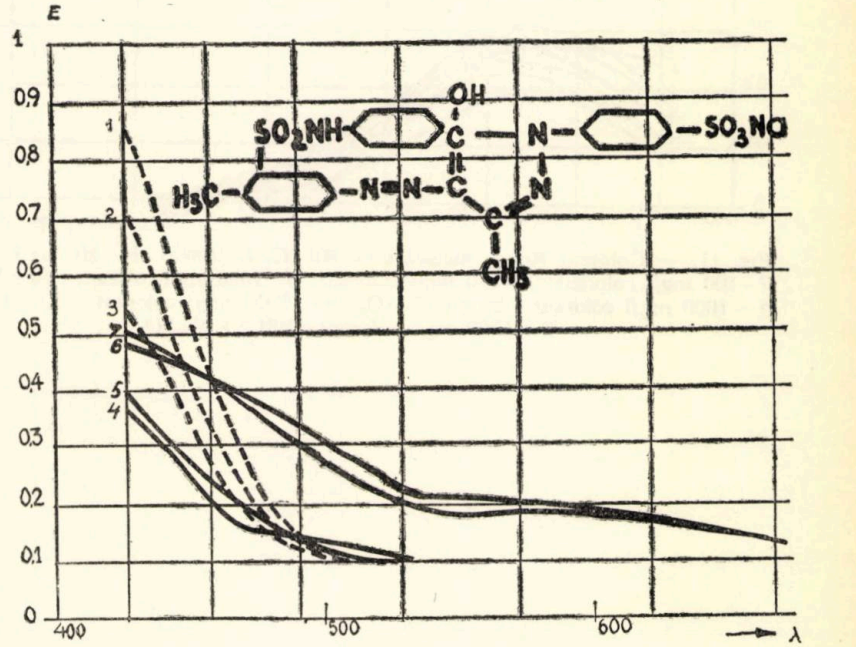


Fig. 10. — Colorant Jaune supramine R (C. I. 18835). *1* — 20 mg/l colorant; *2* — 100 mg/l colorant; *3* — 1000 mg/l colorant; *4* — 1000 mg/l colorant + 10 g/l Na_2SO_4; *5* — 1000 mg/l colorant + 20 g/l Na_2SO_4; *6* — 1000 mg/l colorant + + 50 g/l Na_3SO_4; *7* — 1000 mg/l colorant + 100 g/l Na_2SO_4.

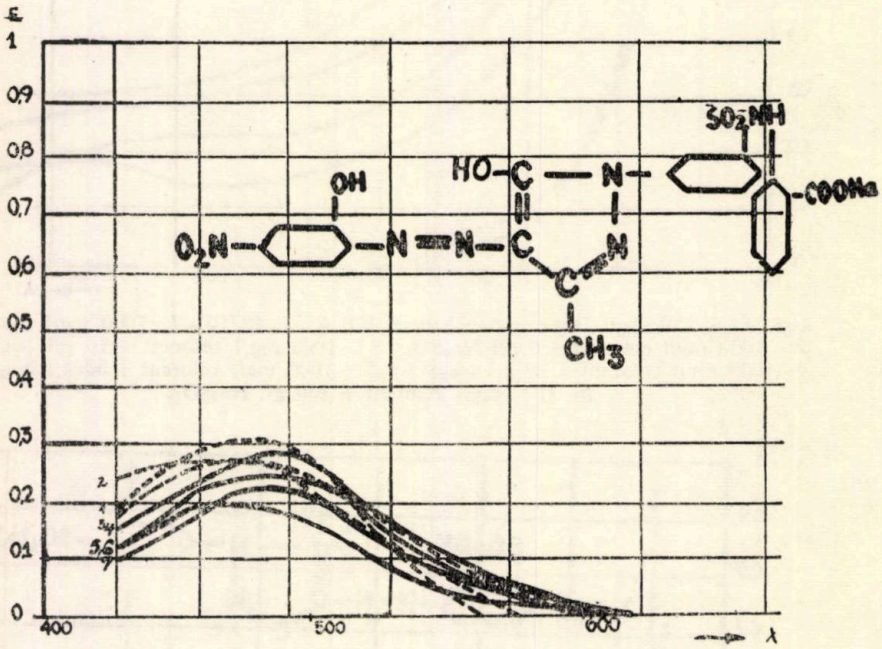


Fig. 11. — Colorant Rouge métachrome BB (C. I. 18885). *1* — 20 mg/l colorant ; *2* — 100 mg/l colorant ; *3* — 100 mg/l colorant ; *4* — 1000 mg/l colorant + 10 g/l Na_2SO_4 ; *5* — 1000 mg/l colorant + 20 g/l Na_2SO_4 ; *6* — 1000 mg/l colorant + 50 g/l Na_2SO_4 ; *7* — 1000 mg/l colorant + 100 g/l Na_2SO_4 .

son caractère hydrophobe plus accentué. Les colorants *2*, *3*, *4* ne teintent point ou ils teintent très peu. Ce fait confirme l'hypothèse que pour les colorants à structure simple, sans autres possibilités de liaison avec la fibre que les électrovalences, la teinture ne peut avoir lieu que dans un milieu fortement acide, et tout ceci à cause de l'affinité du protone pour la laine.

Le manque total d'autres possibilités de liaison est confirmé aussi par le fait que la présence d'un électrolyte dans le même milieu neutre, n'influence pas le phénomène tinctorial.

3. On doit aussi signaler le fait intéressant que chez certains colorants qui teintent en milieu neutre, l'électrolyte accélère la teinture, tandis que pour d'autres il n'a aucune influence.

Institutul Polytechnique, Jassy,
Chaire de Technologie Chimique Textile

BIBLIOGRAPHIE

1. Knecht E., Ber., 1889, 22, p. 1120; 1904, 37, p. 3481.
2. Elöd E., Trans. Far. Soc., 1933, 29, p. 327; Mell. Text. Ber., 1932, *13*, p. 365.
3. Speakman J. B., Smith S. E., J. Soc. Dyers and Colour., 1936, 52, p. 12.
4. Müller A., Ender W., Mell. Text. Ber., 1937, *18*, p. 906.
5. Садов Ф. И., Соколова Н. М. и. с., *Лабораторный практиким по курсу химическая технология волокнистых материялов*. Гизлегпром, М., 1963, гл. 13.
6. Lemin, Hadfield, J. Soc. Dyers and Colour, 1961, *17*, p. 97.

CERCETĂRI ASUPRA MECANISMULUI VOPSIRII LÎNII CU COLORANŢI ACIZI

(Rezumat)

Se cercetează corelaţia care există între structura coloranţilor şi comportamentul lor tinctorial, pentru o serie de coloranţi derivaţi din pirazolină şi care diferă prin natura şi poziţia substituenţilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECŢIA VII

ŞTIINŢE ECONOMICE

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 1—2, 1969

СЕКЦИЯ VII

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 1—2, 1969

SECTION VII

ECONOMICS

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia VII : ŞTIINŢE ECONOMICE

C. Z. 335.6 : 338.91

PROGRESUL TEHNIC ŞI UNELE MODIFICĂRI ÎN STRUCTURA FORŢEI DE MUNCĂ DIN ŢARA NOASTRĂ

DE

P. MÂLCOMETE şi GEORGE MEDRIHAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Reproducţia socialistă lărgită necesită, aşa cum este cunoscut, reproducerea atît a elementelor materiale ale producţiei cît şi a forţei de muncă. Reproducţia forţei de muncă prezintă o însemnătate deosebită în cadrul procesului de reproducţie, datorită faptului că forţa de muncă constituie principala forţă de producţie a societăţii şi în condiţiile orînduirii socialiste.

Reproducţia socialistă privită în ansamblu cuprinde reproducţia celor două laturi ale producţiei sociale — a forţelor şi a relaţiilor de producţie socialiste. Ca atare, reproducţia forţei de muncă are loc în strînsă legătură cu celelalte elemente ale forţelor de producţie pe de o parte şi cu natura şi evoluţia relaţiilor sociale de producţie pe de altă parte. Modificările cantitative şi calitative care au loc în structura forţei de muncă în procesul reproducţiei socialiste lărgite, sînt aşa dar rezultatul unui mare număr de factori, strîns legaţi între ei, factori ce reflectă procesul de dezvoltare a forţelor de producţie şi a relaţiilor de producţie socialiste.

În prezenta comunicare ne propunem să prezentăm principalele aspecte ale influenţei progresului tehnic asupra structurii forţei de muncă din ţara noastră în anii construcţiei socialiste.

Avîntul general al economiei naţionale a României, ca urmare a politicii de industrializare socialistă şi a înfăptuirii consecvente a progresului tehnic şi-a pus puternic amprenta asupra reproducţiei forţei de muncă.

Progresul tehnic a avut ca rezultat direct accentuarea procesului de diversificare a producţiei şi a activităţii social-culturale. Aceste schimbări în diviziunea socială a muncii au determinat schimbări corespunzătoare în cadrul forţei de muncă. Astfel, intrarea în funcţiune a sute de obiective industriale în anii construcţiei socialiste, lărgirea şi modernizarea întreprinderilor existente, deschiderea a numeroase şantiere, extinderea activităţii transporturilor, dezvoltarea reţelei de învăţămînt, cultură, sănătate, au absorbit noi contingente de cadre, făcînd să sporească continuu, de la o etapă la alta, numărul populaţiei ocupate.

O dată cu atragerea unui număr sporit de oameni în diversele domenii ale activităţii sociale, progresul tehnic duce şi la modificarea în structura de ramură a forţei de muncă ocupată.

Este ştiut că în condiţiile în care volumul diferitelor nevoi sociale şi timpul total de lucru (numărul de lucrători) la un moment dat sînt determinate, numărul de lucrători pe care societatea trebuie să-i repartizeze pentru satisfacerea acestor nevoi, în fiecare ramură, subramură, etc., este determinat de nivelul productivităţii muncii ramurii respective. De exemplu, dacă facem abstracţie de importul de produse agricole, numărul lucrătorilor din această ramură este determinat de productivitatea muncii în agricultură şi de mărimea consumului propriu al lucrătorilor agricoli. Dacă agricultura reţine o cantitate mai mare din munca socială, atunci o cantitate mai mică poate fi destinată altor ramuri ale producţiei materiale şi ramurilor neproductive şi invers. În ţara noastră, progresul tehnic a determinat creşterea nivelului productivităţii muncii în toate ramurile, inclusiv în agricultură. Dezvoltarea bazei tehnice materiale a agriculturii, mecanizarea şi chimizarea producţiei agricole, organizarea producţiei agricole pe baza metodelor agrotehnice avansate, au redus continuu necesităţile de forţe de muncă pentru această ramură. Pe de altă parte, atragerea forţei de muncă eliberată din agricultură spre alte ramuri de activitate a fost posibilă tot datorită progresului tehnic, care diversificînd producţia a creat noi locuri de muncă în ramurile neagricole ale producţiei materiale, în primul rînd industriale, a dezvoltat sectoarele de deservire a populaţiei, a creat noi necesităţi social-culturale.

Progresul tehnic determină anumite modificări în structura profesională şi a nivelului de calificare a forţei de muncă. Această influenţă se manifestă în primul rînd, în diversificarea producţiei. Apariţia şi dezvoltarea unor ramuri de producţii noi cu un înalt nivel de înzestrare tehnică comportă lucrători pregătiţi în profesiile respective şi cu un înalt grad de calificare.

Pe de altă parte, direcţia în care se realizează progresul tehnic duce şi ea la modificări în structura profesională a forţei de muncă. Dacă mecanizarea parţială necesită muncitori strict specializaţi, mecanizarea complexă presupune muncitori cu un profil profesional mai larg. Pe baza metodelor tehnologice moderne, a nivelului înalt de mecanizare şi automatizare a producţiei apar profesii noi în economia naţională.

Totodată, nivelul tehnicii, tehnologiei şi organizării producţiei, impun un anumit nivel de calificare a forţei de muncă folosite. Într-o economie cu un înalt nivel tehnic are loc o creştere a greutăţii specifice a muncii intelectuale, capătă o însemnătate tot mai mare, nu atît forţa musculară şi îndemânarea fizică, cît mai ales nivelul tehnic şi cultural al lucrătorilor. Are loc o creştere a numărului de lucrători intelectuali în totalul populaţiei ocupate şi o modificare a funcţiei şi poziţiei acestora în procesul de producţie. Dacă înainte unele funcţii exercitate de intelectuali în întreprinderi (ingineri, tehnicieni) erau separate de producţie, ca urmare a progresului tehnic ele devin o parte componentă directă a sferei productive. Această tendinţă în structura profesională şi a nivelului de calificare a forţei de muncă se manifestă în mod deosebit în ramurile industriale noi, ca industria chimică, petrochimică, electrotehnică, etc.

Influenţa progresului tehnic asupra structurii profesionale şi a nivelului de calificare a forţei de muncă se manifestă şi în rîndul lucrătorilor administrativi, unde pe de o parte apar funcţii noi de lucrători administrativi care folosesc în activitatea lor maşinile moderne de calcul şi evidenţă, iar pe de altă parte sporeşte exigenţa faţă de nivelul general al pregătirii acestor lucrători, ponderea cea mai mare ocupînd-o cei cu studii superioare şi cu şcoli medii-tehnice de specialitate.

Apreciind influenţa progresului tehnic asupra forţei de muncă tovarăşul Ion Gheorghe Maurer arăta că „tehnica nouă schimbă conţinutul meseriilor, duce la apariţia de noi profesiuni şi la dispariţia altora, modifică raportul dintre munca fizică şi cea intelectuală în favoarea acesteia din urmă" [4].

Desigur, influenţa progresului tehnic asupra structurii forţei de muncă din ţara noastră, în anii construcţiei socialismului, nu poate fi cercetată fără a ţine seama de

natura relațiilor sociale de producție. Orînduirea socialistă presupune în mod necesar înfăptuirea pe bază de plan a progresului tehnic, folosirea rațională a resurselor materiale, umane și financiare, fapt ce se reflectă și în caracterul și direcțiile modificărilor care au loc în dinamica și structura forței de muncă în procesul reproducției.

În lumina celor prezentate ne propunem să analizăm în continuare principalele aspecte ale modificărilor structurii forței de muncă din țara noastră, ca urmare a înfăptuirii consecvente de către P. C. R. a progresului tehnic în economia națională pe baza industrializării socialiste a României.

2. Schimbări în repartiția forței de muncă între sferele de activitate socială, între diferitele ramuri și subramuri ale acestora și în profilul teritorial

2.1. Creșterea nivelului de ocupare a forței de muncă

Realizările obținute de poporul român în privința industrializării socialiste și pe această bază a întregii economii naționale, dezvoltarea completă și multilaterală a economiei, creșterea și diversificarea ramurilor sale etc., s-au concretizat și în creșterea continuă a gradului de ocupare a forței de muncă, după cum rezultă din datele tabelului 1 [6].

Tabelul 1

1950 = 100%	1955	1960	1965
Populația în vîrstă de muncă [1])	108	110	114
Populația ocupată [2])	112	114	116
Numărul mediu anual de salariați	139	153	203

[1]) la 1 iulie; [2]) la sfîrșitul anului.

Un prim aspect care se poate desprinde este faptul că numărul persoanelor ocupate în diverse munci utile societății, a crescut mai repede decît numărul total al populației în vîrstă de muncă. Această tendință s-a accentuat mai cu seamă în perioada 1959—1965. La un nivel de ocupare a forței de muncă de 86,1% în 1963, în totalul populației apte de muncă, țara noastră se numără printre țările cu cel mai ridicat grad de ocupare a forței de muncă. Astfel, acesta reprezenta în 1963 79,5% în Bulgaria, 80,5% în Cehoslovacia, fiind în 1960 68% în Anglia, 69% în S.U.A. și 56% în Belgia [7].

Un alt aspect al creșterii ocupării forței de muncă în perioada arătată este și faptul că aceasta a avut loc exclusiv pe seama numărului de salariați. Ca urmare, a crescut ponderea salariaților în totalul populației în general și a populației ocupate, în special. Dacă în 1950 la 1 000 de locuitori reveneau 130 de salariați, în 1965 s-a ajuns la 225. În anul 1964 din totalul persoanelor care lucrau în diferite ramuri ale economiei naționale, 43% erau salariați (față de 31,6% în 1959). Merită de relevat că dezvoltarea economică și social-culturală a țării a permis ca în ultimii ani (1962—1965), sporul numărului de salariați să fie mai mare decît excedentul natural al populației [8].

Creșterea numărului de salariați în economia națională se va intensifica și mai mult în perioada actualului cincinal. Astfel, în perioada 1960—1970 numărul de salariați va crește cu cca. 896,3 mii reprezentînd un spor mediu anual de 179 mii sala-

riați, față de 145 mii între anii 1950—1965. În același timp numărul persoanelor ocupate va crește cu 562 mii; la 1 000 locuitori vor reveni cca. 265 salariați. Aceasta va contribui la reducerea treptată a decalajului existent în prezent între țara noastră și alte țări dezvoltate din acest punct de vedere.

Analiza datelor enunțate mai sus scoate în evidență și faptul că dezvoltarea economică și social-culturală a țării a asigurat și asigură nu numai atragerea în cîmpul muncii a întregului excedent natural al populației în vîrstă de muncă, dar și a unui număr însemnat de alți oameni și în special femeile casnice.

La creșterea participării femeilor în procesul de producție a bunurilor materiale în întreaga viață socială și spirituală, a contribuit și accelerarea progresului tehnico-științific printr-o multitudine de forme, deosebit de complexe și strîns legate între ele. Puternica dezvoltare a industriei și pe această bază a celorlalte ramuri a economiei naționale, a științei și tehnicii, a activității social-culturale a necesitat și a făcut posibil ca ritmul de creștere a populației ocupate să depășească ritmul de creștere a populației apte de muncă. Creșterea avuției sociale a creat condițiile care permit în mod efectiv femeii să participe în măsură tot mai însemnată la viața economică și social-culturală, fără a neglija căminul și educația copiilor. În același timp, progresul științific și tehnic a produs o adevărată revoluție în activitatea casnică, ceea ce a dus la reducerea timpului femeii în gospodăria personală. Ca urmare a extinderii mecanizării și automatizării, munca a devenit din punct de vedere fizic mai ușoară, mai potrivită cu posibilitățile fizice ale femeii, ceea ce a ușurat accesul femeii în toate ramurile economiei naționale. Astfel, proporția femeilor salariate în totalul salariaților a crescut de la 12,7% în 1930 la 28,8% în 1965.

Utilizarea unui număr tot mai mare de femei la întreaga viață economică și social culturală și în primul rînd în ramurile către care au înclinații și posibilități mai mari, fără a neglija căminul și educația copiilor, este una din trăsăturile ce caracterizează structura populației ocupate din țara noastră. Totodată, aceasta reprezintă o importantă realizare în folosirea resurselor de muncă ale economiei naționale.

Ca urmare a ridicării nivelului de trai al populației, a îmbunătățirii alimentației, condițiilor de muncă și locuit, a îngrijirii sănătății s-a redus considerabil gradul de morbiditate și mortalitate a populației și a crescut sensibil durata medie a vieții active. Pe această bază, după unele calcule [9], durata medie a vieții active a crescut de la 27,57 ani în 1912/13 la 40,0 ani în 1963, ceea ce demonstrează că probabilitatea de a trăi și supraviețui vîrsta de muncă în 1963 era de 88,9%. Urmarea directă a acestui proces este modificarea structurii de vîrstă a populației ocupată cu toate consecințele sale economice.

Din cele prezentate rezultă că paralel cu dezvoltarea progresului tehnic în toate ramurile economiei naționale și creșterea rapidă a productivității muncii, s-au asigurat și condițiile ocupării depline și raționale a resurselor de muncă.

2.2. *Modificări în structura forței de muncă ocupată pe cele două sfere de activitate socială și pe diferitele ramuri ale acestora*

Dacă influența progresului tehnic asupra gradului de ocupare a forței de muncă privea aspecte mai mult de ordin cantitativ, în acest caz privește în bună măsură și aspecte de ordin calitativ.

Proporțiile în care se împarte forța de muncă între cele două sfere nu sînt stabilite o dată pentru totdeauna. Ele se stabilesc pentru fiecare etapă în funcție de numeroase condiții. Aceste proporții exprimă și în același timp condiționează nivelul de dezvoltare a științei și tehnicii, nivelul productivității muncii sociale, mărimea venitului național și a avuției sociale acumulate, numărul și gradul de calificare a forței de muncă, nivelul de acoperire a nevoilor materiale și spirituale etc.

În perioada 1950—1965 unei creșteri de 16% a întregii populații ocupate îi corespunde o creștere de 11% a forței de muncă ocupate în sfera productivă și

de 68% în sfera neproductivă. Trebuie de menționat că din punct de vedere absolut sporul forței de muncă ocupată în ramurile materiale este mult mai mare. Tendința de creștere mai rapidă a forței de muncă din ramurile neproductive s-a accentuat după anul 1955 și în special după victoria deplină a socialismului. Ea este urmarea succeselor obținute în dezvoltarea economiei în general și a instruirii în special și în consecință a posibilităților mărite de a satisface nevoile populației.

Veridicitatea tezei creșterii mai rapide a forței de muncă în activități neproductive, chiar în condițiile extinderii sferei muncii productive, a fost arătată încă de Marx cînd a analizat importanța creșterii productivității muncii pentru schimbarea raportului dintre sfera productivă și cea neproductivă a muncii sociale. În cazul creșterii productivității muncii, națiunea „ar avea mai mult timp pentru muncă neproductivă și odihnă... căci numărul relativ mic (se referă la pondere) al populației productive nu ar fi decît o altă expresie a nivelului relativ înalt al productivității muncii" [1].

Aceasta o dovedește și practica din unele țări dezvoltate din punct de vedere economic; de exemplu în Franța, numai în timp de 9 ani, sfera muncii neproductive a crescut de la 24,9% în 1954, la 27% în 1962, în U.R.S.S. de la 17,9% în 1958, la 19% în 1965 etc. [10].

Ca urmare a acestei tendințe, în structura forței de muncă ocupată în cele două sfere de activitate au intervenit sensibile modificări. Datele tabelului 2 [11, p. 114] sînt semnificative în acest sens.

Tabelul 2

Structura populației ocupate pe ramuri ale economiei naționale (la sfîrșitul anului)

	1950	1956	1960	1965
Total populație ocupată	100	100	100	100
A. *În sfera producției materiale*	92,6	92,5	91,1	89,2
1. Industrie și construcții	14,2	17,4	20,0	25,5
2. Agricultură și silvicultură	74,3	69,7	65,6	56,7
3. Transporturi și telecomunicații	1,4	1,8	1,8	2,5
4. Circulația mărfurilor	2,5	3,3	3,4	4,0
5. Alte ramuri	0,2	0,3	0,3	0,5
B. *În sfera neproductivă*	7,4	7,5	8,9	10,8
1. Transporturi și telecomunicații ce deservesc ramurile neproductive și populația	8,8	0,9	1,0	1,2
2. Gospodărie comunală și altele	0,7	0,9	1,5	2,1
3. Învățămînt, cultură, artă	2,3	2,2	2,7	3,5
4. Știință și deservire științifică	0,2	0,3	0,4	0,5
5. Asistență socială și ocrotirea sănătății	1,1	1,2	1,6	2,0
6. Administrații	1,7	1,6	1,2	1,0
7. Alte ramuri	0,6	0,5	0,5	0,5

După cum se observă, politica de industrializare socialistă a țării, promovată în mod constant de partidul nostru, a dus nu numai la mărirea ponderii forței de muncă din sfera neproductivă și micșorarea corespunzătoare a celei din sfera productivă, ci și la importante schimbări în repartiția forței de muncă între ramurile celor două sfere de activitate socială.

Principala schimbare în acest sens se referă, după cum se vede, la micșorarea ponderii forței de muncă ocupate în agricultură și silvicultură și creșterea corespunzătoare a celei ocupate în ramurile neagricole ale economiei naționale. Cea mai mare parte din aceste deplasări au fost atrase de industrie și construcție. Analiza datelor stabilite arată că ritmul acestor deplasări s-a intensificat în ultimii ani. Dacă timp de un deceniu (1950—1960) ponderea populației ocupată în ramurile agricole a scăzut cu 8,7%, în numai 5 ani (1960—1965), a scăzut cu încă 89,/0. Corespunzător, creșterea forței de muncă din industrie și construcții a fost de 5,8% și respectiv 5,5%. Acest aspect rezultă și din analiza numărului absolut al populației ocupate în cele două mari ramuri ale economiei naționale. În timp ce în 1960, populația ocupată în agricultură și silvicultură era cu încă 0,4% mai mare față de 1959, în 1965 era cu 11,7% mai mică. Comparativ cu anul 1950, în 1965 forța de muncă ocupată în industrie și construcții a crescut cu 108,3%. Unele date [12] arată că numai între anii 1960—1965 au fost atrase din mediul rural și angajate pentru prima dată ca salariați, în ramurile neagricole, în majoritate în industrie și construcții, un număr de cca. 600 mii persoane (fără a lua în considerație absolvenții școlilor profesionale, medii și superioare, proveniți din mediul rural). Ca urmare, dacă forța de muncă ocupată în agricultură era în 1950 de 5,2 ori mai mare decît în industrie și construcții, în 1964 acest raport s-a redus la 2,5.

Schimbările calitative ale ocupării forței de muncă între cele două mari ramuri ale economiei naționale sînt rezultatul direct al politicii consecvente de industrializare socialistă a țării noastre. Progresul tehnico-științific contemporan în agricultură, oglindit în înlocuirea energiei animale prin energia mecanică, în realizarea unor mari descoperiri științifice în biologie (îndeosebi în genetică) și nutriție, în pătrunderea rapidă și multilaterală a chimiei și extinderea rapidă a irigațiilor, care se concretizează tot mai puternic și în agricultura țării noastre, a asigurat și asigură ridicarea continuă a productivității muncii în această ramură și eliberarea pe această bază a unei părți din forța de muncă ocupată. În condițiile progresului tehnic, eliberarea forței de muncă din agricultură nu se face în detrimentul producției agricole, ci în condițiile creșterii ei, avînd loc o sporire a producției pe o persoană ocupată Astfel, [13], în perioada 1961—1965 producția agricolă pe o persoană ocupată în întreaga agricultură a crescut cu 44,6% față de perioada 1951—1955.

Realizarea acestui lucru nu era posibil decît pe calea industrializării socialiste, pe baza dezvoltării cu precădere a industriei grele, singura în măsură să asigure dezvoltarea progresului tehnic și în agricultură. Tot industrializarea este aceea care asigură absorbirea forței de muncă devenită disponibilă prin faptul că crează noi locuri de muncă în economia națională, atît prin dezvoltarea în ritm rapid a industriei, cît și prin dezvoltarea tuturor celorlalte activități pe care le determină — transporturi, comerț, activități social-culturale.

Scăderea absolută și relativă a populației ocupată în agricultură este un proces legic care duce la o mai bună utilizare a forței de muncă, la creșterea productivității muncii sociale, deoarece munca în celelalte ramuri ale producției materiale este mai productivă. De exemplu, în 1964 productivitatea muncii în industrie era încă de 5,1 ori mai mare decît în agricultură, cu toate că acest raport a scăzut la aproape jumătate față de anul 1950 cînd el reprezenta 9,9% [14].

Trebuie însă să subliniem că cu toate realizările pozitive obținute în acest sens, raportul existent poartă încă amprenta situației moștenită de la regimul burghezo-moșieresc. Din datele recensămîntului din 1930 rezultă că 77% din populația activă a țării era ocupată în agricultură și numai 7,9% în industrie. Ca urmare, în raport cu alte țări mai avansate din punct de vedere industrial, ponderea forței de muncă ocupată în agricultură este încă ridicată, în timp ce ponderea populației ocupate în agricultură în anul 1960 era în S.U.A. de 8,6%, în Japonia de 33,4%, în Italia de 30,8%, în Anglia în 1950 4,1%, în Franța în 1954 de 27% ; în țara noastră în anul 1965 această pondere se ridica la 57% [15]. Important este însă faptul că acest raport evoluează spre o repartiție judicioasă a forței de muncă, corespunzătoare unei economii înaintate. Ponderea populației ocupată în agricultură va ajunge pînă în 1970 la cca. 50%. În actualul cincinal cca. 450 mii de persoane care în prezent

lucrează în agricultură, vor fi atrase spre ramurile neagricole. „Deși cifrele nu sînt mari — arată tov. I. Gh. Maurer — ele arată o tendință pozitivă, reflectînd un proces care după cum se știe, are multiple consecințe economice și sociale și duce la accentuarea treptată, în întreaga viață a țării, a trăsăturilor proprii țărilor înaintate din punct de vedere economic" [5].

Creșterea forței de muncă ocupate în sfera transporturilor și telecomunicațiilor ce deservesc producția, a circulației mărfurilor este rezultatul firesc al dezvoltării forțelor de producție. Diviziunea muncii și cooperarea în condițiile dezvoltării producției iau o tot mai mare amploare, iar aceasta determină necesitatea creșterii ponderii populației ocupate în aceste ramuri, o dată cu creșterea productivității muncii. De asemenea, creșterea numărului persoanelor ocupate în circulația mărfurilor se explică și prin extinderea rapidă a rețelei comerciale, prin dezvoltarea comerțului exterior mai rapid decît creșterea producției și printr-o productivitate a muncii mai scăzută decît în alte ramuri.

O parte din populația eliberată din agricultură a fost atrasă și spre ramurile sferei neproductive. Dar, numărul persoanelor ocupate în această sferă nu a crescut în aceeași măsură în toate ramurile care o alcătuiesc, iar în unele din ele chiar a scăzut. Astfel, simplificarea aparatului de stat, perfecționarea activității din acest domeniu au permis să se micșoreze numărul salariaților ocupați în administrația de stat cu 32% : de la 138 mii în 1950 la 95 mii în 1965. Măsurile luate de Congresul al IX-lea al P.C.R. cu privire la introducerea mecanizării complexe în activitatea de conducere vor determina reducerea în continuare a persoanelor ocupate în acest sector. În schimb, datorită creșterii gradului de organizare, a dezvoltării învățămîntului, care va cuprinde cca. 1/4 din populația țării, a sarcinilor puse în fața cercetării științifice, a ocrotirii sănătății, se va înregistra în continuare creșterea numărului salariaților ocupați în aceste ramuri. Acestea demonstrează grija cu care partidul și statul nostru folosesc resursele de muncă, în așa fel încît o dată cu orientarea preponderentă a forței de muncă către ramurile productive să se asigure și dezvoltarea acelor sectoare neproductive cerute de progresul social și care devin tot mai mult o condiție esențială a însăși avîntului producției materiale.

2.3. *Modificări în structura forței de muncă ocupate în cadrul industriei și agriculturii*

În anii regimului burghezo-moșieresc, aproape jumătate din întreaga forță de muncă ocupată în industrie era concentrată în industria ușoară și alimentară, în timp ce industria construcțiilor de mașini și a prelucrării metalelor ocupa circa 17%, iar industria chimică numai 1,8%. Ca urmare a aplicării cu consecvență de către P.C.R. a politicii de industrializare socialistă, o dată cu creșterea productivității muncii forța de muncă ocupată în ramurile de bază ale industriei a crescut într-un ritm mai rapid decît pe ansamblul industriei. Astfel, între anii 1950—1965 în condițiile creșterii numărului de salariați pe ansamblul industriei de 2,1 ori, în industria grea creșterea a fost de 2,4 ori, în timp ce în industria ușoară și alimentară de cca. 1,8 ori. Aproape 3/4 din sporul absolut de salariați pe ansamblul industriei a revenit în această perioadă industriei grele, iar în cadrul ei ramurilor hotărîtoare cum ar fi industria chimică, energetică, termică și electrică, metalurgia, construcția de mașini etc. Creșterea diferențiată a forței de muncă ocupată a determinat modificarea structurii pe ramuri a salariaților. Din analiza datelor statistice se poate remarca creșterea ponderii salariaților ocupați în ramurile de bază ale industriei și în primul rînd, a ramurilor prelucrătoare cu un nivel mai înalt al productivității muncii, și scăderea ponderii salariaților în ramurile extractive. Tabelul 3 arată cum a evoluat structura numărului mediu scriptic al salariaților pe unele ramuri ale industriei în perioada 1950—1965 [11, p. 200].

Tabelul 3

Ramura	1950	1965	Ramura	1950	1965
Total industrie	100	100	Chimie	2,6	5,4
Energie electrică şi termică	1,3	2,1	Exploatarea şi prelucrarea lemnului	17,2	16,1
Combustibil	7,5	5,8	Industria textilă	12,7	10,4
Metalurgie neferoasă	2,0	3,2	Confecţii	4,2	5,0
Construcţii de maşini	21,3	27,2	Industria alimentară	11,0	8,4

Amploarea acestor modificări apare şi mai bine în evidenţă dacă avem în vedere faptul că în toată această perioadă partidul şi statul nostru au dus o politică continuă de lărgire a bazei de materii prime proprii, de dezvoltare a bunurilor de consum necesare populaţiei care s-a concretizat printr-o însemnată dezvoltare a acestor ramuri. Ca urmare, forţa de muncă ocupată în aceste ramuri, deşi a scăzut ca pondere, a cunoscut însemnate creşteri din punct de vedere absolut.

Ritmul diferit de creştere a salariaţilor pe ramuri ale industriei, de altfel ca şi pe ramurile economiei naţionale, a fost determinat nu numai de importanţa şi rolul fiecărei ramuri, ci şi de nivelul înzestrării tehnice şi implicit a productivităţii muncii. Astfel, de exemplu, progresul tehnic continuu determină economisirea muncii sociale ca urmare a creşterii productivităţii muncii. Aceasta face ca volumul de muncă care se cheltuieşte în tot mai multe procese de prelucrare succesivă a materiilor prime să se mărească faţă de volumul de muncă cheltuit în industria extractivă.

Aceste tendinţe de folosire a forţei de muncă au fost impuse de necesităţile creerii şi dezvoltării unei industrii cu o structură modernă cerută de evoluţia ştiinţifică-tehnică contemporană. La rîndul ei, realizarea acestei cerinţe în cadrul economiei naţionale, prin politica fermă de industrializare socialistă, a constituit un factor important al progresului economic al ţării noastre.

Dezvoltarea forţelor de producţie pe baza revoluţiei ştiinţifice contemporane determină în mod obiectiv creşterea continuă a gradului de socializare a muncii şi de concentrare a producţiei. Aceasta determină şi un anumit grad de concentrare a forţei de muncă. Astfel, în perioada 1950—1965 ponderea întreprinderile din industria republicană, cuprinzînd între 501...2 000 muncitori, creşte cu 24,6%, iar numărul muncitorilor ocupaţi scade cu 1,3%. La grupa de întreprinderi cu peste 2 000 de muncitori, numărul întreprinderilor creşte cu 10,2%, iar numărul muncitorilor cu 17,7%. În mod corespunzător a scăzut numărul la grupa de întreprinderi sub 500 lucrători. Numărul mediu de muncitori ce revine unei întreprinderi a crescut de 2,24 ori [11, pp. 138—144]. Incontestabil că progresul tehnic contemporan prin intermediul creşterii productivităţii muncii, duce la creşterea mai rapidă a gradului de concentrare a fondurilor fixe şi a volumului producţiei decît a salariaţilor.

Alături de concentrarea muncitorilor în întreprinderi mari, progresul tehnic contemporan a dus la apariţia unei forme mai avansate de concentrare a producţiei şi a muncitorilor şi anume în zone industriale. Acest proces are importante consecinţe economice şi sociale asupra forţei de muncă. Pînă la o anumită limită conduce la o folosire mai raţională a forţei de muncă, la creşterea gradului de organizare a oamenilor muncii, de deservire socială, la ridicarea nivelului economic al unei localităţi. De aceea, una din preocupările partidului nostru este construirea unor întreprinderi şi zone industriale de mărimi optime, prin care să se folosească din plin consecinţele pozitive ale acestui proces şi să se evite cele negative.

Dezvoltarea intensivă și multilaterală a producției agricole, introducerea tehnicii moderne, în special la cultura cerealelor, au făcut ca o dată cu tendința generală de eliberare a forței de muncă din agricultură, să se schimbe și structura ei pe ramuri agricole în favoarea ramurilor mai intensive, reduse ca proporții în trecut (plantele tehnice, legumicultura, viticultura, pomicultura și creșterea animalelor), dar care au luat o amplă dezvoltare. Astfel, în perioada 1962—1965, în cadrul cooperativelor agricole de producție, care cuprindeau la 1 ianuarie 1966 87% din populația aptă de muncă din mediul rural, dacă la cultura cerealelor și plantelor tehnice forța de muncă ocupată a scăzut cu peste 514 mii cooperatori, dezvoltarea sectorului zootehnic, a legumiculturii, viticulturii și pomiculturii a necesitat în plus un număr de 135 mii cooperatori. Ponderea cooperatorilor în sectorul zootehnic din totalul forței de muncă ocupate a crescut în această perioadă de la 4,2% la 8%, iar numărul absolut al acestora cu peste 60% [16, p. 97 și 100]. În G.A.S., dcă în perioada 1955—1959 în producția vegetală s-a folosit 61% din forța de muncă ocupată iar în producția animală 17%, în perioada 1960—1964 proporția a fost 60% și respectiv 24% [17].

Avînd în vedere sarcinile prevăzute pentru dezvoltarea producției agricole pînă în 1970, numai în sectorul cooperatist, în condițiile creșterii gradului de mecanizare, în aceste ramuri numărul membrilor cooperatori va spori cu peste 100 000.

Sensul modificărilor intervenite în structura pe ramuri a forței de muncă ocupată în agricultură reprezintă la rîndul său, un important factor de dezvoltare a agriculturii, de creștere a aportului agriculturii la progresul economic al țării, la ridicarea bunăstării poporului, deoarece munca în aceste ramuri este mult mai eficientă.

Considerăm că o dată cu stabilirea unui echilibru rațional între ramurile și subramurile agriculturii și cu intensificarea și mai pronunțată a progresului tehnic în zootehnie, legumicultură, pomicultură și viticultură, populația ocupată va scădea și în aceste ramuri, accentuînd tendința obiectivă de scădere a forței de muncă ocupate în agricultură.

Deplasarea forței de muncă din agricultură spre ramurile neagricole a condus și la unele schimbări în structura pe grupe de vîrstă și pe sexe a populației ocupate în diferite ramuri ale economiei. Din agricultură pleacă spre celelalte ramuri și în primul rînd în industrie, îndeosebi tineret și în principal bărbați. Ca urmare, în agricultură a crescut și absolut și relativ grupele pe vîrste de peste 50 de ani și rolul femeii în activitatea agricolă. De exemplu în 1965, față de 1956, grupele de vîrstă între 20...24 ani au scăzut cu 18,5%, iar cele între 45...49 ani cu 34,4%. Ponderea zilelor muncă efectuate de femei a crescut de la 36% în 1959, la 41,4% în 1965 [14, p. 90]. În schimb a crescut ponderea tineretului în celelalte ramuri ale economiei naționale și în special în industrie unde în 1963, ponderea salariaților între 16...30 de ani era de 41,0% [18, p. 211].

2.4. Modificări în repartiția teritorială a forței de muncă

Necesitatea repartizării raționale a producției s-a impus încă din primii ani ai construcției socialiste, întrucît disparitățile teritoriale în domeniul repartizării forțelor de producție și a forței de muncă constituiau o trăsătură caracteristică a economiei în timpul regimului burghezo-moșieresc. De aceea, preocuparea pentru ridicarea nivelului economic al regiunilor relativ rămase în urmă în trecut și lichidarea pe această bază a repartiției nerationale a forței de muncă pe teritoriul țării a devenit una din sarcinile importante ale politicii partidului de industrializare socialistă, „făcînd astfel ca întregul popor să beneficieze din plin de superioritatea orînduirii socialiste" [2].

Îmbunătățirea repartizării teritoriale a forțelor de producție a avut drept rezultat creșterea mai rapidă a numărului de salariați în regiunile mai puțin dezvoltate, ceea ce a dus la o răspîndire mai uniformă a lor pe teritoriul țării. Acest lucru rezultă în mod evident din datele tabelului 4, calculat pe baza lui [8], [16, p. 552].

Tabelul 4

Salariați la 1000 de locuitori

Regiunea	1956	1965	1965/1956	Regiunea	1956	1965	1965/1956
România	171	226	1,31	Galați	141	219	1,55
Argeș	112	17	1,52	Hunedoara	279	304	1,09
Bacău	173	192	1,11	Iași	116	148	1,28
Banat	241	307	1,27	Maramureș	132	191	1,45
Brașov	288	332	1,24	M. A. M.	152	208	1,37
București	89	130	1,46	Oltenia	98	156	1,59
Cluj	142	194	1,37	Ploiești	181	217	1,20
Crișana	128	178	1,39	Suceava	122	142	1,16
Dobrogea	205	269	1,31	Oraș București	388	514	1,32

Deși mai există încă diferențe sensibile, important este că în regiunile mai puțin dezvoltate, cu excepția regiunilor Suceava și Iași, se constată creșteri superioare mediei pe țară. Îmbunătățirea utilizării resurselor de muncă în regiunile mai puțin dezvoltate este reflectată și mai accentuat de repartiția populației ocupate a fiecărei regiuni pe ramuri ale economiei naționale (v. [195], p. 46).

Îmbunătățirea utilizării forței de muncă se pune nu numai la nivelul regiunilor, ci și al raioanelor componente, deși ca urmare a dezvoltării social-economice a tuturor raioanelor țării, ponderea populației cuprinsă în raioanele cu peste 200 de salariați la 1000 locuitori a crescut de la 31,2% în 1961 la 41,6% în 1966. În 82 de raioane numărul de salariați la 1000 de locuitori era în 1964, sub 150. Populația cuprinsă în aceste raioane deține o pondere de 50,8%. De aceea, una din caracteristicile actualului plan cincinal o constituie faptul că la amplasarea noilor obiective „s-a urmărit cu consecvență, în fiecare caz în parte, strînsa îmbinare a criteriilor de eficiență economică cu prioritatea ce trebuie acordată raioanelor respectiv orașelor mai slab dezvoltate" [5].

Construirea de obiective industriale pînă în 1970 în cele cca 100 raioane lipsite în prezent de industrie, sau cu o industrie slab dezvoltată, va determina o creștere a numărului de salariați în totalul forței de muncă ocupată în aceste raioane. Pe această bază va crește și mai mult decît pînă în prezent proporția salariaților și în special a clasei muncitoare în mediul rural, cu toate consecințele social-economice ce decurg de aici. Totodată, amplasarea rațională a forțelor de producție pe teritoriul întregii țări a determinat reducerea continuă a migrației și a distanței de deplasare a forței de muncă. Populația de muncă are posibilități din ce în ce mai largi de a ocupa locuri de muncă în zone apropiate locului de domiciliu [19, p. 50-52].

Promovarea multilaterală și rapidă a tehnicii moderne influențează în mod nemijlocit procesul de îmbunătățire a repartiției teritoriale a industriei și prin aceasta a forței de muncă Permițînd valorificarea a noi resurse naturale, atragerea în circuitul economic a unor noi resurse, care în trecut nu-și găseau utilizare sau a căror prelucrare cu tehnologia cunoscută în acea vreme nu era rentabilă, lărgirea progresului tehnic crează premise favorabile amplasării întreprinderilor industriale în noi zone. Prin aceasta, progresul tehnic contemporan contribuie la micșorarea gradului de dependență a organizării teritoriale a industriei de condițiile naturale. Totodată, progresul tehnic are o influență hotărîtoare în valorificarea superioară a unor materii prime prelucrate și mai înainte, ceea ce crează posibilitatea formării unor noi subramuri ale industriei amplasate în zone mai puțin industrializate.

Pe baza dezvoltării social-economice și în primul rînd, pe baza industrializării s-au produs importante schimbări în cea ce privește structura forței de muncă pe mediu urban și rural. În anii construcției socialiste procesul de urbanizare a populației a cunoscut o dezvoltare rapidă. În timp ce în 1930 procentul populației urbane față de populația totală era de 21,3%, iar în 1948, 23,4%, la recensămîntul din martie 1966 acesta reprezenta 38,2% din care 32,58% trăiește în orașele propriuzise și 5,62% în comunele incluse în mediul urban. Creșterea gradului de urbanizare a forței de muncă are importante consecințe asupra vieții economice și sociale, asupra nivelului și dinamicii productivității muncii sociale, sporirii numărului de muncitori, nivelului cultural tehnic al populației etc. Avînd în vedere consecințele urbanizării asupra forței de muncă, merită de relevat faptul că la 1 iulie 1965, populația în vîrstă de muncă din mediul urban reprezenta 46,6% din totalul populației apte de muncă a țării. Repartiția populației aptă de muncă din mediul urban denotă însă diferențe destul de mari de la o regiune la alta. Astfel, în timp ce în regiunile Hunedoara, Brașov și Banat ea reprezintă 64%, 56% și respectiv 47%, în regiunea București este de numai 13,6%, în Argeș 18,8%, Suceava 19,8%, Oltenia 20,7%, Dobrogea 21,5% etc. Aceasta demonstrează corelația care există între nivelul dezvoltării economice și gradul de urbanizare a forței de muncă. Este de remarcat că ritmul de urbanizare din țara noastră este superior celui înregistrat în alte țări și ritmului mediu pe plan mondial. Pe această bază se apreciază [20] că în cca 25 de ani (pînă în 1990) populația urbană din țara noastră va reprezenta cel puțin 60%.

Toate schimbările din structura forței de muncă prezentate pînă în prezent dovedesc că paralel cu dezvoltarea multilaterală a progresului tehnic s-a asigurat și folosirea deplină și eficientă a uneia dintre cele mai importante resurse de care dispune economia națională. Această caracteristică constantă a politicii economice a P.C.R. este unul din factorii care stă la baza dinamismului ce caracterizează economia noastră națională.

3. Schimbări în structura pe categorii de salariați și ridicarea nivelului de calificare a forței de muncă

În cadrul procesului general de creștere rapidă a numărului total de salariați și a îmbunătățirii repartizării lor pe ramuri și teritorii sub influența directă sau indirectă a progresului tehnic, au intervenit unele schimbări în structura lor pe categorii. Una din cele mai evidente schimbări constă în sporirea ponderii muncitorilor în totalul salariaților. În anul 1965 numărul mediu scriptic al muncitorilor pe ansamblul economiei naționale a fost de 2,54 ori mai mare decît în 1950, față de 2,03 ori cît reprezintă creșterea numărului de salariați. Semnificativ este faptul că ritmul de creștere a numărului de muncitori s-a intensificat în ultima perioadă, ceea ce reflectă posibilitățile de folosire a forței de muncă paralel cu sporirea progresului tehnic. În creșterea numărului de muncitori rolul hotărîtor l-a avut industria care a absorbit 42,4% din sporul absolut al muncitorilor, cu toate că în afară de agricultură este singura ramură care mai cunoaște un ritm mediu anual de creștere sub media pe țară. De fapt, creșterea numărului de muncitori și în celelalte ramuri este legată în cea mai mare parte tot de industrie. Ca urmare, ponderea muncitorilor pe ansamblul economiei naționale a crescut de la 57,6% în 1950 la 72,2% în 1965. Deosebit de mult a crescut ponderea muncitorilor în circulația mărfurilor, unde în 1950 ponderea muncitorilor era mai mică decît media pe țară precum și în transporturi și telecomunicații (de la 47,9% la 75,5% și respectiv de la 70,8% la 84,5%). De asemenea, foarte semnificativ este și faptul că în cadrul industriei cel mai rapid a crescut numărul de muncitori în ramurile care au cunoscut și cel mai înalt ritm de creștere a productivității muncii pe un salariat și anume energie electrică și termică, construcții de mașini și prelucrarea metalelor, industrie chimică și extractivă a minereurilor nemetalifere etc.

O dată cu creşterea ponderii muncitorilor a scăzut în mod corespunzător ponderea celorlalte categorii de salariaţi de la 42,4% în 1950 la 27,8% în 1965. În cadrul acestui proces cel mai mult a scăzut ponderea funcţionarilor din ramurile economiei naţionale. În urma măsurilor luate în vederea simplificării şi raţionalizării muncilor administrative, ponderea lor a scăzut de la peste 1/5 în 1938 la 9,2% în 1960 şi 8,2% în 1965. În industrie ponderea funcţionarilor a scăzut de la 15% în 1938 la 4,1% în 1959 şi 5% în 1965. După cum se vede, în ultima perioadă ponderea funcţionarilor din industrie a crescut, înregistrînd cea mai mare creştere. Dacă numărul total de salariaţi a crescut cu 38%, numărul de funcţionari din industrie a crescut cu 67%. „Există — spunea tovarăşul Nicolae Ceauşescu la Conferinţa Organizaţiei de partid a oraşului Bucureşti — un număr mare de salariaţi neproductivi, care grevează asupra dezvoltării economiei" [3]. Măsurile luate în vederea extinderii mecanizării în muncile administrative, a extinderii maşinilor electronice de calcul în economie vor determina reducerea continuă a acestei categorii de salariaţi.

Unul din cele mai evidente rezultate ale progresului tehnic este şi faptul că cel mai rapid ritm de creştere din cadrul întregii populaţii ocupate, inclusiv deci şi a salariaţilor, l-au înregistrat inginerii, tehnicienii şi personalul de specialitate. Creşterea numerică şi a ponderii acestora constituie una din trăsăturile ce caracterizează modificările în structura forţei de muncă din ţara noastră. Creşterea continuă a numărului de ingineri şi tehnicieni din cadrul economiei naţionale a determinat schimbarea raportului dintre aceştia şi muncitori, reducînd disproporţia existentă în anii anteriori. Tabelul 5 ilustrează cum a evoluat raportul dintre ingineri şi muncitori pe ansamblul economiei naţionale [18], [21, p. 47].

Tabelul 5

	1938	februarie 1956	1960	iunie 1964
Numărul inginerilor (mii)	9,0	36,6	59,0	74
Raportul muncitori/ingineri	115	57	39	35

Creşterea mai rapidă a inginerilor şi tehnicienilor în raport cu numărul total de salariaţi este caracteristică tuturor ramurilor economiei naţionale.

În industrie, de exemplu, în anul 1965 comparativ cu 1968 numărul de muncitori a crescut de 4,1 ori, în timp ce numărul de ingineri şi tehnicieni de 8,2 ori. Raportul între ingineri şi tehnicieni a evoluat după cum rezultă din tabelul 6 [11], [18, p. 209].

Tabelul 6

	1938	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
Numărul inginerilor şi tehnicienilor	13,7	86,2	88,0	88,0	94,2	98,1	105,7	11,8
Raportul muncitori/ingineri şi tehnicieni	25,9	12,1	12,3	13,1	13,5	13,6	13,0	12,9

Considerăm că această evoluție a fost determinată de dezvoltarea rapidă a industriei care a impus creșterea mult mai rapidă a numărului de muncitori. Pe ramuri ale industriei, raportul dintre numărul de muncitori și cel al inginerilor și tehnicienilor este foarte diferit, oscilînd în 1963 între 85,5 în industria confecțiilor și 5,7 în industria energiilor electrică și termică. Aceasta se datorește atît particularităților fiecărei ramuri cît și nivelului tehnic din ramurile respective. Datele statistice indică o corelație destul de strînsă între locul pe care-l ocupă ramurile în privința ritmului de creștere a productivității muncii și numărul de muncitori care revin la un inginer și tehnician.

În ce privește agricultura, deși nu dispunem de date statistice pe un interval mai lung, deoarece cele publicate pînă în 1961 se referă la cadre de specialiști agricoli, indiferent unde lucrează, pe cînd cele din 1961 mai departe se referă numai la specailiștii care lucrează în agricultură, analiza separată a lor poate conduce totuși la o serie de concluzii. In primul rînd se desprinde faptul că în timp ce forța de muncă ocupată în agricultură scade, numărul specialiștilor cu pregătire medie și superioară, al mecanizatorilor, crește continuu. Aceasta arată tendința de creștere a ponderii lor în totalul forței de muncă ocupate în agricultură. Cel mai rapid a crescut numărul specialiștilor cu pregătire superioară (a căror pondere a sporit numai în perioada 1961—1964 de la 45,3% la 53,2%), iar în cadrul lor numărul inginerilor mecanizatori și zootehnicieni. Aceste tendințe fiind legate de dezvoltarea progresului tehnic în agricultură și de dezvoltarea zootehniei, se vor menține și intensifica și în viitor.

Țara noastră a reușit ca într-o perioadă relativ scurtă să ajungă din urmă și chiar să întreacă o serie de țări dezvoltate din punct de vedere economic ca Anglia, Franța etc., în ceea ce privește ponderea numărului de specialiști în totalul forței de muncă. Astfel, dacă în țara noastră [22] erau 32 ingineri la 10 000 de locuitori, în 1957 în Franța erau 21, în R.F.G. 57, în Anglia în 1959 15, în S.U.A. în 1958 numai 24.

În industria S.U.A. în anul 1953 la un inginer reveneau cca. 60 de muncitori [23], în timp ce la noi, pe întreaga economie națională, în 1956 erau 57. În industrie raportul era mult mai bun. Cu toate acestea în privința nivelului productivității muncii din țara noastră el este, după cum se știe, sub nivelul țărilor dezvoltate din punct de vedere economic, ceea ce dovedește o folosire nerațională a cadrelor de ingineri și tehnicieni existenți. De asemenea, există încă serioase rezerve de îmbunătățire a raportului dintre ingineri, tehnicieni și muncitori în cadrul economiei naționale. Se consideră că în general o bună utilizare a forței de muncă necesită în medie un inginer la 3 tehnicieni și la 10 muncitori [24]. Un alt studiu al unui colectiv de specialiști din U.R.S.S. publicat în „Pravda" din 15 iulie 1966, arăta că cea mai rațională folosire a forței de muncă este ca la un specialist cu studii superioare să revină 4 specialiști cu studii medii. Or, în țara noastră, în anul 1965 raportul dintre numărul cadrelor medii tehnice și cel al inginerilor, în ansamblul unităților industriale, exceptînd sectoarele de cercetare și proiectare, era de numai 2,39. Statistic, la un inginer revin 1,45 tehnicieni și 0,94 maiștri. În 11 ramuri industriale acest indicator era situat cu mult sub această medie (industria chimică, alimentară, textilă etc). În alte ramuri ale economiei naționale situația este și mai puțin favorabilă. De exemplu în agricultură la 1 iunie 1964, la un specialist cu studii superioare reveneau 0,87 specialiști cu studii medii, iar la începutul anului 1966, în C.A.P. raportul era doar de 0,66. Toate acestea ne fac să apreciem că în viitor ponderea inginerilor și tehnicienilor în totalul salariaților va crește în dauna salariaților și într-o anumită măsură, chiar a muncitorilor.

Ca urmare a preocupării permanente a partidului și statului nostru de ridicare a nivelului de cultură generală și tehnico-profesională al cadrelor, corespunzător cu cerințele puse de dezvoltarea multilaterală a tehnicii moderne, s-au produs schimbări radicale în gradul de calificare și structură profesională a forței de muncă din economia națională. Un rezultat remarcabil este schimbarea raportului între munca calificată și necalificată, atît pe întreaga economie națională, cît și

mai ales pe ramurile sale, fapt ce rezultă din tabelul 7, calculat în baza lui [21, p. 41] şi [25].

Tabelul 7

Ponderea muncitorilor calificaţi în numărul total al muncitorilor

	1930 *)	noiembrie 1958	iunie 1961	iunie 1864
Pe ţară	38,3	74,1	78,9	79,0
În industrie	38,5	78,9	81,6	82,5
metalurgie şi construcţii de maşini	63,9	78,1	81,4	87,1
industria chimică	26,1	84,6	89,5	87,2
exploatarea şi prelucrarea lemnului	19,2	50,3	58,3	68,0
industria textilă	23,4	24,7	87,5	91,0
industria alimentară	28,0	66,1	77,0	70,0

*) Calculat la teritoriul actual al ţării.

După cum rezultă, cele mai însemnate creşteri au avut loc în ramurile legate nemijlocit de progresul tehnic şi de valorificarea resurselor naturale ale ţării, precum şi în ramurile unde în trecut predomina munca necalificată, existînd o tendinţă de apropiere sub acest aspect între toate ramurile industriei. Trebuie să precizăm că însuşi conţinutul muncii necalificate s-a schimbat substanţial pe baza ridicării nivelului de cultură generală a întregii populaţii.

În totalul muncitorilor calificaţi a crescut continuu ponderea celor calificaţi în şcoli profesionale şi tehnice. Dacă în 1961 din numărul muncitorilor angajaţi pentru prima dată au fost calificaţi prin şcoli profesionale 13,6%, iar prin şcoli tehnice de maiştri şi alte şcoli de nivel mediu 2,7%, în anul 1965 ponderea acestera a fost de 27,6% şi respectiv de 2,6%. În perioada 1966—1970 unei creşteri de cca. 20% a numărului total de muncitori calificaţi îi va corespunde o creştere de cca. 50% a celor pregătiţi prin şcoli profesionale şi tehnice. În 1970 din numărul total al muncitorilor calificaţi cca. 25,6% vor fi pregătiţi prin şcoli. Totuşi aceste ponderi sînt necorespunzătoare atît faţă de cerinţele progresului tehnic promovat intens şi multilateral în cadrul economiei naţionale, cît şi faţă de ţările dezvoltate economic. În întreaga economie naţională ponderea muncitorilor calificaţi prin şcoli reprezenta la 1 lunie 1964 doar 12% din numărul total al muncitorilor. Chiar şi în unele ramuri hotărîtoare ale economiei naţionale, unde ponderea muncitorilor calificaţi prin şcoli depăşeşte apreciabil media pe întreaga economie, situaţia este necorespunzătoare. În sectorul construcţii de maşini această pondere se ridica la numai 30,8%, în cel al energiei electrice la 20,8%, al industriei chimice la 21,8%, etc. Aceeaşi situaţie exista chiar pentru unele meserii de mare tehnicitate cum sînt cea de constructor şi montor de instalaţii automatizate (31,9%), maşinist mecanic la linii automate aşchietoare (23,0%), reglor de maşini în construcţii de maşini (42,3%) etc.

Ridicarea calificării forţei de muncă corespunzător cerinţelor economiei naţionale în continuă dezvoltare este reflectată şi de creşterea număruiui de salariaţi cu pregătire medie şi superioară. La 1 iunie 1964, cca. 16% din totalul salariaţilor aveau studii medii şi superioare. Numărul acestora a crescut între 1958—1964 cu 44% din care cei cu studii medii cu 49%, iar cei cu studii superioare cu 33%. Ponderea lor în totalul salariaţilor a crescut însă foarte puţin. Atrage atenţia ritmul deosebit de înalt în care a crescut numărul specialiştilor cu pregătire superioară în agricultură şi învăţămînt şi cultură, şi cel cu studii medii, în industrie, construcţii şi ocrotirea sănătăţii. Evoluţia ponderii specialiştilor cu pregătire tehnică şi economică, în totalul specialiştilor cu pregătire medie şi superioară se prezintă în tabelul 8. Se observă ponderea mare a cadrelor cu pregătire tehnică şi economică, dar cu o evoluţie necorespunzătoare faţă de necesităţile economiei naţionale.

Tabelul 8

	Din totalul salariaţilor cu studii superioare au studii			Din totalul salariaţilor cu studii medii au studii		
	tehnice	economice	altele	tehnice	economice	altele
Noiembrie 1958 (%)	34,5	13,3	52,2	23,4	15,2	61,4
Iunie 1964 (%)	35,2	11,8	53,0	22,8	12,4	64,8
1964/1958 (%)	136,1	118,5	134,7	145,3	121,6	157,6

Pentru ca imaginea creşterii gradului de calificare a forţei de muncă să fie completă, trebuie să arătăm că peste 71% din cadrele cu pregătire superioară şi 73% din cele cu pregătire medie au fost pregătite în anii construcţiei socialismului.

În anii următori, pe măsura dezvoltării economiei naţionale va spori şi mai mult numărul specialiştilor pentru toate domeniile de activitate. În perioada 1966—1970 se vor califica prin şcoli 584 000 cadre dintre care 334 000 muncitori calificaţi, 130 000 cadre cu pregătire medie de specialitate şi 120 000 cadre cu pregătire superioară. Aproape 60% din sporul de salariaţi va fi reprezentat de absolvenţii acestor şcoli încadraţi în producţie. Un accent deosebit se va pune pe învăţământul superior tehnic şi economic, chemat să pregătească specialişti de înaltă competenţă pentru nevoile complexe ale organizării şi conducerii producţiei. Numai numărul absolvenţilor învăţământului superior cu specialităţi tehnice va depăşi dublul, iar cel cu specialităţi economice va creşte de 2,1 ori faţă de perioada 1961—1965.

Sarcinile stabilite de Congresul al IX-lea cu privire la dezvoltarea cercetării ştiinţifice vor determina creşterea continuă a numărului de specialişti ocupaţi în acest important domeniu de activitate. Pînă în anul 1970 în instituţiile de cercetare vor lucra peste 30 000 de persoane

Schimbări importante s-au produs şi în structura pe profesii a forţei de muncă. Aceste schimbări se referă la dispariţia unor profesii învechite, care cereau în general o calificare slabă şi în care predomina munca fizică şi la apariţia altor profesii şi specialităţi noi, generate de noile ramuri ale producţiei şi de tehnica nouă care cer o pregătire înaltă şi complexă. În acelaşi timp, importante schimbări s-au produs în conţinutul unor profesii vechi. A crescut conţinutul intelectual al muncii, contribuind prin aceasta la apropierea muncii fizice de munca intelectuală, la îmbogăţirea profilului spiritual al lucrătorului modern.

Ca urmare a dezvoltării ştiinţei şi tehnicii contemporane, pe plan mondial se conturează tot mai mult profesia de conducător şi organizator al producţiei. Măsurile luate de plenara C.C. al P.C.R. din decembrie 1966, în această direcţie, vor duce la apariţia şi în ţara noastră a unei asemenea profesii care cere o pregătire specială şi în ştiinţa conducerii proceselor economice, a organizării producţiei şi a muncii.

4. Concluzii

Schimbările intervenite în structura forţei de muncă din ţara noastră, sub influenţa progresului trehnic reflectă faptul că relaţiile de producţie socialiste permit ca paralel cu desfăşurarea largă şi multilaterală a revoluţiei ştiinţifico-tehnice contemporane şi pe baza acesteia, să se asigure folosirea raţională şi eficientă a principalei forţe de producţie de care dispune economia naţională — forţa de muncă.

Ridicarea calitativă a întregii activităţi economice în actualul stadiu de dezvoltare a ţării noastre impune şi se va reflecta în îmbunătăţirea întregii structuri actuale a forţei de muncă.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de economie politică

BIBLIOGRAFIE

1. Marx K., *Teorii asupra plusvalorii.* Partea **I**, Ed. polit., 1959, pp. 152—153.
2. Ceaușescu N., *Planul cincinal — o nouă etapă de progres și prosperitate în viața poporului român, în înflorirea României socialiste.* Ed. polit., Buc., 1966, p. 17.
3. Ceaușescu N., *Cuvîntare rostită la Conferința organizației de partid a orașului București.* „Scînteia", 16 decembrie 1968.
4. Maurer I. Gh., *Dare de seamă asupra înfăptuirii planului de stat pe anul 1965 și cu privire la planul de stat pe anul 1966.* Ed. polit., Buc., 1965, pp. 22—23.
5. Maurer I. Gh., *Expunere cu privire la planul de stat pe anii 1966—1970.* Ed. polit., 1966, p. 27.
6. * * * *Forța de muncă în Republica Socialistă România.* Culegere de date statistice, București.
7. * * * Probleme economice, 1966, nr. *11* p. 95.
8. * * * Viața economică, 1966, nr. *21*, p. 15.
9. Chețău V., *Considerații demografice ale creșterii duratei medii de viață din țara noastră.* Rev. de statistică, 1966, nr. 5, pp. 46—53.
10. * * * Gospodarka planowa, 1965, nr. *10.* p. 43.
11. * * * *Anuarul statistic al R.S.R.* DCS, Buc., 1966.
12. * * * Lupta de clasă, 1968, nr. *12*, p. 68.
13. * * * *Congresul C.A.P.*, Ed. polit. Buc., p. 25.
14. Răvar I., *Creșterea venitului național.* Probleme economice, 1966, nr. 4, p. 151.
15. Газнер Н., Мировая экономика и международные отношения, 1965, № 2, стр. 51
16. Vîlceanu Gr., *Resursele de muncă din agricultură și căile folosirii lor rațională.* Probleme economice, 1966, nr. 12.
17. Șchiopu B., *Gospodăriile agricole de stat.* Ed. polit., Buc., 1966, p. 98.
18. * * * *Dezvoltarea economică a României 1944—1964.* Ed. polit., Buc., 1964.
19. Grigorescu C., *Rolul utilizării forței de muncă în repartizarea teritorială a industriei.* Probleme economice, 1966, nr. *10.*
20. Florescu E., *Industrializarea și procesul de urbanizare.* Lupta de clasă, 1966, nr. 11, p. 19.
21. * * * Probleme economice, 1965, nr. 5.
22. Ciulea O., *Creșterea nivelului de calificare a forței de muncă în țările socialiste.* Probleme economice, 1965, nr. *8*, p. 133.
23. Зворбкин А. А. *Наука, Производство, Труда.* М., 1965, стр. 171.
24. Alquier R., L'Usine nouvelle, avril 1965.
25. * * * Probleme economice, 1966, nr. *8.*

LE PROGRÈS TECHNIQUE ET LES MODIFICATIONS SURVENUES DANS LA STRUCTURE DE LA FORCE DE TRAVAIL DANS NOTRE PAYS

(Résumé)

Le travail met tout d'abord en évidence le fait que le progrès tehnique est l'un des facteurs les plus importants des modifications survenues dans la structure de la force de trevail et montre les moyens et les directions de cette influence. On analyse ensuite les principaux aspects des changements intervenus dans la structure de la force de travail dans la République Socialiste de Roumanie comme suite de la réalisation conséquente du progrès tehnique sur la base de l'industrialisation socialiste. Ayant comme point de départ un riche matériel de faits, le travail analyse les modifications intervenues dans le niveau de l'emploi de la force de travail, dans la structure de la force de travail ocupée dans la sphère productive et non-productive et dans ses différentes branches, dans la répartition teritoriale de la force de travail ainsi que dans la structure sociale, profesionnelle et de qualification. Dans l'analyse de toutes ces modifications on a insisté sur le rôle du progrès technologique contemporaine et on a mis en evidence la complexité de cette influence qui se réalise par des voies différentes, directes ou indirectes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia VII : ŞTIINŢE ECONOMICE

C. Z. 65.012 : 667.01

UNELE PROBLEME PRIVIND FUNDAMENTAREA DECIZIILOR DE FOLOSIRE A CAPACITĂŢILOR DE PRODUCŢIE

DE

D. RUSU şi OCTAVIAN JABA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Activitatea de conducere a proceselor economice la diferite nivele şi compartimente organizatorice ale economiei presupune adoptarea unor decizii economice raţionale, astfel încît pe baza unor analize ştiinţifice a situaţiei actuale şi a perspectivelor de viitor, să se determine influenţa lor asupra întregii activităţi productive, în vederea unei înalte eficienţe economice. Mersul înainte al dezvoltării economiei naţionale este condiţionat în cea mai mare măsură de rezultatele care se obţin în urma luării deciziilor fundamentale privind desfăşurarea activităţii economice.

Luare deciziilor economice a devenit o problemă de mare răspundere în condiţiile revoluţiei tehnico-ştiinţifice contemporane, cînd economia se caracterizează printr-o complexitate deosebită, în continuă creştere, în domeniul producţiei, progresului tehnic, investiţiilor, organizării, al folosirii mijloacelor de producţie, precum şi în alte domenii.

2. Elemente de tehnică în elaborarea deciziilor economice la nivelul întreprinderii

Decizia economică este un proces complex care constă în alegerea unui mod concret de acţiune prin care se urmăreşte realizarea unui anumit obiectiv în funcţie de anumite situaţii concrete, precede acţiunea şi presupune efectuarea de judecăţi logice, calcule şi raţionamente.

În procesul de luare a deciziilor este necesar să se construiască mai multe variante ale procesului economic, care conduc la atingerea scopului propus, astfel încît prin evaluarea acestor alternative să se poată prevedea pe baza informaţiilor culese rezultatele posibile ale acţiunilor.

La baza optimizării deciziilor economice trebuie să stea criteriul minimizării cheltuielilor totale de muncă, care la nivelul întreprinderii conduce la obţinerea unei înalte eficienţe economice şi a unei rentabilităţi sporite.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Între organizarea procesului de luare a deciziilor și sistemul informațional intern din întreprinderi este o strînsă legătură, întrucît rezultatul analizei și prelucrării informațiilor este luarea unei decizii care să corespundă unei necesități concrete a activității de producție. Un sistem informațional intern bine organizat oferă posibilitatea elaborării și luării unor decizii operative și de mare eficiență economică.

Procesul de elaborare a deciziilor economice la nivelul întreprinderii trebuie să reprezinte ansamblul unei succesiuni de etape, constituind anumite activități, în decursul cărora organul colectiv de conducere are menirea de a coordona și antrena în această activitate un număr determinat de persoane, cu o înaltă calificare, capabile de a-și aduce contribuția la soluționarea problemelor cerute de nevoile curente sau de perspectivă ale producției.

Acțiunea de organizare științifică a producției și a muncii, ce se desfășoară în prezent în întreprinderile din țara noastră și studiile elaborate cu această ocazie constituie o experiență valoroasă pe linia adoptării unor decizii economice de mare eficiență în activitatea de conducere.

La baza elaborării deciziilor economice trebuie să stea în primul rînd raționamentele logice bazate pe aspectele calitative ale proceselor economice astfel încît, folosindu-se deducția și inducția la scara microeconomică și macroeconomică, să se determine o variantă optimă în orientarea activității economice.

Un alt element de tehnică în elaborarea deciziilor la nivelul întreprinderii este calculul economic, care oferă posibilitatea elaborării pe cale matematică a unor soluții de optimizare între mai multe variante de adaptare a producției, luînd în considerare criteriul rentabilității. Cercetările operaționale, cibernetica economică, analiza economică etc., reprezintă în acest sens instrumente prețioase puse la dispoziția conducerii pentru adoptarea deciziilor celor mai eficiente.

În funcție de natura deciziilor economice și de scopul urmărit, la baza elaborării acestora stau și o serie de principii care și-au dovedit trăinicia și justețea practică în procesul de producție.

Folosirea cît mai eficientă a mijloacelor de muncă este un obiectiv deosebit de important al activității de conducere. La nivelul întreprinderii deciziile privind folosirea capacităților de producție trebuiesc fundamentate, așa cum s-a arătat, în afară de elementele menționate și pe baza unor principii cunoscute, dar care nu sînt luate totdeauna în considerare.

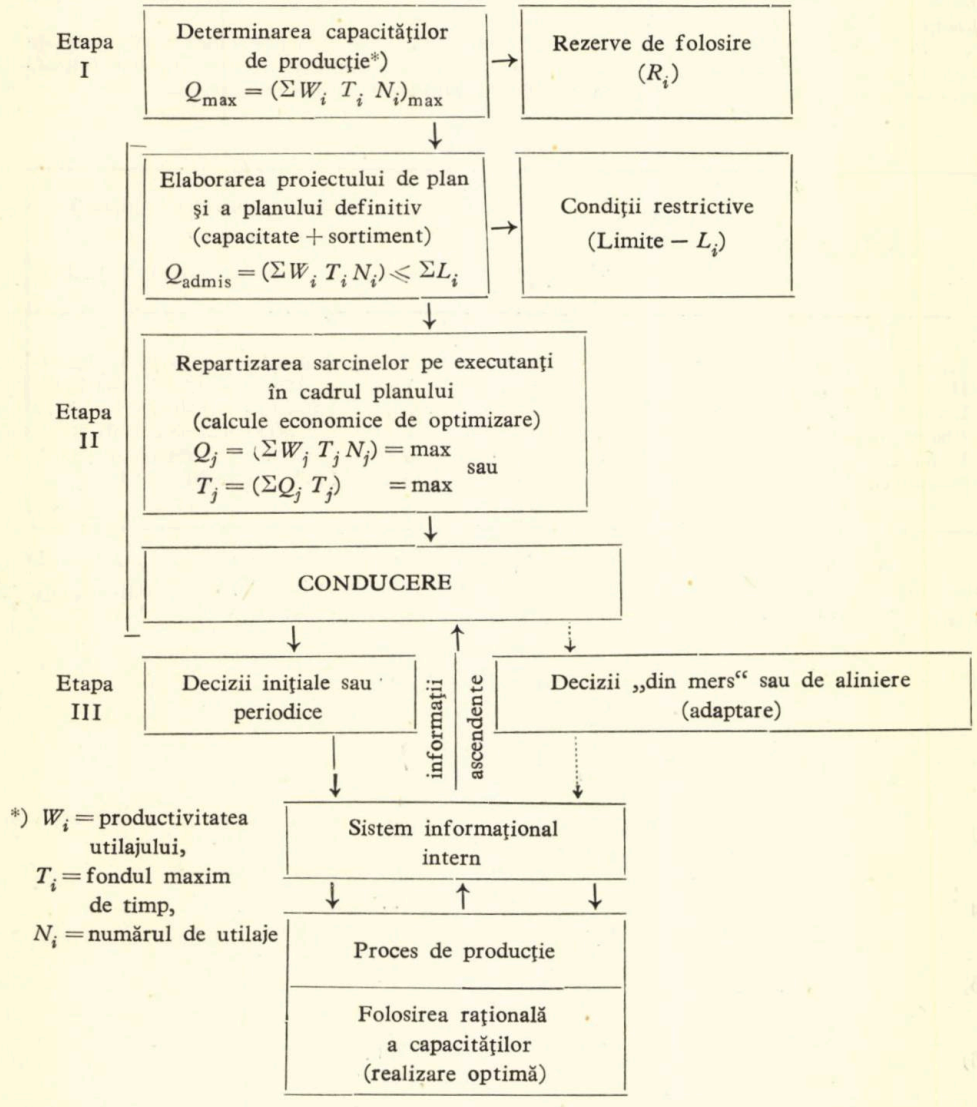
Avînd în vedere aceste aspecte, structura unui proces de decizie privind folosirea capacităților de producție este reprezentată în schema din fig. 1. După cum rezultă, structura unui proces de decizie privind folosirea capacităților de producție cuprinde mai multe etape.

a) În primul rînd, plecînd de la informațiile existente, de la unele previziuni privind folosirea intensivă și extensivă în viitor și a gradului de difuzare a experienței avansate, este necesar să se determine capacitatea de producție a întreprinderii, pentru a se cunoaște posibilitățile maxime de producție și rezervele de folosire.

b) A doua etapă constă în elaborarea proiectului de plan și a planului definitiv, cu privire la cantitatea și sortimentul producției întreprinderii, care oferă posibilitatea cunoașterii condițiilor restrictive, anumite limite în funcție de anumite nevoi ale economiei naționale. Tot în cadrul acestei etape un moment important este repartizarea sarcinilor în cadrul planului pe diferiți executanți nemijlociți. Cu această ocazie trebuie să intervină calculele de eficiență economică, de optimizare și raționalizare, luîndu-se în considerare mai multe variante și determinîndu-se eficacitatea lor economică.

c) În baza rezultatelor obținute, în etapa a treia, decidentul va lansa cele mai eficiente decizii privind folosirea capacităților de producție, decizii care se numesc inițiale sau periodice.

d) În sfîrșit, în cazul în care sînt necesare unele corecții pe parcursul îndeplinirii planului, conducerea trebuie să transmită și unele decizii operative, de aliniere sau adaptare în vederea înlăturării unor eventuale neajunsuri. Sistemul informațional intern, privind folosirea capacităților de producție, trebuie să fie adecvat acestor etape.



*) W_i = productivitatea utilajului,
T_i = fondul maxim de timp,
N_i = numărul de utilaje

Fig. 1

3. Exemplu de calcul privind fundamentarea deciziilor de folosire a utilajelor unei filaturi de lînă

Folosirea maximă din punct de vedere extensiv a utilajelor din secţiile unei întreprinderi este condiţionată în mare măsură şi de stabilirea unui sortiment raţional de produse, care să fie adecvat nivelului tehnic al tuilajelor şi condiţiilor tehnico-organizatorice existente în întreprinderea dată. Avem în acest caz o problemă de determinare a sortimentului optim care să asigure maximizarea folosirii utilajelor prin minimizarea timpului liber nefolosit.

S-a luat în studiu o filatură de lînă pieptănată care produce cinci sortimente de fire, pentru a căror realizare sînt necesare şase faze de prelucrare; datele iniţiale necesare rezolvării unei asemenea probleme sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Secţiile	Timp disponibil (maşini–ore	Productivitatea în ore/kg/unit. convenţională				
		$N_m = 32$	$N_m = 36$	$N_m = 40$	$N_m = 40$	$N_m = 45{,}6$
Laminor trecerea I	1 900	0,02000	0,01613	0,01698	0,02560	0,02270
Hidroregulator	1 800	0,01170	0,01350	0,01590	0,02220	0,01590
Laminor trecerea II	3 600	0,03780	0,02470	0,02720	0,04530	0,03120
Flaier gros	60 000	0,61000	0,52100	0,55300	0,44800	0,54600
Flaier fin	180 000	1,80500	1,86000	1,88000	2,12000	1,98000
Maşini cu inele	4 111 200	41,00	44,30	42,60	43,30	43,50

Dependenţa liniară dintre productivitatea orară a maşinilor (W_i), cantităţile din diferitele produse care se fabrică (P_i) şi timpul disponibil (T_i) al fiecărei secţii poate fi prezentată cu ajutorul următorului sistem de inegalităţi:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{5} W_{1i} P_i \leqslant 1\,900,$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{5} W_{2i} P_i \leqslant 1\,800,$$

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{5} W_{3i} P_i \leqslant 3\,600,$$

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{5} W_{4i} P_i \leqslant 60\,000,$$

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{5} W_{5i} P_i \leqslant 180\,000,$$

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{5} W_{6i} P_i \leqslant 4\,111\,200.$$

Cantităţile P_i din cele cinci produse pot fi determinate cu ajutorul metodei simplex de programare liniară. Pentru efectuarea calculelor prin metoda simplex

Tabelul 2

Matricea iniţială (de bază)

Unităţi ale timpului liber	Programul	P_0	„Produse fictive“						$N_m = 32$	$N_m = 36$	$N_m = 40$	$N_m = 40$	$N_m = 45{,}6$	$\theta_j = \frac{P_0}{P_j}$
			C_j											
			— 1	— 1	— 1	— 1	— 1	— 1	0	0	0	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
— 1	A_1	1 900	1	0	0	0	0	0	0,02 000	0,01 613	0,01 698	0,02 560	0,02 270	117 774
— 1	A_2	1 800	0	1	0	0	0	0	0,01 170	0,01 350	0,01 590	0,02 200	0,01 590	133 333
— 1	A_3	3 600	0	0	1	0	0	0	0,03 780	0,02 470	0,02 720	0,04 530	0.03 120	145 749
— 1	A_4	60 000	0	0	0	1	0	0	0,61 000	0,52 100	0,55 300	0,44 800	0,54 600	115 163
— 1	A_5	180 000	0	0	0	0	1	0	1,80 500	1,86 000	1,88 000	2,12 000	1,98 000	96 774
— 1	A_6	4 111 200	0	0	0	0	0	1	41,00 000	44,30 000	42,60 000	43,30 000	43,50 000	91 803
$Z_i - C_j$		— 4 358 500	0	0	0	0	0	0	— 43,40 020	— 46,73 533	— 45,09 307	— 45,96 110	— 46,09 580	

Tabelul 3

Matricea finală (iteraţia nr. 5)

0	P_1	76 637	+ 268,511	0	0	0	— 4,27 858	+ 0,08 151	1	0	0	+ 1,34 017	+ 1,22 218	—
— 1	A_2	140	— 0,98 496	1	0	0	— 0,02 073	+ 0,00 125	0	0	0	— 0,00 342	— 0,00 486	—
— 1	A_3	126	— 3,15 477	0	1	0	+ 0,01 318	+ 0,00 005	0	0	0	— 0,00 598	— 0,01 276	—
— 1	A_4	1 298	— 21,49 740	0	0	1	— 0,22 467	+ 0,00 558	0	0	0	— 0,34 057	— 0,14 795	—
0	P_3	10 706	— 244,1	0	0	0	+ 14,81 000	— 0,53 243	0	0	1	+ 2,07 331	+ 0,59 804	—
0	P_2	11 580	— 22,05 512	0	0	0	— 10,28 213	+ 0,33 372	0	1	0	— 2,25 689	— 0,68 774	—
$Z_i - C_j$			+ 25,58 713	0	0	0	+ 1,23 222	+ 0,99 312	0	0		+ 0,34 997	+ 0,16 557	—

este însă necesar ca toate inegalitățile să fie transformate în egalități prin introducerea unor necunoscute suplimentare A_i, care au coeficienți egali cu 1, dacă influențează nivelul productivității mașinilor din secția respectivă, sau zero, dacă nu influențează această productivitate. În cazul exemplului considerat semnificația economică a acestor necunoscute suplimentare constă în aceea că ele reprezintă timpul de nefuncționare sau timpul liber, atunci cînd o parte oarecare din timpul mașinilor nu este folosită.

Pe baza acestor precizări sistemul de ecuații va arăta în felul următor:

$$1\,900 = A_1 + \sum_{i=1}^{5} W_{1i} P_i, \tag{1'}$$

$$1\,800 = A_2 + \sum_{i=1}^{5} W_{2i} P_i, \tag{2'}$$

$$3\,600 = A_3 + \sum_{i=1}^{5} W_{3i} P_i, \tag{3'}$$

$$60\,000 = A_4 + \sum_{i=1}^{5} W_{4i} P_i, \tag{4'}$$

$$180\,000 = A_5 + \sum_{i=1}^{5} W_{5i} P_i, \tag{5'}$$

$$4\,111\,200 = A_6 + \sum_{i=1}^{5} W_{6i} P_i. \tag{6'}$$

În această situație funcția scopului poate fi redată prin relația:

$$\sum_{i=1}^{6} T_i - \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{6} P_i W_{ji} = \text{minim}, \tag{7}$$

în care $\sum_{i=1}^{6} T_i$ reprezintă suma timpilor disponibili ai tuturor secțiilor de producție; P_i — cantitățile din diferitele produse care trebuie determinate, astfel încît diferența dintre termenii relației (7) să fie minimă; W_i — productivitatea utilajelor corespunzătoare diferitelor produse și secții.

În tabelul 2 este prezentată matricea de bază sau matricea inițială în care în rîndul inițial sînt trecute „produsele fictive", sau variabilele libere A_i și produsele reale P_i, ca titulaturi ale coloanelor. Se observă că necunoscutele suplimentare A_i au coeficienții —1, întrucît fiecare din aceste variabile sînt legate de pierderi de unități de producție sau, cu alte cuvinte, fiecare unitate dintr-o variabilă liberă reprezintă o oră de timp nefolosit. Aceste ore sînt înscrise în matrice cu semne negative deoarece se pune problema reducerii lor la minimum.

Coloanele produselor reale P_i au toate coeficienții zero în titulaturi, deoarece în timpul nefolosit sau liber nu se fabrică produse.

Tehnica de calcul în matrice succesive comportă efectuarea a o serie de calcule potrivit unor reguli cunoscute, specifice metodei simplex. Soluția optimă se obține atunci cînd în rîndul totalizator $(Z_i - C_j)$ al ultimei matrice (tabelul 3) apar numai valori pozitive, adică programul nu mai poate fi îmbunătățit.

În condițiile problemei luate în studiu programul de producție optim în vederea minimizării timpului liber și deci a unei folosiri maxime a utilajului s-a obținut după un număr de cinci iterații sau succesiuni de calcul în matrice. Calculele au fost efectuate cu ajutorul unei mașini electrice de calculat, fiind necesare aproximativ 15 ore de lucru.

După cum rezultă din ultima matrice folosirea optimă a utilajelor se realizează în condiţiile producerii numai a trei produse din cele cinci considerate, anume produsele P_1, P_2 şi P_3 în cantităţile de respectiv 76 637 kg, 10 706 kg şi 11 580 kg anual. Ţinînd seama de aceste cantităţi folosirea utilajului pe secţii de fabricaţii se prezintă în tabelul 4.

Tabelul 4

Secţii de fabricaţie	Timp disponibil	Timp de folosire rezultat din calcul	Diferenţe (funcţia scopului)	
			(−) nefolosire	(+) necesar de capacităţi
Laminor trecerea I	1 900	1 900	0	—
Hidroregulator	1 800	1 660	—140	—
Laminor trecerea II	3 600	3 474	—126	—
Flaier gros	60 000	58 702	—1298	—
Flaier fin	180 000	180 000	0	—
Maşini cu inele	4 111 200	4 111 200	0	—
Total	4 358 500	4 356 936	—1564	—

Rezultă că timpul minim nefolosit care se poate obţine pe ansamblul celor şase secţii în condiţiile progamului de producţie calculul este de — 1 564 ore-maşini. Pentru secţia maşini cu inele, care interesează cel mai mult, s-a obţinut o folosire integrală a timpului disponibil.

Decizia optimă de folosire a utilajelor din punctul de vedere al scopului urmărit. va fi aceea care se referă la fabricarea celor trei produse rezultate din calculul de programare, în cantităţile corespunzătoare. În cazul în care întreprinderea trebuie să producă şi celelalte două produse, conducerea acesteia va avea posibilitatea să compare varianta de folosire cu sortimentul integral de produse cu varianta optimă şi în acest mod să aleagă o a treia variantă care să fie acceptabilă din punct de vedere economic.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de economie de ramură
şi
Universitatea „Al. I. Cuza", Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Lévy-Lambert H., *Problèmes d'économie de l'entreprise*, Dunod, Paris, 1965.
2. Mothes J., *Prévisions et décisions statistiques dans l'entreprise*. Dunod, Paris, 1962.

PROBLÈMES QUI REGARDENT LA CONSOLIDATION DES DÉCISIONS DANS L'EMPLOI DES CAPACITÉS DE PRODUCTION

(Résumé)

L'étude comprend deux parts. La première présente les étapes d'un processus de décision qui regarde l'emploi des capacités de production tandis que la seconde porte sur un exemple pris dans une entreprise de l'industrie lainière. On détermine, à l'aide de la programmation linéaire le sortiment optimal afin de réaliser un emploi optimal des outillages.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia VII : ŞTIINŢE ECONOMICE

C. Z. 339.6; 66

CONTRIBUŢIA INDUSTRIEI CHIMICE LA VALORIFICAREA SUPERIOARĂ A UNOR RESURSE NATURALE DIN R. S. R. (LEMN, STUF, PAIE)

DE

EUGEN POPA, I. ADUMITRĂCESEI, MARIA PONTA şi V. RĂUŢU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. În cadrul politicii partidului nostru de ridicare a nivelului economic al României, un loc important îl ocupă valorificarea superioară a resurselor naturale ale ţării. Înfăptuirea cu consecvenţă a industrializării socialiste asigură între altele şi valorificarea pe cale chimică a unor însemnate materii prime de care dispunem.

Într-o comunicare anterioară, colectivul nostru s-a ocupat de problema valorificării pe cale chimică a unor resurse minerale — petrol, gaz metan, şi sare. În prezenta lucrare, continuînd preocupările noastre în această direcţie, ne propunem să analizăm unele aspecte ale contribuţiei industriei chimice la valorificarea superioară a următoarelor resurse vegetale : lemn, stuf, paie.

Tabelul 1

Specia	Ponderea (%)
Răşinoase	22,4
Fag	31,0
Stejar	18,3
Diverse specii	18,3

2. Din totdeauna în cadrul avuţiei naţionale a României, lemnul a ocupat unul din locurile principale. Patrimoniul forestier reprezintă peste o pătrime din suprafaţa ţării noastre (în 1965 — 26,8%). Structura acestui fond forestier în 1966 este dată în tabelul 1.

În trecut, exploatarea pădurilor noastre se realiza într-un mod cu totul nerational. Atenţia principală era concentrată în special asupra răşinoaselor, erau exploatate numai bazinele cele mai uşor accesibile (ceea ce ducea la despăduriri), se folosea o tehnică înapoiată şi se înregistrau mari pierderi în exploatare. Aproape o pătrime din masa lemnoasă exploatată în 1938 au constituit-o pierderile.

Valorificarea masei lemnoase exploatate se făcea la un nivel scăzut. Cea mai mare parte din cantitatea de lemn exploatată (cca. 60%), era folosită ca lemn de foc, iar lemnul destinat prelucrării industriale era supus mai ales unei prelucrări primare, prin transformarea în cherestea. Doar o cantitate relativ mică din lemnul

exploatat era prelucrat pe cale chimică în celuloză, hîrtie, viscoză, extracte rășinoase, acid acetic.

În trecut existau 7 fabrici de celuloză și hîrtie, de capacitate mică și cu o tehnologie înapoiată. Ca urmare producția de hîrtie pe cap de locuitor era în anul 1938 de numai 3,6 kg, ceea ce reprezenta de circa 8 ori mai puțin decît în țările din Europa Occidentală. De asemenea România era nevoită să importe unele sortimente de hîrtie.

Concomitent cu folosirea nerațională a lemnului în țară, în trecut România exporta cca. 50% din producția de masă lemnoasă în stare brută sau sub formă de cherestea. Acest export era deosebit de dezavantajos pentru economia națională ; astfel, între cele două războaie mondiale, lemnul a reprezentat 32% din volumul exportului României și numai 15% din valoarea acestuia.

O bogăție însemnată a țării noastre o constituie masivele stuficole din Delta Dunării, care reprezintă cca. 150 000 ha. În cazul unei recoltări complete a suprafețelor stuficole s-ar obține o producție de 1,2 milioane tone, din care se pot fabrica cca. 400 000 tone celuloză papetară. În același timp se remarcă și calitatea stufului din Delta Dunării, care este superioară celui din alte țări, în privința lungimii fibrei și a conținutului de celuloză.

În trecut, din Delta Dunării se recolta anual numai între 5 000 și 20 000 tone de stuf, care era utilizat pentru acoperișuri, garduri și drept combustibil.

Primele încercări de prelucrare industrială a stufului, prin producerea de mucavale și de celuloză pentru ambalaje, s-au făcut la Tulcea și Brăila, în unități mici, improvizate, cu o tehnică rudimentară, care după un timp relativ scurt și-au încetat activitatea.

O altă bogăție a țării noastre care poate fi valorificată pe cale chimică pentru obținerea de celuloză și hîrtie o constituie paiele. Datorită faptului că cerealele reprezintă ramura principală a producției vegetale, anual se obține o cantitate însemnată de paie din care o parte rămîne disponibilă pentru a fi valorificată în industria chimică. Pentru a avea o imagine a posibilităților existente, menționăm că în anul 1965 suprafața cultivată cu grîu a reprezentat 30,2% din suprafața totală cultivată.

În trecut nu au existat preocupări pentru valorificarea pe cale chimică a paielor.

3. În anii construirii și desăvîrșirii construcției socialismului, în țara noastră au fost create condiții tot mai favorabile pentru valorificarea superioară a lemnului, stufului și paielor, prin dezvoltarea continuă a industriei de celuloză, hîrtie și fibre artificiale.

Pe baza orientării stabilită de partid, s-a extins continuu exploatarea lemnului de foioase și în special a fagului. În acest scop au fost amenajate noi căi de acces în masivele forestiere, a crescut gradul de înzestrare tehnică a unităților de exploatare forestieră etc.

Ca urmare, în perioada 1961—1964 structura masei lemnoase exploatate s-a modificat după cum se arată în tabelul 2. În același timp cu schimbarea structurii masei lemnoase exploatate, corespunzător structurii fondului forestier, a crescut an de an ponderea lemnului destinat prelucrării industriale. În anul 1965, această pondere a atins nivelul de 69,2%, față de 49,1% în anul 1951. De asemenea, în perioada 1951—1965, pierderile în exploatarea lemnului s-au redus la jumătate, ceea ce a dus la creșterea ponderii lemnului de lucru în totalul masei lemnoase.

În masa lemnoasă destinată prelucrării industriale, dinamica cea mai rapidă a cunoscut-o lemnul pentru producția de celuloză. Evoluția producției de lemn pentru celuloză s-a reprezentat în tabelul 3. Pentru comparație menționăm că în același interval de timp, producția de lemn de mină a atins nivelul de 204%, iar producția de lobde pentru utilizări industriale, 246%.

Tabelul 2

Specia	Ponderea (%)	
	1961	1964
Rășinoase	33,5	28,5
Foioase	64'5	71,5

Tabelul 3

Indici	1950	1959	1963
mii m^3	293	660	1415
%	100	225	483

Ca urmare a creșterii mai rapide a sporit ponderea lemnului pentru celuloză în totalul masei lemnoase, tendință care continuă și în perioada actualului cincinal. În 1960 această pondere a fost de 5,8%, în 1965 a ajuns la 11,4%, iar pentru 1970 este prevăzută să fie 17,0%.

În vederea valorificării superioare a lemnului, între altele au fost construite două mari combinate, Combinatul de Celuloză și Hîrtie de la Suceava care folosește deșeuri de rășinoase și Combinatul de la Dej care folosește lemn de rășinoase pentru a produce celuloză care, în amestec cu celuloza din plante anuale, servește la fabricarea diferitelor sorturi de hîrtie. Aceste unități sînt printre cele mai moderne din lume. Concomitent au fost modernizate și dezvoltate la profil optim și vechile unități, ca de exemplu Bacău, Bușteni, Ghimbav.

În vederea valorificării stufului pentru producția de celuloză, în Delta Dunării s-au efectuat vaste lucrări de amenajare (organizarea teritoriului, îndiguiri, etc.), s-au creat utilaje pentru recoltatul și transportul stufului. Aceste probleme au fost rezolvate în țara noastră pentru prima dată în lume, pe baza cercetărilor științifice proprii.

Ca urmare a condițiilor create, începînd cu al II-lea cincinal, producția de stuf a crescut continuu; totodată a sporit și gradul de mecanizare a lucrărilor de recoltat și transportat, rezultatele obținute în expolatarea stufului fiind prezentate în tabelul 4.

Tabelul 4

Indici	1955	1960	1964	$\frac{1964}{1955}$ 100
Producția de stuf (tone)	4 000	118 000	278 000	6 950
Gradul de mecanizare (%)	—	86	95 (în 1963)	—

Folosirea stufului ca materie primă pentru producerea celulozei permite țării noastre să economisească însemnate cantități de material lemnos. Astfel, pînă la sfîrșitul anului 1966, cantitatea de stuf recoltată și prelucrată industrial — în decurs de 11 ani — se ridică la cca. 1,5 milioane tone, ceea ce echivalează cu 2,4 milioane m^3 lemn pentru celuloză.

În vederea valorificării pe cale chimică a stufului din Delta Dunării, a fost creat Complexul industrial de la Brăila, prevăzut cu fabricile și secțiile indicate în tabelul 5.

Tabelul 5

Nr. crt.	Fabrica	Capacitatea de producție t/an	Data intrării în funcție
	A. *Combinatul de celuloză și hîrtie*		
1	Fabrica de cartoane nr. 1	9 000	1959
2	Fabrica de cartoane nr. 2	21 000	1967
3	Fabrica de celuloză pentru viscoză	50 000	1961
4	Fabrica de celuloză și hîrtie	50 000 celuloză 40 000 hîrtie	1966
5	Secția de electroliză clorosodică	13 500 tone NaOH	1961 și 1966
6	Secția de tratare a apei industriale	13 600 m. c./h	1960 și 1965
7	Centrala electrică de termoficare	87 000 kW și 780 t. abur/h	1960 și 1965
	B. *Combinatul de fibre artificiale*		
8	Fabrica de celuloză și celofan	35.000 t. celofibră 1.500 t. celofan	1964 și 1965

În perioada construirii socialismului, în țara noastră s-a trecut și la valorificarea pe cale chimică a paielor în vederea obținerii de celuloză și hîrtie. În acest scop, au fost construite fabricile de la Palas — Constanța și Călărași dotate cu tehnică modernă.

Din cele de mai sus rezultă că baza de materii prime a industriei noastre de celuloză și hîrtie s-a lărgit considerabil prin trecerea la valorificarea plantelor anuale.

Modificările survenite în această privință sînt reflectate de ponderea diferitelor materii prime în producția de celuloză (tabelul 6). Creșterea ponderii plantelor

Tabelul 6

Materia primă	1948	1955	1960	1965	1975 (prevederi)
Lemn de rășinoase	100	74	45	38	37
Deșeuri rășinoase	100	20	40	20	7
Lemn de foioase	—	—	—	4	31
Stuf	—	—	12	26	16
Paie	—	—	3	12	9

anuale în baza de materii prime a industriei de celuloză și hîrtie are consecințe deosebit de favorabile asupra gospodăririi fondului forestier al țării. Folosirea plantelor anuale permite să se economisească în fiecare an 1,3...1,5 mil. m^3 lemn de rășinoase, ceea ce reprezintă recolta de pe 500 000 ha. pădure.

În ultimii ani, în țara noastră producția de celuloză obținută din stuf și paie a crescut mai repede decît întreaga producție de celuloză. Astfel, în perioada 1960—1965, în timp ce producția totală de celuloză și semiceluloză a crescut de peste 2,9 ori, cea obținută din stuf și paie a crescut de aproape 44 ori. Ca urmare a sporit simțitor ponderea producției de celuloză fabricată din stuf și paie, ceea ce rezultă din tabelul 7.

Tabelul 7

Materia primă	1959	1965
Total producție celuloză și semiceluloză din care	100	100
din lemn	97,8	65,6
din plante anuale	2,2	34,4

În vederea creării condițiilor necesare pentru valorificarea superioară a lemnului, stufului și paielor, statul nostru a făcut mari eforturi de investiții. Astfel, din totalul investițiilor industriale anuale, investițiile folosite pentru industria de celuloză și hîrtie (inclusiv exploatarea stufului) au reprezentat 0,6...1,5%, în perioada 1951—1955, 1,5%...6% în perioada 1956—1960, 3,1...5,6% în perioada 1960—1965.

Eficiența economică a investițiilor este strîns legată de modul cum se îndeplinesc indicatorii tehnico-economici proiectați. Realizarea acestora, într-un termen cît mai scurt, influențează într-o mare măsură asupra valorificării materiilor prime. În marea lor majoritate instalațiile puse în funcțiune în perioada 1960—1966 au atins nivelul proiectat al indicatorilor de eficiență economică în perioada de asimilare a noilor capacități.

Totuși sînt și unele uzine intrate în producție în perioada de mai sus, care prin indicatorii tehnico-economici atinși nu au justificat eforturile materiale și financiare făcute de stat, în unele cazuri fiind necesară acoperirea pierderilor înregistrate în loc ca ele să asigure beneficii. Astfel, Combinatul de celuloză și hîrtie producea în 1967 cu 47% din capacitatea proiectată, realizînd abia 31% din productivitatea muncii stabilită și atingînd un preț de cost de aproape trei ori mai mare ca cel proiectat.

Așa cum s-a subliniat la Consfătuirea pe țară a lucrătorilor din industria chimică, prin intensificarea eforturilor pentru realizarea într-un termen cît mai scurt a indicatorilor tehnico-economici proiectați, se creează posibilități mai favorabile și pentru valorificarea superioară și mai rapidă a materiilor prime în industria noastră de celuloză și hîrtie.

4. Pe baza valorificării superioare a unei părți însemnate din masa lemnoasă exploatată, a stufului recoltat din Delta Dunării și a unei mari cantități de paie, industria chimică asigură creșterea continuă a producției de celuloză, hîrtie, fibre și fire artificiale, precum și de alte produse valoroase. În anul 1965, producția de celuloză și hîrtie (inclusiv exploatarea stufului) a fost de 9,1 ori mai mare față de nivelul atins în 1938, iar producția de fibre și fire artificiale a depășit nivelul de atunci de 20,7 ori. Prin înfăptuirea sarcinilor stabilite de Congresul al IX-lea al P.C.R., în perioada planului cincinal 1966—1970, industria de celuloză și hîrtie își va spori producția de aproape două ori, iar cantitatea de fibre și fire chimice (inclusiv celulozice) dată de industria noastră chimică se va mări de cca. 4 ori.

Concomitent cu sporirea producției obținută pe cale chimică din lemn, stuf și paie, s-a lărgit și sortimentul produselor obținute. Producerea de sortimente noi, superioare, de hîrtie, cartoane, fibre și fire artificiale, asigură valorificarea la un

nivel tot mai înalt a materiilor prime. În această direcţie vor spori eforturile în perioada actualului cincinal.

Valoarea obţinută prin prelucrarea chimică a lemnului, stufului şi paielor este cu mult mai mare decît în cazul cînd aceste materii prime au altă destinaţie. Astfel, hîrtia obţinută dintr-un metru cub de lemn are o valoare de circa 6 ori mai mare decît cea a produselor primare ce ar putea fi realizate din lemnul respectiv. După unele calcule dintr-o tonă de stuf se pot obţine 220 kg celuloză chimică (din care se pot produce 1 100 m^2 pînză), sau 300 kg celuloză papetară (care în amestec cu 100 kg celuloză din răşinoase, permite fabricarea a 6 000 m^2 hîrtie), sau 50 kg furfurol (necesar în industria petrolieră şi la producerea materialelor plastice).

Contribuţia industriei chimice la valorificarea superioară a lemnului, stufului şi paielor este oglindită prin devansarea subramurilor care produc aceste materii prime de către subramurile care asigură prelucrarea lor chimică. Este semnificativă în acest sens comparaţia dintre dinamica producţiei globale în industria de exploatare a lemnului (inclusiv a lemnului pentru celuloză) şi cea a producţiei globale a industriei de celuloză şi hîrtie (tabelul 8).

Tabelul 8

Subramurile	1950	1955	1959	1965
Exploatarea lemnului	100	182	223	303
Industria de celuloză şi hîrtie	100	137	191	552

Devansarea care se observă în anul 1965, reprezintă între altele, şi rezultatul intensificării procesului de valorificare a lemnului pe cale chimică. Astfel ponderea lemnului pentru celuloză a sporit în volumul total al lemnului de lucru de la 4,7% în anul 1951 la 4,9% în 1955, 5,9% în 1959, 10,2% în 1963.

Produsele obţinute pe cale chimică din lemn, stuf şi paie servesc pentru satisfacerea unor importante necesităţi economice şi culturale. După cum se ştie, hîrtia constituie un element absolut necesar pentru întreaga activitate desfăşurată în domeniul învăţămîntului şi culturii, precum şi pentru satisfacerea a numeroase necesităţi economice, administrative, sociale. Creşterea şi diversificarea producţiei de hîrtie reprezintă un factor important în ridicarea nivelului de civilizaţie al poporului nostru. De asemenea, prin producerea de fibre şi fire artificiale se lărgeşte baza de materii prime a industriei textile. În perioada cincinalului 1966—1970, producţia proprie de fibre chimice (în cadrul căreia locul principal va fi ocupat în continuare de firele şi fibrele de celuloză) va acoperi peste 4/5 din consumul industriei textile.

Paralel cu satisfacerea unor necesităţi interne crescînde, chimizarea lemnului, stufului şi paielor creează noi posibilităţi pentru participarea avantajoasă a ţării noastre la comerţul internaţional. Astfel, în anul 1966, România a exportat 25 mii tone de hîrtie şi a importat 9,9 mii tone hîrtie.

Valorificarea lemnului, stufului şi paielor pe cale chimică a contribuit la îmbunătăţirea repartizării teritoriale a forţelor de producţie, inclusiv a industriei de celuloză şi hîrtie. Noile combinate construite în cadrul acestei ramuri, au determinat o creştere simţitoare a potenţialului economic al unor regiuni. În acest sens, sînt deosebit de semnificative datele privind ponderea regiunilor în producţia globală de celuloză şi hîrtie (plus exploatarea stufului) prezentate în tabelul 9.

Dezvoltarea industriei de celuloză, hîrtie și fibre și fire artificiale, atrage după sine și folosirea rațională cu o productivitate sporită, a unui număr tot mai mare de brațe de muncă. În perioada 1951—1965, în industria celulozei și hîrtiei (inclusiv exploatarea stufului), numărul salariaților a sporit cu 174%, ajungînd la 24,7 mii persoane. Acest proces contribuie la creșterea venitului național și a nivelului de trai al oamenilor muncii ocupați în această ramură.

Tabelul 9

Regiunea	1955	1959	1965
Dobrogea	0,5	2,3	3,0
Galați	—	1,1	12,8
Suceava	0,8	1,2	15,1

Tabelul 10

Produsul	1950	1965
Celuloză	9,1%	16,0%
Hîrtie	7,7%	10,2%

Valorificarea pe cale chimică a lemnului, stufului și paielor contribuie la apropierea treptată a țării noastre de nivelul economic al țărilor avansate. Ca urmare a eforturilor făcute și a realizării unui ritm mai rapid de dezvoltare, a sporit ponderea R. S. România în producția de celuloză și hîrtie a țărilor socialiste din Europa (fără Uniunea Sovietică) (v. tabelul 10).

De asemenea a crescut simțitor producția pe locuitor de celuloză și hîrtie, țara noastră apropiindu-se treptat sub acest aspect de țările mai dezvoltate. Astfel, dacă în 1950 producția de celuloză pe cap de locuitor a României era de 5,2 ori mai mică decît a Cehoslovaciei, în anul 1965 acest decalaj era de numai 2,4 ori. Continuînd procesul de industrializare socialistă, inclusiv valorificarea chimică a resurselor naturale, țara noastră va lichida asemenea decalaje și se va situa la nivelul țărilor avansate din punct de vedere economic.

5. Din aspectele analizate în această lucrare, rezultă că valorificarea pe cale chimică a unor importante cantități de lemn, stuf și paie prezintă numeroase avantaje economice. Aceasta justifică continuarea dezvoltării în mod susținut a industriei de celuloză și hîrtie și a industriei de fibre și fire artificiale în țara noastră.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de organizare și planificare
și
Catedra de economie politică

BIBLIOGRAFIE

1. Ceaușescu N., *Planul cincinal — o nouă etapă de progres și prosperitate în viața poporului român, în înflorirea României socialiste.* Ed. polit., Buc., 1966.
2. — *Cuvîntare la Consfătuirea pe țară a lucrătorilor din industria chimică* (5 iulie 1967), Ed. polit., Buc., 1967.
3. Maurer Gh. I., *Expunere cu privire la planul de stat de dezvoltare a economiei naționale pe anii 1966—1970.* Ed. polit., Buc., 1966.
4. Gaston Marin Gh., *Dezvoltarea industriei chimice și sarcinile ce revin acestei ramuri din Documentele Congresului al IX-lea al P.C.R.*, „Scînteia", 4 iulie 1967.

5. Scarlat C., *Chimia pe noi trepte ale dezvoltării.* Viața economică, 1966, nr. 28.
6. Seider M., *Valorificarea superioară a lemnului.* Probleme economice, 1963, nr. 9.
7. Lazăr C., *Influența valorificării superioare a resurselor naturale asupra ritmului dezvoltării industriei.* Probleme economice, 1966, nr. 5.
8. Puiu Al., *Valorificarea superioară a resurselor naturale, obiectiv important al creșterii eficienței economice.* Probleme economice, 1967, nr. 3.
9. Mihăilescu P., *Realizări și perspective.* Rev. celuloză și hîrtie 1965, nr. 6.
10. Baciu A. S., *Celuloza și hîrtia pe plan mondial.* Rev. celuloză și hîrtie, 1966, nr. 1.
11. Reichman E., Neculau Gh., Obreja C., *Zece ani de valorificare complexă industrială a stufului din Delta Dunării.* Rev. celuloză și hîrtie, 1966, nr. 4.
12. * * * *Industria României 1944—1964.* Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1964.
13. * * * *Valorificarea superioară a resurselor naturale.* Ed. polit., Buc., 1965.
14. * * * *Dezvoltarea industriei R.P.R.* D.C.S., Buc., 1964.
15. * * * Anuarul Statistic al R.S.R., Buc., 1967.

LA CONTRIBUTION DE L'INDUSTRIE CHIMIQUE À LA VALORISATION SUPÉRIEURE DES UNES DES RESSOURCES NATURELLES DE R.S.R.

(Résumé)

De l'analyse présentée il en résulte que la valorisation par voie chimique des grandes quantités de bois, jonc et paille présente de nombreuses avantages économiques. Cette conclusion justifie la continuation du développement dans un ritm vif de l'industrie de la cellulose et du papier et de l'industrie des fibres et des fils artificiels dans la République Socialiste de Roumanie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia VII : ŞTIINŢE ECONOMICE

C. Z. 335.6 : 330.191.5

ROLUL HOTĂRÎTOR AL INDUSTRIALIZĂRII ÎN ÎNFĂPTUIREA PROCESULUI DE URBANIZARE

DE

I. D. ADUMITRĂCESEI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Industrializarea, ca principală manifestare a dezvoltării forţelor de producţie contemporane, are consecinţe numeroase şi adînci în viaţa politică, economică, socială, culturală a fiecărei ţări. Una din principalele consecinţe ale industrializării este urbanizarea. Industrializarea are rolul determinant în creşterea populaţiei urbane, în formarea şi dezvoltarea oraşelor, în satisfacerea necesităţilor materiale şi spirituale ale populaţiei. Înfăptuind cu consecvenţă politica de industrializare a ţării noastre, P.C.R. urmăreşte şi realizarea procesului de urbanizare, de ridicare a gradului de civilizaţie a poporului român.

Urbanizarea este un proces deosebit de complex, incluzînd aspecte tehnice, economice, sociale, culturale. Se poate spune că industrializarea influenţează desfăşurarea procesului de urbanizare sub toate aspectele sale. În acest studiu, se urmăreşte conturarea unora din direcţiile principale ale influenţei exercitată de industrializarea socialistă asupra desfăşurării procesului de urbanizare în România.

2. Industrializarea şi modificarea structurii economice a populaţiei

În fiecare ţară, înfăptuirea procesului de industrializare determină modificări adînci în repartizarea pe ramuri a populaţiei ocupate. În primul rînd se măreşte ponderea populaţiei ocupate în industrie, asigurîndu-se astfel folosirea mai productivă a unei părţi crescînde din forţele de muncă ale ţării. Apoi, creşte ponderea populaţiei ocupate în celelalte ramuri neagricole. Pe baza mijloacelor de producţie asigurate de industrie şi a cerinţelor determinate de aceasta, se dezvoltă construcţiile, transporturile şi telecomunicaţiile, circulaţia mărfurilor, precum şi o serie de activităţi din sfera neproductivă (învăţămînt, ştiinţă, cultură, sănătate). În acelaşi timp, dezvoltarea industriei asigură mijloace pentru creşterea productivităţii muncii în agricultură, iar, ca urmare, ponderea şi numărul absolut al populaţiei ocupate în această ramură se reduc.

Compararea repartizării populației active pe ramuri ale economiei naționale, în unele țări în curs de dezvoltare și în unele țări dezvoltate, pune în evidență tocmai modificările pe care le determină procesul de industrializare în această privință.

Tabelul 1

Țara	Anul	Industrie, construcții, transporturi, telecomunicații %	Agricultură, silvicultură %	Alte ramuri %
Țări în curs de dezvoltare				
Brazilia	1950	17	60	23
Ghana	1960	16	58	26
India	1961	16	70	14
Indonezia	1961	10	72	18
R. A. U.	1960	15	57	28
Țări dezvoltate				
Anglia	1951	57	5	38
Cehoslovacia	1962	53	23	24
Franța	1962	43	20	34
R. D. G.	1963	55	17	28
R. F. G.	1963	54	12	34
Italia	1963	46	27	27
Japonia	1963	36	29	35
S. U. A.	1963	39	14	47
U. R. S. S.	1964	43	33	24

Tabelul 1 [6, p. 22] denotă că, față de țările în curs de dezvoltare, în țările dezvoltate (atît capitaliste, cît și socialiste), populația ocupată în industrie, construcții, transporturi și telecomunicații depășește foarte mult ponderea populației active din agricultură. Această depășire este de: 11,4 ori în Anglia; 2,3 ori în Cehoslovacia; 2,1 ori în Franța; 3,2 ori în R.D.G.; 4,5 ori în R.F.G.; 1,7 ori în Italia; 1,2 ori în Japonia; 2,7 ori în S.U.A.; 1,3 ori în U.R.S.S.. La această situație s-a ajuns prin industrializarea țărilor dezvoltate.

În țara noastră, modificarea structurii populației active în favoarea industriei și a celorlalte ramuri neagricole a devenit vizibilă la începutul sec. XX și mai ales în perioada dintre cele două războaie mondiale. Însă sub regimul burghezo-moșieresc, acest proces s-a desfășurat lent, ca urmare a slabei dezvoltări industriale a țării. Potrivit recensămîntului din anul 1930, ponderea populației ocupate în industrie și construcții reprezenta numai 7,2% din totalul populației active. În același an, această pondere era în Cehoslovacia de 38%, adică de 5,2 ori mare decît la noi. În schimb, ponderea populației ocupate în agricultura României, în 1930, reprezenta 78,7% adică de 2...3 ori mai mult față de țările dezvoltate [17, p. 31—32].

În anii construcției socialiste, ca urmare a politicii înfăptuită de partid și de stat, industria României s-a dezvoltat permanent într-un ritm înalt. Aceasta a atras după sine creșterea simțitoare a populației ocupate în industrie și în celelalte ramuri neagricole și reducerea populației folosite în agricultură. Față de trecut, structura economică a populației țării noastre a evoluat după cum rezultă din tabelul 2 [4, p. 114—115], [16, p. 42].

Tabelul 2

Ramuri	1930	1950	1965
Industrie, construcții (industrie)	7,2 (. . .)	14,2 (12,0)	25,5 (19,2)
Agricultură, silvicultură	78,7 [1])	74,3	56,7
Alte ramuri productive	14,1	4,1	7,0
Ramurile neproductive		7,4	10,8

[1]) Numai agricultura.

Se constată o modificare pronunțată a structurii populației active a României în perioada construcției socialiste. În intervalul 1930—1950 (în 20 de ani), ponderea populației active din industrie și construcții a sporit cu 7 procente, iar în intervalul 1950—1965 (în 15 ani), această pondere a sporit cu 11,3 procente. Dacă în anul 1930, ponderea populației ocupate în industrie și construcții era mai mică decît ponderea celei folosite în agricultură și silvicultură de circa 11 ori, pînă în 1965, acest decalaj s-a redus la 2,2 ori.

Deși s-a îmbunătățit considerabil față de situația din trecut, structura economică a populației României este încă nefavorabilă comparativ cu situația din țările mai dezvoltate. Astfel, în anul 1962, ponderea populației ocupate în industrie și construcții în țara noastră era de 2,3 ori mai mică decît în Cehoslovacia și Anglia, de 2,2 ori mai mică ca în Belgia, de 1,7 ori mai mică ca în R.D.G. (1961) [17, p. 35—36]. Desigur că din 1962 și pînă în prezent, acest decalaj s-a mai redus, însă el este încă mare. Continuarea procesului de industrializare a țării noastre, în actualul cincinal și într-o perspectivă mai îndepărtată, va duce la apropierea structurii economice a populației României de cea a țărilor mai dezvoltate. „Industrializarea în ritm susținut a țării — sublinia tovarășul Nicolae Ceaușescu — atrage în sectoarele industriale și în celelalte sectoare neagricole marea majoritate a populației active, aceasta fiind o premisă a desăvîrșirii construcției socialiste și a creării condițiilor pentru trecerea la comunism" [1, p. 21].

În cadrul fiecărei țări, structura economică a populației prezintă deosebiri de la o regiune la alta. Amplitudinea acestor deosebiri și tendința lor depind, în mare măsură, de orînduirea socială. Relațiile de producție reprezintă cadrul de dezvoltare a economiei atît pe ramuri, cît și pe regiuni.

În condițiile capitalismului, dezvoltarea forțelor de producție are loc în mod anarhic. Ca urmare, industria se concentrează în anumite centre, iar regiuni însemnate rămîn înapoiate, chiar și în țările capitaliste dezvoltate. În România, în anul 1938, 70% din populația industrială a țării era concentrată în centrele București, Brașov, Ploiești, Hunedoara, Timișoara și Reșița, în timp ce provinciile Dobrogea, Moldova și Oltenia dețineau numai 12%, deși cuprindeau 38% din populația țării [15, p. 12].

În strînsă legătură cu disproporțiile în repartiția teritorială a industriei, între provinciile României existau mari deosebiri în privința structurii populației ocupate. La recensămîntul din 1930, situația era cea reprezentată în tabelul 3 [16, p. 42].

Tabelul 3

Provincia	Industrie şi construcţii	Agricultură	Alte ramuri
România	7,2	78,7	14,1
Banat	11,5	73,7	14,8
Dobrogea	5,4	78,2	16,4
Moldova	5,5	80,0	14,5
Oltenia	3,4	89,2	7,4
Transilvania	9,4	77,6	13,0

Deosebirile cele mai mari sînt în privinţa ponderii populaţiei ocupate în industrie şi construcţii, ceea ce reflectă nivelul diferit de dezvoltare economică a provinciilor ţării. Este semnificativ faptul că această pondere era în Oltenia de peste 3,3 ori mai mică decît în Banatul vecin. Înainte de 1944, oraşul Iaşi, la o populaţie de 100 000 locuitori, avea sub 5 000 salariaţi ocupaţi în industrie [21, p. 23].

O dată cu trecerea ţării noastre la socialism, s-au creat, în mod treptat, premise favorabile dezvoltării industriei pe întreg teritoriul ţării. Unul din scopurile principale urmărite consecvent de partid la amplasarea noilor obiective industriale a fost ridicarea regiunilor insuficient dezvoltate în trecut. Ca urmare, în anii socialismului, industria s-a dezvoltat mai rapid în aceste regiuni. Ponderea Dobrogei (inclusiv oraşul Constanţa), Moldovei şi Olteniei în producţia industrială a ţării a sporit de la 12% în 1938 la 19,6% în 1955 şi 22,7 în 1965.

Pe baza îmbunătăţirii repartizării teritoriale a forţelor de producţie, a crescut simţitor populaţia ocupată în industrie şi în celelalte ramuri neagricole în toate regiunile ţării noastre. Evoluţia ponderii populaţiei active din industrie şi construcţii este reprodusă în tabelul 4 [16, p. 46].

Tabelul 4

Regiunea	1956	1965	Diferenţa 1965—1956
România	16,6	25,5	8,9
Argeş	10,4	19,3	8,9
Bacău	19,9	25,7	5,8
Banat	22,3	32,2	9,9
Braşov	30,7	41,7	11,0
Bucureşti	5,6	12,1	6,5
Cluj	14,8	22,1	7,3
Crişana	13,6	17,1	3,5
Dobrogea [1])	15,5	21,3	5,8
Galaţi	12,0	23,5	11,5
Hunedoara	30,0	36,9	6,9
Iaşi	7,3	14,7	7,4
Maramureş	14,2	25.8	11,6
Mureş	14,4	24,0	9,6
Oltenia	7,1	17,5	10,4
Ploieşti	24,5	29,0	4,5
Suceava	11,0	14,5	4,5
Oraş Bucureşti	44,5	49,9	5,4

[1]) Inclusiv oraşul Constanţa.

Datele denotă o atenuare a deosebirilor între regiuni, inclusiv între cele cu situaţia extremă. În anul 1956, ponderea regiunii Oltenia era mai mică de 4,3 ori faţă de cea a regiunii Braşov, iar în 1965 — de 2,3 ori. În cei 10 ani (1956—1965) dintre cele 11 regiuni mai puţin dezvoltate, 4 regiuni (Galaţi, Maramureş, Mureş şi Oltenia) au înregistrat o creştere a ponderii populaţiei ocupate în industrie şi construcţii peste media pe ţară, regiunea Argeş a atins media, iar 6 regiuni (Bacău, Bucureşti, Crişana, Dobrogea, Iaşi şi Suceava) s-au situat sub această medie.

Analiza datelor de mai sus arată, pe lîngă atenuarea deosebirilor între regiuni în privinţa ponderii populaţiei ocupate în industrie şi în celelalte ramuri neagricole, că aceste deosebiri erau încă însemnate. De asemenea, au existat deosebiri şi mai mari în această privinţă între raioanele ţării şi chiar ale fiecărei regiuni.

Pornind de la această situaţie, Congresul al IX-lea al P.C.R. a stabilit măsurile necesare pentru ca îmbunătăţirea repartiţiei teritoriale a industriei să ducă la ridicarea nivelului economic atît a fiecărei regiuni mai puţin dezvoltată, luată în ansamblu, cît şi a fiecărui raion rămas în urmă. Pentru cincinalul 1966—1970 s-a prevăzut crearea de baze industriale în 70 din cele circa 100 de raioane fără industrie sau cu o industrie slab dezvoltată [2, p. 16]. Desigur că îmbunătăţirea structurii economice a populaţiei din toate unităţile administrative ale ţării, pe baza industrializării lor, este un proces complex şi de durată. Pentru realizarea acestui ţel, pe lîngă actualul cincinal, vor mai fi necesare încă unul sau două cincinale (aşa cum s-a arătat la plenara C. C. al partidului nostru din iunie 1968). O influenţă deosebită de favorabilă asupra repartizării industriei în profil teritorial o va avea îmbunătăţirea organizării administrative a ţării (înlocuirea regiunilor şi raioanelor cu judeţele).

Creşterea populaţiei ocupate în industrie şi în celelalte ramuri neagricole este o tendinţă care se manifestă în tot mai multe ţări ale lumii. Dezvoltarea economiei ţării noastre confirmă pe deplin această tendinţă. Modificarea structurii economice a populaţiei ocupate în favoarea industriei şi celorlalte ramuri neagricole, este o consecinţă inevitabilă, legică, a procesului de industrializare, a dezvoltării forţelor de producţie contemporane.

3. Industrializarea şi creşterea populaţiei urbane

Creşterea populaţiei ce activează în industrie şi celelalte ramuri neagricole înseamnă totodată creşterea populaţiei urbane. Desfăşurarea activităţii în industrie, construcţii, comerţ, transporturi, învăţămînt, ştiinţă, cultură, sănătate, necesită concentrarea populaţiei în aşezări cu o anumită mărime şi densitate, cu anumite amenajări tehnico-edilitare, cu anumite posibilităţi de satisfacere a necesităţilor materiale şi spirituale ale oamenilor. În felul acesta, dezvoltarea industriei şi a celorlalte ramuri neagricole determină formarea şi dezvoltarea aşezărilor urbane, determină creşterea populaţiei urbane. În principal, această populaţie se caracterizează prin ocuparea ei în industrie şi alte ramuri neagricole, prin concentrarea ei în localităţi cu mărimi şi densităţi cu mult mai mari decît cele ale localităţilor rurale.

Pe întreaga lume, populaţia urbană creşte cu mult mai repede decît populaţia totală. Astfel, în ultimul secol, populaţia globului s-a dublat, iar populaţia urbană a sporit de 10...11 ori. Pe baza continuării acestei tendinţe, se apreciază că ponderea populaţiei urbane va creşte de la 30% în 1965 la 62% în anul 2 000 [23, p. 7].

Evoluţia ponderii populaţiei urbane în unele ţări în curs de dezvoltare şi în unele ţări dezvoltate ale lumii se prezintă în tabelul 5 [6, p. 20—21].

Tabelul 5

Ţara	Anii			Ponderea populaţiei urbane		
	I	II	Diferenţa II—I	Anul I	Anul II	Diferenţa II—I
Ţări în curs de dezvoltare						
India	1951	1961	10	17	18	1
Kenya	1948	1962	17	5	8	3
R. A. U.	1947	1962	15	30	38	8
Turcia	1950	1960	10	22	32	10
Ţări dezvoltate						
Anglia	1951	1963	12	81	78	—3
Cehoslovacia	1947	1963	16	49	59	10
Franţa	1954	1962	8	56	63	7
R. D. G.	1950	1964	14	71	73	2
Italia	1951	1961	10	41	49	8
Japonia	1950	1964	14	37	61	24
S. U. A.	1950	1960	10	64	70	6
U. R. S. S.	1950	1965	15	39	54	15

Rezultă strînsa dependenţă între gradul de urbanizare a populaţiei unei ţări şi nivelul ei de dezvoltare industrială. Ţările care sînt la începutul industrializării (India, Kenya) au o pondere mică a populaţiei urbane, iar evoluţia ei este lentă. În ţările dezvoltate, ponderea populaţiei urbane depăşeşte cu mult 1/2 din întreaga populaţie, iar evoluţia ei este dependentă de gradul de urbanizare la care s-a ajuns, de ritmul creşterii industriei. Astfel, în timp ce Japonia a înregistrat o creştere foarte rapidă a ponderii populaţiei urbane, în Franţa, R. D. G. şi S. U. A., creşterea a fost relativ lentă, iar în Anglia, această pondere chiar a scăzut. Probabil că în Franţa, R.D.G. şi S.U.A. procesul de urbanizare se apropie de încheiere, iar în Anglia a fost deja terminat. După aprecierile din documentele O.N.U., se consideră încheiat procesul de urbanizare atunci cînd circa 4/5 din populaţia ţării este concentrată în oraşe cu peste 5 000 locuitori.

Tabelul 6

Perioada	Dinamica populaţiei (%)	
	totale	urbane
1930—1948	111,1	121,6
1948—1966	120,3	196,7

În ţara noastră, dinamica populaţiei urbane, comparativ cu dinamica întregii populaţii, a evoluat conform datelor din tabelul 6, [5, p. 67].

Este deosebit de semnificativă comparaţia între cele două perioade din istoria României, egale ca mărime, însă diferite în mod radical în privinţa dezvoltării social-economice a ţării. În ambele perioade, dinamica populaţiei urbane devansează pe cea a populaţiei totale, ceea ce pune în evidenţă desfăşurarea procesului de urbanizare. Însă în perioada construcţiei socialiste, creşterea populaţiei urbane a fost de 4,7 ori mai mare faţă de creşterea întregii populaţii, în timp ce în perioada anterioară, depăşirea a fost de numai 1,9 ori. Ca urmare, ponderea populaţiei urbane în totalul populaţiei ţării noastre a sporit de la 21,4% în 1930, al 23,4% în 1948 şi 38,2% în 1966. Rezultă că în anii construcţiei socialiste s-a accentuat considerabil procesul

de urbanizare. Aceasta este una din consecințele principale ale înfăptuirii industrializării socialiste a României.

Deși a fost realizat un mare progres față de situația din trecut, gradul de urbanizare în țara noastră este încă mai scăzut decît în majoritatea țărilor socialiste europene. După unele date, în anul 1965, greutatea specifică a populației urbane era: în Bulgaria — 46,5%; în Cehoslovacia — 61,0%; în R.D.G. — 73,1%; în Polonia — 49,7%; în România — 33,9%; în Ungaria — 43,1%; în U.R.S.S. — 54,1% [7, p. 5]. Prin înfăptuirea consecventă a procesului de industrializare a țării noastre, se apreciază că populație urbană a României se va dubla pînă în 1985—1990 față de 1965 [25, p. 13], că ea va reprezenta în 1970 — circa 40%, în 1980 — circa 55% [21, p. 26], iar în anul 1990, cel puțin 60% din populația țării [20, p. 19].

În cadrul fiecărei țări, procesul de urbanizare cunoaște o anumită desfășurare pe plan teritorial, în funcție de nivelul de dezvoltare industrială, de orînduirea social-economică. În țara noastră, în perioada construirii socialismului, pe baza îmbunătățirii repartizării teritoriale a industriei, are loc creșterea ponderii populației urbane în fiecare regiune. Desfășurarea acestui proces între recensămintele efectuate în anii 1956 și 1966 se prezintă în tabelul 7 [5, p. 69].

Tabelul 7

Regiunea	1956	1966	Diferență 1966—1956
România	31,3	38,2	6,9
Argeș	13,9	20,4	6,5
Bacău	25,6	31,2	5,6
Banat	40,0	45,7	5,7
Brașov	47,2	58,4	11,2
București	11,0	15,5	4,5
Cluj	20,1	36,0	15,9
Crișana	25,7	30,0	4,3
Dobrogea [1])	32,1	42,3	10,2
Galați	27,0	31,4	4,4
Hunedoara	47,7	58,4	10,7
Iași	20,6	24,3	3,7
Maramureș	28,1	37,4	9,3
Mureș	23,6	30,2	6,6
Oltenia	15,7	24,4	9,7
Ploiești	33,6	40,7	7,1
Suceava	16,5	19,9	3,4
Orașul București	94,7	94,9	0,2

[1]) Inclusiv orașul Constanța.

Se observă că procesul de urbanizare s-a desfășurat în toate regiunile, însă cu o intensitate diferită, în funcție de dezvoltarea industriei și a celorlalte ramuri neagricole. Dintre regiunile insuficient dezvoltate în trecut, au cunoscut creșteri mai mari ale ponderii populației urbane regiunile Dobrogea (10,2%), Maramureș (9,3) și Oltenia (9,7), iar creșteri mai mici s-au înregistrat la regiunile București (4,5), Crișana (4,3), Galați (4,4), Iași (3,7) și Suceava (3,4). De asemenea, s-a manifestat o tendință de atenuare a deosebirilor dintre regiuni în privința gradului de urbani-

zare. Astfel, dacă în 1956, ponderea populației urbane din regiunea Argeș era de 3,4 ori mai mică decît cea a regiunii Hunedoara, în 1966 acest decalaj era de 2,8 ori.

Datele analizate arată că gradul de urbanizare a populației diferă încă foarte mult de la o regiune la alta, iar în cadrul fiecărei regiuni — de la un raion la altul. La recensămîntul din 1966, ponderea populației urbane reprezenta: sub 20% în 2 regiuni (București și Suceava); între 20...30% în 4 regiuni (Argeș, Crișana, Iași, Oltenia); între 30...40% în 5 regiuni (Bacău, Cluj, Galați, Maramureș și Mureș), între 40...50% în 3 regiuni (Banat, Dobrogea și Ploiești); peste 50% în 2 regiuni (Brașov și Hunedoara). Deci, 6 regiuni se aflau cu mult sub media populației urbane pe țară (38,2%). La aceeași dată, existau 11 raioane fără populație urbană, iar în alte 19 raioane ea reprezenta sub 10%. Aceste deosebiri mari în privința gradului de urbanizare pe regiuni și raioane sînt luate în considerare de partid și de stat la înfăptuirea repartiției teritoriale a industriei, în cadrul noii organizări administrative a țării, urmărindu-se reducerea lor. În felul acesta, se va ajunge la apropierea treptată a județelor în ceea ce privește ponderea populației urbane.

Datorită faptului că populația urbană crește mai repede decît întreaga populație, ea înregistrează sporuri absolute tot mai mari. În țara noastră, în perioada 1930—1948, sporul populației urbane a fost de 661 876 locuitori, iar în perioada 1948—1966, el s-a ridicat la 3 592 164 locuitori, fiind de 5,3 ori mai mare decît în perioada anterioară [5, p. 67]. Populația urbană a crescut atît pe baza sporului natural, cît și pe baza sporului migratoriu. Procesul de industrializare influențează asupra ambelor căi de sporire a populației urbane.

Condițiile de viață create în anii construcției socialiste, mai ales pe baza înfăptuirii industrializării, au influențat favorabil asupra sporului natural al populației urbane. Îmbunătățirea alimentației și a condițiilor de locuit, ridicarea nivelului cultural și sanitar, măsurile speciale pentru ocrotirea mamei și copilului au avut un asemenea efect. O rezultantă a acestor condiții este reducerea considerabilă a mortalității infantile, care în trecut micșora foarte mult sporul natural al populației țării noastre. Față de 1938, cînd mortalitatea infantilă în mediul urban reprezenta 171,7 la 1 000 născuți vii, în anul 1965 ea a ajuns la 33,20‰, ceea ce reprezintă o scădere de 80,7% [11, p. 55].

Însă factorul principal de care depinde sporul natural al populației este natalitatea. În țara noastră, natalitatea populației la 1 000 locuitori a evoluat după cum rezultă din tabelul 8 [11, p. 51].

Tabelul 8

	1938	1948	1965	1965 față de 1938 %
Total România	29,5	23,9	14,6	49,5
Mediu urban	18,6	16,4	12,1	64,7
Mediu rural	32,6	26,2	16,4	48,8

Se observă că natalitatea populației urbane se menține simțitor sub media pe țară. În anul 1965, ea a fost mai mică cu 35,3% față de nivelul din 1938. Scăderea accentuată a natalității a anihilat, în mare măsură, efectul condițiilor de viață favorabile pentru realizarea unui spor natural ridicat al populației. De aceea, în perioada construirii socialismului, pe calea creșterii naturale s-a obținut cu mult mai puțin de jumătate din sporul populației urbane (în anii 1958—1964, contribuția a fost de numai 27%). Aplicarea măsurilor luate de partid și de stat în vederea creșterii natalității și a

consolidării familiei, va avea ca efect și creșterea populației urbane într-o măsură mai mare pe seama sporului ei natural.

O cale principală de creștere a populației urbane o constituie migrarea de la sate la orașe. Acesta este un fenomen firesc, determinat de dezvoltarea industriei și intensificarea agriculturii. În capitalism, migrarea populației de la sate la orașe este un proces spontan. Țăranii ruinați se îndreaptă spre orașe pentru a găsi de lucru în industrie, în construcții, însă fără a avea asigurată întotdeauna această posibilitate, ceea ce face ca integrarea lor în mediul urban să fie deosebit de anevoioasă. În condițiile socialismului, forțele de muncă eliberate din agricultură sînt atrase în mod planificat în industrie și alte ramuri neagricole, creîndu-se condițiile necesare în acest scop.

Pe baza înfăptuirii industrializării țării noastre, în anii construcției socialiste, o parte însemnată din populația sătească s-a integrat în mediul urban. Spre deosebire de perioada 1930—1948, cînd populația rurală a înregistrat un spor de 930 009 locuitori (cu 40% mai mare decît sporul populației urbane), în perioada 1948—1966, populația rurală s-a redus cu 459 732 locuitori [5, p. 67]. Aceasta înseamnă că numărul persoanelor care au migrat de la sate la orașe a depășit simțitor sporul natural al populației rurale, ducînd la scăderea absolută a acesteia. Numai în perioada 1958—1964, populația orașelor a sporit cu circa 500 000 persoane provenite din mediul rural, ceea ce reprezintă 73% din sporul total al populației urbane în perioada respectivă. Actualul plan cincinal prevede ca numărul de salariați să sporească cu 1 milion, din care circa 400 000 provenind din agricultură [1, p. 24], [2, p. 34], ceea ce va contribui simțitor la creșterea populației urbane.

Pe măsura îmbunătățirii repartizării industriei pe teritoriul țării, mișcarea migratorie se atenuează. Dacă în 1956, la 1 000 locuitori au migrat 20,9 persoane, în 1964 acest număr s-a redus la 14,5 [16, p. 50]. O dată cu dezvoltarea industriei în toate județele, probabil că mișcarea migratorie se va concentra tot mai mult în interiorul fiecărui județ și va duce la creșterea gradului de urbanizare.

Dezvoltarea țării noastre, ca și progresul întregii societăți umane contemporane, arată că industrializarea și extinderea celorlalte activități neagricole determină o schimbare radicală în structura populației pe medii sociale, în favoarea mediului urban.

4. Industrializarea și dezvoltarea orașelor

În decursul istoriei, formarea și dezvoltarea orașelor are loc sub influența unei multitudini de factori social-economici, naturali, demografici, culturali, istorici, în cadrul cărora factorii social-economici își manifestă rolul determinant. Orașele apar în perioada de trecere de la comuna primitivă la sclavagism. Dezvoltarea meșteșugurilor și a schimbului a făcut necesară conviețuirea permanentă într-un loc a unui număr tot mai mare de oameni și amenajarea locului respectiv corespunzător cu necesitățile materiale și spirituale ale locuitorilor săi.

În orînduirile sclavagistă și feudală și chiar la începuturile capitalismului, orașele au cunoscut o dezvoltare relativ lentă. Nivelul scăzut al forțelor de producție și cadrul îngust al relațiilor de producție și-au pus amprenta asupra dezvoltării orașelor în orînduirile respective. Numai după înfăptuirea revoluției industriale din secolele XVIII și XIX, dezvoltarea orașelor capătă un puternic avînt. Aceasta se explică prin faptul că marea industrie mecanizată reprezintă o bază materială trainică pentru existența și dezvoltarea multilaterală a unui oraș, reprezintă factorul ce dinamizează întreaga viață a orașului. La sfîrșitul secolului trecut și începutul secolului nostru, dezvoltarea puternică a industriei în principalele țări capitaliste a dus la creșterea simțitoare a numărului de orașe, la formarea de orașe mari și foarte mari.

În epoca contemporană, progresul industriei și a celorlalte ramuri neagricole stă la baza formării și dezvoltării orașelor, atît în țările capitaliste, cît și în cele socialiste. Marea industrie, construcțiile, transporturile și telecomunicațiile moderne, formează baza materială a orașelor în orice țară. Însă procesul de formare și dez-

voltare a orașelor este puternic influențat de orînduirea social-economică existentă în fiecare țară. Relațiile de producție capitaliste și relațiile de producție socialiste, legile de dezvoltare ale capitalismului și cele ale socialismului imprimă orașelor trăsături cu totul diferite. Structura orașelor (gruparea construcțiilor economice, a construcțiilor publice și a cartierelor de locuit), aspectul lor, sînt determinate, în primul rînd, de orînduirea social-economică. Structura și aspectul orașelor reflectă epocile istorice în care acestea au apărut și s-au dezvoltat.

Folosind posibilitățile și avantajele pe care le oferă orînduirea socialistă, partidul și statul nostru urmăresc să asigure o puternică dezvoltare tuturor orașelor țării. La baza acestei dezvoltări stă procesul de industrializare socialistă, repartiția rațională a noilor obiective industriale pe teritoriul patriei. În acest sens, tovarășul Nicolae Ceaușescu, sublinia că „Dezvoltarea industriei duce la înflorirea orașelor noastre, la transformarea acestora în puternice centre economice și culturale" [1. p. 20].

Procesul de formare și dezvoltare a orașelor este influențat diferit de ramurile industriei extractive și de cele ale industriei prelucrătoare. Influența asupra perspectivelor de dezvoltare a orașelor, asupra mărimii, structurii și formei orașelor, diferă de la unele ramuri la altele.

Dezvoltarea industriei extractive duce la formarea și dezvoltarea unor orașe atunci cînd există zăcăminte mari și posibilitatea creării, în localitățile respective, și a unor întreprinderi aparținînd industriei prelucrătoare. Astfel, în bazinul carbonifer al Jiului au apărut și se dezvoltă orașele Lupeni, Petrila, Petroșeni, Uricani, Vulcan. În strînsă legătură cu extracția cărbunelui, în această zonă au fost create întreprinderi aparținînd ramurilor energetică, constructoare de mașini, chimică. În general, orașele legate de industria extractivă sînt de proporții mici și mijlocii și cu o formă alungită. În cazurile cînd zăcămintele sînt mai reduse, nu se crează orașe, ci așezări muncitorești. Această consecință a dezvoltării industriei extractive s-a manifestat în regiunile Banat, Maramureș, Ploiești, Suceava.

Dezvoltarea industriei prelucrătoare, îndeosebi a ramurilor care produc mijloace de producție, constituie factorul cel mai activ în formarea de noi orașe, în dezvoltarea celor existente. Industria prelucrătoare dinamizează întreaga viață economică și culturală a fiecărui oraș, asigurîndu-i mari perspective de dezvoltare. Multe dintre orașele noi, apărute pe harta patriei în anii construcției socialiste, sînt indisolubil legate de dezvoltarea ramurilor industriei prelucrătoare. Astfel, pe baza dezvoltării industriei chimice s-au format orașele Victoria și Gh. Gheorghiu-Dej. De asemenea, prin crearea de noi obiective ale industriei prelucrătoare s-a asigurat dezvoltarea rapidă a multor orașe, care în trecut lîncezeau datorită lipsei industriei. Prin îmbunătățirea în continuare a repartiției teritoriale a industriei prelucrătoare se va asigura o dezvoltare puternică, multilaterală, a tuturor orașelor din țara noastră. În general, dezvoltarea ramurilor industriale prelucrătoare oferă posibilitatea formării unor orașe mijlocii și mari, avînd forme de orașe adunate sau de orașe radiale (care sînt formele cele mai corespunzătoare, atît economic, cît și funcțional).

Paralel cu rolul hotărîtor exercitat de industrie, asupra procesului de formare și dezvoltare a orașelor influențează și alți factori. Dezvoltarea unor orașe este influențată de rolul lor deosebit în cadrul sistemului de transporturi. Astfel, este cazul unor orașe ce îndeplinesc funcția de noduri de cale ferată (Adjud, Feteşti, Pașcani, Simeria), de porturi (Constanța, Galați, Brăila). Dezvoltarea multor orașe este influențată de rolul important pe care-l au în circulația mărfurilor, reprezentînd verigi principale în aprovizionarea tehnico-materială a întreprinderilor productive, în desfășurarea comerțului cu bunuri de consum. De asemenea, dezvoltarea orașelor reședințe de regiuni în trecut și de județe în prezent este influențată și prin faptul că în cadrul lor se concentrează numeroase activități politico-administrative. Unele orașe îndeplinesc un rol deosebit în domeniul învățămîntului (principalele centre universitare), altele au un asemenea rol în domeniul refacerii sănătății și recreării (stațiunile balneo-climaterice). În general, factorii care influențează dezvoltarea orașelor sînt funcțiile îndeplinite de acestea în cadrul vieții economice,

politice și social-culturale a țării noastre. Se poate spune că toți acești factori sînt dependenți, într-un fel sau altul, de dezvoltarea industriei. Aceasta pune și mai mult în evidență rolul hotărîtor al industrializării în înfăptuirea procesului de urbanizare.

Numărul de orașe al unei țări depinde, în primul rînd, de gradul său de industrializare. În trecut, slaba dezvoltare industrială a României a făcut ca numărul orașelor să fie redus și să prezinte unele fluctuații. În anul 1930 erau 142 de orașe; dintre acestea 130 existau și în 1948, iar 12 localități au încetat de a mai fi orașe [20, p. 13]. Cu totul altă evoluție a cunoscut rețeaua urbană a României în perioada construcției socialiste. Datorită amploarei și intensității pe care o are procesul de industrializare a țării, numărul orașelor a crescut continuu: de la 154 în 1948 la 171 în 1956 și 184 în 1966. Deci, în 18 ani numărul de orașe a sporit cu 30, adică de 2,5 ori mai mult decît în perioada anterioară (1930—1948), cînd creșterea a fost de 12 orașe [5, p. 62].

Industrializarea socialistă a țării noastre a determinat și o creștere simțitoare a mărimii orașelor. Față de trecut, structura rețelei urbane a României a evoluat după cum indică tabelul 9 [22, p. 11].

Tabelul 9

Grupa de orașe	Numărul de orașe		Ponderea în numărul total de orașe		Ponderea în totalul populației urbane	
	1930	1966	1930	1966	1930	1966
Total România	142	184	100,0	100,0	100,0	100,0
Sub 10 000 locuitori	74	60	52,1	32,5	14,49	6,68
10... 20 mii locuitori	39	59	27,6	31,77	18,46	13,81
20... 50 mii locuitori	16	43	11,2	23,11	15,40	21,44
50...100 mii locuitori	9	8	6,3	4,31	20,71	8,56
100...200 mii locuitori	3	12	2,1	6,45	9,97	28,57
peste 200 000 locuitori	1	1	0,7	0,53	20,97	21,94

Datele reflectă o mișcare ascendentă, intensă, între diferitele grupe de orașe. S-a redus simțitor numărul orașelor foarte mici (sub 10 000 locuitori), numărul orașelor mici cu 10...20 mii locuitori a sporit de 1,5 ori, iar numărul orașelor mijlocii cu 20...50 mii locuitori a sporit de peste 2,6 ori. Astfel s-a creat perspectiva creșterii numărului orașelor mijlocii cu 50...100 mii locuitori. În anul 1966, numărul acestor orașe mijlocii era ceva mai mic ca în 1930, ceea ce se explică prin trecerea unor orașe mijlocii în grupa orașelor mari (cu 100...200 mii locuitori), care a cunoscut creșterea cea mai mare (de 4 ori). Țara noastră are un singur oraș foarte mare (cu peste 1 milion locuitori) — București, care, după numărul de locuitori, ocupă locul 9 între capitalele europene și locul 25 între capitalele lumii [10, p. 8].

Trecerea multor orașe dintr-o grupă inferioară în una superioară a dus la o anumită atenuare a deosebirilor de mărime între orașele țării noastre. Totuși, rețeaua așezărilor urbane are o structură neomogenă. Peste 64% din totalul orașelor au sub 20 000 locuitori. Nu avem orașe cu 75...100 mii locuitori și cu 200 mii...1 milion, ceea ce arată că în scara de mărimi a orașelor noastre există mari goluri.

Dezvoltarea orașelor noastre spre mărimile optime ridică numeroase probleme, pe grupe de orașe și pe fiecare oraș în parte. Dezvoltarea orașelor foarte mici și mici (mai ales cele care au sub 10 000 locuitori) trebuie să se realizeze într-un ritm mai rapid, iar dezvoltarea orașelor mari (care se apropie de 200 mii locuitori) poate

continua într-un ritm mai temperat. Rezolvarea acestor probleme este legată de continuarea procesului de industrializare socialistă a ţării noastre, de îmbunătăţirea repartiţiei teritoriale a industriei.

Repartizarea reţelei urbane a României pe regiuni, în 1966, o prezintă tabelul 10 [4, p. 62], [22, p. 11].

Tabelul 10

Regiunea	Numărul oraşelor			Numărul comunelor incluse în mediul urban
	total	regionale	raionale	
România	184	46	136	237
Argeş	11	3	8	13
Bacău	12	4	8	9
Banat	16	4	12	20
Braşov	20	5	15	27
Bucureşti	10	2	8	6
Cluj	14	2	12	10
Crişana	7	1	6	26
Dobrogea	12[1])	4	7	5
Galaţi	7	3	4	2
Hunedoara	15	3	12	15
Iaşi	5	2	3	—
Maramureş	7	3	4	12
Mureş	11	1	10	7
Oltenia	10	3	7	16
Ploieşti	16	4	12	53
Suceava	10	2	8	7
Oraş Bucureşti	1[2])	—	—	10

[1]) Oraşul Constanţa are regim asemănător cu al unei regiuni. [2]) Oraş republican.

Se observă că regiunile cu un grad mai înalt de industrializare (Banat, Braşov, Cluj, Hunedoara, Ploieşti) au o reţea urbană mai puternică, iar unele regiuni cu o industrie mai puţin dezvoltată (Crişana, Galaţi, Iaşi, Maramureş) au o reţea urbană mai redusă.

Deşi în anii construirii socialismului, reţeaua urbană s-a extins şi în unele regiuni ale ţării insuficient dezvoltate în trecut, între regiuni s-au menţinut deosebiri mari. Astfel în timp ce în regiunea Braşov existau 20 de oraşe şi 27 comune, incluse în mediul urban, în regiunea Iaşi erau numai 5 oraşe, iar mediul urban nu cuprindea nici o comună. De asemenea, în cadrul fiecărei regiuni, repartizarea reţelei urbane pe raioane prezenta deosebiri foarte mari. În anul 1965, din cele 142 raioane (fără cele ale oraşului Bucureşti), în 31 nu existau oraşe, iar 33 de raioane aveau reşedinţa în comune [4, p. 62], [21, p. 25]. Prin îmbunătăţirea organizării administrative a ţării şi amplasarea de obiective industriale în zonele insuficient dezvoltate, se crează premise pentru apariţia unor noi oraşe pe harta patriei noastre, pentru o dezvoltare mai echilibrată a reţelei urbane pe întreg teritoriul României.

Experiența țării noastre, ca și experiența mondială, pune în evidență rolul hotărîtor al industrializării în procesul de formare și dezvoltare a orașelor. În fiecare țară, numărul, mărimea, structura și aspectul orașelor depind, în primul rînd, de nivelul de dezvoltare a industriei și de relațiile de producție existente.

5. Concluzii

Sintetizînd analiza făcută în acest studiu cu privire la rolul industrializării în înfăptuirea procesului de urbanizare, se pot desprinde următoarele concluzii.

1. Industrializarea determină schimbarea radicală a structurii economice a populației în favoarea populației ocupate în industrie și celelalte ramuri neagricole.

2. Industrializarea determină creșterea populației urbane, atît prin sporul natural al acesteia, cît mai ales prin migrarea populației de la sate la orașe.

3. Industrializarea determină procesul de formare a unor orașe noi și de dezvoltare a orașelor existente, sub toate aspectele principale ale acestui proces.

Aceste concluzii exprimă legăturile principale de dependență, de determinare, a procesului de urbanizare de către procesul de industrializare. Aceste legături au caracter obiectiv. Cunoașterea lor aprofundată permite îmbunătățirea reglementării conștiente, planificate, a desfășurării procesului de urbanizare.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de economie politică

BIBLIOGRAFIE

1. Ceaușescu N., *Raport la cel de al IX-lea Congres al P.C.R.*, Ed. polit., Buc., 1965.
2. — *Planul cincinal — o nouă etapă de progres și prosperitate în viața poporului român, în înflorirea României socialiste.* Ed. polit., Buc., 1966.
3. — *Raport la Conferința Națională a P.C.R.*, Ed. polit., Buc., 1967.
4. * * * *Anuarul statistic al R.S.R.*, DCS, Buc., 1966.
5. * * * *Anuarul statistic al R.S.R.*, DCS, Buc., 1967.
6. * * * *Страны социализма и капитализма в цифрах.* Москва, 1966.
7. * * * *Экономика социалистических стран в цифрах.* Москва, 1966.
8. Cresin R., *Noi date cu privire la repartizarea populației R.S.R.* Rev. de statistică, 1966, nr. 11.
9. Bulgaru M., *Expresia înaltei responsabilități a generațiilor de azi pentru viitorul poporului român.* „Scînteia", 26 noiembrie 1966.
10. — *Evoluția populației în România și cercetarea demografică.* „Contemporanul", 1967, nr. 19.
11. Trebici V., *Aspecte ale fenomenelor demografice pe regiuni.* Rev. de statistică, 1966, nr. 6.
12. Pascaru A., *Coordonate demografice.* Lupta de clasă, 1967, nr. 4.
13. Retegan G., *Noi calcule ale populației mondiale în perspectivă.* Rev. de statistică, 1965, nr. 1.
14. Rachmuth I., *Principiile repartizării teritoriale a forțelor de producție.* Probleme economice, 1965, nr. 10.
15. Iancu A., *Îmbunătățirea repartizării teritoriale a industriei.* Lupta de clasă, 1966, nr. 10.
16. Grigorescu C., *Rolul utilizării forței de muncă în repartizarea teritorială a industriei.* Probleme economice, 1966, nr. 10.
17. Ciulea O., *Rolul industrializării socialiste în ocuparea și utilizarea rațională a forței de muncă.* Probleme economice, 1965, nr. 5.
18. Iacobovici-Boldișor C., Ionescu C., *Valorificarea superioară a resurselor naturale și repartizarea teritorială a industriei,* Probleme economice, 1965, nr. 3.

19. Laurian R., *Urbanismul.* Ed. tehn., Buc., 1965.
20. Florescu E., *Industrializarea şi procesul de urbanizare.* Lupta de clasă, 1966, nr. *11.*
21. Gusti G., Ioanid V., *Preocupări actuale în domeniul urbanismului.* Lupta de clasă, 1966, nr. *3.*
22. Cucu V., *Metamorfoză urbană.* Viaţa economică, 1966, nr. 52.
23. Fulicea V., *Secolul urbanismului.* „Contemporanul", 1966, nr. *46.*
24. Deznai V., *Urbanismul în cifre.* Viaţa economică, 1965, nr. *8.*
25. Moisescu A., *Oraşele de mîine.* Viaţa economică, 1965, nr. *1.*
26. Szeleny D, Vidor F., *Sociologia oraşului şi construirea oraşului.* „Teorie şi metodă în ştiinţele sociale", vol. II, Buc., 1966.

РЕШАЮЩАЯ РОЛЬ ИНДУСТРИАЛИЗАЦИИ В ЗАВЕРШЕНИИ ПРОЦЕССА УРБАНИЗАЦИИ

(Резюме)

В настоящей работе исследуется эволюция процесса урбанизации на мировом плане и, в частности, в Румынии. Подчёркиваются также важнейшие отношения этого процесса, определяемые процессом индустриализации. В этом отношении исследуется многосторонняя роль индустриализации относительно: 1° Изменения экономической структуры населения; 2° роста городского населения; 3° развития городов.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 1—2, 1969
Secţia VII : ŞTIINŢE ECONOMICE

C. D. 65.01

AMÉLIORATION ET ORGANISATION DE LA MISE À JOUR DE LA PRODUCTION DANS UN DES SECTEURS D'UNE TISSAGE DE LAINE

PAR

COSTACHE RUSU

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 28—30 septembre 1967

1. Dans les conditions de la révolution technique et scientifique contemporaine, l'organisation de l'activité des entreprises est dévenue un impératif de l'industrie moderne, une nécessité généralement reconnue.

Des organismes gouvernementaux et non gouvernementaux en sont à présent intensement préoccupés, en prenant des mesures afin de promouvoir dans les entreprises industrielles des méthodes scientifiques d'organisation et de direction de l'activité de production.

Compte tenant des implications que les problèmes de l'organisation et de la direction de la production ont sur le développement économique, social et culturel du pays, le Parti Communiste Roumain estime que le perfectionnement de la direction de l'organisation de la production et du travail doit être la préocupation centrale de sa politique économique.

Quelques tendances plus importantes dans cette direction sont en train de s'imposer sur le plan mondial : l'approfondissement du processus de spécialisation de l'activité industrielle, l'introduction sur une large échelle et d'une manière rapide des résultats de la recherche scientifique dans la production, la croissance du rôle du travail de conception dans l'ensemble de l'activité des entreprises, l'attention accrue accordée à l'amélioratioan de la qualité de la production, accompagnée de la réduction des frais de production, l'emploi de collectifs très larges de spécialistes dans l'activité de direction et d'amélioration de cette activité, le perfectionnement du flux informationnel économique.

2. Vu ces préoccupations actuelles, nous nous sommes proposé de découvrir les formes et les méthodes les plus appropriées d'organisation de la production appliquables à un secteur étroit d'activité — le retordage — à la Fabrique de drap de Buhuşi ; il faut que ces formes satisfassent tous les aspects du plan économique et de la production, la corrélation avec les autres secteurs d'activité (bobinage, doublage, tissage proprement dit) y comprise.

Le secteur de préparation dans l'entreprise que nous considérons, dispose de types de machines de retordage d'une grande diversité et avec de larges gammes

de variation de la vitesse de travail (en dépit des modernisations, des nouveaux emplacements ou des remplacements de certaines machines).

Les indices d'utilisation des machines et le coefficient des relèves sont bas et on modifient souvent les parties. On constate l'absence de certains équipes de levée.

À certaines périodes ce secteur d'activité apparît comme un domaine étroit, et les consommations spécifiques pour cette opération par les déchets de pneumofil ne sont pas les plus réduites possible.

Actuellement on assure d'une manière rytmique le plan par articles, couleur, N_m, par la défalcation trimestrielle et mensuelle du plan par machines, en fonction de la structure du plan et du comportement de chaque article (à base d'expérience). Cette défalcation se fait selon le KN_mT.

En fonction du plan de production de la tissage, on établit la quantité de fils pour chaque article, conformément au processus technologique.

On passe ensuite à la programmation des articles par machines. Mais cette programmation par machines (fuseaux) peut être de beaucoup améliorée, de manière qu'on assure la croissance de la production, l'accomplissement rythmique du plan, la mise à jour claire et précise de ce plan, la réduction des frais de main d'oeuvre, la réduction des déchets.

C'est sur ces possibilités d'amélioration de la situation actuelle que porte ce travail-ci.

La solution de ces problèmes est assez complexe dans le cas de la section étudiée, vu le grand nombre d'articles qui sont confectionnés simultanément au cours d'un trimestre ou d'un mois (plus de vingt) et la gamme large de vitesses (de 3 000 à 8 000 tours/minute) réalisée aux machines de la section.

Dans nos calculs nous sommes partis de l'hypothèse que l'assortiment a de la stabilité au cours d'un mois, étant possible par conséquent qu'un certain nombre de fuseaux travaillent sur le même article une période plus longue (un mois, un trimestre).

On a considéré 11 grammes de vitesses de 500 à 500 tours/minute réalisables avec les outillages se trouvant au secteur respectif (l'atelier de retordage). On a établi pour chaque machine les vitesses maximum, moyenne et minimum, possible à réaliser au point de vue constructif correspondant à une des 11 grammes. Pour chaque vitesse et article nous avons établi le KN_mT réalisable par un fuseau au cours d'un mois.

Le rendement des machines pour le même article présentera une tendance à baisser lorsque la vitesse s'accroît, étant donnée la fréquence des ruptures, des levées etc. Les rendements peuvent être différents d'une machine à l'autre pour la même vitesse et article.

Les déviations peuvent être négligées et on établira alors la production des différentes machines, pour le même article et la même vitesse à un rendement moyen.

Nous considérons que le fonds de temps pour tous les cas d'un mois, en heures, et déjà corrigé par le temps de stationnement au cours des réparations

$$T_k = Tk_s, \tag{1}$$

où T_k est le fonds de temps corrigé en fuseaux heures par mois, T — le fonds de temps en fuseaux heures/mois et k_s — le coefficient de stationnement pendant les réparations.

On établit aussi le pourcentage maximum de déchets pour chaque article et gamme de vitesse en bani par KN_mT au retordage. La fréquence des ruptures, et par conséquent la quantité des déchets de pneumofil diffère non seulement d'un article à l'autre, mais aussi dans le cadre d'un même article. À mesure que la vitesse s'accroît, la fréquence des ruptures s'accroît elle aussi, ce qui entraîne une

quantité accrue de déchets de pneumofil. Vu que la valeur des déchets est fonction de la matière première de l'article et de la nature de l'article, elle est établie en bani/KN_mT.

Toutes les grandeurs dont nous avons déjà parlé peuvent être déterminées par voie expérimentale et analytique, ce qui réclame un volume relativement grand de travail pour assurer un degré de précision correspondant, donné par une connaissance précise de la variation de la fréquence de rupture et du rendement, fonction de la vitesse et de l'article produit. Ces grandeurs une fois établies restent valables durant une période assez longue, et on peut les employer plusieurs fois dans le même modèle mathématique.

3. Le modèle mathématique est

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{11} p_{ij} x_{ij} = kP_i, & \sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{11} x_{ij} = A, & \sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{11} x_{ij} d_{ij} = \min, \\ x_{ij} \geqslant 0, & \sum_{i=1}^{20} x_{ij} \leqslant n_j, & n_j = \sum_{k=-1}^{k=+1} F_{j+k}, \end{cases}$$

où p_{ij} est la production réalisée durant la période T_k sur un fuseau en KN_mT, pour la vitesse j, lorsqu'on produit l'article i; x_j — le nombre des fuseaux qui produisent l'article i à la vitesse j, afin qu'on accomplisse le plan de production; P_i — la production mensuelle planifiée pour l'article i; k — un coefficient de proportionnalité qui tient compte de la possibilité de dépasser le plan de production; d_{ij} — les déchets pour l'article i réalisé à la vitesse j, exprimés en bani/KN_mT; A — le nombre total des fuseaux en fonction dans l'atelier de retordage; n_j — le nombre des fuseaux que peuvent fonctionner au point de vue technique et technologique à la vitesse j; F_j — le nombre des fuseaux qui fonctionnent à la vitesse j dans des conditions (moyennes) normales.

La solution de ce modèle mathématique qui suppose que chaque article peut être réalisé par une des 11 gammes de vitesses possibles du point de vue technologique et mécanique pour le parc des machines dont on dispose, peut se faire suivant une des méthodes de la programmation linéaire, par exemple la méthode simplex, à l'aide des calculatrices électroniques, puisqu'il y paraissent 220 variantes ($20 \times 11 = 220$).

L'établissement des 220 variantes optima (le nombre maximum possible) nous permet :

a) d'établir combien de fuseaux il faut charger d'un certain article, à une certaine vitesse, afin d'accomplir d'une manière rythmique et par assortiments le plan;

b) de faire ressortir à tout moment les réalisations du plan;

c) d'établir les possibilités de dépasser le plan;

d) d'assurer le niveau minimum des déchets (des consommations spécifiques) en bani/KN_mT — quantité de déchets en kg par $KN_mT \times$ lei demi-produit 100 kg;

e) d'introduire facilement les équipes de levée.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Organisation et Planification

ÎMBUNĂTĂŢIREA ORGANIZĂRII PRODUCŢIEI ÎNTR-UN SECTOR AL UNEI ŢESĂTORII DE LÎNĂ

(Rezumat)

Se stabileşte un model matematic care oferă variantele optime pentru realizarea a 20 articole cu 11 game de viteze şi permite determinarea numărului de maşini ce trebuie afectate unui articol, cu viteza respectivă, pentru realizarea ritmică şi pe sortimente a planului. Modelul oferă în orice moment imaginea realizării planului şi indică posibilităţile de a-l depăşi.

ILIE MATEI

1895—1969

La 31 martie 1969 a încetat din viață prof. dr. docent Ilie Matei, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, distins cadru didactic al Facultății de chimie industrială de la Institutul politehnic din Iași, om de știință de mare valoare, creator a numeroase generații de chimiști și ingineri chimiști.

Profesorul Ilie Matei s-a născut la 8 mai 1895, în comuna Cernicari, jud. Galați, din părinți plugari, muncitori ai pământului. A urmat școala primară în satul natal, acolo unde cunoscînd viața aspră a țărănimii de atunci, s-a legat pentru totdeauna de fiii poporului muncitor, printr-un sentiment de dragoste și profundă înțelegere a nevoilor celor mulți, care s-a manifestat de-a lungul întregii sale vieți.

Aceste trăsături deosebite s-au concretizat mai tîrziu prin primirea sa în rîndurile Partidului Comunist Român, în anul 1947, în numeroase acțiuni sociale, pline de umanism și animate de înalt spirit progresist.

Continuă studiile la liceul „Codreanu" din Bîrlad, iar după absolvire, în 1915, este trimis pe front. Ia parte la luptele de la Cașin, este rănit și declarat invalid de război. După război, își începe studiile la Universitatea din Iași, obținînd licența în chimie. Între anii 1929—1931 elaborează teza de doctorat la Institutul de chimie din Berlin și

obține în mod strălucit titlul de doctor cu lucrarea : *Sinteze de xantine arilate la nucleul pirimidinic.*

Asistent, apoi șef de lucrări (1934) și conferențiar prin concurs în 1937, la Universitatea din Iași, este numit profesor de chimie organică, în anul 1941, la Facultatea de chimie industrială de la Institutul politehnic din Iași, funcție pe care o deține pînă la pensionare, în 1965.

Concomitent cu activitatea didactică, prof. Ilie Matei a ocupat și alte funcții, pe care le-a onorat cu competența sa.

Între anii 1937—1941, a fost director la laboratorul de chimie al Institutului de igienă din Iași, unde a ținut cursuri și lucrări practice medicilor igiениști, privind igiena și controlul alimentelor. Între anii 1945—1946 a ținut cursul de chimie medicală și biologică la invitația facultății de medicină, de la Institutul de medicină din Iași.

Din anul 1945 și pînă în 1948, a funcționat ca prodecan al Facultății de chimie industrială, de la Institutul politehnic.

În peroada 1947—1949 a lucrat ca cercetător la Institutul național de cercetări tehnologice al Ministerului Minelor și Petrolului, filiala Iași, iar din 1951 pînă în 1963, a funcționat ca director științific adjunct și apoi ca director al Institutului de chimie macromoleculară „P. Poni" al Academiei Republicii Socialiste România, filiala Iași.

Ca profesor șef de catedră, prof. I. Matei a depus o muncă deosebită pentru organizarea laboratorului de chimie organică, cît și pentru predarea cursului de chimie organică la un înalt nivel.

A fost nu numai strălucit organician ci și un mare profesor. El aducea în sala de curs atît numeroase cunoștințe îmbogățite continuu cu cele mai noi realizări, cît și o mare pasiune pentru chimia organică, reușind să insufle studenților dragoste pentru această disciplină. Prelegerile sale documentate pe baza celor mai noi cuceriri ale științei, se caracterizau prin precizie și claritate, iar expunerea lor cucerea auditoriul prin sinceritate și adevăr. A fost un mare profesor și prin exigența deosebită ca examinator, drept în aprecieri și neabătut de la obligația fundamentală de a garanta calitatea cadrelor de ingineri chimiști, la a căror pregătire participa cu entuziasm, cu sobrietatea care îl caracteriza ; impunea studenților respectul față de muncă și le crea obișnuința de a răspunde obligațiilor profesionale cu toată seriozitatea.

Om de știință remarcabil, animat de pasiunea unui veritabil cercetător, prof. dr. doc. I. Matei a abordat direcții de cercetare variate. Lucrările sale științifice, cu caracter atît fundamental cît și aplicativ, sînt cunoscute în țară și peste hotare.

Studiile sale privind compoziția uleiurilor eterice separate din conifere au stat la baza valorificării în țara noastră a acestei bogății naturale.

Deosebit de valoroase sînt, de asemenea, cercetările în cadrul Institutului de chimie macromoleculară „P. Poni", Iași, care au dus la realizarea în fază pilot, la Combinatul chimic Borzești, a cauciucului poliuretanic cu comportări excepționale la uzură.

În domeniul fenoplastelor cercetările sale au rezolvat unele probleme de structură iar fenoplastele de turnare realizate în laborator s-au experimentat la Combinatul chimic, Făgăraș.

Lucrările cu caracter fundamental referitoare la studiul combinațiilor carbonilice, derivaților de condensare ai acenaftenchinonei și benzoinei cu naftoli, amine, nitrofenoli și aminofenoli au condus la sinteze de coloranți, noi derivați de xanten, fenantren și derivați cumarinici.

Cercetările asupra transformărilor și regrupărilor structurale ale derivaților nitrici au relevat probleme interesante de structură și de aplicații ale coloranților obținuți.

În cercetarea științifică, prof. I. Matei manifesta o riguroasă exigență imprimînd același stil de lucru și colaboratorilor săi de care se apropia dîndu-le sfaturi și îndrumări prețioase. A contribuit de asemenea, în nelimitată măsură, la ridicarea de cadre atît în calitate de conducător de doctorate cît și prin activitatea neobosită în mijlocul colaboratorilor săi.

Dascăl eminent, îmbinînd cea mai înaltă exigență cu o profundă înțelegere a tineretului, el a avut numeroși elevi și a format o întreagă pleiadă de organicieni.

Personalitate completă, de o înaltă ținută etică, prof. dr. doc. I. Matei și-a legat numele de învățămîntul chimic românesc, căruia i-a dăruit întreaga sa viață.

Pentru meritele sale deosebite în cercetarea științifică, a fost ales, în anul 1955, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România. A fost decorat în repetate rînduri cu ordine și medalii. În anul 1964 i s-a conferit titlul de „profesor emerit", iar în 1965, Ordinul Muncii cl. I.

Încetarea din viață a prof. dr. doc. Ilie Matei este o grea pierdere pentru chimia românească și îndurerează profund oamenii de știință, cadrele didactice și studenții institutului nostru.

Catreda de chimie organică

LISTA LUCRĂRILOR ŞTIINŢIFICE

1. *Über der Kondensation von Acenaphthenchinon mit Phenolen.* Berichte der dtsch. chem. Gesellschaft, 1929, **62**, S. 2095.
2. *Synthesen einiger im Pyrimidinring arylierte Xanthine.* Teză de doctorat, Berlin, 19 V 1931.
3. *Die Einwirkung von Ammoniak auf Acetyl-chlor-valerolacton.* Notă anexă la teza de doctorat, Berlin, 1931.
4. *Die Einwirkung von Dimethylamin auf Chlor-valerolacton-carbon-säureäthylester.* Notă anexă la teza de doctorat, Berlin, 1931.
5. *Die Einwirkung von Salpetersäure auf phosphorige Säure,* (în colaborare cu B. Blaser). Berichte der dtsch. chem. Gesellschaft, 1931, **64**, S. 2286.
6. *Reduktions- und Autooxydationsprodukte von 7,7-bis-(dimethyl-amino-phenyl)-acenaphthenonen. Verbindungen mit Radikal-Natur, Farbstoffe.* Berichte der dtsch. chem. Gesellschaft, 1932, **65**, S. 1623.
7. *Kondensation von Acenaphthenchinon mit Kresolen und Naphtholen. Cyclysche Pinakone.* Berichte der dtsch. chem. Gesellschaft, 1934, **67**, S. 1834.
8. *Oxidarea dimetilanilin-acenaftenonei cu peroxid de plumb.* Berichte der dtsch. chem. Gesellschaft, 1936, **69**.
9. *Über der Kondensation von Acenaphthenchinon mit Xilenolen und Thymol,* (în colaborare cu El. Bogdan). Berichte der dtsch. chem. Gesellschaft, 1938, **71**, S. 2292.
10. *Reduktions- und Autooxydationsprodukte von 1,1-bis (oxy-aryl)-acenaphthenonen,* (în colaborare cu El. Bogdan). Berichte der dtsch. chem. Gesellschaft, 1938, **71**, S. 2296.
11. *Variation des composants du vin (extrait, matières minérales, acide tartrique) au cours de la fermentation acétique.* Ann. Sci. Univ. de Jassy, 1939, **25**, *2*, p. 435.
12. *L'influence du chlore, de l'hypochlorite de sodium et de l'iode sur l'action hydrolitique de la pepsine,* (în colaborare cu El. Cocea). Ann. Sci. Univ. Jassy, 1940, **26**, *1*, p. 41.
13. *L'influence du chlore, du brome, de l'iode, de l'hypochlorite, de l'hypobromite et de l'hypoiodite de sodium sur l'action hydrolitique de la pepsine,* (în colaborare cu El. Cocea). Ann. Sci. Univ. Jassy, 1941, **27**, *2*, p. 471.
14. *Kondensation von Acenaphthenchinon mit o- und p-Nitrophenol,* (în colaborare cu El. Cocea). Berichte der dtsch. chem. Gesellschaft, 1945, **78**, S. 77714.
15. *Étude des huiles extraites des feuilles des conifères,* (în colaborare cu El. Cocea). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1948, **3**, *1*, p. 416.
16. *Uleiuri eterice din frunze de pin din R.P.R.,* (în colaborare cu El. Cocea). Lucr. ses. gen. şt., Acad. R.P.R., iunie 1950, p. 1740.
17. *Uleiuri eterice din frunze de pin şi întrebuinţări,* (în colaborare cu El. Cocea). Comunicată în şedinţa din 11 VII 1951, Secţia Chimie, Acad. R.P.R.
18. *Uleiuri eterice din frunze de pin din R.P.R.,* (în colaborare cu El. Cocea). Rev. de chimie ASIT, 1950, *2—3*, p. 111.
19. *Contribuţii la prepararea răşinilor fenolice de turnare,* (în colaborare). Rev. de chimie ASIT, 1951, *10—11*, p. 19.

20. *Acțiunea catalitică a clorurii de sodiu în formarea aminoplastelor*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1952, **III**, *1—4*, p. 204.
21. *Posibilități de valorificare a rezidiilor de la rafinarea cu furfurol a uleiurilor lubrefiante. Extract fracția V. Produse intermediare și coloranți*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1953, **IV**, *1—4*, p. 267.
22. *Contribuții la chimizarea etilenului. Prepararea acetatului de glicol din clorură de etilen*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1951, **II**, *3—4*, p. 292.
23. *Contribuții la prepararea rășinilor fenolice de turnare*, (în colaborare). St. și cerc. chimie, Acad. R.P.R., Buc. 1953, **I**, pp. 89—96.
24. *Posibilități de valorificare a rezidiilor de la rafinarea cu furfurol a uleiurilor lubrefiante. II. Coloranți*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1954, **IV**, *1—2*, p. 119.
25. *Condensarea benzoinei cu o- și p- nitrofenol*, (în colaborare). Rev. Univ. „Al. I. Cuza" și Inst. polit. Iași, 1954, **I**, *1*, pp. 85—92.
26. *Contribuții la studiul transformărilor și regrupărilor structurale ale derivaților nitrici. Coloranți din o- și p-nitrofenol*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1956, **VII**, *1*, p. 215.
27. *Condensarea benzoinei cu m-nitrofenol*, (în colaborare). Rev Univ. „Al. I. Cuza" și Inst. polit. Iași, 1955, **II**, *1—2*, p. 185.
28. *Un nou colorant pe bază de m-aminofenol*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1955, **I** (V), *1—2*, p. 101.
29. *Condensarea benzoinei cu m- și p-aminofenol*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1955, **I** (V), *1—2*, p. 89.
30. *Transformări și regrupări structurale ale derivaților nitrici. Produse intermediare la transformarea o-nitrofenolului. Coloranți*, (în colaborare). St. și cerc. chimie, Acad. R.P.R., Buc., 1957, **V**, *2*, p. 67.
31. *Rășini pentru plastice și lacuri pe bază de fenoli din gudroane din lemn de fag*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1957, **III** (VII), *1—2*, p. 67.
32. *Noi derivați de uracil*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1956, **II** (VI), *3—4*, p. 139.
33. *Contribuții la studiul transformărilor și regrupărilor structurale ale derivaților nitrici. Coloranți din nitrobenzen*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1957, **VII**, *1*.
34. *Un nou produs de condensare a benzoinei cu p-aminofenol. Reactiv pentru dozarea cuprului*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV** (VIII), *1—2*, p. 167.
35. *Contribuții la mecanismul de oxidare a p-nitrotoluenului*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1959, **IX**, *2*, p. 247.
36. *Sinteza p, p'-dibenzildiizocianatului*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1959, **IX**, *2*, p. 261.
37. *Derivați xantinici*, (în colaborare). St. și cerc. chimie, Acad. R.P.R., Buc., 1959, **X**, *1*, p. 157.
38. *Condensarea acenaftenchinonei cu p-aminofenol. Derivați complecși de zinc*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI** (X), *1—2*, p. 171.
39. *Curs de chimie organică*. Vol. **I**, 1947, litografiat.
40. *Curs de chimie organică*. Vol. **II**, 1948, litografiat.
41. *Sinteza unui cauciuc poliuretanic*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1960, **XI**, *2*, p. 379.
42. *Mecanismul reacției de condensare a acenaftenchinonei cu p-aminofenol în prezența sărurilor complexate $ZnCl_2$, $CdCl_2$, $NiCl_2$, $CoCl_2$*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, **XI**, *2*, p. 281.
43. *Analiza cromatografică și separarea derivaților nitrici*, (în colaborare). Protocol predat Combinatului chimic Făgăraș, 1961.
44. *Contribuții la chimizarea acenaftenului respectiv acenaftenchinonei*, (în colaborare). Comunicare prezentată la Simpozionul cu prilejul aniversării a 100 de ani a structurii chimice a lui A. M. Butlerov, Leningrad, 12—15 decembrie 1961.

45. *Proces tehnologic si controlul fabricației pe stație pilot și în industrie la Combinatul chimic Făgăraș a realizării rășinilor fenolice de turnare,* (în colaborare). Protocol predat Combinatului chimic Făgăraș, octombrie 1961.
46. *Considerații teoretice asupra sintezei cauciucului poliuretanic pe bază de 4,4'-diizocianat de dibenzil,* (în colaborare). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1962, **XIII**, *1*, p. 109.
47. *Esteri celulozici aminați,* (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. Iași, 9—11 noiembrie 1962.
48. *Chimizarea acenaftenului. Derivați de reducere a nitroacenaftenonelor. Amine și coloranți azoici.* (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. Iași, 9—11 noiembrie 1962.
49. *Sinteze de elastomeri poliuretanici, de produse de plecare și intermediari. V. Considerațiuni asupra mecanismului reacției de poliadiție al procesului de obținere a cauciucurilor poliuretanice,* (în colaborare cu El. Cocea și A. Petruș). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1962, **XIII**, *2*, p. 231.
50. *Sinteze de elastomeri poliuretanici, de produse de plecare și intermediari. VI. Considerații cinetice asupra procesului de poliadiție, în bloc, aplicat la sinteza cauciucurilor poliuretanice,* (în colaborare cu El. Cocea și A. Petruș). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1962, **XIII**, *2*, p. 241.
51. *Sinteze de elastomeri poliuretanici, de produse de plecare și intermediari. VII. Sinteze de poliuretani pe bază de 4,4'-diizocianat de dibenzil și determinarea constantelor vîscozimetrice,* (în colaborare cu El. Cocea și A. Petruș). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1963, **XIV**, *1*, p. 113.
52. *Chimizarea acenaftenului. Produși de oxidare a acenaftenolilor și acenaftenonelor,* (în colaborare cu T. Lixandru, M. Păstrăvanu și M. Dumitriu). Bul. Inst. polit. Iași, 1963, **IX (XIII)**, *1—2*, p. 177.
53. *Transformări polimer-analoge ale celulozei. I. Transesterificarea diacetatului de celuloză cu p-aminobenzoat de etil,* (în colaborare cu M. Grigoraș). Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X(XIV)**, *1—2*, pp. 145—150.
54. *Transformări polimer-analoge ale celulozei. II. Transesterificarea diacetatului de celuloză cu carbamat de etil,* (în colaborare cu M. Grigoraș). Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X(XIV)**, *3—4*, pp. 123—128.
55. *Transformări polimer-analoge ale celulozei. III. Grefe de coloranți azoici și baze Schiff pe catena celulozică,* (în colaborare cu M. Grigoraș). Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI(XV)**, *3—4*, pp. 151—158.
56. *Sinteze de elastomeri poliuretanici, de produși de plecare și intermediari. IX. Reactivitatea unor diizocianați aromatici și aril alifatici,* (în colaborare cu L. Măndășescu și A. Petruș). St. și cerc. chimie, Acad. R.P.R., Buc., 1964, **12**; Rev. de Chimie, 1964, **9**, *8—9*.
57. *Sinteze de elastomeri poliuretanici, de produși de plecare și intermediari. VIII. Diizocianați aril-alifatici,* (în colaborare cu El. Cocea, L. Stoicescu A. Petruș, și L. Măndășescu). St. și cerc. șt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iași, 1963, **XIV**, *2*, p. 213.
58. *Sinteze de elastomeri de produse de plecare și intermediari. X. Sinteza 2,4,2'-tetraizocianatului de dibenzil,* (în colaborare cu Gh. Mandric). Rev. de Chimie, 1964, **9**, *8—9*.
59. *Transformări polimer-analoge ale celulozei. IV. Derivați celulozici hidrazinici și guanidinici,* (în colaborare cu M. Grigoraș). Comunicare prezentată la Sesiunea științifică republicană de Chimie, Iași, 28—30 mai 1964.
60. *Transformări polimer-analoge ale polivinilalcoolului. Derivați polivinilhidrazinici și polivinilguanidinici,* (în colaborare cu M. Grigoraș). Omagiu acad. prof. Raluca Ripan, Ed. Acad. R.S.R., 1966, pp. 363—363.
61. *Curs de teorii moderne în chimia organică.* Iași, 1963—1964.
62. *Polimeri analogi vinilici cu eventuală activitate biologică,* (în colaborare cu M. Grigoraș). Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII (XVII)**, *3—4*, pp. 261—268.

63. *Chimizarea acenaftenului. Reducerea bis (3'-nitro-4'-oxifenil) acenaftenonei. Coloranţi azoici ai derivatului aminat,* (în colaborare cu T. Lixandru, M. Păstrăvanu şi M. Dumitriu). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. Iaşi, 9—11 noiembrie 1962.
64. *Condensarea 4,5-dinitroacenaftenchinonei cu dimetil- şi dietilanilină. Produşi de reducere şi coloranţi,* (în colaborare cu M. Păstrăvanu şi S. Vasiliu). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII(XVI)**, *1—2*, p. 187.
65. *Condensarea acenaftenchinonei cu nitrofenoli. Reducerea derivatului nitric obţinut,* (în colaborare cu M. Dumitru şi I. Ciocîrlă). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. Iaşi, 5—7 februarie 1965.
66. *Condensarea acenaftenchinonei cu amine şi diamine aromatice,* (în colaborare cu T. Lixandru). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII(XVI)**, *1—2*, p. 171.
67. *Condensarea acenaftenchinonei cu amine aromatice primare în prezenţa sărurilor metalice. Complecşi metalici (I, II),* (în colaborare cu T. Lixandru). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII(XVII)**, *1—2*, p. 245.
68. *Reacţii ale acenaftenonelor cu compuşi Grignard,* (în colaborare cu T. Lixandru). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1—2*, p. 245.
69. *Sinteze de noi acil-tiosemicarbazide şi semicarbazide,* (în colaborare cu Eug. Comăniţă). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, p. 189.
70. *Obţinerea unor derivaţi ai 5-mercapto-1,2,4-triazolului prin ciclizare în mediu alcalin,* (în colaborare cu Eug. Comăniţă). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, p. 175.
71. *O nouă metodă de ciclizare a acetil-tiosemicarbazidelor şi semicarbazidelor,* (în colaborare cu Eug. Comăniţă). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)** *1—2*, p. 255.
72. *Tiosemicarbazide ale unor acizi bibazici şi produşi de ciclizare* (în colaborare cu Eug. Comăniţă). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII, (XVII)**, *1—2*, p. 269.
73. *Activitatea antituberculoasă a unor acil-tiosemicarbazide-4-substituite şi a 5-mercaptotiazolilor-3,4-disubstituiţi,* (în colaborare cu Eug. Comăniţă). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. Iaşi, 5—7 februarie 1965.
74. *Elastomeri şi plastice poliuretanice. Sinteze de nitro-diizocianaţi,* (în colaborare cu Gh. Mandric şi Val. Ţăranu). Rev. Roum. de Chimie, 1966, **XI**, p. 843.
75. *Fabricarea cauciucului poliuretanic pe bază de poliesteri de 4,4'-dibenzil-diizocianat,* (în colaborare cu A. Petruş şi A. Caraculacu).
76. *Sinteze de monomeri izocianici cu grupe nitrice,* (în colaborare cu Gh. Mandric şi Val. Ţăranu). Comunicare prezentată la Conferinţa republicană de Chimie, Timişoara, iunie 1966.
77. *Polibenzimidazoli pe bază de derivaţi ai 3,4,3',4-tetra-amino-difenilmetanului,* (în colaborare cu Gh. Mandric şi Val. Ţăranu). Rev. Roum. de Chimie, 1967, **12**, p. 715.
78. *Poliacetaliuretani pe bază de 4,4'-dibenzil-diizocianat,* (în colaborare cu L. Geanău şi M. Popovici). Rev. Roum. de Chimie, 1967, **12**, *2*, p. 125.
79. *Effect of Structure on Thermal Stability of Polyesterurethanes,* (în colaborare cu A. Petruş). Rev. Roum. de Chimie, 1967, **12**, *2*, p. 117.
80. *Poliesteri aromatici şi policarbonaţi din m,m-(p-oxifenil)-desoxibenzoină şi 1,1-(b-oxifenil)-2-oxo-acenaften,* (în colaborare cu A. Petruş şi L. Geanău). Rev. Roum. de Chimie, 1968, **13**, *1*.
81. *Amine secundare obţinute prin reacţia bazelor Schiff ale acenaftenchinonei cu derivaţi organo-magnezieni,* (în colaborare cu T. Lixandru). Bul. Inst. polit. Iaşi, (sub tipar).
82. *Condensation of Acenaphthenequinone with Aromatic Diamines. Metallic Compounds,* (în colaborare cu T. Lixandru). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1969, **XV (XIX)**, *1—2*, s. II, p. 57.
83. *Kondensation von 5-Chloracenaphthenchinon mit Phenolen und Naphtholen,* (în colaborare cu M. Dumitriu şi I. Ciocîrlă). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3—4*, p. 337.
84. *Kondensation von 5,6-Dinitroacenaphthenchinon mit Phenolen* (în colaborare cu M. Păstrăvanu şi S. Vasiliu). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3—4*, p. 261.

Nr. colilor de tipar 50,75
Nr. planşelor 35

Întreprinderea poligrafică Iaşi str. V. Alecsandri 12
cd. 303. Republica Socialistă România

F 1812

R F1812

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI

SERIE NOUĂ

Tomul XV (XIX)

Fasc. 3—4

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

1970 OKT 3

1969

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

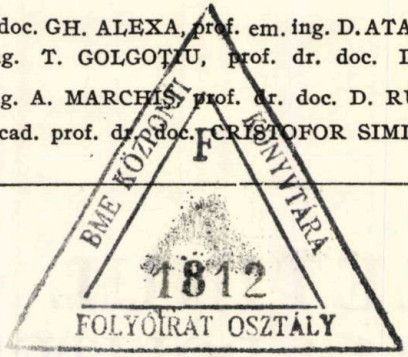
Tomul XV (XIX)

FASC. 3—4

1969

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU, prof. ing. A. ȘESAN, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)



COMITETELE DE REDACȚIE ALE SECȚIILOR

I. MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

Prof. dr. doc. Al. Climescu
Prof. Gh. Ciobanu
Prof. dr. doc. V. Petrescu

II. CHIMIE INDUSTRIALĂ

Prof. dr. doc. M. Dima
Prof. dr. ing. Gh. Chiriță
Conf. ing. Gh. Botez

III. ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

Prof. dr. doc. N. V. Boțan
Conf. dr. ing. D. Bărbulescu
Conf. dr. ing. L. Sebastian

IV. MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. Fărcaș
Prof. ing. G. d'Albon
Conf. ing. Cr. Linde

V. CONSTRUCȚII. HIDROTEHNICĂ

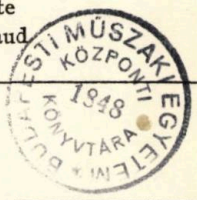
Conf. ing. C. Ciobanu
Conf. ing. Vl. Boghian
Lector dr. ing. A. Radu

VI. INDUSTRIE UȘOARĂ

Prof. ing. I. Ștefănescu
Conf. ing. V. Copilu
Conf. ing. V. Cociu

VII. ȘTIINȚE ECONOMICE

Conf. P. Mâlcomete
Conf. A. Jeanrenaud



REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Lector dr. ing. H. ROSMAN (secretar secțiile II, III)
Lector dr. ing. A. BRAIER (secretar secțiile I, IV, V, VI, VII)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4 1969

7889

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtár
Folyóiratkölcsönző
388/1970

SUMAR

Pag.

A. JEANRENAUD, La a XXV-a aniversare a insurecţiei armate din august 1944 XXI

Secţia I

MATEMATICĂ, MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

AL. CLIMESCU, Asupra unor operaţii complete (franc., rez. rom.) . . . 1

I. POP, Asupra aplicaţiei principale asociate unei cvasifibrări (rom., rez. franc.) 5

P. HOLGATE (Anglia), Grupoizi aleatorii (engl., rez. rom.) 11

D. BORŞ, O generalizare a spaţiilor vectoriale (rom., rez. franc.). . . . 17

I. ENESCU, Asupra unei clase de algebre indecompozabile de ordin finit, cu scalari reali (rom., rez. franc.). 21

ŞT. RUSCIOR, Un sistem de ecuaţii diferenţiale obţinut din problema corespondenţei prin paralelism în E_4 (franc., rez. rom.). 29

V. MURGESCU, Observaţii asupra transportului prin paralelism în spaţii L_n (rom., rez. franc.). 31

E. SHIMEMURA, H. SASAI (Japonia), Asupra convergenţei soluţiilor aproximative ale unei clase de probleme liniare de control optimal privitoare la sisteme cu parametri distribuiţi (engl., rez. rom.). . 39

A. N. V. RAO (S.U.A.), Stabilitatea sistemelor neliniare cu mai multe variabile, conţinînd elemente distribuite (engl., rez. rom.). 49

A. BRAIER, Transferanţa unui sistem (engl., rez. rom.). 59

I. GRINDEI, Tensiuni termice staţionare într-o placă subţire compusă din materiale diferite (rom., rez. franc.). 69

C. ACKER, Mişcări barotrope într-un cîmp de forţe masice date (franc., rez. rom.) 75

A. MUKHERJEE (India), Curgerea lichidelor nenewtoniene prin tuburi circulare (engl., rez. rom.). 81

Pag.

S. G. RÎJANOV (U.R.S.S.), Limita inferioară a energiei de legătură a excitonului în unele cristale (rusă, rez. rom.). 85

R. V. DEUTSCH, F. LAUR, Propagarea undelor magnetoacustice rapide în cîmpul unui monopol (franc., rez. rom.). 89

Secţia II

CHIMIE INDUSTRIALĂ

T. GOLGOŢIU, I. ROŞCA, Studiul termogravimetric şi al spectrului de absorbţie în infraroşu al acetaţilor bazici de zinc (rom., rez. rusă). . . 1

GH. BURLACU, C. IOAN, E. ŞTEFANCU, Reducerea pe picătură de Hg a ionilor Fe^{3+} şi Al^{3+} din amestec de solvenţi (franc., rez. rom.). . . 13

C. CALISTRU, L. IFRIM, Macrocinetica descompunerii termice a $NaHCO_3$ (II) (engl., rez. rom.) 35

EL. DIACONESCU, FL. CHIRIAC, Schimbători de cationi din cauciuc românesc (rom., rez. germ.) 35

CR. SIMIONESCU, C. VASILIU-OPREA, C. NEGULEANU, Sinteze mecanochimice prin policondensare pe suport poliesteric. (II). Influenţa unor factori fizici şi chimici (franc., rez. rom.) 45

I. MATEI, E COMANIŢĂ, S. NIŢESCU, Noi compuşi cu activitate antituberculoasă (V) (rom., rez. franc.). 57

C. ONISCU, GH. BOTEZ, Sulfamidele acizilor fenoxipropionici. Derivaţi sulfamidaţi ai acizilor α-(clor-fenoxi)-propionici (franc., rez. rom.). . . 63

Secţia III

ELECTROTEHNICĂ ELECTRONICĂ

E. LUCA, E. OSADEŢ, G. STRAT, GH. MAFTEI, Termoelectreţi pe bază de derivaţi sulfamidaţi ai acizilor fenoxiacetici cu suport de polistiren (engl., rez. rom.). 1

V. M. STARJINSKI, V. I. KOROZA (U.R.S.S.), Asupra teoriei ghidurilor periodice de unde (I) (rusă, rez. rom). 7

H. ROSMAN, Teoreme de transfer a puterii active maxime în regimurile permanente sinusoidale rezonante ale cuadripolilor diporţi, liniari, pasivi şi reciproci (I) (rom., rez franc.). 17

L. PREDA, Analiza indicaţiilor unui wattmetru (contor) monofazat montat cu neutru artificial într-o reţea trifazată cu trei conductoare, în regim dezechilibrat de curenţi (rom., rez. franc.) 25

M. CREŢU, V. PETRESCU, Posibilităţi de măsurare a frecvenţei prin metoda curenţilor în cuadratură (engl., rez. rom.) 35

N. POEATĂ, Legătura dintre aproximantele trece-tot Padé pentru întîrzierea constantă şi cele determinate cu polinoamele Bessel (rom., rez. franc.) 41

Pag.

AL. VALACHI, Utilizarea funcțiilor complementare în sinteza simultană a funcțiilor logice patratice (franc., rez. rom.). 49

D. D. SANDU, D. SIMOVICI, Principiu nou de construcție a unui generator de impulsuri cu secvență programabilă pentru studiul feritelor CHD (franc., rez. rom.). 55

GH. CÎRȚINĂ, Asupra parametronului funcționînd pe subarmonica a III-a (franc., rez. rom.). 63

N. ZITRON, Asupra reacției în divizoarele magnetice de frecvență cu alimentare la tensiune sinusoidală (germ., rez. rom.). 71

N. V. BOȚAN, C. HUȚANU, Asupra posibilităților de utilizare a autodinei în acționările electrice (engl., rez. rom.). 81

V. PRISĂCARU, C. HUȚANU, D. IOACHIM, Considerații asupra determinării puterii transformatoarelor din posturile de transformare ale întreprinderilor industriale (rom., rez. franc.). 89

Secția IV

MECANICĂ TEHNICĂ

D. MANGERON, M. N. OGUZTÖRELI (Canada), N. ORLANDEA, Algoritmul de formare a curbelor de înfășurare circulară la mecanisme plane formate din lanțuri cinematice complexe cu aplicații la comanda cifrică a mașinilor unelte (rom., rez. franc.). 1

D. TUTUNARU, N. IONIȚĂ, Sinteza unui mecanism cu funcțiuni multiple (rom., rez. ital.). 11

AL. TODICESCU, Metode indirecte de determinare a circulației la rotoarele mașinilor centrifuge (germ., rez. rom.) 15

M. GAFIȚANU, Contribuții la studiul capacității portante a angrenajelor cilindrice în poliamidă de oțel. (II). Considerații asupra influenței înclinării dinților asupra capacității portante de rezistență la oboseală de încovoiere a angrenajelor cu roți dințate din poliamidă pe oțel (franc., rez. rom.). 25

V. MERTICARU, Cum trebuie apreciată influența diferiților parametri asupra zgomotului angrenajelor (franc., rez. rom.). 41

I. CURIEVICI, D. PERETZ, B. GHEORGHIU, Cercetări experimentale asupra îmbătrînirii unui aliaj de aluminiu în strat fluidizat (rom., rez. franc.). 47

L. FARBAR (S.U.A.), Experiențe relative la transferul convectiv de căldură (engl., rez. rom.). 53

G. d'ALBON, E. JUGUREANU, V. CLOȚAN, GH. LOZONSCHI, N. APETREI, Considerațiuni asupra anomaliei termice Jacq și rezultate experimentale (franc., rez. rom.). 63

D. PERETZ, Corelația reacției de predetonație cu parametrii termodinamici critici ai amestecului final din momentul detonației (germ., rez. rom.). . 73

E. GAIGINSCHI, M. ZUGRĂVEL, M. GUTMAN, AL. BÎRJOIANU, Influența viscozității combustibilului asupra calității pulverizării, în cazul injecției mecanice (rom., rez. franc.). 81

S. OPREA, N. IONIȚĂ, Considerații tehnico-economice privind unele procese tehnologice noi de încălzire a metalelor (rom., rez. ital.). . . 89

Pag.

Secţia V

CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

A. ŞESAN, A. VULPE, FL. MACAVEI, Utilizarea operatorilor „momente factoriale" pentru rezolvarea contururilor spaţiale (engl., rez. rom.). 1

AL. EFTIMIE, G. BOTEZ, Tensiunile şi deplasările într-un semispaţiu transversal anizotrop sub acţiunea unor sarcini distribuite pe suprafeţe elastice limitate (franc., rez. rom.). 9

CR. COCOVES, Asupra calculului inelului circular pe mediu elastic (franc., rez. rom.). 19

L. STRAT, C. MIHAI, M. MANOLOVICI, Unele cercetări privind caracteristicile dinamice ale modelelor de cadre metalice (eng., rez. rom.). . 29

A. MIHUL, R. GRIGORESCU, S. COROBCEANU, M. VOICU, R. TANCIU, Cercetări asupra peliculei aderente de lapte de ciment la granulele de granulit (franc., rez. rom.). 39

C. IONESCU, Variaţia caracteristicilor dinamice în elemente metalice şi de beton precomprimat funcţie de eforturile de precomprimare (rom., rez. engl.). 47

C. ANTON, Cercetări şi observaţii cu privire la comportarea pământurilor la încărcări repetate. (I). Influenţa frecvenţei încărcărilor asupra deformaţiilor totale, reversibile şi nereversibile (rom. rez. engl.). . 53

C. BRANIŞTE, R. MATEI, I. BURLACU, D. CIOBANU, Mortare colorate pe bază de coloranţi organici (rom., rez. franc.). 61

I. IVANOV, F. ILIEŞ, M. MANOLESCU, S. CONSTANTINESCU, Investigarea roentgenografică a structurii unor materiale de construcţie, folosind substanţe radioopace de contrast (rom., rez. franc.). . . 71

E. PĂUNEL, FL. CONSTANTINESCU, O. NICHITA, C. CARAMAN, FL. VASILESCU, N. SAVA, I. PENCA, Compoziţia chimico-mineralogică şi granulometrică a unor nisipuri, cu geneze diferite, reflectate asupra calităţii mortarelor (rom., rez. franc.). 79

Secţia VI

INDUSTRIE UŞOARĂ

M. ZEIDMAN, Asupra teoriei generale a amestecurilor de fire. (I). Relaţii statistice generale relative la structura amestecului (engl., rez. rom.). 1

M. NETEA, Contribuţii experimentale la problema analizei distribuţiei lungimilor fibrelor acrilice de tip „Melana" (franc., rez. rom.). . . 19

E. HAGIU, S. PREDA, M. BORŞ, Contribuţii la metodologia calculului tricoturilor de diferite structuri (rom., rez. franc.). 29

Pag.

I. POTORAN, C. PREDA, S. MITU, C. BUDULAN, Asupra rezistenței îmbinărilor prin coasere realizate cu ajutorul cusăturilor elastice cu patru și cinci fire (rom., rez. rusă). 39

FL. VĂLU, E. PUȘCAȘU, E. HANGANU, M. MÎNDREA, Contribuții la intensificarea procesului de vopsire cu ajutorul cîmpului electric de înaltă frecvență (rom., rez. engl.). 47

* * *

EMIL GAIGINSCHI (1904—1969) 1

ANTON ȘESAN (1916—1969) 7

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Vol. XV (XIX), Fasc. 3–4 1969

CONTENTS

Pag.

A. JEANRENAUD, Au XXV-e anniversaire de l'insurrection armée d'août 1944 XXI

Section I

MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

AL. CLIMESCU, Sur certaines opérations complètes (French, Romanian summary). 1

I. POP, Sur l'application principale associée à une quasifibration (Romanian, French summary). 5

P. HOLGATE (England), Random Grupoids (English, Romanian summary). . 11

D. BORŞ, Une généralisation des espaces vectoriels (Romanian, French summary). 17

I. ENESCU, Sur une classe d'algèbres indécomposables d'ordre fini, à scalaires réels (Romanian, French summary). 21

ŞT. RUSCIOR, Un système d'équations différentielles issu du problème de la correspondance par parallélisme en E_4 (French, Romanian summary). 29

V. MURGESCU, Observations sur le transport par parallélisme dans les espaces L_n (Romanian, French summary). 31

E. SHIMEMURA, H. SASAI (Japan), On Convergence of Approximating Solutions of a Class of Linear Optimal Control Problems of Distributed Parameter Systems (English, Romanian summary). 39

A. N. V. RAO (U.S.A.), Stability of Multivariable Nonlinear Systems Containing Distributed Elements (English, Romanian summary). . . . 49

A. BRAIER, The Transferance of a System (English, Romanian summary). . 59

I. GRINDEI, Tensions thermiques stationaires dans une plaque mince composée de plusieurs matériaux (Romanian, French summary). . . . 69

C. ACKER, Mouvements barotropes soumis à un champ de forces massiques donné (French, Romanian summary). 75

A. MUKHERJEE (India), Flow of Non-Newtonian Liquids through Circular Tubes (English, Romanian summary). 81

Pag.

S. G. RIJANOV (U.R.S.S.), Limite inférieure de l'énergie de liaison de l'exciton dans certains cristaux (Russian, Romanian summary). . . . 85

R. V. DEUTSCH, F. LAUR, La propagation des ondes magnétoacoustiques rapides dans le champ d'un monopôle (French, Romanian summary) 89

Section II

CHEMICAL ENGINEERING

T. GOLGOȚIU, I. ROȘCA, Étude thermogravimétrique et du spectre d'absorbtion dans l'infrarouge des acétats basiques du zinc (Romanian, Russian summary). 1

GH. BURLACU, C. IOAN, El. ȘTEFANACU, La réduction sur goutte de mercure des ions Fe^{3+} et Al^{3+} d'un mélange de solvents (French, Romanian summary). 13

C. CALISTRU, L. IFRIM, Macrokinetics of $NaHCO_3$ Thermical Decomposition (II) (English, Romanian summary). 25

EL. DIACONESCU, FL. CHIRIAC, Kationen-Austauscher aus rumänischem Kautschuk (Romanian, German summary). 35

CR. SIMIONESCU, C. VASILIU-OPREA, C. NEGULEANU, Synthèses mécano-chimiques par polycondensation sur support polyestérique. (II). Influence de certains facteurs physiques et chimiques (French, Romanian summary). 45

I. MATEI, E. COMANIȚĂ, S. NIȚESCU, Nouveaux composés tuberculostatiques (V) (Romanian, French summary). 57

C. ONISCU, GH. BOTEZ, Sulfamides des acides phénoxipropioniques. Dérivés sulfamidés des acides α-(chlor-phénoxi)-propioniques (French, Romanian summary). 63

Section III

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

E. LUCA, E. OSADEȚ, G. STRAT, GH. MAFTEI, Thermo-Electrets Based on Sulphamidated Derivatives of the Phenoxiacetic Acids with Polystyrene Supports (English, Romanian summary). 1

V. M. STARZHINSKY, V. I. KOROZA (U.S.S.R.), On the Theory of Periodic Waveguides (I) (Russian, Romanian summary). 7

H. ROSMAN, Théorèmes de transfert de la puissance active maximum en régimes permanents sinusoïdaux résonants des quadripôles diports, linéaires, passifs et réciproques. (I) (Romanian, French summary). 17

L. PREDA, Analyse des indications d'une wattmètre (compteur) monophasé branché avec neutre artificiel dans un réseau triphasé à trois conducteurs, en régime déséquilibré de courants (Romanian, French summary). 25

Pag.

M. CREŢU, V. PETRESCU, Possibilities of Measuring the Frequency by means of the Quadrature Currents Technique (English, Romanian summary). 35

N. POEATĂ, La liaison entre les fonctions approximantes passe-tout de Padé pour le retard constant et celles déterminées à l'aide des polynômes Bessel (Roumanian, French summary) 41

AL. VALACHI, Utilisation des fonctions complémentaires dans la synthèse simultaneé des fonctions logiques quadratiques (French, Romanian summary) 49

D. D. SANDU, D. SIMOVICI, Nouveau principe de construction d'un générateur d'impulsions à séquence programmable pour l'étude des ferrites CHR (French, Romanian summary) 55

GH. CÎRŢINĂ, À propos du paramétron fonctionnant sur le III-ème sous-harmonique (French, Romanian summary) 63

N. ZITRON, Zur Ruckwirkung in magnetischen Frequenzteilern bei sinusformiger Spannungsspeisung (German, Romanian summary) . . . 71

N. V. BOŢAN, C. HUŢANU, On some Posibilities of Using the Autodyne for Electric Drives (English, Romanian summary) 81

V. PRISĂCARU, C. HUŢANU, D. IOACHIM, Sur la détermination de la puissance des transformateurs des stations de transformation des entreprises industrielles (Romanian, French summary) 89

Section IV

MECHANICAL ENGINEERING

D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), N. ORLANDEA, Algorithme de génération des courbes enveloppées circulairement par des mécanismes plans constitués de chaînes cinématiques complexes et applications au control digital des machines-outils (Romanian, French summary) 1

D. TUTUNARU, N. IONIŢĂ, La sintesi di un meccanismo con funzioni multiple (Romanian, Italian summary) 11

AL. TODICESCU, Indirekte Methoden zur Bestimmang der Zirkulation bei Laufrädern von Radialmaschinen (German, Romanian summary) . 15

M. GAFIŢANU, Contributions à l'étude de la capacité portante des engrenages cylindriques en polyamide sur acier. (II). Considérations sur l'influence de l'inclinaison de la denture sur le taux de charge de flexion des engrenages aux roues dentées en polyamide sur acier (French, Romanian summary) 25

V. MERTICARU, Comment doit-on apprécier l'influence des différents paramètres sur le bruit des engrenages (French, Romanian summary) . 41

I. CURIEVICI, D. PERETZ, B. GHEORGHIU, Recherches expérimentales sur le vieillissement en lit fluidisé des alliages d'áluminium (Romanian, French summary) 47

Pag.

L. FARBAR (U.S.A.), Classroom Demonstration Experiment in Convective Heat Transport (English, Romanian summary) 53

G. d'ALBON, E. JUGUREANU, V. CLOŢAN, GH. LOZONSCHI, N. APETREI, Considérations sur l'anomalie thermique Jacq et résultats expérimentaux (French, Romanian summary) 63

D. PERETZ, Die Korrelation zwischen den kritischen thermodynamischen Grössen und die Vorreaktion im Ladungsrest bei klopfender Verbrennung in Ottomotoren (German, Romanian summary) 73

E. GAIGINSCHI, M. ZUGRĂVEL, M. GUTMAN, AL. BÎRJOIANU, L'influence de la viscosité d'un combustible sur la qualité de la pulvérisation, dans le cas de l'injection mécanique (Romanian, French summary) . 81

S. OPREA, N. IONIŢĂ, Sopra alcuni aspetti tecnici ed economici concernenti certi processi tecnologici nuovi di riscaldamento dei metalli (Romanian, Italian summary) 89

Section V

CONSTRUCTIONS. HYDROTECHNICS

A. ŞESAN, A. VULPE, FL. MACOVEI, Use of the „Factorial Moments" Operators in the Solving of Space Contours (English, Romanian Summary) . 1

AL. EFTIMIE, G. BOTEZ, Tensions et déplacements dans le demi-espace transversal anisotrope sous l'action des charges distribuées sur des surfaces élastiques limitées (French, Romanian summary) . . . 9

CR. COCOVES, Sur le calcul des poutres annulaires appuyées sur un milieu élastique (French, Romanian summary) 19

L. STRAT, C. MIHAI, M. MANOLOVICI, Some Investigations on the Dynamic Properties of Steel Models (English, Romanian summary) . . . 29

A. MIHUL, R. GRIGORESCU, S. COROBCEANU, M. VOICU, R. TANCIU, Recherches sur la pellicule adhérente de lait de ciment au granulite (French, Romanian summary) 39

C. IONESCU, The Variation of Dynamic Characteristics of Metal and Concrete Prestressed Members as Function of the Prestressing Effort (Romanian, English summary) 47

C. ANTON, Researches and Remarks Regarding the Soil Behaviour under Repeated Loadings. (I). On the Influence of the Loading Frequency upon the Total Reversible and Irreversible Deformations (Romanian, English summary) 53

C. BRANIŞTE, R. MATEI, I. BURLACU, D. CIOBANU, Les mortiers colorés par des colorants organiques (Romanian, French summary) 61

I. IVANOV, F. ILIEŞ, M. MANOLESCU, S. CONSTANTINESCU, Investigation roentgenographique de la structure de certains matériaux de construction, à l'aide des substances radioopaques de contrast (Romanian, French summary). 71

Pag.

E. PĂUNEL, FL. CONSTANTINESCU, O. NICHITA, C. CARAMAN, FL. VASILESCU, N. SAVA, I. PENCA, La composition chimique-minéralogique et granulométrique de quelques types de sables, de différents genèses, reflétées sur la qualité des mortiers (Romanian, French summary) 79

Section VI

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

M. ZEIDMAN, On the General Theory of Fibre Blends. (I). General Statistical Relations of the Blend Structure (English, Romanian summary) . 1

M. NETEA, Contribution expérimentale au problème de l'analyse de la distribution de la longueur des fibres acryliques du type „Melana" (French, Romanian summary) 19

E. HAGIU, S. PREDA, M. BORȘ, Contributions à la méthodologie du calcul des tricots côté et interlock (Romanian, French summary) . . . 29

I. POTORAN, C. PREDA, S. MITU, C. BUDULAN, Sur la résistance des coutures d'assemblages réalisées avec des coutures élastiques à quatre et cinq fils (Romanian, Russian summary) 39

FL. VĂLU, E. PUȘCAȘU, E. HANGANU, N. MÎNDREA, Contributions to the Investigation of the Dyeing Process under the Action of a High Frequency Electrical Field (Romanian, English summary) . . . 47

* * *

EMIL GAIGINSCHI (1904—1969) 1

ANTON ȘESAN (1916—1969) 7

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том. XV(XIX), вып. 3—4 1969

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

А. ЖАНРЕНО, К XXV-летию 23 Августа 1944 г. XXI

Раздел I

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, ФИЗИКА

АЛ. КЛИМЕСКУ, О некоторых полных операции (франц., рез. рум.) . . 1

И. ПОП, О главном отображении ассоциированные квасифибрацию (рум., рез. франц.) 5

П. ХОЛГЭЙТ (Англия), Вероятностные гуппоиды (англ., рез. рум.) . . . 11

Д. БОРШ, Об одном обобщение векторных пространств (рум., рез. франц.) . 17

И. ЭНЕСКУ, О некоторые класс неразложимых алгебров конечного порядка с реальными скалярами (рум., рез. франц.) 21

ШТ. РУЩОР, Система дифференциальных уравнении полученных из вопроса соответствия при парралелизме в E_4 (франц., рез. рум.) 29

В. МУРДЖЕСКУ, Замечания над транспортом путем парралелизма в пространствах L_n (рум., рез. франц.) 31

Е. ШИМЕМУРА, Х. САСАИ (Япония), О сходимости приближенных решении одного класса линейных оптимальных контрольных вопросах к системам с распределенными параметрами (англ., рез. рум.) . . . 39

А. Н. В. РАО (США), Устойчивости нелинейных систем с многими переменными имеющих распределенные элементы (англ., рез. рум.) . . 49

А. БРАЙЕР, Трансферанс системы (англ., рез. рум.) 59

И. ГРИНДЕЙ, Тепловые стационарные напряжения в тонкой плите из разных материялов (рум., рез. франц.) 69

К. АКЕР, Баротропные движения в поле массовых сил (франц., рез. рум.) . . 75

А. МУКЕРЖИ (Индия), Течение ненютоновых жидкостей через кругые трубы (англ., рез. рум.) 81

Стр.

С. Г. РЫЖАНОВ (СССР), Нижний предел для энергии связи экситона в некоторых кристаллах (русск., рез. рум.) 85

Р. В. ДОИЧ, Ф. ЛАУР, Рассепространение скоростных магнитоакустических волн в поле одном монополе (франц., рез. рум.) 89

Раздел II

ХИМИЯ

Т. ГОЛГОЦИЮ, И. РОШКА, Термографическое исследование и инфракрасные спектры поглощения основных ацетатов цинка (рум., рез. русск.) . 1

Г. БУРЛАКУ, К. ИОАН, Е. ШТЕФАНКУ, Восстановление на капельной ртути ионов Fe^{3+} и Al^{3+} в смеси растворителей (франц., рез. рум.) . . 13

К. КАЛИСТРУ, Л. ИФРИМ, Макрокинетика термического разложения $NaHCO_3$ (II) (англ., рез. рум.) 25

Е. ДЯКОНЕСКУ, Ф. КИРЬЯК, Катионообменники из румынского каучука (рум., рез. нем.) 35

КР. СИМИОНЕСКУ, К. ВАСИЛЮ-ОПРЯ, К. НЕГУЛЯНУ, Механохимические синтезы на полиэфирной основе. (II). Влияние некоторых физических и химических факторов (франц., рез. рум.) 45

И. МАТЕЙ, Е. КОМАНИЦЭ, С. НИЦЕСКУ, Новые вещества противо туберкулёзно активные (V) (рум., рез. франц.) 57

К. ОНИСКУ, Г. БОТЕЗ, Сульфамиды фенокислопропионновых кислом. Сульфамидовые производные α-(хлор-фенокисло)-пропионовых кислом (франц., рез. рум.) 63

Раздел III

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

Э. ЛУКА, Э. ОСАДЕЦ, Г. СТРАТ, Г. МАФТЕЙ, Термоэлектреты основанные на сульфамидных производных фенокси-уксусных кислом с полистироловым суппортом (англ., рез. рум.) 1

В. М. СТАРЖИНСКИЙ, В. И. КОРОЗА (СССР), К теории периодических волноводов (I) (русск., рез. рум.) 7

Г. РОСМАН, Теоремы передачи активной максимальной мощности при установившенных синусойдальных резонансовых режимах дипортных, линейных, пассивных, взаимных четырёхполюсников (рум., рез. франц.) . 17

Л. ПРЕДА, Анализ показаний однофазного ваттметра включённого с искусственной нейтралью в трехфазную сеть с тремя проводниками в режиме неуравновешенных токов (рум., рез. франц.) 25

М. КРЕЦУ, В. ПЕТРЕСКУ, Возможности измерения частоты методом токов в квадратуре (англ., рез. рум.) 35

Н. ПОЯТЭ, Связь между аппрокеимирующих Паде для постоянного запаздывания и тех которые вытекают если использовать полиномы Бесселя (рум., рез. франц.) 41

Стр.

АЛ. ВАЛАКИ, Использование дополнительных функций в синтезе логических квадратических функций (франц., рез. рум.) 49

Д. Д. САНДУ, Д. СИМОВИЧ, Новый принцип построения импульсного генератора с програмным управлениям для изучения ферритов (англ., рез. рум.) 55

Г. КЫРЦИНЭ, О параметроне по III-ей субгармонике (франц., рез. рум.) . . 63

Н. ЦИТРОН, Над обратной связи в магнитных делителей частоты с питанием от сети синусоидального напряжения (нем., рез. рум.) 71

Н. В. БОЦАН, К. ХУЦАНУ, К вопросу о возможностях использования регенератора в электрических приводах (англ., рез. рум.) 81

В. ПРИСЭКАРУ, К.ХУЦАНУ, Д. ИОАКИМ, К вопросу об определении мощности трансформаторов трансформаторных станций в промышленных предприятиях (рум., рез. франц.) 89

Раздел IV

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Д. МАНЖЕРОН, М. Н. ОГУЗТОРЕЛИ (Канада), Н. ОРЛАНДЯ, Алгоритм образования кривых круглого огибающая у плоских механизмов образованных из кинематичных сложных цепей с применением для цифрового управления машин орудий (рум., рез. франц.) 1

Д. ТУТУНАРУ, Н. ИОНИЦЭ, Синтез одного механизма с многими иесползовании (рум., рез. итал.) 11

АЛ. ТОДИЧЕСКУ, Косвенные методы определения циркуляции ротора центробежных машин (нем., рез. рум.) 15

М. ГАФИЦАНУ, Вклады на исследовании нагрузочной способности полиамидных зубчатых передач. (II). Соображения о влиянии угля заклинивания зубьев на изгибной нагрузочной способности полиамидных передач (франц., рез. рум.) 25

В. МЕРТИКАРУ, Как нужно оценить влияние различных параметров на шум зубчатых передач (франц., рез. рум.) 41

И. КУРИЕВИЧ, Д. ПЕРЕЦ, Б. ГЕОРГИУ, Экеспериментальные исследования над постарением сплава аллюминия в флуидизируемом слое (рум., рез. франц.) 47

Л. ФАРБАР (США), Эксперименты относительно конвективном перемещении тепла (англ., рез. рум.) 53

Ж. д'АЛЬБОН, Е. ЖУГУРИАНУ, В. КЛОЦАН, Г. ЛОЗОНСКИЙ, Н. АПЕТРЕЙ, К вопросу о термической аномалии Жака и опытные результаты (франц., рез. рум.) 63

Д. ПЕРЕЦ, Корреляция реакции преддетонации с теплодинамическими критическими параметрами конечной смеси в момент детонации (нем., рез. рум.) 73

Стр.

Е. ГАЙДЖИНСКИЙ, М. ЗУГРЭВЕЛ, М. ГУТМАН, АЛ. БЫРЖОЯНУ, Влияние вязкости топлива над качеством пульверизации в случае механическая инжекция (рум., рез. франц.) 81

С. ОПРИА, Н. ИОНИЦЭ, О техно-экономических аспектах некоторых новых технологических процессов разгрева металлов (рум., рез. итал.) . 89

Раздел V

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕХНИКА

А. ШЕСАН, А. ВУЛПЕ, Ф. МАКАВЕЙ, Применение операторов „факториальные моменты" для решения пространственных очершаний (англ., рез. рум.) 1

АЛ. ЭФТИМИЕ, Г. БОТЕЗ, Напряжения и перемещения в анизотропном поперечном полупространстве над действием нагрузок распределенных на ограниченных упругих поверхностях (франц., рез. рум.) . . 9

К. КОКОВЕС, К расчету круглого кольца на упругой среде (франц., рез. рум.) . 19

Л. СТРАТ, М. КОНСТАНТИН, М. МАНОЛОВИЧ, Некоторые исследования динамических характеристик стальных моделей (англ., рез. рум.) . . 29

А. МИХУЛ, Р. ГРИГОРЕСКУ, С. КОРОБЧАНУ, М. ВОЙКУ, Р. ТАНЧЮ, Исследования над цементно растворной пленкой примыкающей к гранулитным зёрнам (франц., рез. рум.) 39

К. ЙОНЕСКУ, Изменение динамических характеристик в металлических и бетонных предварительно напряженных элементах в зависимости от предварительно напряженных усилий (рум., рез. англ.) 47

К. АНТОН, Некоторые замечания относительно поведения земель при повторных нагрузках (I) (рум., рез. англ.) 53

К. БРАНИШТЕ, Р. МАТЕЙ, И. БУРЛАКУ, Д. ЧОБАНУ, Цветные растворы на основе красителей (рум., рез. франц.) 61

И. ИВАНОВ, Ф. ИЛИЕШ, М. МАНОЛЕСКУ, С. КОНСТАНТИНЕСКУ, Рентгенографическое исследование строения некоторых строительных материалов с использованием контрастных радионепрозрачных веществ (рум., рез. франц.) 71

Е. ПЭУНЕЛ, Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ, О. НИКИТА, К. КАРАМАН, Ф. ВАСИЛЕСКУ, Н. САВА, И. ПЕНКА, Химико-минералогический и гранулометрический состав некоторых песков разных генезов, отраженных в качестве растворов (рум., рез. франц.) 79

Раздел VI

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

М. ЗЕЙДМАН, К вопросу об общей теории смеси волокон. (I). Общие статистические отношения относительно структуры смеси (англ., рез. рум.) 1

Стр.

М. НЕТЯ, К вопросу об экеперИментальном анализе распределения длины акриловых волокон типа „Мелана“ (франц., рез. рум.) 19

Е. ХАДЖЮ, С. ПРЕДА, М. БОРШ, К расчётной методологии ластичного и интерлочного трикотажа (рум., рез. франц.) 29

И. ПОТОРАН, С. ПРЕДА, С. МИТУ, К. БУДУЛАН, О сопротивлении швейных соединений осуществляемых при помощи эластичных швов с четырьмя и пятью нитями (рум., рез. русск.) 39

Ф. ВЭЛУ, Е. ПУШКАШУ, Е. ХАНГАНУ, Н. МЫНДРЯ, К вопросу об усилении процесса крашения при помощи электрического поля высокой частоты (рум., рез. англ.) 47

* * *

ЭМИЛ ГАЙДЖИНСКИЙ (1904—1969) 1

АНТОН ШЕСАН (1916—1969) 7

LA A XXV-a ANIVERSARE A INSURECȚIEI ARMATE DIN AUGUST 1944

Un sfert de veac s-a scurs de la istorica victorie a insurecției armate din august 1944, înfăptuită de oamenii muncii, de forțele progresiste sub conducerea Partidului Comunist Român. Subliniind însemnătatea acestui eveniment, care a conferit zilei de 23 August valoarea unei mari sărbători naționale, tovarășul Nicolae Ceaușescu spunea în cuvîntarea la sesiunea jubiliară a Marii Adunări Naționale consacrată celei de a XXV-a aniversări a eliberării patriei de sub jugul fascist: „Răsturnarea dictaturii militare-fasciste a dat un nou curs dezvoltării țării noastre, a deschis calea înfăptuirii idealurilor de libertate și dreptate socială pentru care au luptat veacuri de-a rîndul forțele cele mai înaintate ale poporului român".

Se cuvine să evocăm cu acest prilej în primul rînd lupta plină de eroism, de patriotism, a Partidului Comunist Român, care, făcîndu-se ecoul celor mai nobile aspirații de libertate ale maselor, a înfruntat neînchipuite greutăți și asupriri, a știut să le învingă și să salveze națiunea română de la catastrofa care o amenința.

Se cuvine să evocăm eroica noastră clasă muncitoare, forța hotărîtoare a luptei antifasciste, masele populare, intelectualii înaintați, forțele progresiste, care s-au unit strîns în jurul partidului, urmînd calea indicată de acesta.

Victoria insurecției armate a însemnat răsturnarea dictaturii militare-fasciste, ieșirea României din războiul hitlerist și întoarcerea armelor împotriva fascismului, alături de coaliția antihitleristă. Semnificația acestei victorii este însă cu adevărat imensă, căci ea a însemnat un moment de răscruce în istoria poporului român. Țara noastră a intrat, o dată cu victoria insurecției armate, într-o nouă perioadă a dezvoltării sale istorice. 23 August 1944 a marcat începutul revoluției populare, a determinat dezvoltarea luptei antifasciste și de eliberare națională într-o amplă mișcare socială, deschizînd calea trecerii la construirea socialismului.

Însuflețite de marea victorie a insurecției armate, forțele democratice și patriotice, masele largi de oameni ai muncii, în frunte cu clasa muncitoare, s-au ridicat cu hotărîre, sub conducerea Partidului Comunist Român, la lupta pentru înfrîngerea totală a fascismului, pentru cucerirea drepturilor democratice, înfăptuirea reformei agrare, refacerea economiei naționale. Instaurarea puterii populare la 6 martie 1945, înfrîngerea treptată a reacțiunii, redresarea economiei naționale, dezvoltarea neîntreruptă a procesului revoluționar, toate acestea au culminat cu înlăturarea monarhiei, proclamarea Republicii Populare Române și cucerirea întregii puteri de către clasa muncitoare, în alianță cu țărănimea și celelalte categorii de oameni ai muncii. Astfel s-au făurit condițiile pentru trecerea la înfăptuirea sarcinilor revoluției socialiste, astfel 23 August 1944 a deschis calea dezvoltării largi a forțelor materiale și spirituale ale națiunii noastre, realizării multilaterale a aspirațiilor poporului român.

Revoluția populară, cu imensa ei capacitate de a pune în acțiune forțele creatoare ale poporului, a cucerit rînd pe rînd noi poziții, a desființat exploatarea omului de către om, a pus bazele materiale, politice și etice ale noii societăți. Marile probleme social-economice care se aflau de mulți ani în fața României și-au găsit, prin politica științifică, marxist-leninistă a partidului, soluționarea justă, corespunzător intereselor vitale ale întregului popor. România a pășit ferm pe calea civilizației socialiste, a bunăstării materiale, a înfloririi culturale. Socialismul a învins definitiv în țara noastră, făurindu-se posibilități nelimitate pentru dezvoltarea multilaterală a patriei socialiste.

25 de ani s-au scurs de la istorica victorie de la 23 August 1944. Este desigur un timp scurt în viața unui popor, este un timp scurt în raport cu istoria multiseculară a poporului român. Dar ce bogăție uriașă cuprinde această clipă, ce efervescență a poporului nostru reprezintă ea, oglindind nelimitata capacitate creatoare a omului eliberat de exploatare și asuprire. Realizările din acești 25 de ani demonstrează în mod strălucit justețea politicii Partidului Comunist Român, întemeiată pe aplicarea creatoare a tezelor generale ale marxism-leninismului la condițiile concrete ale țării noastre, la cerințele fiecărei etape a dezvoltării.

Să amintim că, datorită politicii consecvente a Partidului Comunist Român de industrializare socialistă a țării, România dă o producție industrială de 15 ori mai mare decît aceea a anului 1938; că ponderea industriei în venitul național a crescut de la 30,8% în 1938 la 55%, că industria noastră a ajuns la acel nivel care permite și, mai mult decît atît, obligă să i se imprime un curs tot mai accentuat spre o structură modernă.

Partidul a promovat totodată în mod hotărît politica de cooperativizare a agriculturii, asigurînd generalizarea relațiilor de producție socialiste în întreaga economie. Noile relații de producție, dezvoltarea bazei tehnico-materiale a agriculturii, asigurarea ei cu cadre de spe-

cialişti au dus la creşterea continuă a producţiei agricole, care asigură în condiţii tot mai bune satisfacerea nevoilor ţării.

Politica ştiinţifică a partidului a asigurat totodată înlăturarea înapoierii culturale. Generalizarea şcolii de 10 ani, dezvoltarea puternică a învăţămîntului de toate gradele, dezvoltarea ştiinţei, culturii, a întregii activităţi spirituale, situează România în rîndul ţărilor avansate din punct de vedere cultural.

Desfiinţînd exploatarea, noua orînduire a realizat puternica coeziune a tuturor claselor şi păturilor sociale, unitatea socialistă a întregului popor.

„Partidul nostru — spunea tovarăşul Nicolae Ceauşescu cu prilejul celei de-a 25-a aniversări a eliberării patriei de sub jugul fascist — asigură întregul popor că îşi va îndeplini şi de acum înainte cu abnegaţie misiunea de forţă conducătoare a societăţii, va organiza şi conduce ca şi pînă acum forţele şi energiile naţiunii noastre socialiste spre ţelul unic al progresului şi prosperităţii, al comunismului şi al păcii".

Îndeplinirea acestei misiuni de forţă conducătoare a partidului este cu atît mai valoroasă, cu cît în faţa poporului nostru stau măreţele sarcini stabilite de cel de al X-lea Congres al P.C.R., care a indicat obiectivele dezvoltării viitoare a ţării, programul înaintării societăţii româneşti pe drumul progresului şi civilizaţiei, al apropierii României de nivelul ţărilor avansate ale lumii. Pentru realizarea obiectivului fundamental al etapei actuale — făurirea societăţii socialiste multilateral dezvoltate — programul elaborat de Congres prevede creşterea intensă a forţelor de producţie, pe baza continuării consecvente a industrializării, crearea unei agriculturi moderne, dezvoltarea susţinută a ştiinţei, învăţămîntului şi culturii, ridicarea bunăstării materiale şi spirituale a tuturor oamenilor muncii, perfecţionarea relaţiilor de producţie, a tuturor relaţiilor sociale. Făurirea societăţii socialiste multilateral dezvoltate pune bazele trainice ale trecerii treptate spre comunism.

Iată — în linii cu totul generale — marile realizări generate de marea victorie de la 23 August 1944 şi totodată luminoasele perspective de viitor deschise poporului nostru. Ele situează ţara noastră pe un înalt plan, atît din punct de vedere naţional cît şi internaţional. Niciodată patria noastră nu a avut condiţii atît de favorabile pentru accelerarea ritmului progresului social, din calea căruia au fost înlăturate

piedicile din trecut ; niciodată România nu s-a bucurat în viața internațională de un asemenea prestigiu, ca în zilele noastre.

Iată de ce vibrează puternic cuvintele rostite de secretarul general al partidului, tovarășul Nicolae Ceaușescu, cu ocazia celei de a 25-a aniversări a eliberării patriei : „23 August 1944 va rămîne veșnic în conștiința poporului, amintirea sa transmițîndu-se din generație în generație ca un simbol strălucit al eroismului maselor populare, al spiritului revoluționar al comuniștilor, al tuturor militanților progresiști din patria noastră".

Alfred Jeanrenaud

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 3—4, 1969

SECŢIA I

MATEMATICĂ.
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 3—4, 1969

СЕКЦИЯ I

МАТЕМАТИКА.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 3—4, 1969

SECTION I

MATHEMATICS.
THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. D. 519.513

SUR CERTAINES OPÉRATIONS COMPLÈTES

PAR

AL. CLIMESCU

1. Soit M un ensemble quelconque de nombres réels et $M = \bigcup_i M_i$. Avec la convention $\sup \emptyset = -\infty$, on a $\sup \{\sup M_i\} = \sup M$. La borne supérieure peut donc être interprétée comme une opération définie pour tout ensemble de cardinal possible, commutative et complètement associative ; pour M fini elle coïncide avec le maximum et si le nombre des éléments de M est > 2, la définition directe coïncide avec celle qu'on obtient par récurrence ($\max(a, b, c) = \max(a, \max(b, c),)$ etc. Une observation similaire vaut pour les opérations dans les treillis complets.

Il est possible de formuler un problème analogue mais plus général. Dans le cas le plus simple on peut le formuler de la manière suivante :

Soit G un semigroupe commutatif à operation notée $+$; trouver des conditions au moins suffisantes pour qu'on puisse définir une somme $S(M)$, M étant un ensemble quelconque d'éléments de G, chaque élément de G pouvant figurer dans M soit une fois, soit plusieurs fois, même en nombre infini. $S(M)$ doit en outre satisfaire aux conditions suivantes :

$$S\{a, b\} = a + b \quad \text{et} \quad S\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$S[\bigcup_i M_i] = S[\text{ens } S(M_i)] \text{ (associativité complète).}$$

S sera alors, par définition, l'addition complète générée par $+$.

La formulation d'un problème plus général est possible, mais les deux exemples suivants montrent les difficultés auxquelles on se heurte immédiatement.

Soit G le groupe $\{0,1\}$ des restes mod 2. Si $M = M_0 \cup M_1$, M_0 (composé d'éléments $= 0$), M_1 (composé d'éléments $= 1$) ; on peut essayer de définir $S(M)$ de la manière suivante.

Si $M_1 = \emptyset$, $S(M) = S(M_0) = 0$; si M_1 est fini à p éléments $S(M) = 0$ si p est pair, $= 1$ si p est impair ; enfin si M est infini, $S(M) = 1$. Dans le cas infini l'associativité complète n'est plus valable sans restriction. Par exemple, si $M = \{1, 1, \ldots\}$, $M_c = \{1, 1\}$, $M = \bigcup_i M_i$, $S(M) = 1$, $S[\text{ens } S(M_i)] = 0$.

Soit G le produit direct des groupes G_n ($n = 1, 2, \ldots$), e_n l'unité de G_n. On peut définir une somme complète partielle de la manière suivante :

$$S_i M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad S(M) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

(les x_i éléments quelconques du produit).

Si $x_1 = (x_1, e_2, \ldots)$, $x_2 = (e_1, x_2, \ldots)$,... et si $M = \{x_1, x_2, \ldots\}$ posons $S(M) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Les conditions imposées sont vérifiées, mais seulement pour cette classe très particulière d'ensembles M ; le problème inverse — trouver des conditions qui assurent l'existence d'une somme complète partiellement definie — semble être plus intéressant pour les groupes.

2. Pour le moment il semble être indiqué de construire une famille infinie de semigroupes à addition complète. À cet effet définissons d'abord ce qu'on doit entendre par somme (notée. Σ) d'une famille G_i de semigroupes mutuellement disjoints $G_0\{0\} \bigcup \bigcup_i G_i$ sera la somme ΣG_i si l'on définit l'addition dans G par les conventions suivantes.

Si $x \in G_i$, $y \in G_i$, $x + y$ dans $G = x + y$ dans G_i ; $x + 0 = 0 + \alpha = 0$ enfin si $x \in G_i$, $y \in G_j$, $x + y = 0$.

Définissons encore ce qu'on doit entendre par semigroupe stationnaire. Si $a \in G$ et si $a, 2a, \ldots, pa$ sont distincts, mais $(p + 1)a = pa$, a sera un élément stationnaire de G et si G est composé seulement d'éléments stationnaires il sera appelé lui-même semigroupe stationnaire.

Cela étant, on peut démontrer les propositions suivantes :

I. *Si G est un semigroupe stationnaire, on peut définir une addition complète.*

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les éléments de G d'ordres respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Si $M = M_1 \bigcup M_2 \bigcup \ldots \bigcup M_n$ ($M \neq \emptyset$ chaque M vide ou composé seulement d'éléments $= x_i$) on posera

$$S(M) = \Sigma \min_i(p_i, \text{card } M_i)\, x_i \qquad (\text{card } \emptyset = 0).$$

Les conditions imposées pour une somme complète sont évidemment remplies.

I'. *Si G est un semitrellis d'ordre fini, on peut définir une addition complète.*

Cas particulier de I ; chaque $p_i = 1$.

II. *Si G_i est une famille quelconque de semigroupes à addition complète, le produit direct des G_n et ΣG_n sont des semigroupes à addition complète.*

Pour le produit direct cela résulte du fait que l'addition s'y effectue par composantes. Pour Σ on posera $S(M) = 0$ si $0 \in M$ ou si M contient deux éléments appartenant à des G_i distincts ; si tous les éléments de M appartiennent a un même G_i on posera $S(M)$ (dans Σ) $= S(M)$ (dans G_i).

III. *Soit F_n l'ensemble des applications de G^n dans G ($n = 1, 2, \ldots$). Si G est un semigroupe à addition complète chaque F_n est un semigroupe à addition complète* (l'addition des applications étant définie de la manière habituelle).

Explicitons la définition de $S(M)$ pour $n = 1$. On posera $f = S(M)$, ou $f(x) = S$ (ens $f_i(x)$), les f_i étant les termes de M.

Ces quatre propositions donnent une classe assez vaste de semigroupes (commutatifs) à addition complète.

3. Il arrive qu'on puisse définir plusieurs semigroupes commutatifs sur un même ensemble ; on parlera alors aussi d'une multiplication (complète) etc. Par exemple, sur (0, 1) max comme addition et min comme multiplication génèrent des opérations complètes en posant $S(M) = 0$ si M n'est formé que de zéros, $S(M) = 1$ si au moins un élément de M est $= 1$, $P(M) = 0$ si au moins un élement de M est nul, $P(M) = 1$ si tous les éléments de M sont $= 1$. S et P génèrent ensuite la réunion et l'intersection (complètes) des familles de parties d'un ensemble.

Il est facile de construire des exemples analogues. Soit par exemple $G = (a, b, c)$ avec $S(M) = a$ si au moins un element de M est $= a$, $S(M) = b$ si tous les éléments de M sont des b, $S(M) = c$ si tous les elements de M sont des c, enfin $S(M) = a$ si $b \in M$, $c \in M$. S est une addition complète.

Soit d'autre part E un ensemble donné : si $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ on dira qu'on a une décomposition de E. Alors

IV. *Sur l'ensemble des décompositions de E on peut définir une somme complète en posant*

$$S(M) = [', \bigcap E_{2m}, \bigcap E_{3m}],$$

$'$ designant $C[\bigcup E_{2m} \cup \bigcap E_{3m}]$, (E_{1m}, E_{2m}, E_{3m}) étant les différentes décompositions $\in M$.

C'est l'extension à ce cas de la définition de $S(M)$ de l'alinéa précédent.

On pourrait généraliser en prenant un semigroupe fini à addition complète, d'ordre n, et les n décompositions de E.

4. Le problème traité dans cette Note semble être abordé pour la première fois, du moins quant au degré de généralité atteint. Il possède une analogie lointaine avec certains problèmes topologiques et une affinité plus grande avec l'algèbre des fonctions, crée par K. Menger et vigoureusement développée par B. Schweizer et A. Sklar [1]...[3].

Reçue le 30 X 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Schweizer B, Sklar A., *The Algebra of Functions* (I), (II), (III). Math Ann.: **1960, 139**, pp. 366–382; 1961, **143**, pp. 440–447; 1964, **161**, pp. 171–196.
2. — *Function Systems*. Math. Ann., 1967, **172**, pp. 1–16.
3. — *The Algebra of Multiplace Vector-valued Functions*. Bull. of the Amer. Math. Soc. 1967, **73**, 4, pp. 510–515.

ASUPRA UNOR OPERAȚII COMPLETE

(Rezumat)

Se introduce noțiunea de sumă completă pentru un semigrup și se construiește o clasă destul de vastă de semigrupuri pentru care se poate defini o sumă completă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 519.54

ASUPRA APLICAŢIEI PRINCIPALE ASOCIATE UNEI CVASI-FIBRĂRI

DE

I. POP

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi, din 23—26 octombrie 1969

1. Nota de faţă cuprinde un răspuns la o problemă pusă, dar neelucidată, de către James S t a s h e f f: dacă $p : E \to B$ fiind o cvasi-fibrare, aplicaţia principală Prin (p) este sau nu o cvasi-fibrare, şi un rezultat privind aplicaţia principală asociată unui fascicul geometric.

2. D e f i n i ţ i a 1. O aplicaţie continuă $p : E \to B$ este o fibrare Hurewicz dacă p are proprietatea de ridicare a homotopiei în raport cu orice spaţiu topologic X.

D e f i n i ţ i a 2. Aplicaţia $p : E \to B$ se numeşte cvasi-fibrare dacă p induce izomorfismele $p_* : \pi_i (E, p^{-1}(b)) \cong \pi_i (B, b)$ pentru orice $b \in B$ şi $i \geqslant 0$.

În mod evident orice fibrare Hurewicz este o cvasi-fibrare dar nu şi reciproc.

Fie $p : E \to B$ o cvasi-fibrare avînd fibrele de tipul de homotopie al unui spaţiu local compact F. Fie E^F spaţiul aplicaţiilor continue $F \to E$ cu topologia compact-deschisă şi fie subspaţiul Prin $(E) \subset E^F$ definit astfel:

$$\text{Prin } (E) = \{\varphi : F \to p^{-1}(b) \text{ — echivalenţă homotopică}\}.$$

Definim atunci aplicaţia Prin (p) : Prin $(E) \to B$ încît Prin $(p)(\varphi) = p\varphi(F)$ adică dacă $\varphi : F \to p^{-1}(b)$ atunci Prin $(p)(\varphi) = b$.

Aplicaţia Prin (p), asociată unei cvasi-fibrări p este numită aplicaţie principală. A. D o l d şi R. L a s h o f au arătat [2] că aplicaţia Prin (p) este continuă iar J. Stasheff a arătat [1] că dacă p este o fibrare Hurewicz şi F un CW-complex finit atunci Prin (p) este de asemenea o fibrare Hurewicz.

J. Stasheff nu dă un răspuns dacă p este numai cvasi-fibrare. În cele ce urmează ne propunem să dăm un răspuns parţial la această problemă.

Definiția 3. Două fibrări Hurewicz $p_i : E_i \to B$ având același spațiu bază, se numesc echivalente homotopic dacă au loc următoarele diagrame comutative

(1)
$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{p_1} & B \\ {\scriptstyle u}\downarrow\uparrow{\scriptstyle v} & \nearrow_{p_2} & \\ E_2 & & \end{array}$$

și în plus $uv \underset{h_t}{\simeq} 1$; $vu \underset{k_t}{\simeq} 1$ și $p_2 h_t = p_2$ și $p_1 k_t = p_1$.

Dacă $p : E \to B$ este o aplicație continuă, ei i se poate asocia o fibrare Hurewicz $\mathrm{Hur}(p) : \mathrm{Hur}(E) \to B$ unde $\mathrm{Hur}(E) = \{(e, \lambda)/\lambda(0) = p(e)\}$ și $\mathrm{Hur}(p)(e, \lambda) = \lambda$ (1). Dacă p este o cvasi-fibrare atunci Hur (p) este slab echivalentă homotopic cu p și între fibrele corespunzătoare este indusă o echivalență homotopică slabă [1].

Definiția 4. O aplicație $p : E \to B$ o vom numi *o*-fibrare dacă p are proprietatea de ridicare a homotopiei în raport cu spațiul format dintr-un punct și dacă are drum unic ridicat.

Propoziția 1. *Fie $p : E \to B$ o cvasi-fibrare cu E și B CW-complexe și având fibrele de tipul de homotopie al unui CW-complex finit F. Dacă în plus p este o o-fibrare atunci* Hur (Prin (p)) *și* Prin (Hur (p)) *sînt două fibrări Hurewicz echivalente homotopic.*

Demonstrație. Să considerăm diagramele

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hur}\ (E) & \xrightarrow{\mathrm{Hur}\ (p)} & B \\ {\scriptstyle r}\downarrow\uparrow{\scriptstyle j} & \nearrow_{p} & \\ E & & \end{array}$$

unde $j(e) = (e, \lambda_e)$ unde $\lambda_e(t) = p(e)$ și $r(e, \lambda) = e$ și rezultă imediat că $jr \simeq 1$ și $rj = 1$ deci j este o echivalență homotopică a spațiilor E și Hur (E). Avem încă $\mathrm{Hur}\,(p)\, j = p$ și deci $j : p^{-1}(b) \to \mathrm{Hur}\ (p)^{-1}(b)$ și dacă p este o cvasi-fibrare $j/p^{-1}(b)$ este o echivalență homotopică slabă. Dacă E și B sînt CW-complexe atunci Hur (p) are fibrele de tipul de homotopie al lui F [1]. Rezultă că $j/p^{-1}(b)$ este o echivalență homotopică slabă între CW-complexe și deci o echivalență homotopică [5].

Fie atunci diagrama

(2)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hur}\ (\mathrm{Prin}\ (E)) & \xrightarrow{\mathrm{Hur}\ (\mathrm{Prin}\ (p))} & B \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & \nearrow_{\mathrm{Prin}\ (\mathrm{Hur}\ (p))} & \\ \mathrm{Prin}\ (\mathrm{Hur}\ (E)) & & \end{array}$$

unde α este definită în felul următor: fie $(\varphi, \lambda) \in \mathrm{Hur}\ (\mathrm{Prin}\ (E))$, deci

$\varphi : F \to p^{-1}(b_1)$ cu $\lambda(0) = b_1$ și fie $\varkappa(\lambda)$: Hur $(p)^{-1}((\lambda(0)) \to$ Hur $(p)^{-1}$ $(\lambda(1))$ cu $\varkappa(\lambda)(e, \mu) = (e, \lambda \circ \mu)$. În adevăr $\mu(0) = p(e)$, $\mu(1) = \lambda(0)$ și atunci $(\lambda \circ \mu)(0) = p(e)$ și $(\lambda \circ \mu)(1) = \lambda(1)$.

Să considerăm acum $\chi(\lambda)$: Hur $(p)^{-1}(\lambda(1)) \to$ Hur $(p)^{-1}(\lambda(0))$; cu $\chi(\lambda)$ $(e_1, \mu_1) = (e_1, \lambda^{-1} \circ \mu_1)$ rezultă imediat $\chi(\lambda)\varkappa(\lambda) = 1$ și $\varkappa(\lambda)\chi(\lambda) = 1$ deci $\varkappa(\lambda)$ este homeomorfism. Definim acum $\alpha(\varphi, \lambda) = \varkappa(\lambda) j\varphi : F \xrightarrow{\varphi} p^{-1}(\lambda(0)) \xrightarrow{j}$ Hur $(p)^{-1}(\lambda(0)) \xrightarrow{i}$ Hur $(p)^{-1}(\lambda(1))$. Cum φ, j, $\varkappa(\lambda)$ sînt cel puțin echivalențe homotope rezultă că $\alpha(\varphi, \lambda) \in$ Prin (Hur (E)). Avem în plus Prin (Hur (p))$\alpha(\varphi, \lambda) =$ Prin(Hur(p)) $(\varkappa(\lambda) j\varphi) = \lambda(1)$ și Hur (Prin (p)) $(\varphi, \lambda) =$ $= \lambda(1)$ deci α este aplicație peste B adică diagrama (2) este comutativă.

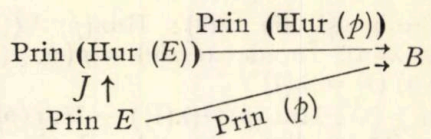
Deci α : Hur (Prin (p))$^{-1}(b) \to$Prin (Hur(p))$^{-1}$ (b). Să arătăm că aceasta este o echivalență homotopică. Fie r_b : Hur $(p)^{-1}(b) \to p^{-1}(b)$ o aplicație fixată și invers homotopică cu $j/p^{-1}(b)$. Definim atunci aplicația β : Prin (Hur (p))$^{-1}(b) \to$ Hur (Prin (p))$^{-1}(b)$ cu $\beta(\psi) = (r_b \psi, \lambda_b)$; aici $\psi : F \to$ Hur $(p)^{-1}(b)$ și $\lambda_b(\tau) = b$. Avem $\alpha\beta(\psi) = \alpha(r_b \psi, \lambda_b) = \varkappa(\lambda_b) j r_b \psi$. Dar $\varkappa(\lambda_b) = 1$ deci $\alpha\beta(\psi) = j r_b \psi$. Fie h_t : Hur $(p)^{-1}(b) \to$ Hur $(p)^{-1}(b)$ încît $h_0 = 1$ și $h_1 = j r_b$. Cum $h_t \simeq 1$ putem defini H_t : Prin (Hur (p))$^{-1}$ $(b) \to$ Prin (Hur (p))$^{-1}(b)$ prin $H_t(\psi) = h_t \psi$, $H_t(\psi) = \psi$ și $H_1(\psi) = j r_b \psi = \alpha\beta(\psi)$ deci $\alpha\beta \simeq 1$.

Fie acum $\beta\alpha(\varphi, \lambda) = \beta(\varkappa(\lambda) j\varphi) = (r_b \varkappa(\lambda) j\varphi, \lambda_b)$. Fie atunci $\lambda_t(\tau) =$ $= \lambda(t + \tau - t\tau)$ și definim $\varkappa(\lambda_b)$: Hur $(p)^{-1}(\lambda))(t) \to$ Hur $(p)^{-1}(\lambda(1))$ cu $\varkappa(\lambda_t)(e, \mu) = (e, \lambda_b \circ \mu)$. În adevăr cum $\mu(0) = p(e)$ și $\mu(1) = \lambda(t)$ avem $(\lambda_t \circ \mu)(0) = \mu(0) = p(e)$ și $(\lambda_t \circ \mu)(1) = \lambda_t(1) = \lambda(1)$ și rezultă imediat că $\varkappa(\lambda_t)$ este homeomorfism. Folosind acum proprietatea aplicației Prin (p) de ridicare a homotopiei în raport cu $\{\varphi\} \subset$ Prin (E) (rezultată din ipoteză ca o consecință a Lemei 7 [1]) rezultă că există $l : I \to$ Prin (E) cu Prin $(p)l(t) = \lambda(t)$ și $l(0) = \varphi$. Notăm $l(t) = \varphi_t : F \to p^{-1}(\lambda(t))$ și deci $\varphi_0 = \varphi$ și l unic.

Definim acum K'_t : Hur (Prin (p))$^{-1}$ $(b) \to$ Hur (Prin (p))$^{-1}$ (b) cu $K'_t(\varphi, \lambda) = (r_b \varkappa(\lambda_t))\, j\varphi_t, \lambda_b)$; deoarece $\varkappa(\lambda_t)$, j și r_b sînt cel puțin echivalențe homotope rezultă K'_t bine definită. $K'_t(\varphi, \lambda) = \beta\alpha(\varphi, \lambda)$ și $K'_t(\varphi, \lambda) = (r_b, j\varphi_1, \lambda_b)$ deci $\beta\alpha \simeq \rho$ unde $\rho(\alpha, \lambda) = (r_b j\varphi_1, \lambda_b)$ și fie acum $k_t : p^{-1}(b) \to p^{-1}(b)$ cu $k_0 = 1$ și $k_1 = r_b j$ și fie $K''_t(\varphi, \lambda) = (k_t \varphi_1, \lambda_b)$ și $K''_0(\varphi, \lambda) = (\varphi_1, \lambda_b)$ și $K''_1(\varphi, \lambda) = (r_t j \varphi, \lambda_b)$ deci $\rho \simeq \theta$ unde $\theta(\varphi, \lambda) =$ $= (\varphi_1, \lambda_b)$ și în sfîrșit considerăm $K_t(\varphi, \lambda) = (\varphi_t, \lambda_t)$. În adevăr $\lambda_t(0) = \lambda(t)$ și $\lambda_t(1) = \lambda(1)$ deci $K_t(\varphi, \lambda) \in$ Hur (Prin(p))$^{-1}(b)$ și $K_0(\varphi, \lambda) =$ $= (\varphi, \lambda)$ și $K_1(\varphi, \lambda) = (\varphi_1, \lambda_1) = (\varphi_1, \lambda_b)$ deci $\theta \simeq 1$ deci $\beta\alpha \simeq 1$. Deci aplicația α este peste B și induce echivalența homotopică a fibrelor corespunzătoare. Rezultă, [6], dacă B este CW-complex că α este o echivalență homotopică de fibrări ceea ce încheie demonstrația propoziției.

P r o p o z i ț i a 2. *Dacă $p : E \to B$ este o cvasi-fibrare și o-fibrare cu E și B CW-complexe și avînd fibrele de tipul de homotopie al unui CW-complex finit F atunci* Prin (p) *este o cvasi-fibrare.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie diagrama



unde $J(\varphi) = j\varphi$ unde j a fost definit în Propoziția 1. J este compunerea Prin $(E) \xrightarrow{j_1}$ Hur (Prin(E)) $\xrightarrow{\alpha}$ Prin (Hur (E)) unde j_1 este definită analog cu j și este echivalență homotopică iar α din Propoziția 1 este de asemenea o echivalență homotopică. Deci J este o echivalență homotopică a celor două spații. Avem în plus Prin (Hur (p))J = Prin (p).

Deci J : Prin $(p)^{-1}(b) \to$ Prin (Hur (p))$^{-1}(b)$ și definim $\varkappa$: (Prin (Hur (p))$^{-1}(b) \to$ Prin $(p)^{-1}(b)$ și anume dacă $\psi : F \to$ Hur $(p))^{-1}(b)$ și r_b este aplicația din Propoziția 1 atunci $\varkappa(\psi) = r_b\,\psi$ și se arată ca în Propoziția 1 că $J\varkappa \simeq 1$ și $\varkappa J \simeq 1$, deci J induce o echivalență homotopică a fibrelor. Dar deoarece spațiile care intervin sînt CW-complexe (Prin $(p)^{-1}(b)$ și Prin (Hur (p))$^{-1}(b)$ au tipul de homotopie al monoidului H, al echivalențelor homotope ale lui F cu el însuși [1], care dacă F este local compact este un CW-complex [4]; iar Prin (Hur (E)) este deasemenea un CW-complex dacă B este CW-complex [1]), rezultă [4] că J este o echivalență homotopică de perechi. Deci J_* este izomorfism și cum Prin (Hur (p)) este o fibrare Hurewicz (deoarece Hur (p) este fibrare Hurewicz) rezultă

$$\pi_i(\text{Prin } (E), \text{ Prin } (p)^{-1}(b_0)) \overset{J_*}{\cong} \pi_i(\text{Prin Hur } (E), \text{ Prin } (\text{Hur } (p))^{-1}(b_0))$$

$$\overset{(\text{Prin Hur } (p))_*}{\cong} \pi_i(B, b_0).$$

Dar J_* (Prin Hur (p))$_*$ = (Prin (p))$_*$ deci (Prin (p))$_*$: π_i (Prin (E), Prin $(p)^{-1}(b_0)) \cong \pi_i(B, b_0)$ și deoarece b_0 a fost luat arbitrar din B rezultă că Prin (p) este cvasi-fibrare.

3. Fie $p : E \to B$ o cvasi-fibrare cu fibrele de tipul de homotopie al unui spațiu local compact F, și fie P o familie bună de drumuri în B și $C : P(p) \to E^I$ o P-conexiune a aplicației p [3]. Amintim

D e f i n i ț i a 5. O P-conexiune a aplicației p este o aplicație continuă $C : P(p) \to E^I$ satisfăcînd condițiile :

1. $(y, f) \in P(p) \Rightarrow C(y, f)(0) = y$, $p \circ C(y, f) = f$;

2. Dacă $\Phi : I \to I$ este o aplicație continuă și liniară pe porțiuni, $(y, f) \in P(p)$ și $y' = C(y, f)(\Phi(0))$, atunci avem $C(y, f) \circ \Phi = C(y', f \circ \Phi)$.

Aici $P(p)$ este subspațiu a lui $E \times P$ constînd din perechi (y, f) cu $f \in P$ și $y \in p^{-1}(f(0))$.

Vom arăta atunci că există o P-conexiune a aplicației Prin (p). Avem $P(\text{Prin}(p)) = \{(\varphi, f)/\text{Prin } (p)(\varphi) = f(0) ; \varphi : F \to p^{-1}(b) ; f(0) = b\}$ și definim Prin (C) : P (Prin(p)) $\to$ Prin $(E)^I$ în felul următor : Prin $(C)(\varphi, f)(t) : F \to$ $\to p^{-1}(f(t))$ cu Prin $(C)(\varphi, f)(t)(y) = C(\varphi(y), f)$. În adevăr $p\varphi(y) = b = f(0)$. În plus fie $\psi : I \to B$ cu $\psi(\tau) = f(t\tau)$. Să observăm că Prin $(C)(\varphi, f)(t) = C\varphi_\psi$

unde C_ψ este $C_\psi : p^{-1}(b) \to p^{-1}(f(t))$ este homeomorfismul dat de $C_\psi(y) = C(y, \psi)(1)$ [3]. Dacă $p(y) = b$ avem $pC_\psi(y) = pC(y, \psi)(1) = \psi(1) = f(t)$, $C_\psi(y) \in p^{-1}(f(t))$. Să arătăm că Prin $(C)(\varphi, f)(t)(y) = C_\psi \varphi(y) = C(\varphi(y), \psi)(1)$.

Fie $\Phi : I \to I$ cu $\Phi(\tau) = t\tau$. Atunci perechea $(\varphi(y), f) \in P(p)$ și avem $y' = C(\varphi(y), f)(\Phi(0)) = \varphi(y)$ și $C(\varphi(y), f)(\Phi(1)) = C(\varphi(y), f \circ \Phi)(1)$ adică $C(\varphi(y), f)(t) = (C\varphi(y), \psi)(1)$ deci Prin $(C)(\varphi, f) = C_\psi \varphi$ dar C_ψ este homeomorfism [3] și φ este o echivalență homotopică deci Prin $(C)(\varphi, f)(t) \in$ Prin (E) deci Prin (C) este bine definită.

Să arătăm că Prin (C) este o P-conexiune pentru Prin (p).

1. Prin $(C)(\varphi, f)(0)(y) = C(\varphi(y), f)(0) = \varphi(y)$ deci Prin $(C)(\varphi, f)(0) = \varphi$.

2. Prin (p) Prin $(C)(\varphi, f)(t) = f(t)$ deci Prin (p) Prin $(C)(\varphi, f) = f$.

3. Fie $\Phi : I \to I$ o aplicație continuă și liniară pe porțiuni și fie $\varphi' =$ Prin $(C)(\varphi, f)(\Phi(0))$ și fie $y' =$ Prin $(C)(\varphi, f)(\Phi(0))(y) = C(\varphi(y), f)\Phi(0))$.

Atunci Prin $(C)(\varphi, f)(\Phi(t))(y) = C(\varphi(y), f)(\Phi(t))$ și Prin $(C)(\varphi', f \circ \Phi)(t)(y) = C(\varphi(y), f \circ \Phi)(t) = C(y', f \circ \Phi)(t) = C(\varphi(y), f)(\Phi(t))$, deci Prin $(C)(\varphi, f) \circ \Phi =$ Prin $(C)(\varphi', f \circ \Phi)$ deci Prin (C) este e P-conexiune pentru Prin (p).

D e f i n i ț i a 6. Un triplet $\xi = (\eta, P, C)$ este numit fascicul geometric. Un fascicul geometric are un spațiu total E, o proiecție p, un spațiu bază B, o familie bună de drumuri P în B și o P-conexiune pentru p.

Rezultă din cele demonstrate mai sus

P r o p o z i ț i a 3. *Dacă* $\xi = (E, p, B, P, C)$ *este un fascicul geometric avînd fibrele de tipul de homotopie al unui spațiu local compact* (η *este un fascicul fibrat* [3]), *atunci* Prin (ξ) = Prin (E), Prin (p), B, P, Prin (c) *este de asemenea un fascicul geometric.*

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici I

BIBLIOGRAFIE

1. S t a s h e f f J., *Topology*. Vol. **2**, 1963, pp. 239–246.
2. D o l d A., L a s h o f R., *Principal Quasi-Fibrations and Fibre Homotopy Equivalence of Bundles*. Ilinois J. Math., 1959, *3*, pp. 285–305.
3. T e l e m a n C., *Connections and Bundles* (*I–II*). Konikl. Nederl. Akademie Van Wetenschappen, Amsterdam (Reprited from Proceedings, Series A, 1969, **72**, *1* and Indag. Math., 1969, **31**, *1*, pp. 89–112).
4. M i l n o r J., *On Spaces Having the Homotopy Type of CW-complexes*.Trans. Amer. Math. Soc., 1959, *9*, pp. 272–280.
5. S p a n i e r E. H., *Algebraic Topology*. Mc Graw-Hill Book Comp., 1966.
6. D o l d A., *Partitions of Unity in the Theory of Fibre Spaces*. Ann. Math. Princeton, 1963, pp. 223–255.

SUR L'APPLICATION PRINCIPALE ASSOCIÉE A UNE QUASI-FIBRATION

(Résumé)

On présente une condition pour que l'application principale associée à une quasi-fibration soit une quasi-fibration (Proposition 2) et on attache une P-connexion pour l'application Prin (p) s'il existe une P-connexion pour l'application p (Proposition 3).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 519.443 ; 519.21

RANDOM GROUPOIDS

BY

PHILIP HOLGATE

1. Introduction

A finite groupoid G is a set of elements $a_1, \ldots, a_n$ together with a multiplication table associating a unique product with each ordered pair a_i, a_j. The conditions that must be satisfied in order that G should be a group are listed here for convenient reference. For ever ordered triple i, j, k, the equation

$$a_i(a_j a_k) = (a_i a_j)a_k \tag{1}$$

must be satisfied. Either (i) for every ordered pair i, j the equations

$$a_i x = a_j, \quad y a_i = a_j \tag{2}$$

must be soluble, or equivalently (ii) there must exist an element, a_1 say, such that

$$a_1 a_i = a_i, \quad a_i a_1 = a_j \tag{3}$$

and such that every equation

$$a_i x = a_1, \quad y a_j = a_1 \tag{4}$$

is soluble. If in addition for every i, j

$$a_i a_j = a_j a_i \tag{5}$$

the group is said to be commutative.

If the elements are regarded as objectively distinguishable, it is clear that there are $n^{(n^2)}$ possible groupoids with a given set of n elements. The idea of studying the distribution throughout this set of groupoids, of an index measuring the extent to which the relationships listed above are partially fulfilled, was introduced by A. C. Climescu [1], who defined the index of non-associativity I_n to be the number of the n^3 triples for which (1) does not hold. P. J. Brockwell [2] put this kind of investigation on a probabilistic basis, supposing that each cell of the multiplication table was filled in independently and at random, each element having equal probability of being chosen. In these terms, Climescu's main result can be expressed by saying that I_n takes every value from 0 to n^3 with positive probability. Brockwell studied the coefficient of associativity, $I'_n = N^3 - I_n$, finding exact

expressions for its expectation and variance, and proving that its third moment is asymptotically zero as $n \to \infty$. He also conjectured that its distribution is asymptotically normal, a conjecture which I have proved. I hope to publish the proof elsewhere.

The idea of a random groupoid suggests several classes of problems, some of which are listed here.

(i) The probability distributions of indices measuring the extent to which the group axioms other than (1) are partially satisfied.

(ii) Related extremal problems such as the probability that (1) is satisfied for all triples, in which case G is a semi-group, or that (2) is satisfied for all pairs, making G a quasi-group.

(iii) The probabilistic dependence between indices of the type mentioned in (1) leading to the idea of a statistical dependence or independence of the group axioms, or between an index and the occurrence of an extreme event.

(iv) The distribution of the size of the largest subset satisfying some condition such as associativity, commutativity, or closure.

The present note gives some introductory results in these fields.

2. Solubility

In order to measure the extent to which (2_1) is partially satisfied in a groupoid, let L_n and L_n^*, the indices of left divisibility and unique divisibility, be defined to be the number of ordered pairs (i, j) for which (2_1) is soluble, and uniquely soluble, respectively.

The moments of these quantities may be obtained by the method of characteristic random variables (also used by Brockwell in his work on I_n'). Let

$$\epsilon(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{if } (2_1) \text{ is soluble} \\ 0, & \text{if not,} \end{cases}$$

and

$$\epsilon^*(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{if } (2_1) \text{ has a unique solution} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is also convenient to define

$$\epsilon_n(i) = \sum_j \epsilon(i,j), \qquad \epsilon_n^*(i) = \sum_j \epsilon^*(i,j).$$

Now $\epsilon(i, j) = 1$ if the i-th row of the multiplication table contains a_j at least once, while $\epsilon^*(i, j) = 1$ if it contains a_j exactly once. Now

$$\mathcal{E}\,\epsilon(i,j) = \Pr\{\epsilon(i,j) = 1\} = 1 - (1 - n^{-1})^n = 1 - e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1}n^{-1} + O(n^{-2}),$$

on using the estimate $(1 - x/n)^n = e^{-x}\left(1 - \frac{1}{2}x^2n^{-1}\right) + O(n^{-2})$ as $n \to \infty$. It follows immediately that $\operatorname{var}\epsilon(i,j) = e^{-1}(1 - e^{-1}) + O(n^{-1})$. If $j \neq k$

$$\mathcal{E}\{\epsilon(i,j)\epsilon(i,k)\} = \Pr\{\epsilon(i,j) = \epsilon(i,k) = 1\} = 1 - \Pr\{\epsilon(i,j) =$$
$$= \epsilon(i,k) = 0\} - 2\Pr\{\epsilon(i,k) = 1,\ \epsilon(i,k) = 0\} =$$
$$= 1 - (1 - 2n^{-1})^n - 2(1 - n^{-1})^n\{1 - [1 - (n-1)^{-1}]^n\} =$$
$$= (1 - e^{-1})^2 + e^{-1}(1 - e^{-1})n^{-1} + O(n^{-2}).$$

Hence cov $\{\epsilon(i,j),\ \epsilon(i,k)\} = O(n^{-2})$. Thus

$$\mathcal{E}L_n = \mathcal{E}\sum_i \sum_j \epsilon(i,j) = n^2(1 - e^{-1}) + \frac{1}{2}ne^{-1} + O(1),$$

$\operatorname{var} L_n = n^2 \operatorname{var}\epsilon(i,j) + n^2(n-1)\operatorname{cov}\{\epsilon(i,j), \epsilon(i,k)\} = n^2e^{-1}(1 - e^{-1}) + O(n)$, since $\epsilon(i,j)$ and $\epsilon(k,l)$ are independent if $i \neq k$.

It follows that as $n \to \infty$, $n^{-2}L_n$ converges in probability to $1 - e^{-1} = 0.6321$, and this represents the limiting proportion of equations (2_1) which are soluble when a groupoid multiplication table is filled in at random. Moreover, $\epsilon_n(i)$ and $\epsilon_n(j)$ are independent when $i \neq j$, and

$$\mathcal{E}\epsilon_n(i) = n(1 - e^{-1}) + \frac{1}{2}e^{-1} + O(n^{-1}), \quad \operatorname{var}\epsilon_n(j) = ne^{-1}(1 - e^{-1}) + O(1).$$

Thus $n^{-1}L_n = n^{-1}\sum_i \epsilon_n(i)$ is asymptotically normal with mean $n(1 - e^{-1})$ and variance $e^{-1}(1 - e^{-1})$, as $n \to \infty$.

Similarly

$$\mathcal{E}\epsilon^*(i,j) = \Pr\{\epsilon^*(i,j) = 1\} = n(n^{-1})(1 - n^{-1})^{n-1} = e^{-1}(1 + \frac{1}{2}n^{-1}) + O(n^{-2}),$$

$$\mathcal{E}\{\epsilon^*(i,j)\epsilon^*(i,k)\} = \Pr\{\epsilon^*(i,j) = \epsilon^*(i,k) = 1\} = 2\binom{n}{2}n^{-2}(1-2n^{-1})^{n-2} =$$
$$= e^{-2}(1 + n^{-1}) + O(n^{-2}).$$

Hence cov $\{\epsilon^*(i,j),\ \epsilon^*(i,k)\} = O(n^{-2})$. These results lead to

$$\mathcal{E}L_n^* = n^2n^{-1} + \frac{1}{2}ne^{-1} + O(1), \quad \operatorname{var} L_n^* = n^2e^{-1}(1 - e^{-1}) + O(n),$$

and convergence in probability and asymptotic normality can be proved as in the case of L_n. The asymptotic equality of $\operatorname{var} L_n$ and $\operatorname{var} L_n^*$ appears to be an interesting coincidence, and can ben associated with the equality of the probabilities of zero and unity in the Poisson distribution with mean one.

Let R_n and R_n^* be similarly defined indices of right divisibility, and unique right divisibility, and let $\delta(i,j)$ and $\delta^*(i,j)$ be characteristic random variables taking the value one if a_i occurs at least once, and exactly once respectively, in column j. Now the (i,k) cell of the multiplication table contains a_j, a_l, or some other element with probabilities n^{-1}, n^{-1}, $1 - 2n^{-1}$

respectively. The first two possibilities give rise to symmetric results, and so if $j \neq l$

$$\operatorname{cov}(\epsilon_{ij}, \delta_{lk}) = \Pr(\epsilon_{ij} = 1, \delta_{lk} = 1) - \{\Pr(\epsilon_{ij} = 1)\}^2 =$$
$$= 2n^{-1}\{1 - (1 - n^{-1})^{n-1}\} + \{1 - (1 - n^{-1})^{n-1}\}^2 (1 - 2n^{-1}) -$$
$$- \{1 - (1 - n^{-1})^n\}^2 = -n^{-2}(1 - n^{-1})^{2-2n}$$

after some reduction. Also, conditioning on the event that cell (i, k) contains a_j, a similar calculation gives

$$\operatorname{cov}(\epsilon_{ij}, \delta_{jl}) = n^{-1} + (1 - n^{-1})\{1 - (1 - n^{-1})^{n-1}\}^2 - \{1 - (1 - n^{-1})^n\}^2 =$$
$$= n^{-1}(1 - n^{-1})^{2n-1}.$$

Taking these results together,

$$\operatorname{cov}(L_n, R_n) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \operatorname{cov}(\epsilon_{ij}, \delta_{lk}) = n^3 \operatorname{cov}(\epsilon_{ij}, \delta_{jk}) +$$
$$+ (n^4 - n^3) \operatorname{cov}(\epsilon_{ij}, \delta_{lk}),$$

where in the last term $j \neq l$. Hence

$$\operatorname{cov}(L_n, R_n) = n^2(1 - n^{-1})^{2n-1} - (n^2 - n)(1 - n^{-1})^{2n-2} = 0.$$

Thus the algebraic independence of left and right divisibility is reflected perfectly in this statistical sense, in that the covariance between the proportions of the sets of equations (2_1) and (2_2) which are soluble when groupoid is chosen at random, is zero for every n. Furthermore, the asymptotic normality of these coefficients implies that they are asymptotically independent.

The same approach applied to the indices of unique divisibility leads to an analogous conclusion, but even more directly because in this case $\operatorname{cov}(\epsilon^*_{ij}, \delta^*_{jk}) = \operatorname{cov}(\epsilon^*_{ii}, \delta^*_{lk}) = 0$.

The probability distribution of L_n and L^*_n can be written down in explicit, though not numerically simple, forms. If the cells in row i are regarded as being assigned at random to classes labelled with the n groupoid elements, $\epsilon(i)$ is the number of classes containing at least one cell, and $\epsilon^*(i)$ is the number of classes containing exactly one cell. Then $\Pr\{\epsilon(i) = t\} = n^{-n}\binom{n}{t}\Delta^t O^n$, where $\Delta^t O^n$ is a ,,difference of zero'' (see [3], p. 242). The probability generating function of $\epsilon(i)$ can be written as

$$\Pi(z) = n^{-n}\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}\Delta^t O^n z^t = n^{-n}(1 + \Delta z)^n O^n$$

in symbolic form. The probability generating function of L_n is $\{\Pi(z)\}^n$. The variable L^*_n is the convolution of n random variables, each with probability distribution

$$\Pr\{\epsilon^*(i) = t\} = \frac{n^{-n}}{t!} \sum_{s=t}^{n} \frac{(n-s)^{n-s}\{n(n-1)\ldots(n-s+1)\}^2}{(s-t)!}$$

(see [3], p. 278).

To conclude this section, it may be noted that the extremal problem in this context, the probability that G is a quasi-group, is equivalent to the enumeration of Latin squares.

3. Identities

The probability that a given element is a left identity is n^{-n}, and hence the probability that G contains at least one left identity is $1 - (1 - n^{-n})^n$ which tends rapidly to zero as n approaches infinity. There cannot be more than one two sided identity, and the probability that there is one is $n\, n^{-(2n+1)} = n^{-2n}$.

A problem of type (iii) which arises here is the effect of the quasi-group property on the existence of identities. Because its multiplication table is a Latin square, the chance that a given element is an identity is $(n!)^{-n}$. That is, the fact of being a quasigroup increases this probability by a factor $n^n/n! \sim e^n(2\pi n)^{-1/2}$. There cannot be more than one left identity in a quasi-group, the probability of this in a random quasi-group being $\{(n-1)!\}^{-1}$. Finally the chance of the existence of a two sided identity is $\{(n-1)!\}^{-2}$, which is asymptotically $e^{2n-2}/(2\pi n)$ times the probability of the same event in a random groupoid.

4. Commutativity

The index of commutativity C_n, the number of unordered pairs (i, j) for which (5) is true is distributed binomially with

$$\Pr(C_n = j) = \binom{\frac{1}{2}n(n-1)}{j} n^{-j}(1 - n^{-1})^{\frac{1}{2}n(n-1)-j}.$$

Its moments are $C_n = \frac{1}{2}(n-1)$, $\operatorname{var} C_n = \frac{1}{2}n^{-1}(n-1)^2$ and it is asymptotically normal.

5. The Effect of Solubility on Associativity

In contrast to its effect on the existence of identities, the event that G is a quasi-group does not change the distribution of I_n, at least when n is large. If the computations described by Brockwell in [2] are carried through conditional on the multiplication table of G being a Latin square, the only effect is to replace n^s by $n(n-1)\ldots(n-s+1)$ in certain places, and thus it is asymptotically negligible.

6. Maximal Commutative Subgroupoids

The problems of class (iv) are perhaps the most difficult. The probability that a given subset of k elements is commutative is $n^{-k(k-1)/2}$. Thus by assigning a characteristic random variable to each of the $\binom{n}{k}$ subsets, it is easy to see that the expected number of (possibly overlapping) commutative subsets of order k is $\binom{n}{k} n^{-k(k-1)/2} \sim \frac{n^{-k(k-3)/2}}{k!}$ as $n \to \infty$, for each fixed k. Thus for $k \geqslant 4$ the expected number, and hence the probability of any, has the limiting value zero. For $k = 3$ the expected number tends to 1/6, and hence the probability of zero must be at least 5/6. The covariance between a pair of the characteristic random variables defined above is zero when the corresponding sets of elements have at most one element in common, and can be readily seen to be $n^{-4} - n^{-6}$ when they have two elements in common.

There are $\frac{1}{2}\binom{n}{3} 3(n-3)$ such overlapping pairs of sets since each of the $\binom{n}{3}$ sets overlaps with $3(n-3)$ others. Hence the variance of the number of commutative triples is

$$\binom{n}{3} n^{-3}(1-n)^{-3} + \frac{3}{2}\binom{n}{3}(n-3)(n^{-4} - n^{-6}) \sim \frac{11}{6}.$$

Received the 18 V 1969

University of London,
Birkbeck College,
England

REFERENCES

1. Climescu, A. C., *Études sur la théorie des systèmes multiplicatifs uniformes. (I) L'indice de non-associativité.* Bull. École Polytech. Jassy, 1947, **2**, pp. 347–371.
2. Brockwell, P. J., *On the Number of Associative Triples in an Algebra of n Elements.* Canadian Journ. Math., 1967, **19**, pp. 842–850.
3. David, F. N., Barton, D. E., *Combinatorial Chance.* London, 1962.

GRUPOIZI ALEATORII

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare principalul rezultat al lui C. Climescu [1] și ținînd seama de formularea lui P. J. Brockwell [2] fondată pe probabilitatea de umplere a fiecărei celule a tabelei de înmulțire, stabilește un număr de date interesînd grupoizii aleatorii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 519.513

O GENERALIZARE A SPAŢIILOR VECTORIALE

DE

DAN BORŞ

1. Fie X şi Y două mulţimi nevide, T un trib de submulţimi ale lui X care conţine mulţimea X şi produsul cartezian $T_1 \times Y$, adică mulţimea perechilor ordonate de forma (A, x) unde A aparţine mulţimii T iar x aparţine mulţimii Y.

Presupunînd că mulţimea Y este grup faţă de o lege de compoziţie internă notată aditiv, aplicaţia $((A, x), (B, y)) \to (A, x) + (B, y)$ a produsului cartezian al mulţimii $T \times Y$ cu ea însăşi în $T \times Y$, definită prin

$$(1) \qquad (A, x) + (B, y) \overset{\text{def}}{=} (A \,\Delta\, B, x + y)$$

este o lege de compoziţie internă definită pe $T \times Y$, asociativă, cu element neutru $(\varnothing, \theta)$ şi astfel că simetricul elementului (A, x) este $-(A, x) \overset{\text{def}}{=} (A, -x)$; simbolul Δ reprezintă diferenţa simetrică definită în mulţimea $P(X)$ a submulţimilor mulţimii X, aceasta fiind o lege de compoziţie internă în mulţimea $P(X)$, asociativă, cu element neutru $\varnothing$ şi astfel că simetricul elementului A din $P(X)$ este elementul A; prin θ am notat elementul neutru al grupului aditiv Y.

Tribul T fiind grup comutativ în raport cu diferenţa simetrică rezultă că produsul cartezian al grupurilor T şi Y este grup faţă de legea (1); dacă Y este grup comutativ, $T \times Y$ este grup comutativ.

Presupunînd că mulţimea Y este inel faţă de două legi de compoziţie internă notate aditiv şi multiplicativ, aplicaţiile (1) şi $((A, x), (B, y)) \to (A, x) \cdot (B, y)$ a produsului cartezian al mulţimii $T \times Y$ cu ea însăşi în $T \times Y$, definită prin

$$(2) \qquad (A, x) \cdot (B, y) \overset{\text{def}}{=} (A \cap B, x \cdot y),$$

sînt legi de compoziţie internă definite pe $T \times Y$.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Am văzut că față de legea (1) $T \times Y$ este grup ; legea (2) este dublu distributivă față de legea (1). Tribul T fiind inel în raport cu diferența simetrică și intersecția, rezultă că produsul cartezian al inelelor T și Y este inel față de legile (1), (2).

Tribul T este inel asociativ, are unitate mulțimea X, este comutativ și cu divizori ai lui zero.

Dacă inelul Y este asociativ, are unitatea e, este comutativ și cu divizori ai lui zero atunci inelul $T \times Y$ este asociativ, are unitatea (X, e), este comutativ și cu divizori ai lui zero.

2. Fie Y un spațiu vectorial peste un cîmp K ; notăm aditiv legile interne din Y și K și multiplicativ înmulțirea cu scalari din Y și a doua lege internă din K ; fie 0,1 elementele neutre în K.

Atunci aplicația $(a, (A, x)) \to a \cdot (A, x)$ a produsului cartezian al mulțimii K prin $T \times Y$ în $T \times Y$, definită prin

$$a \cdot (A, x) \overset{\text{def}}{=} (A, a \cdot x), \quad a \in K, \tag{3}$$

este o lege de compoziție externă în $T \times Y$, care are propietățile

$$\begin{cases} a \cdot [(A, x) + (B, y)] = a \cdot (A, x) + a \cdot (B, y), \\ a \cdot [b(A, x)] = (ab) \cdot (A, x), \\ 1 \cdot (A, x) = (A, x). \end{cases} \tag{3'}$$

Se observă că în general

$$(a + b) \cdot (A, x) \neq a \cdot (A, x) + b \cdot (A, x), \tag{4}$$

egalitatea avînd loc pentru orice x din Y și $A = \varnothing$.

Relația

$$0 \cdot (A, x) = (A, \theta) \tag{5}$$

se deduce imediat din definiția (3) dată înmulțirii cu scalari și nu este consecință a axiomelor spațiului vectorial cum se întîmplă în cazul acestor spații. Deci produsul cu scalarul zero din K al oricărui element din $T \times Y$ nu este în general elementul neutru $(\varnothing, \theta)$ al grupului aditiv $T \times Y$.

În conformitate cu (5) deducem

$$(a + b) \cdot (A, x) + 0 \cdot (A, x) = a \cdot (A, x) + b\,(A, x), \tag{6}$$

$$(a + b) \cdot (A, x) = a \cdot (A, x) + b \cdot (A, x) + 0 \cdot (A, x), \tag{7}$$

și deoarece

$$(A, -x) = (-1) \cdot (A, x) \tag{8}$$

deducem încă

$$(6') \qquad (a+b)\cdot(A,x) - 0\cdot(A,x) = a\cdot(A,x) + b\cdot(A,x),$$

$$(7') \qquad (a+b)\cdot(A,x) = a\cdot(A,x) + b\cdot(A,x) - 0\cdot(A,x)\ .$$

În plus, se observă că are loc egalitatea

$$(8) \qquad (a+b+c)\cdot(A,x) = a\cdot(A,x) + b\cdot(A,x) + c\cdot(A,x)\ .$$

Grupul aditiv comutativ $T \times Y$ dotat cu legea externă (3) care are proprietățile (3') și (6) se va denumi *spațiu cuasivectorial peste cîmpul K*.

Dacă Y este o algebră peste cîmpul K atunci față de legile (1), (2), (3) mulțimea $T \times Y$ este o causialgebră (datorită relației (4)). Dacă algebra Y are unitatea e atunci cuasialgebra $T \times Y$ are unitatea (X, e); dacă algebra Y este comutativă atunci cuasialgebra $T \times Y$ este comutativă.

Presupunînd că Y este un spațiu pre-Hibert complex dotat cu produsul scalar $(x, y) \to < x, y >$, aplicația $((A, x), (B, y)) \to <(A, x), (B, y)>$ a produsului cartezian al mulțimii $T \times Y$ cu ea însăși în cîmpul complex, definită prin

$$(9) \qquad < (A,x), (B,y) > \overset{\text{def}}{=} < x, y >$$

este un produs scalar în $T \times Y$; vom spune că mulțimea $T \times Y$ este un *spațiu cuasipre-Hilbert* în raport cu aplicațiile (1), (3), (8).

Mulțimea $T \times Y$ este un spațiu cuasivectorial normat deoarece aplicația $(A, x) \to ||(A, x)||$ a mulțimii $T \times Y$ în grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive nenule, definită prin

$$(10) \qquad ||(A,x)|| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{< (A,x), (B,y) >}\ ,$$

este o normă în $T \times Y$.

3. Referindu-ne la spațiul cuasivectorial $T \times Y$, drept consecință a proprietăților operației de diferență simetrică, deducem

$$(11) \qquad (a_1 + \cdots + a_{2n+1})(A,x) = a_1(A,x) + \cdots + a_{2n+1}(A,x),$$

$$(12) \qquad \begin{aligned}(a_1 + \cdots + a_{2n})(A,x) + 0\,(A,x) &= a_1(A,x) + \\ &+ \cdots + a_{2n}(A,x), \quad n \geqslant 2.\end{aligned}$$

Elementul (A, x) va fi combinație liniară de elementele mulțimii $\{(A_1, x_1), \ldots, (A_n, x_n)\}$ dacă $A = A_1 \Delta \ldots \Delta A_n$ și dacă există $a_1, \ldots, a_n$ din K astfel încît $x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$; atunci scriem

$$(A,x) = a_1(A_1, x_1) + \cdots + a_n(A_n, x_n)$$

și din proprietățile operației de diferență simetrică rezultă că orice mulțime din $\{A, A_1, \ldots, A_n\}$ este diferența simetrică a celorlalte n mulțimi.

În particular, elementul neutru $(\varnothing, \theta)$ va fi combinație liniară de elementele mulțimii $\{(A_1, x_1), \ldots, (A_n, x_n)\}$ dacă și numai dacă orice mulțime din $\{A_1, \ldots, A_n\}$ este diferența simetrică a celorlalte $n - 1$ mulțimi și θ este combinație liniară de elementele mulțimii $\{x_1, \ldots, x_n\}$ din Y.

Condiția necesară și suficientă ca mulțimea $\{(A_1, x_1), \ldots, (A_n, x_n)\}$ să fie liberă (legată) în $T \times Y$ este ca $(\varnothing, \theta)$ să fie combinație liniară de elementele acestei mulțimi și mulțimea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ să fie liberă (legată) în Y.

Spațiul cuasivectorial $T \times Y$ poate conține ca submulțimi spații vectoriale peste K și subspații cuasivectoriale peste K; de exemplu, mulțimea $\{\varnothing\} \times Y$ este spațiu vectorial peste cîmpul K în raport cu restricțiile la $\{\varnothing\} \times Y$ ale legilor (1), (3) din $T \times Y$, iar mulțimea $T \times \{\theta\}$ este subspațiu cuasivectorial peste K.

Spațiul cuasivectorial $T \times Y$ este sumă cuasidirectă a mulțimilor $\{\varnothing\} \times Y$, $T \times \{\theta\}$ deoarece au loc condițiile echivalente

$$(13) \qquad (A, x) = (\varnothing, x) + (A, \theta), \quad \forall A \in T, \quad \forall x \in Y,$$

descompunerea fiind unică,

$$(14) \qquad (\{\varnothing\} \times Y) \cap (T \times \{\theta\}) = \{(\varnothing, \theta)\}.$$

Primită la 30 X 1969

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici I

UNE GÉNÉRALISATION DES ESPACES VECTORIELS

(Résumé)

On étudie certaines structures qui peuvent être définies sur $T \times Y$ où T est une tribu de parties d'un ensemble, qui est anneau par rapport à la différence symétrique et l'intersection, et Y est un ensemble structuré arbitrairement (par exemple groupe, espace vectoriel, anneau, algèbre, espace pre-Hilbert).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 512.9

ASUPRA UNEI CLASE DE ALGEBRE INDECOMPOZABILE DE ORDIN FINIT, CU SCALARI REALI

DE

I. ENESCU

Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi, din 23—26 octombrie 1969

1. O bine cunoscută teoremă din teoria generală a algebrelor, [1], arată că o algebră A asociativă, de ordin finit şi comutativă, care nu conţine idempotenţi diferiţi de unitate şi de elementul nul (deci indecompozabilă), definită pe un cîmp separabil F, este suma (nedirectă) dintre un cîmp considerat ca algebră peste F şi radicalul său.

Dacă F este corpul real, apare ca posibilă existenţa acelui tip de algebră de ordin n, a cărei structură să fie aceea a unei sume dintre corpul complex K şi radicalul acesteia format din algebra nulă de ordin $n-2$, pe care o o notăm prin N_{n-2} :

$$A_n = K + N_{n-2}. \tag{1}$$

Algebra lui Sobrero, [2], dovedeşte existenţa efectivă, în cazul $n = 4$, a unei structuri de tip (1), iar pentru $n = 5$ algebra cu aceeaşi structură, semnalată în [3], apare ca posibilă.

Se pune deci în mod natural întrebarea dacă există algebre reale cu structura (1), oricare ar fi ordinul n finit, al acestora.

Răspunsul la această chestiune constituie obiectul notei de faţă.

2. Începem prin a observa că suma spaţiilor liniare corespunzătoare lui K şi respectiv N_{n-2} este directă, acestea avînd comun numai elementul nul şi, în consecinţă :

$$\text{ordin } A_n = \text{ordin } K + \text{ordin } N_{n-2}. \tag{2}$$

Relaţia (2) permite alegerea pentru A_n a unei baze de forma

(3) $$1,\ \mathrm{i},\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-2},$$

unde 1, i formează o bază pentru K, iar $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$ constituie o bază pentru radical, elementul 1 fiind, în acelaşi timp, unitatea algebrei A_n.

În baza (3) algebra A_n are o tabelă de înmulţire de forma :

(4)

	1	i	u_1	u_2	...	u_{n-2}
1	1	i	u_1	u_2	...	u_{n-2}
i	i	-1	$\alpha_1^q u_q$	$\alpha_2^2 u_q$	...	$\alpha_{n-2}^q u_q$
u_1	u_1	$\alpha_1^q u_q$	0	0	...	0
u_2	u_2	$\alpha_2^q u_q$	0	0	...	0
.	.					
.	.					
.	.					
u_{n-2}	u_{n-2}	$\alpha_{n-2}^q u_q$	0	0	...	0

, $(q = 1,2, \ldots, n-2)$.

Observăm că asociativitatea pentru elementele 1, i şi 1, u_q pe de o parte, respectiv u_q, u_p, $(p, q = 1, 2, \ldots, n-2)$, pe de altă parte, este evidentă.

Trebuie determinate constantele de structură :

(5) $$\alpha_\mu^\nu, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n-2),$$

aşa fel încît elementele i, u_p să aibă produsul asociativ, condiţie care conduce la sistemul

(6) $$\mathrm{i}(\mathrm{i}u_p) = -u_p, \quad \mathrm{i}(u_p u_s) = \mathrm{i}(u_p)\, u_s = 0, \quad (p, s = 1,2, \ldots, n-2),$$

format cu $(n-2)^2$ ecuaţii de gradul II în necunoscutele (5).

Să punem :

(7) $$\mathrm{i}u_p = u_p \mathrm{i} = \alpha_p^q u_q, \quad (p, q = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Calculul produselor $\mathrm{i}(\mathrm{i}u_p)$ conduce la

(8) $$\mathrm{i}(\mathrm{i}u_p) = \alpha_p^q \alpha_q^1 u_1 + \alpha_p^q \alpha_q^2 u_2 + \ldots + \alpha_p^q \alpha_q^{n-2} u_{n-2}, \quad (p, q = 1,2,\ldots,n-2).$$

Fie acum

(9) $$X = \| \alpha_\mu^\nu \|, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n-2),$$

matricea formată cu cele $(n-2)^2$ constante de structură (5).

Expresia (8) a produselor $\mathrm{i}(\mathrm{i}u_p)$ arată că, ţinînd seama de (7) şi (4), sistemul (6) este echivalent cu ecuaţia matriceală

(10) $$X^2 = -E,$$

unde E este matricea unitate de tip $(n-2, n-2)$, dovedind astfel

Teorema 1. *Algebra A_n este asociativă dacă ecuaţia* (10) *are, cel puţin, o soluţie reală.*

Observăm că această teoremă constituie condiția necesară de existență a algebrei A_n căci, dacă aceasta este asociativă, ea va avea o structură de tip (1) dacă singurii săi idempotenți sînt 1 și 0.

3. Fie $n=2k+1$ și să notăm cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2k-1}$, valorile proprii ale matricei (9). Atunci, [4], valorile proprii ale matricei X^2 sînt $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_{2k-1}^2$ și, în baza ecuației (10), ele sînt egale cu valorile proprii ale matricei $-E$, adică

$$\lambda_q^2 = -1, \qquad (q = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{11}$$

Relația (11) arată că valorile proprii ale matricei (9) sînt de forma $\pm i$ și, cum ele sînt în număr impar, nu este posibil să fie aranjate în perechi de numere conjugate, ceea ce implică pentru matricea (9) faptul că polinomul său caracteristic are coeficienții complecși. De aici urmează că matricea X însăși este formată cu numere complexe, deci constantele de structură (5) sînt cantități complexe. Acest rezultat demonstrează

Teorema 2. *În cazul impar* ($n = 2k + 1$), *nu există nici o algebră reală* A_n, *asociativă, cu structura* (1).

4. Pentru a răspunde problemei puse, în cazul $n = 2k$, să considerăm algebra de ordin k, formată din suma (nedirectă) dintre corpul real și algebra nulă de ordin $k - 1$,

$$L_k = R + N_{k-1}. \tag{12}$$

Evident, algebra L_k este asociativă, comutativă și cu unitate, iar radicalul său este tocmai N_{k-1}.

Fie $e_1, e_2, \ldots, e_k$ o bază pentru L_k, așa fel încît e_1 să fie unitatea algebrei, deci $e_1 e_h = e_h e_1 = e_h$, iar $e_p e_q = e_q e_p = 0$, $(h = 1, 2, \ldots, k;\ p, q = 2, 3, \ldots, k)$.

Vom obține algebre de tipul (1) considerînd produsul direct

$$K \times L_k. \tag{13}$$

Într-adevăr, o bază pentru algebra (13) este dată de ansamblul

$$1e_1, ie_1, 1e_q, ie_q, \quad (q = 2, 3, \ldots, k), \tag{14}$$

format din $2k$ elemente.

Se vede imediat că $1e_1 = u_1$ și $ie_1 = u_2$ formează baza unei algebre de ordin doi izomorfă cu K, iar celelalte elemente din (14), pe care, indiferent de ordine, să le notăm prin u_h, $(h = 3, 4, \ldots, 2k)$, se multiplică după legea $u_h u_p = u_p u_h = 0$, întrucît $e_s e_t = e_t e_s = 0$, $(h, p = 3, 4, \ldots, 2k;\ s, t = 2, 3, \ldots, k)$.

Rezultă atunci că subalgebra nulă N_{2k-2} cu baza u_h de mai sus, formează radicalul produsului direct (13), întrucît este ideal maximal nilpotent al acestuia. Aceste rezultate stabilesc

Teorema 3. *Ecuația matriceală* (10), *are, în cazul par* ($n = 2k$), *cel puțin o soluție reală.*

Fie acum un element oarecare al algebrei (13). În baza (14) el are forma :

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4 + \ldots + \beta_{2k} u_{2k}. \tag{15}$$

Avem

$$x^2 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) u_1 + 2\alpha_1 \alpha_2 u_2 + 2\alpha_1 (\beta_3 u_3 + \ldots + \beta_{2k} u_{2k}) + \\ + 2\alpha_2 u_2 (\beta_3 u_3 + \ldots + \beta_{2k} u_{2k}).$$

Condiția $x^2 = x$ conduce la un sistem, ale cărui prime două ecuații sînt :

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \alpha_1, \quad 2\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2, \tag{16}$$

de unde rezultă, cu necesitate, $\alpha_2 = 0$ și $\alpha_1 = 0$ sau $\alpha_1 = 1$. Anularea lui α_2 arată că x^2 are expresia $x^2 = \alpha_1^2 u_1 + 2\alpha_1 (\beta_3 u_3 + \ldots + \beta_{2k} u_{2k})$, iar condiția $x^2 = x$ conduce la încă $2k - 2$ ecuații și anume :

$$2\alpha_1 \beta_j = \beta_j, \quad (j = 3, 4, \ldots, 2k). \tag{17}$$

În ipoteza $\alpha_1 = 1$ urmează că singura soluție pentru (17) este dată de $\beta_j = 0$, iar dacă $\alpha_1 = 0$, condiția $x^2 = x$ conduce numai la elementul nul, ceea ce arată că singurii idempotenți ai algebrei (13) sînt 1 și 0, dovedind astfel

Teorema 4. *Pentru $n = 2k$ există algebre A_n cu structura* (1) *și un asemenea caz este exemplificat prin produsul direct $K \times L_k$.*

5. Observăm că singurele algebre A_{2k} polinomiale, corespund lui $k = 2$. Mai mult, există un singur tip de algebră A_4 (evident, pînă la izomorfism) și acesta este polinomial, generat de polinomul $(\lambda^2 + 1)^2$, adică tocmai algebra lui Sobrero [2]. Într-adevăr, condiția necesară și suficientă ca o algebră cu structura (1) să fie polinomială, este ca ordinul algebrei cu diviziune pe care o conține să fie egal cu diferența dintre ordinul radicalului și cel al pătratului acestuia. Cum ordin $K = 2$ și ordin N_2 — ordin $N_2^2 = 2$, afirmația este dovedită. Pe de altă parte, singurele algebre polinomiale cu structura (1) de ordin 4, sînt generate de polinoame de forma $(\lambda^2 + a^2)^2$ și sînt toate izomorfe, [2], putînd deci fi reprezentate prin aceea generată de polinomul $(\lambda^2 + 1)^2$, adică prin algebra lui Sobrero.

Faptul că toate algebrele A_{2k} avînd $k > 2$ nu sînt polinomiale, rezultă imediat, observînd că ordin N_{k-2} — ordin $N_{k-2}^2 > 2 =$ ordin K. Am dovedit astfel

Teorema 5. *Singurele algebre A_n cu structura* (1) *care sînt polinomiale, corespund cazului $n = 4$. Aceste algebre sînt izomorfe și se pot reprezenta prin algebra lui Sobrero.*

Se vede imediat că, orice algebră A_4 satisface condiția necesară și suficientă de polinomialitate, ceea ce atrage, pentru teorema 5, următorul

Corolar. Există un singur tip (pînă la izomorfism) de algebră A_4 și acesta este dat de algebra lui Sobrero.

6. Observăm în încheiere următoarele:

1) Algebra de ordin 5 cu structura (1) semnalată în [3] ca posibilă, nu există.

2) Se pune problema determinării pînă la izomorfism,a tipurilor de algebre A_{2k} cu $k > 2$, pentru respectiv fiecare valoare a lui k superioară lui doi.

Autorul mulțumește profesorului Al. C. Climescu pentru discuțiile purtate asupra celor prezentate aici.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici II

BIBLIOGRAFIE

1. Deuhring M., *Algebren.* Berlin, 1935, S. 23.
2. Enescu I., *Asupra algebrelor polinomiale* (II). Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 17—20.
3. — *Les algèbres d'ordre cinq, associatives, commutatives et à unité principale, à scalaires réels* (I). Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*, pp. 13—22.
4. Гантмахер Р. Ф., *Теория матриц.* Изд., „Наука", М., 1966.

SUR UNE CLASSE D'ALGÈBRES INDÉCOMPOSABLES D'ORDRE FINI, À SCALAIRES RÉELS

(Resumé)

On démontre qu'une algèbre A_n ayant la structure (1), où K est le corps complexe et N_{n-2} l'algèbre nulle d'ordre $n-2$, existe si, et seulement si, $n = 2k$ et, dans ce cas, le produit direct (13) entre K et $L_k = R + N_{k-1}$ en constitue un exemple.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. D. 513.821

UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ISSU DU PROBLÈME DE LA CORRESPONDANCE PAR PARALLÉLISME EN E_4

PAR

ȘTEFANIA RUSCIOR

1. Dans plusierus travaux antérieurs [1] ... [3], nous avons introduit une classification des variétés réglées suivant les points singuliers contenus sur les génératrices génériques et suivant la nature de la section impropre. Les divers types de variétés sont caractérisés par les indices a et d et nous les symbolisons par V_a^d (a représente le nombre des points singuliers et d la dimension de la section impropre).

2. Dans la présente Note nous avons considéré deux variétés réglées V et V^* du type V_0^2 dans E_4. En ce cas les génératrices génériques des variétés ne contiennent pas de points singuliers et les sections impropres sont des surfaces coniques du deuxième degré, non dégénérées [1].

Nous nous proposons de trouver les éléments de la variété réglée V^* mise en correspondance par hyperplans tangents parallèles avec la variété V, correspondance qui conserve les génératrices.

Représentons la variété connue V par l'équation

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u, v) + w\bar{\alpha}(u, v), \tag{1}$$

où $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u, v)$ représente la surface directrice S de V, et $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(u, v)$, le verseur de la génératrice g.

Pour trouver la section impropre de V, considérons un système locale $\bar{x} = x_1\bar{\rho}_u + x_2\bar{\alpha}_u + x_3\bar{\alpha}_v + x_4\bar{\alpha}_3$ avec $\bar{\rho}_u(1, 0, 0, 0)$, $\bar{\alpha}_u(0, 1, 0, 0)$, $\bar{\alpha}_v(0, 0, 1, 0)$, $\bar{\alpha}(0, 0, 0, 1)$ et $\bar{\rho}_v(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

La section impropre Σ de V est située dans l'hyperplan impropre $x_4 = 0$ et elle a pour équation

$$(2) \qquad a_3^2 x_1^2 + x_2^2 + a_1^2 x_3^2 + 2a_3 x_1 x_2 - 2(a_1 a_3 + 2a_2) x_1 x_3 + 2a_1 x_2 x_3 = 0.$$

La variété V^* se trouve en correspondance avec V si sa section impropre Σ^* coïncide avec Σ, donc si les génératrices correspondantes g^* et g sont parallèles. L'équation de V^* est alors

$$(3) \qquad \bar{r}^* = \bar{\rho}^*(u, v) + w^* \bar{\alpha}(u, v),$$

où $\bar{\rho}^* = \bar{\rho}^*(u, v)$ est une surface directrice S^* de V^*. Cette surface peut être considérée comme déterminée par les points d'intersection de g^* avec les hyperplans tangents à V dans les points où g rencontre S. L'équation de S^* sera alors donnée par l'expression :

$$(4) \qquad \bar{\rho}^* = \bar{\rho}(u, v) + A(u, v)\, \bar{\rho}_u + B(u, v)\, \bar{\rho}_v + C(u, v)\, \bar{\alpha}_v.$$

Les fonctions arbitraires A, B, C seront déterminées par la correspondance introduite.

Pour trouver l'équation de Σ^* dans le système locale choisi, on considère les vecteurs $\bar{\rho}_u^*(p_i)$, $\bar{\rho}_v^*(q_i)$, $\bar{\rho}_{uu}(r_i)$, $\bar{\rho}_{uv}(s_i)$, $\bar{\alpha}_{uu}(l_i)$, $\bar{\alpha}_{uv}(m_i)$, $\bar{\alpha}_{vv}(n_i)$, avec $i = 1, 2, 3, 4$. L'équation de Σ^*, située dans l'hyperplan impropre, est

$$(5) \qquad \begin{aligned} &x_1^2 [(p_2 - q_3)^2 + 4p_3 q_2] + x_2^2 p_1^2 + q_1^2 x_3^2 + 2p_1 q_1 x_2 x_3 - \\ &- 2(p_1 p_2 - p_1 q_3 + 2p_3 q_1) x_1 x_2 - 2(p_1 q_3 - q_1 p_2 + 2p_1 q_2) x_1 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Les deux surfaces Σ et Σ^* coïncident lorsque les coefficients des équations (2) et (5) sont proportionnels. En ce cas on a

$$(6) \qquad \begin{cases} (p_2 - q_3)^2 + 4p_3 q_2 = p_1^2 a_3^2, \quad q_1 = p_1 a_1, \\ p_1 p_2 - p_1 q_3 + 2p_3 q_1 = -p_1^2 q_3, \quad q_1 q_3 - q_1 p_2 + 2q_2 p_1 = p_1^2 (a_1 a_3 + 2a_2). \end{cases}$$

En éleminant q_i entre ces relations, on trouve $2p_1 p_3 (a_2 + 2a_1 a_3) = 0$.

Le facteur $a_2 + 2a_1 a_3 \neq 0$ puisque Σ est un cône non dégénéré et $p_1 \neq 0$ puisque Σ est de deuxième degré, donc $p_3 = 0$. Il en résulte $p_1 = f(u)$, avec $f(u)$ arbitraire.

En introduisant dans les système (6) la condition $p_1 = f(u)$ et les valeurs p_i et q_i déduites de (4), on trouve le système d'équations différentielles qui détermine les fonctions A, B, C :

$$(7) \qquad \begin{cases} A_v + As_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0, \\ A_u + Ar_1 + Bl_1 + Cm_1 = f(u) - 1, \\ B_v + Bm_2 + Cn_2 = C_v + As_3 + Bm_3 + Cn_3, \\ C_u + Ar_3 + Bl_3 + Cm_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système nous conduit à trois conditions d'intégrabilité pour les fonctions A, B, C, soit

$$A_{uv} = A_{vu}, \quad B_{uv} = B_{vu}, \quad C_{uv} = C_{vu}. \tag{8}$$

La première relation est identiquement vérifiée, tandis que les autres deux sont vérifiées seulement dans le cas où l'on a :

$$a_2 f'' - (a_4 - a_{2u}) f' = 0. \tag{9}$$

Pour cette équation nous avons trouvé les solutions suivantes :

$$f(u) = \text{const.}, \tag{10}$$

$$f(u) = e^k \left[e^{\int F(u)\,du}\,du + k_1 \right]. \tag{11}$$

On obtient la solution (11) dans le cas où l'on a $(a_4 - a_2)/a_2 = F(u)$, avec $F(u)$ arbitraire.

3. Pour les solutions (10) et (11) le système différentiel (7) est complètement intégrable. Puisque les équations (7) sont des équations à différentielles totales, les fonctions A, B et C seront déterminées à une constante arbitraire près.

En conséquence les éléments de la variété V^* exprimés par (3) peuvent être connus, puisque la surface directrice S^* est donnée par (4) et les génératrices correspondantes sont parallèles.

On est ainsi conduit au résultat suivant :

Les éléments de deux variétés réglées du type V_0^2 dans E_4 mis en correspondance par hyperplans tangents parallèles qui conservent les génératrices, satisfont à un système d'équations différentielles du premier ordre, complètement intégrable.

Si les variétés considérées appartiennent à un type différent de V_0^2, le problème analogue conduit à des systèmes différentiels du même ordre, mais pas complètement intégrables.

Reçue le 25 V 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Ruscior Șt., *Corespondențe prin hiperplane tangente paralele între două hipersuprafețe riglate din S_4 afin.* An. șt. Univ. „Al. I. Cuza" Iași, 1962, **VIII**, pp. 369–394.
2. — *Sur une classification affine des hypersurfaces réglées dans un E_4.* Bull. de l'Acad. Royale de Belgique, Cl. sci., série *5*, 1964, **50**, pp. 1–8.
3. — *Sur le problème de la correspondance par parallélisme entre les variétés réglées dans S_n.* Ann. di Matem. pura ed appl., 1968, **LXXX**, pp. 153–166.

UN SISTEM DE ECUAȚII DIFERENȚIALE OBȚINUT DIN PROBLEMA CORESPONDENȚEI PRIN PARALELISM ÎN E_4

(Rezumat)

În această notă se stabilește că elementele a două varietăți riglate de tip V_0^2 din E_4 puse în corespondență prin hiperplane tangente paralele care păstrează generatoarele, satisfac un sistem de ecuații diferențiale de ordinul I, complet integrabil.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 513.814

OBSERVAŢII ASUPRA TRANSPORTULUI PRIN PARALELISM ÎN SPAŢII L_n

DE

VIOREL MURGESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Timişoara, din 10—12 mai 1968

1. Introducere

În această Notă se fac unele observaţii cu privire la existenţa unor varietăţi din L_n ce au propietatea că de-a lungul oricărui drum ce le aparţine, transportul prin paralelism al direcţiilor, ori al vectorilor, rămîne acelaşi pentru anumite clase de conexiuni care nu sînt numaidecît coparalele, respectiv, liniile de transport nu sînt totdeauna linii autoparalele din L_n.

Cu toate că aceste observaţii au apărut în cadrul unui studiu întreprins de autor cu privire la geometria spaţiilor L_n cu torsiune recurentă, pentru care nu s-a găsit pînă în prezent o caracterizare geometrică, credem că ele pot prezenta interes pentru studiul paralelismului în spaţiile cu conexiune afină cu torsiune, ca şi în anumite studii de fizică relativistă [1].

2. Asupra paralelismului vectorilor în spaţii L_n şi spaţiile A_n cu conexiune simetrică asociată[1)]

Fie L_n un spaţiu cu conexiune liniară, cu coeficienţii $L_i{}^j{}_k$, iar A_n spaţiul cu conexiunea simetrică asociată, cucoeficienţii $\Gamma_i{}^j{}_k = L_{(i}{}^j{}_{k)}$, pe care-l numim pe scurt „spaţiul A_n corespunzător lui L_n". Notînd cu $\Omega_i{}^j{}_k$ componentele tensorului de torsiune din L_n, avem

$$L_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + \Omega_i{}^j{}_k . \tag{2.1}$$

[1)] Indicii greci şi latini iau peste tot valori de la 1 la n, în afară de cazurile cu menţiune specială.

Considerînd acum un cîmp vectorial contravariant λ^α și o curbă arbitrară de ecuații $x^\beta = x^\beta(s)$, se știe că ecuațiile de paralelism ale vectorului λ^α de-a lungul acestei curbe, în raport cu conexiunea din A_n, au expresia

$$\frac{d\lambda^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^{i}\,\lambda^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \tag{2.2}$$

iar în raport cu conexiunea din L_n, în virtutea descompunerii (2.1), pot fi scrise sub forma

$$\frac{d\lambda^i}{ds} + \Gamma_\alpha{}^i{}_\beta\,\lambda^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} + \Omega_\alpha{}^i{}_\beta\,\lambda^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \tag{2.3}$$

Presupunînd că nu toate componentele $\Omega_i{}^j{}_k$ sînt identic nule, ne propunem în continuare să vedem în ce condiții transportul din L_n și din spațiul A_n corespunzător este același sau, mai precis, să vedem care sînt condițiile pe care trebuie să le satisfacă în primul rînd tensorul de torsiune $\Omega_i{}^j{}_k$ și apoi curba de transport ori vectorul λ^α, astfel încît cele două conexiuni, $L_i{}^j{}_k$ și $\Gamma_i{}^j{}_k$, să realizeze același transport. Această problemă apare naturală datorită faptului că liniile autoparalele din L_n sînt independente de torsiune și deci coincid cu cele din spațiul A_n corespunzător.

Notînd vectorul tangent la curba de transport cu $\mu^k = dx^k/ds$, ecuațiile (2.2) și (2.3) impun condițiile

$$\Omega_\alpha{}^i{}_\beta\,\lambda^\alpha\,\mu^\beta = 0, \tag{2.4}$$

care sînt necesare și suficiente pentru realizarea de către ambele conexiuni a aceluiași transport, în ipoteza evidentă că sînt îndeplinite condițiile de existență a soluțiilor pentru sistemul (2.2).

Deci, rezolvarea problemei se reduce la discuția și, dacă este posibil, la determinarea soluțiilor sistemului (2.4), în care scop vom deosebi mai multe cazuri:

a) Dacă vectorul λ^α este presupus tangent la linia de transport, adică $\lambda^\alpha = k\mu^\alpha$, atunci sistemul (2.4) se reduce la sistemul

$$\Omega_\alpha{}^i{}_\beta\,\mu^\alpha\,\mu^\beta = 0, \tag{2.5}$$

în care partea stîngă provine din forme biliniare antisimetrice și în consecință, el este satisfăcut identic atît cu privire la $\Omega_\alpha{}^i{}_\beta$, cît și cu privire la curba de transport.

Înlocuind acum în (2.2) pe λ^i prin $k\mu^i = k(dx^i/ds)$, obținem sistemul

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_\alpha{}^i{}_\beta \frac{dx^\alpha}{ds}\,\frac{dx^\beta}{dx} = 0,$$

care ne arată că în cazul considerat, vectorul λ^α este transportat prin autoparalelism în L_n, fapt bine cunoscut în teoria spațiilor cu conexiune afină.

b) Să presupunem acum că vectorii λ^k și μ^k sînt liniar independenți, iar sistemul (2.5) este satisfăcut mod μ^k, adică independent de curba de transport. Acestea echivalează cu condiția ca sistemul algebric liniar în cele n necunoscute λ^k,

$$\Omega_{\alpha}{}^{i}{}_{\beta}\,\lambda^{\alpha} = 0 \tag{2.6}$$

să admită soluții nebanale.

Considerînd matricea $||\Omega_{\alpha}{}^{i}{}_{\beta}||_{(n^2,n)}$, cu n^2 linii ce se obțin pentru $i, \beta = 1, 2, \ldots, n$ și n coloane date de $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, notînd

$$p = \operatorname{rang} ||\Omega_{\alpha}{}^{i}{}_{\beta}||_{(n^2,n)}, \tag{2.7}$$

rezultă că trebuie să avem $p \leqslant n - 1$, adică $n^2 - p$ ecuații din (2.6) să fie liniar dependente de celelalte p ecuații, considerate ca ecuații principale. Aceasta impune un număr corespunzător de condiții pentru componentele tensorului de torsiune, al căror număr se reduce cu n unități în cazul în care dimensiunea spațiului este impară, căci în acest caz, $\det ||\Omega_{\alpha}{}^{i}{}_{\beta}|| = 0$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, β fiind indice de linii iar α indice de coloane, deoarece matricele $||\Omega_{\alpha}{}^{i}{}_{\beta}||$ sînt antisimetrice.

Lăsînd la o parte cazul $n = 2$, în care sistemul (2.6) devine

$$\Omega_1{}^1{}_2\lambda^1 = 0, \quad \Omega_1{}^2{}_2\lambda^1 = 0, \quad \Omega_2{}^1{}_2\lambda^2 = 0, \quad \Omega_2{}^2{}_1\lambda^2 = 0$$

și deci nu admite decît soluția banală, considerațiile precedente conduc la următorul rezultat:

Pentru orice L_n, $(n \geqslant 3)$, *pentru care rangul* p, *definit de* (2.7), *satisface condiției* $p \leqslant n - 1$, *există* $n - p$ *cîmpuri de vectori liniari independenți* $\lambda^i_{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n-p)$, *ce pot fi transportați prin paralelism ca și în spațiul* A_n *corespunzător, de-a lungul oricărui drum pentru care transportul definit de* (2.2) *este posibil.*

c) Să presupunem din nou că vectorii λ^k și μ^k sînt liniar independenți, iar sistemul (2.4) este satisfăcut mod λ^k, ceea ce înseamnă că vectorii λ^k (deocamdată arbitrari) pot fi transportați prin paralelism în direcțiile definite de curbele $x^i = x^i(s)$, care satisfac sistemul Pfaff

$$\omega^i_{\alpha} \equiv \Omega_{\alpha}{}^{i}{}_{\beta}\,dx^{\beta} = 0, \tag{2.8}$$

compus din n^2 ecuații în dx^k.

Ca și în cazul precedent, pentru ca sistemul să nu aibă numai soluția banală $dx^k = 0$, este necesar ca rangul p al matricei sistemului (2.8) să fie inferior lui n. Cu această ipoteză, considerînd din motive similare cazului precedent $n \geqslant 3$, se observă de astă dată că se ivesc mai multe posibilități: sau $p = n - 1$ și atunci sistemul (2.8) admite ca soluții o familie de curbe integrale depinzînd de $n - 1$ parametri, sau $p < n - 1$ și în acest caz curbele integrale ale sistemului depind de $n - p - 1$ funcții arbitrare de cîte o variabilă. În fine, rămîne de considerat cazul în care sistemul (2.8) este complet integrabil, adică admite ca soluții o familie p-parametrică de varie-

tăți integrale cu $n - p$ dimensiuni. Ori, conform teoremei lui Frobenius, condiția necesară și suficientă ca să se întîmple acest lucru este ca derivatele exterioare $\omega_k'^i$ ale tuturor pfaffienilor (2.8) să fie nule în virtutea ecuațiilor sistemului, adică să avem

$$(2.9) \qquad \omega_\alpha'^i(x, dx, \delta x) \equiv \left(\frac{\partial \Omega_{\alpha\mu}^{\ \ i}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Omega_{\alpha\lambda}^{\ \ i}}{\partial x^\mu}\right)[dx^\lambda, dx^\mu] = 0, \quad (\text{mod } \omega_\alpha^i).$$

Se constată imediat că există cel puțin două clase de spații pentru care sînt satisfăcute condițiile (2.9):

1. Spațiile L_n pentru care componentele $\Omega_{i\ k}^{\ j}$ ale tensorului de torsiune sînt constante, nu toate nule, ceea ce este evident.

2. *Spațiile L_n cu torsiune recurentă* [2]), pentru care avem prin definiție

$$(2.10) \qquad \Omega_{i\ \lambda|\mu}^{\ j} = k_\mu \Omega_{i\ \lambda}^{\ j},$$

relații în care derivarea covariantă este considerată cu privire la conexiunea cu coeficienții L_{ik}^j.

În adevăr, scriind desfășurat partea stîngă a relațiilor (2.10) și scăzînd din ea membru cu membru relația obținută prin permutarea indicilor λ și μ, se obține

$$\frac{\partial \Omega_{\alpha\ \mu}^{\ \ i}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Omega_{\alpha\ \lambda}^{\ \ i}}{\partial x^\mu} = k_\lambda \Omega_{\alpha\ \mu}^{\ \ i} - k_\mu \Omega_{\alpha\ \lambda}^{\ \ i} + L_{h\ \mu}^{\ \ i} \Omega_{\alpha\ \lambda}^{\ \ h} - L_{h\ \lambda}^{\ \ i} \Omega_{\alpha\ \mu}^{\ \ h} +$$
$$+ L_{\alpha\ \lambda}^{\ \ h} \Omega_{h\ \mu}^{\ \ i} - L_{\alpha\ \mu}^{\ \ h} \Omega_{h\ \lambda}^{\ \ i} + 2\Omega_{\mu\ \lambda}^{\ \ h} \Omega_{\alpha\ h}^{\ \ i}.$$

Înlocuind aceste expresii în (2.9), rezultă

$$\omega_\alpha'^i = k_\lambda[dx^\lambda, \omega_\alpha^i(\delta)] - k_\mu[\omega_\alpha^i(d), \delta x^\mu] + L_{h\ \mu}^{\ \ i}[\omega_\alpha^h(d), \delta x^\mu] - L_{h\ \lambda}^{\ \ i}[dx^\lambda, \omega_\alpha^h(\delta)] +$$
$$+ L_{\alpha\ \lambda}^{\ \ h}[dx^\lambda, \omega_h^i(\delta)] - L_{\alpha\ \mu}^{\ \ h}[\omega_h^i(d), \delta x^\mu] + 2\Omega_{\alpha\lambda}^{\ \ i}[\omega_\mu^h(\delta), dx^\mu] = 0, \quad (\text{mod } \omega_\alpha^i),$$

și deci, în condițiile (2.10), sistemul (2.8) este complet integrabil. Prin urmare, putem formula următorul rezultat:

Fie L_n, $(n \geqslant 3)$, un spațiu cu conexiune afină pentru care tensorul de torsiune este constant, ori recurent. Atunci, dacă rangul p, definit de (2.7), *satisface condiția $p \leqslant n - 1$, există o familie parametrică de varietăți $n - p$ dimensionale, soluții ale sistemului* (2.9), *cu proprietatea că orice vector λ^α ce poate fi transportat prin paralelism, în raport cu conexiunea din spațiul A_n corespunzător, de-a lungul unei curbe oarecare aparținînd acestei familii, suferă același transport și în raport cu conexiunea din L_n.*

d) Se poate considera și cazul general, în care λ^k și μ^k fiind presupuși independenți, se pune problema de a vedea care sînt perechile de vectori (λ^k, μ^k) pentru care paralelismul din L_n coincide cu cel din spațiul A_n

[2]) Aceste spații au fost parțial studiate de O. Mayer în 1957.

corespunzător. În acest scop, se va observa că dacă se consideră bivectorul $w^{ik} = \lambda^i \mu^k - \lambda^k \mu^i$, sistemul algebric (2.8) poate fi scris sub forma

$$\Omega_\alpha{}^i{}_\beta \, w^{\alpha\beta} = 0, \qquad (\alpha < \beta), \tag{2.11}$$

în care avem n ecuații cu $n(n-1)/2$ necunoscute $w^{\alpha\beta}$. Rezultă de aici că numărul $q = n(n-1)/2 - p$ de soluții fundamentale ale acestui sistem depinde atît de rangul p al matricei

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1{}^1{}_2 & \Omega_1{}^1{}_3 \ldots \Omega_1{}^1{}_n \ldots \Omega_{n-1}{}^1{}_n \\ \Omega_1{}^2{}_2 & \Omega_1{}^2{}_3 \ldots \Omega_1{}^2{}_n \ldots \Omega_{n-1}{}^2{}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_1{}^n{}_2 & \Omega_1{}^n{}_3 \ldots \Omega_1{}^n{}_n \ldots \Omega_{n-1}{}^n{}_n \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

raportat la numărul ecuațiilor, cît și — implicit — de dimensiunea spațiului, adică trebuie să avem $n(n-3)/2 \leqslant q \leqslant (n+1)(n-2)/2$, după cum reiese din minorarea, respectiv, majorarea lui p, între limitele permise. Rezultă de aici că trebuie exlus cazul $n = 2$. Apoi, dacă $n = 3$, deosebim două posibilități: sau $p = 2$ și $q = 1$, sau $p = 1$ și $q = 2$, cazul $p = 3$ fiind exclus. Dacă $n \geqslant 4$, atunci pentru $p = n$ sistemul (2.11) admite o mulțime de soluții depinzînd de un număr de $n(n-3)/2$ parametri, iar pentru $p < n$, mulțimea soluțiilor depinde de $n(n-1)/2 - p$ parametri. Deci se poate face următoarea observație:

În orice L_n, $(n \geqslant 3)$ *pentru care* $p = \text{rang}\ \Omega \leqslant n$, *orice vector* λ^i *poate fi transportat prin paralelism ca și în spațiul* A_n *corespunzător, după orice direcție* μ^k *pentru care bivectorul* $w^{ik} = \lambda^i \mu^k - \lambda^k \mu^i$ *este o soluție oarecare a sistemului* (2.11).

3. Observații asupra paralelismului direcțiilor

Dacă considerăm acum două conexiuni cu coeficienții $L_i{}^j{}_k$ și ${}^*L_i{}^j{}_k$ ș ecuațiile de transport pentru aceeași direcție λ^i, relative la ambele conexi uni

$$\lambda^h \left(\frac{d\lambda^i}{dt} + L_\alpha{}^i{}_\beta \lambda^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \right) - \lambda^i \left(\frac{d\lambda^h}{dt} + L_\alpha{}^h{}_\beta \lambda^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \right) = 0, \tag{3.1}$$

și

$$\lambda^h \left(\frac{d\lambda^i}{dt} + {}^*L_\alpha{}^i{}_\beta \lambda^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \right) - \lambda^i \left(\frac{d\lambda^h}{dt} + {}^*L_\alpha{}^h{}_\beta \lambda^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \right) = 0, \tag{3.2}$$

prin scăderea acestora membru cu membru, se obțin ecuațiile

$$(\delta^h_\alpha \tau_\beta{}^i{}_\gamma - \delta^i_\alpha \tau_\beta{}^h{}_\gamma) \lambda^\alpha \lambda^\beta \frac{dx^\gamma}{dt} = 0, \tag{3.3}$$

unde

(3.4) $$\tau_j{}^i{}_k = {}^*L_j{}^i{}_k - L_j{}^i{}_k$$

sînt componentele tensorului de deformare al celor două conexiuni.

Este cunoscut faptul că, dacă se pune problema de a vedea care sînt condițiile pentru ca direcțiile paralele de-a lungul fiecărei curbe din spațiu să fie aceleași pentru ambele conexiuni, atunci se găsește că cele două conexiuni trebuie să fie coparalele, adică să aibă loc relațiile ${}^*L_i{}^j{}_k = L_i{}^j{}_k + 2\delta^j_i\psi_k$, unde ψ_k este un vector covariant arbitrar. Dar, ca și în cazul paralelismului vectorilor, și aici se ivește posibilitatea de a considera și alte soluții ale sistemului (3.3), prin care se semnalează existența unor varietăți de coparalelism pentru direcții privilegiate, fără însă ca cele două conexiuni să fie numaidecît coparalele. Notînd

(3.5) $$W^{rs}_{ijk} = \delta^r_i\,\tau^s_{jk} - \delta^s_i\,\tau^r_{jk}$$

și observînd că sistemul (3.3) ia forma

(3.3′) $$W^{hi}_{\alpha\beta\gamma}\,\lambda^\alpha\lambda^\beta\frac{dx^\gamma}{dt} = 0,$$

distingem următoarele cazuri cu privire la existența soluțiilor acestui sistem:

a) Să presupunem că sistemul (3.3′) este satisfăcătut mod λ^k. În acest caz trebuie ca drumul de transport să fie o soluție a sistemului Pfaff, dedus din (3.3′),

(3.6) $$\omega^{hi}_{jk} \equiv W^{hi}_{(jk)\alpha}\,dx^\alpha = 0,$$

compus din $n^2(n^2-1)/4$ ecuații în diferențialele dx^α, căci $W^{hi}_{jkl} = -W^{ih}_{(jk)l}$ și $W^{hi}_{(jk)l} = W^{hi}_{(kj)l}$. Dacă notăm cu

(3.7) $$W = \| W^{hi}_{jk},\ W^{hi}_{jk2},\ \ldots,\ W^{hi}_{jkn} \|$$

matricea coeficienților necunoscutelor, în care h, i, j și k sînt indici de linie, rezultă că pentru ca sistemul (3.6) să admită soluții nebanale, este necesar ca $0 \leqslant \operatorname{rang} W \leqslant n-1$, ceea ce impune, în mod evident, restricții asupra uneia dintre cele două conexiuni.

În particular, dacă $\operatorname{rang} W = 0$, se găsește tocmai rezultatul amintit la început, în care conexiunile sînt coparalele. Dacă $\operatorname{rang} W = n-1$, atunci sistemul (3.6) admite drept soluții o familie de curbe integrale depinzînd de $n-1$ constante arbitrare. Dacă însă $0 < \operatorname{rang} W < n-1$, atunci curbele integrale depind de $n-p-1$ funcții arbitrare de cîte o variabilă, unde $p = \operatorname{rang} W$. În sfîrșit, dacă sistemul (3.6) este complet integrabil, atunci el admite o familie de varietăți integrale cu $n-p$ dimensiuni, depinzînd de p parametri.

Deci, se poate trage următoarea concluzie:

Dacă ${}^*L_i{}^j{}_k$ *și* $L_i{}^j{}_k$ *sînt două conexiuni cu torsiune, pentru care* $p = \operatorname{rang} W \leqslant n - 1$, *iar sistemul* (3.6) *este complet integrabil, atunci există o familie de varietăți* $n - p$ *dimensionale depinzînd de* p *parametri, astfel încît orice direcție* λ^k *ce este transportată prin paralelism în raport cu una dintre cele două conexiuni, de-a lungul unui drum oarecare aparținînd uneia dintre aceste varietăți, suferă același transport și în raport cu cea de-a doua conexiune.*

b) Să considerăm acum că sistemul (3.3′) este satisfăcut mod (dx^k/dt). Rezultă deci că oricare ar fi curba de transport, numai direcțiile care sînt soluții ale sistemului

$$W^{hi}_{\alpha\beta j}\,\lambda^\alpha\,\lambda^\beta = 0, \tag{3.8}$$

compus din $n^2(n-1)/2$ ecuații algebrice de gradul al doilea, pot fi transportate prin paralelism în raport cu una dintre conexiuni, dacă transportul în raport cu cealaltă conexiune are loc. Dar, este puțin probabil ca sistemul (3.8) să admită soluții fără a impune condiții suficient de restrictive coeficienților celor două conexiuni, deoarece numărul ecuațiilor este mare în raport cu numărul necunoscutelor.

c) Dacă se fixează atît curba cît și direcția de transport ce verifică sistemul (3.1), sistemul (3.3′) devine un sistem liniar în necunoscutele $\tau_i{}^j{}_k$, a cărui rezolvare dă toate conexiunile cu coeficienții ${}^*L_i{}^j{}_k$ care realizează același transport ca și $L_i{}^j{}_k$.

Pentru $n = 4$, numărul maxim de ecuații este 60, avînd 64 necunoscute $\tau_i{}^j{}_k$; prin urmare, acest sistem interesant pentru fizica relativistă, poate fi considerat în general nedeterminat. Dacă însă, tot pentru $n = 4$, se consideră una dintre conexiuni ca fiind conexiunea simetrică asociată celeilalte, atunci $\tau_i{}^j{}_k = \Omega_i{}^j{}_k$ și în consecință sistemul (3.3′) devine de astă dată un sistem liniar de maximum 60 ecuații cu numai 24 necunoscute.

Cu prezentarea acestor ultime situații, problema determinării efective a tuturor conexiunilor cu torsiune, care realizează același transport al direcțiilor ca și conexiunea simetrică asociată, rămîne deschisă.

4. Observații

1. Problemele (din § 2) privind paralelismul vectorilor pot fi concepute într-o formă mai generală, prin considerarea în locul perechii de spații (L_n, A_n) a unei perechi de spații arbitrare, cu torsiune, $({}^*L_n, L_n)$, pentru care rolul fundamental îi revine tensorului de deformare $\tau_i{}^j{}_k$ al celor două conexiuni, care ia locul tensorului de torsiune.

2. Problemele semnalate pentru toate cazurile considerate în § 3, pot fi particularizate prin considerarea în locul perechii de spații $({}^*L_n, L_n)$ a perechii (L_n, A_n), ceea ce revine la înlocuirea în raționamente a tensorului de deformare prin cel de torsiune.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici II

BIBLIOGRAFIE

1. Pinl M., *Geodesic Coordinates and Rest Systems for General Linear Connections.* Duke Math. J., 1951, **18**, pp. 557–562.

OBSERVATIONS SUR LE TRANSPORT PAR PARALLÉLISME DANS LES ESPACES L_n

(Résumé)

En reconsidérant quelques observations de [1] concernant le parallélisme des vecteurs, dans cette Note on se propose de montrer la possibilité d'élargir l'étude du parallélisme dans les espaces L_n, non seulement pour les vecteurs mais encore pour les directions, en signalant l'existence de quelques familles de variétés, ou de champs de directions (vecteurs) privilégiées pour lesquelles deux connections distinctes effectuent le même transport parallèle.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 517.923

ON CONVERGENCE OF APPROXIMATING SOLUTIONS OF A CLASS OF LINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

DE

ETSUJIRO SHIMEMURA and HITOSHI SASAI

1. Introduction

Since optimal control problems for distributed parameter systems [1]) are intimately connected to optimal control problems described by partial differential equations and require a treatment in function spaces, there is a great difficulty to solve these problems directly. Consequently it is considered to be necessary to obtain approximating solutions by nummerical computation. In obtaining approximating solutions, the method of expanding in eigenfunctions [1], the finite difference method are widely used.

After one could have found an optimal control in approximating system, the question arises whether a sequence of these approximating optimal controls converges to an optimal control of the original system. A condition of convergence of a sequence of approximating solutions of initial value problems by the finite difference method in which a differential operator is replaced by a difference operator was given by H. F. Trotter [2], [3]. This theorem is concerned with a homogeneous system and does not give the condition of convergence of approximating optimal controls of distributed parameter system, but its result becomes very useful for our discussion as shown below.

In this paper the condition of a sequence of approximating solutions is given for time-optimal control problem and final value control problem in a class of linear system with distributed parameters.

To discuss the convergence of approximating solutions, it is first important to define a concept of metric. In the following, we consider the space to be a reflexive Banach space. Practically it would be convenient to consider the space to be a reflexive Banach space. Practically it would be convenient to consider the space to be $L^2(s)$, S being a region of Euclidean space with Lebesgue measure.

---

[1]) For a general approach concerned with optimal control problems for distributed parameter systems see D. Mangeron and M. N. Oğuztöreli paper [7] published in the same *Bulletin*.

2. Definitions and Basic Theorem

For convenience of the following, we introduce notations, definitions and basic theorem. Let X be a reflexive Banach space and X_n be a subspace of X. We consider linear mapping $P_n : X \to X_n$ which satisfy the following conditions:

$$P_n^2 = P_n, \quad \|P_n\| = 1, \quad \lim \|P_n f - f\| = 0 \quad \text{for every} \quad f \in X.$$

D e f i n i t i o n. The limit of a sequence of operators $\{A_n\}$, where A_n is an operator in X_n, is the operator in X whose domain consists of $f \in X$, for which $\{A_n P_n f\}$ converges, and whose value is $\lim A_n P_n f$.

Let $\{S_n(t)\}$ be a sequence of strongly continuous semi-group of operators on X_n and $\{A_n\}$ be the sequence of associated infinitesimal generators. Further, let $S(t)$ be a strongly continuous semi-group of operators on X. Then we have the following theorem, which is due to H. F. Trotter.

T h e o r e m (Trotter). *If the range of* $\lambda I - A$, *denoted by* $R(\lambda I - A)$, *is dense in* X *for some* $\lambda > K$ *and the following conditions are satisfied, where* M *and* K *are positive constant*:

(C) $\qquad A = \lim A_n$ and $D(A)$ is dense in X,

(S) $\qquad \|S_n(t)\| \leqslant M e^{Kt}$,

then a closed extension of A *is the infinitesimal generator of* $S(t)$ *and* $S(t) = \lim S_n(t)$.

In this theorem it is demonstrated that if condition (C) and (S) are satisfied, approximating solutions of approximating equations starting from given approximating initial states converge in the sense of norm to a solution of original homogeneous partial differential equation, which satisfies a given initial condition.

3. Statement of the Problem

Let consider a distributed parameter system which is described by

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = A x(t, s) + u(t, s), \tag{1}$$

where $x(t, s)$ is an element of X for each t, $0 \leqslant t \leqslant \infty$, A is an unbounded linear operator and $u(t, s)$ is an element of X for each t and bounded measurable in t. We donote $x(t, s)$ and $u(t, s)$ as $x(t)$ and $u(t)$, respectively. Here A is assumed to be an infinitesimal generator of strongly continuous semi-group $S(t)$. Then equation (1) becomes as follows

$$\dot{x}(t) = A x(t) + u(t). \tag{1'}$$

Along with the system (1'), we consider the following equation

$$\dot{x}_n(t) = A_n x_n(t) + u_n(t), \tag{2}$$

where $x_n(t)$ is an element of X_n for each t, $0 \leqslant t < \infty$, A_n is an infinitesimal generator of a strongly continuous semi-group $S_n(t)$ and $u_n(t)$ is an element of X_n for each t and bounded measurable in t.

(1') is the original system which we consider, and (2) is the approximating system given by the finite difference method and A_n is the difference operator from X_n into X_n.

As an example of mapping P_n the following one would be intuitive:

$$X = L_2(0, 1),\ x(S) \in X,\ s \in [0, 1],\ P_n x(s) = \sum_0^{n-1} \alpha_k C_k(s),$$

where

$$\alpha_k = n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} x(s)\mathrm{d}s, \quad C_k(s) = \begin{cases} 1; & \frac{k}{n} \leqslant S \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{n}, \\ 0; & \frac{k}{n} \geqslant S \text{ or } S \geqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

In this case X_n is the space of finitely valued functions.

The solution of (1') is formally written as

$$x(t) = S(t)x(0) + \int_0^t S(t - \sigma)u(\sigma)\mathrm{d}\sigma\,. \tag{3}$$

Since $u(t)$ is bounded and measurable, the integral on the right hand side of (3) exists in the sense of Bochner. We define (3) as the solution of (1'), for any bounded measurable function $u(t)$ and a given initial condition $x(0)$. To simplify, we can assume without losing generality $x(0) = 0$ in the sequel. Throughout the following discussion, we assume that conditions (C) and (S) are satisfied.

Now we shall define mappings $L(T)$ and $L_n(T)$ as follows:

$$L(T)u = \int_0^T S(T - \sigma)u(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \quad u(t) \in X \quad \text{for each } t, \tag{4}$$

$$L_n(T)u_n = \int_0^T S_n(T - \sigma)u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \quad u_n(t) \in X_n \text{ for each } t. \tag{5}$$

By Trotter's theorem, it is shown that $\lim ||S(t)x - S_n(t)P_n x|| = 0$ for any $x \in X$ and again by condition (S), we have for any $u \in X$

$$\text{Lim } ||L(T)u - L_n(T)u|| = 0.$$

Constraints C, C_n and sets U, U_n of admissible controls are defined respectively as follows:

$$C = \{x \in X : ||x|| \leqslant 1\}, \quad C_n = ||x_n \in X_n : ||x_n|| \leqslant 1,$$

$$U = \{\text{bounded measurable function } u(t) : u(t) \in C \text{ a.a. } t\},$$

$$U_n = \{\text{bounded measurable function } u_n(t) : u_n(t) \in C_n \text{ a.a. } t.$$

From the property of P_n we can see $P_n C = C_n$.

In this article we discuss on convergence of approximating solutions of problem [A] and [B], which are commonly encountered in optimal control problems.

Problem [A]: Final value problem.

(A 1): The original final value problem in system (1′) is to find the admissible control minimizing $||x(T) - y|| = ||L(T)u - y||$ for given $y \in X$ at a fixed time T, starting from a given initial state $x(0)$.

(A 2): The approximating final value problem in system (2) is to find the admissible control minimizing $||x_n(T) - P_n y|| = ||L_n(T)u_n - P_n y||$ for given $P_n y \in X_n$ at a fixed time T, starting from a given approximating intial state $P_n x(0)$, with $n \to \infty$.

Then our problem is reduced to the following, ,,Whether a sequence of approximating optimal controls of the problem (A 2) converges to an optimal control of the problem (A1)''.

Problem [B]: Time-optimal problem.

(B 1): The original time-optimal problem in system (1′) is to find the admissible control which transfers a system from a given initial state $x(0)$ to a given target state $x \in X$ in a minimum time.

(B 2): The approximating time-optimal problem is to find the admissible control which transfers a system from a given initial state $P_n x(0)$ to a given approximating target state $P_n x \in X_n$ in a minimum time.

Then our problem follows ,,Whether a sequence of these approximating time-optimal controls of the problem (B 2) converges to a time-optimal control of the problem (B1)''.

4. Condition of Convergence

Problem [A]: Final value problem.

Let $u^0(t)$ be the optimal control of the original final value problem and

$u_n^0(t)$ be the optimal control of the approximating final value problem at the n-th degree of approximation.

Now we make the assumption that the approximating optimal solutions $u_n^0(t)$ exist and condition (C), (S) and

$$\text{(C*)} \qquad \lim \| S_n^*(t)f' - S^*(t)f' \| = 0, \quad f' \in X'$$

are satisfied, where X' is a dual space of X and S^* and S_n^* are the adjont operators of S and S_n.

Moreover, we define the space $B_2[X, T]$ of strongly measurable functions $X(t)$ with range in X such that $\int_0^T \|x(t)\|^2 \, dt < \infty$, the set $B_2[C, T]$ of all $u(t)$ such that ess. sup $\|u(t)\| \leqslant 1$ and the set $B_2[C_n, T]$ of all $u_n(t)$ such that ess. sup $\|u_n(t)\| \leqslant 1$.

Lema A1. *Let the conditions* (C), (S) *and* (C*) *be satisfied. Then there exists a weakly convergent subsequence* $\{u_{nj}^0(t)\}$ *of* $\{u_n^0(t)\}$ *in* $B_2[X, T]$ *and its weak limit* $u(t)$ *belongs to* $B_2[C, T]$. *Moreover* $u(t)$ *is an optimal control of original final value problem.*

Proof. The first part of the lemma is easily shown from the fact that $u_n^0(t) \in B_2[C_n, T] \subseteq B_2[C, T]$, $B_2[X, T]$ is the reflexive Banach space, and the set $B_2[C, T]$ is bounded, closed ans convex in $B_2[X, T]$.

We shall show that $L_n(T)\, u_n^0$ converges weakly to $L(T)u$. In the following we rewrite $u_{nj}^0(t)$ as $u_n^0(t)$.

$$[L_n(T)u_n^0 - L(T)u, f'] = [L_n(T)u_n - L(T)u_n^0, \quad f'] +$$

$$+ L(T)u_n^0 - L(T)u, f'] = \left[\int_0^T (S_n(T-\sigma) - S(T-\sigma))u_n^0(\sigma)\,d\sigma, f'\right] +$$

$$+ \left[\int_0^T S(T-\sigma)(u_n(\sigma) - u(\sigma))\,d\sigma, f'\right] =$$

$$= \int_0^T [u_n^0(\sigma), (S_n^*(T-\sigma) - S^*(T-\sigma))f'] +$$

$$+ \int_0^T [u_n^0(\sigma) - u(\sigma), S^*(T-\sigma)f']\,d\sigma,$$

where $f' \in X'$ and $[x, f']$ denotes the value of the functional f' at the point $x \in X$.

The first term goes to zero as $n \to \infty$ by condition (C*) and the second term goes to zero as $n \to \infty$ since the integrand is bounded and converges to zero for a.a. σ.

Next we shall show that $u(t)$ is optimal. It is clear that the following inequality is satisfied for any $v(t) \in U$.

$$\| L_n(T)u^0 - P_n y \| \leqslant \| L_n(T)P_n v - P_n y \| .$$

By the resonance theorem [4] we see that

$$\| L(T)u - y \| \leqslant \liminf \| L_n(T)u_n^0 - P_n y \| \leqslant$$
$$\leqslant \liminf \| L_n(T)P_n v - P_n y \| = \| L(T)v - y \| .$$

Hence $u(t)$ is optimal

Theorem A 1. *Let the conditions* (C), (S), *and* (C*) *be satisfied. Suppose that* $P_n y \in \overline{L_n(T)U_n}$, $y \in \overline{L(T)U}$, $u^0(t)$ *is the unique optimal control of the original final value problem and* X *be a Hilbert space. Then,* $U_n^0(t)$ *converges to* $u^0(t)$ *strongly for a.a. t.*

Proof. Since $u^0(t)$ is unique, it followes that $u(t) = u^0(t)$ for a.a. t. by Lemma A 1. Since $u^0(t)$, $u_n^0(t)$ are optimal, we see that $\| u^0(t) \| = 1$ for a.a. t, $\| u_n^0(t) \| = 1$ for a.a. t.

If we define the norm $|||x|||$ of the space $B_2[X, T]$ such that $|||x|||^2 = \int_0^T \| x(t) \|^2 \, dt$, it follows that $|||u_n^0||| = |||u^0|||$. Since $B_2[X, T]$ is a Hilbert space, we see that $\{u_n^0(t)\}$ converges strongly to $u^0(t)$ in $B_2[X, T]$. Any subsequences of $\{u_n^0(t)\}$ include a subsequence converging weakly to $u^0(t)$, and therefore they include a subsequence converging strongly to $u^0(t)$. Consequently $\{u_n^0(t)\}$ converges strongly to $u^0(t)$ in $B_2[X, T]$. By the definition of the norm of $B_2[X, T]$, we see that $u_n^0(t)$ converges to $u^0(t)$ for a.a. t.

Problem [B]: *Time-optimal problem.*

Lemma B 1. *Let the conditions* (C), (S) *and* C*) *be satisfied. Further, if conditions* (L 1) *and* (L 2) *are satisfied,*

(L 1) *There exist some finite time* T_n *and a control* $u_n \in U_n$ *such that* $L_n(T_n)u_n = P_n x$ *for each* n,

(L 2) T_n *converges to* T,

then there exists $u(t) \in U$ *such that* $L(T)u = x$.

Proof. We consider the space $B_2[X, \infty]$ and the set $B_2[C, \infty]$. For $t \geqslant T_n$, we define $u_n(t) = 0$. Clearly $u_n(t) \in B_2[C_n, \infty] \subseteq B_2[C, \infty]$. Since $B_2[X, \infty]$ is a reflexive space and $B_2[C, \infty]$ is closed, convex and bounded in $B_2[X, \infty]$, we can find a subsequence $\{u_{nj}(t)\}$ which converges weakly to $u(t) \in B_2[C, \infty]$ (i.e. $u(t) \in U$).

Next we shall show that $L(T)u = x$. We can prove that $[P_{nj}x, f']$ converges to $[x, f']$ and $[L_{nj}(T_{nj})u_{nj}, f']$ converges to $[L(T)u, f']$, where $f' \in X$.

$$[L_{nj}(T_{nj})u_{nj} - L(T)u, f'] = [L_{nj}(T_{nj})u_{nj} - L(T)u_{nj}, f'] +$$

$$+ [L(T)u_{nj} - L(T)u, f'] = \int_T^{T_{nj}} [S_{nj}(T_{nj} - \sigma)u_{nj}(\sigma), f']d\sigma +$$

$$+ \int_0^T [S_{nj}(T_{nj} - \sigma)u_{nj}(\sigma) - S(T - \sigma)u_{nj}(\sigma), f']\, d\sigma +$$

$$+ \int_0^T [S(T - \sigma)u_{nj}(\sigma) - S(T - \sigma)u(\sigma), f']d\sigma =$$

$$= \int_T^{T_{nj}} [S_{nj}(T_{nj} - \sigma)u_{nj}(\sigma), f']\, d\sigma +$$

$$+ \int_0^T [u_{nj}(\sigma), S^*_{nj}(T_{nj} - \sigma)f' - S^*(T - \sigma)f']d\sigma +$$

$$+ \int_0^T [u_{nj}(\sigma) - u(\sigma), S^*(T - \sigma)f']d\sigma.$$

The first term goes to zero as $n \to \infty$ by condition (S) and the third term goes to zero since the integrand is bounded and converges to zero for a.a. σ. The second term goes to zero by condition (S), condition (C*) and continuity of $S^*(t)$ in t. Hence $L(T)\, u = x$.

Remark. In order to obtain the condition (C*), we again make use of the Trotter's theorem. Since condition (S) is allways satisfied for $S^*_n(t)$, it remains to check the validity of condition (C) for A^*_n.

L e m m a B 2. *Let $S(t)$ be a strongly continuous group of operators. If x is attainable at time T with $u(t) \in U$, then for sufficiently large n, there exists $u_n(t) \in U_n$, such that $L_n(T + \varepsilon(n))u_n = P_n x$, where $\varepsilon(n) \to 0$ as $n \to \infty$.*

P r o o f. By $L(T)u = x$, we have the following inequality

$$||L_n(T)P_n u - P_n x|| \leqslant ||L_n(T)P_n u - P_n L(T)u|| +$$

$$+ ||P_n L(T)u - P_n x|| \leqslant \varepsilon^2(n).$$

Thus we can set $P_n x = L_n(T) P_n u + \varepsilon^2(n) Z_n$, where $||Z_n|| = 1$. Since $S(t)$ is a group,

$$P_n(x) = \int_0^T S_n(T - \sigma) P_n u(\sigma)\, d\sigma +$$

$$+ \varepsilon(n) \int_0^{\varepsilon(n)} S_n(T + \varepsilon(n) - \sigma) S_n(\sigma - \varepsilon(n) - T) Z_n\, d\sigma =$$

$$= \int_{\varepsilon(n)}^{T+\varepsilon(n)} S_n(T + \varepsilon(n) - \sigma)\, P_n u(\sigma - \varepsilon(n))\, d\sigma +$$

$$+ \int_0^{\varepsilon(n)} S_n(T + \varepsilon(n) - \sigma) w_n(\sigma)\, d\sigma,$$

where $w_n(\sigma) = \varepsilon(n) S_n(\sigma - \varepsilon(n) - T) Z_n$. By condition (S), $w_n(\sigma) \in U_n$ for sufficiently large n.

Finally we may define a new admissible control $v_n(t)$ as follows:

$$v_n(t) = \begin{cases} w_n(t), & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(n), \\ u_n(t - \varepsilon(n)), & \varepsilon(n) \leqslant t \leqslant T + \varepsilon(n). \end{cases}$$

T h e o r e m B 1. *Let $S(t)$ be a strongly continuous group of operators, and let the conditions* (C), (S), (C*), *and the following two conditions be satisfied,*

(T 1) *T_n^0 is an optimal time and u_n^0 is an associated optimal control such that $L_n(T_n^0) u_n^0 = P_n x$,*

(T 2) *There exists $w(t) \in U$ such that $L(T)w = x$ at some finite time T.*

Then T_n^0 converges to an optimal time T^0 as $n \to \infty$.

P r o o f. By condition (T 2) and Lemma B 2, there exists a subsequnce $\{T_{nj}^0\}$ which converges to T'. Hence we see that an optimal time exists, by condition (C*) and Lemma B 1, i.e. there exists an admissible control $u \in U$ such that $L(T')u = x$.

If we denote an otimal time by T°, we have the following inequality by Lemma B 2 and the optimality of T_{nj}^0, $T_{nj}^0 \leqslant T^\circ + \varepsilon(n)$.

Since T_{nj} converges to T', we have $T' \leqslant T^\circ$ and hence $T' = T^\circ$ by the optimality of T^0.

Above proof is true for any convergent subsequence and hence T_n^0 converges to T^0.

Remark. In the case of Hilbert space, an optimal control sequence $\{u_n^0(t)\}$ converges to an optimal control for a.a. t, since the optimal control associated with the target x is unique [5], [6].

5. Conclusion

Theorema A 1 is true even if $S(t)$ is a semi-group of operators, but Lemma B 2 and hence Theorem B 1 is true only if $S(t)$ is a group of operators.

When $S(t)$ is a semi-group of operators, our theorems are also likely to be true, if we can choose more refined projection operators P_n and difference operators A_n.

Acknowledgment. The authors wish to thank Associate Prof. H. Ishigaki, the School of Education, Waseda University, for many helpful suggestions and discussions.

Received the 9 V 1969

Waseda University, Tokyo
and
Nagoya University, Nagoya, Japan

REFERENCES

1. Axelband E. I., *Function Space Methods for the Optimum Control of a Class of Distributed Parameter Control System.* J.A.C.C., 1965.
2. Trotter H. F., *Approximation of Semi-groups of Operators.* Pacific J. Math., 1958, **8**, pp. 887–919.
3. Lax P. D., *Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations.* Comm. Pure and Appl. Math., 1956, **9**, pp. 267–293.
4. Yoshida K., *Functional Analysis.* Springer Verlag, Berlin, 1965.
5. Friedman A., *Optimal Control in Banach Spaces.* J. Math. Anal. Appl., 1968, **19**, pp. 35–55.
6. Balakrislnan A. V., *Optimum Control Problems in Banach Spaces.* SIAM J. Control, 1968, **3**, pp. 109–127.
7. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., *Optimal Problems in Distributed Parameter Control Systems* (III). Bul. Inst. polit. Iași, 1968, **XIV (XVIII)**, *3–4*, pp. 63–70.

ASUPRA CONVERGENȚEI SOLUȚIILOR APROXIMATIVE ALE UNEI CLASE DE PROBLEME LINIARE DE CONTROL OPTIMAL PRIVITOARE LA SISTEME CU PARAMETRI DISTRIBUIȚI

(Rezumat)

Folosind metoda de aproximare prin înlocuirea operatorului diferențial cu acel de diferențe, autorii stabilesc o condiție de convergență a șirului de soluții aproximative pentru o clasă de probleme liniare de control privitoare la sisteme cu parametri distribuiți.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 531.36

STABILITY OF MULTIVARIABLE NONLINEAR SYSTEMS CONTAINING DISTRIBUTED ELEMENTS

BY

A. N. V. RAO

1. Introduction

The study of an autonomous control system with one nonlinear element leads to the integral equation

$$\sigma(t) = f(t) + \int_0^t k(t-u)\,\Phi\,(\sigma\,(u))\,du.$$

C o r d u n e a n u [2], using the frequency method of P o p o v [1], has investigated the asymptotic behaviour of the above equation, with Φ and σ as scalar functions. L u c a [3] has extended the study to the case when Φ and σ are vectors.

The purpose of the present paper is to investigate the absolute stability of some systems of equations that arise in the study of multiple feedback control systems containing distributed elements. The main results, given in Theorems 1, 2 and 3, extend the results of Corduneanu [4], Luca [3] and B l o d g e t t and K i n g [7].

2. System Equations and Reduction

Consider the following system of equations

$$(1)\qquad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + B\Phi\,(\sigma\,(t)), \\ \sigma(t) = f(t) + L\,\Phi\,(\sigma\,(t)) + \int_0^t C\,(t-s)\,x\,(s)\,ds, \end{cases}$$

where $x(t)$ is a n-vector; A — Constant $n \times n$ matrix; B — Constant $n \times m$ matrix; L — Constant $m \times m$ matrix; $C(t)$ — $m \times n$ matrix; $\sigma(t)$ — m - vector; $f(t)$ — m-vector and

$$\Phi(\sigma) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\sigma_1) \\ \Phi_2(\sigma_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_m(\sigma_m) \end{bmatrix}.$$

From (1_1), we get

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-u)} B\Phi(\sigma(u))\, du.$$

Substituting this in (1_2), we have

$$\sigma(t) = f(t) + L\Phi(\sigma(t)) + \int_0^t C(t-s)\, e^{As} x_0\, ds +$$

$$+ \int_0^t C(t-s) \int_0^s e^{A(s-u)} B\Phi(\sigma(u))\, du\, ds =$$

$$= \Psi(t) + \int_0^t C(t-s) \int_0^s e^{A(s-u)} B\Phi(\sigma(u))\, du\, ds + L\Phi(\sigma(t)),$$

where $\Psi(t) = f(t) + \int_0^t C(s)\, e^{A(t-s)} x_0\, ds.$

Noting that a convolution product commutes, we obtain

$$\int_0^t C(t-s) \int_0^s e^{A(s-u)} B\Phi(\sigma(u))\, du\, ds =$$

(2)

$$= \int_0^t C(s) \int_0^{t-s} e^{A(t-s-u)} B\Phi(\sigma(u))\, du\, ds =$$

$$= \int_0^t \int_0^{t-s} C(s)\, e^{A(t-s-u)}\, B\Phi(\sigma(u))\, du\, ds =$$

(2)

$$= \int_0^t \int_0^{t-u} C(s)\, e^{A(t-s-u)}\, B\Phi(\sigma(u))\, ds\, du.$$

Define

$$K(t) = \int_0^t C(s)\, e^{A(t-s)}\, B\, ds. \tag{3}$$

Then $\int_0^t K(t-u)\, \Phi(\sigma(u))\, du = \int_0^t \int_0^{t-u} C(s)\, e^{A(t-s-u)}\, B\, ds\, \Phi(\sigma(u))\, du$, which is the same as (2). Therefore the equation for $\sigma(t)$ can be written as

$$\sigma(t) = \Psi(t) + L\Phi(\sigma(t)) + \int_0^t K(t-u)\, \Phi(\sigma(u))\, du. \tag{4}$$

Suppose instead of equations (1_1) and (1_2), one now considers the following equations

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + B\Phi(\sigma(t)) + \int_0^t D(t-s)\, \Phi(\sigma(s))\, ds, \\ \sigma(t) = f(t) + L\Phi(\sigma(t)) + \int_0^t C(t-s)\, x(s)\, ds. \end{cases} \tag{5}$$

These too, in a similar way, can be reduced to the integral equation (4) by defining

$$\begin{cases} \Psi(t) = f(t) + \int_0^t C(s)\, e^{A(t-s)}\, x_0\, ds, \\ K(t) = \int_0^t C(s)\, K_1(t-s)\, ds, \end{cases} \tag{6}$$

where

$$K_1(t) = \int_0^t e^{As} D(t-s)\,ds + e^{At}B. \tag{7}$$

Using a method similar to Lucas', it can be shown [8] the

T h e o r e m 1*. *Every solution,* $\sigma(t)$ *of* (4), *tends to zero as* $t \to \infty$ *under the following conditions*:

(A) $\Psi(t)$, $\Psi'(t) \in L_1(0, \infty)$;

(B) $K(t)$, $K'(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$;

(C) (a) *The matrix* $(L + L^T)$ *is negative semi definite* (L^T *is the transpose of the matrix* L);

(b) $\Phi(\sigma)$ *is bounded and differentiable for* $\sigma \in R^m$ *and satisfies the condition* $0 < \sigma_i \Phi_i(\sigma_i) < p_{ii}\sigma_i^2$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $(\sigma_1 \neq 0)$, *where* $p_{ii} > 0$ *for* $i = 1, 2, \ldots m$ *and* $L\, d\Phi(\sigma)/d\sigma \neq E$;

(D) *Let* $\widetilde{K}(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} K(t)\,dt$. *Then* $\exists$ *a constant* $m \times m$ *diagonal matrix* Q, *with nonnegative elements such that* $\mathcal{R}e\{(E + i\omega Q)\widetilde{K}(i\omega)\} - p^{-1} - L \leqslant 0$, *where* E *is the unit matrix and*

$$p = \begin{bmatrix} p_{11} & & 0 \\ & p_{22} & \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{mm} \end{bmatrix}.$$

3. Main Results

We now prove the following

T h e o r e m 1. *Suppose the system of equations* (1_1) *and* (1_2) *satisfies the following conditions*:

(i) *The matrix* A *is stable*;

(ii) $f(t)$ *is defined for* $t \geqslant 0$ *and* $f(t)$, $f'(t) \in L_1(0, \infty)$;

(iii) *The matrix* $C(t)$ *is defined for* $t \geqslant 0$ *and* $C(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$;

(iv) (a) *The matrix* $(L + L^T)$ *is negative semi definite*;

(b) $\Phi(\sigma)$ *is bounded and differentiable for* $\sigma \in R^m$ *and* $0 < \sigma_i \Phi_i(\sigma_i) <$

$< p_{ii}\sigma_i^2$ $(\sigma_i \neq 0)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $p_{ii} > 0$ *for* $i = 1, 2, \ldots, m$ *and* $L\, \mathrm{d}\Phi(\sigma)/\mathrm{d}\sigma \not\equiv E$;

(v) $\exists$ *a constant diagonal matrix* $Q \geqslant 0$ *such that*

$$\mathcal{R}e\, \{(E + \mathrm{i}\omega Q)\, \widetilde{C}(\mathrm{i}\omega)\, (\mathrm{i}\omega E - A)^{-1}\, B\} - p^{-1} - L \leqslant 0,$$

where $\widetilde{C}(\mathrm{i}\omega) = \int_0^\infty C(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t.$

Then the system of equations (1) *is absolutely stable.*

P r o o f. We show that all the conditions of Theorem (1*) are met. By definition

$$\Psi(t) = f(t) + \int_0^t C(s)\, \mathrm{e}^{A(t-s)}\, x_0\, \mathrm{d}s.$$

$\Psi(t) \in L_1(0, \infty)$ because $f(t) \in L_1(0, \infty)$ (by hypothesis) and $C(t)$, $\mathrm{e}^{At} \in L_1(0, \infty)$.

Differentiating the expression for $\Psi(t)$, we obtain

$$\Psi'(t) = f'(t) + \int_0^t C(s)\, A\mathrm{e}^{A(t-s)}\, x_0\, \mathrm{d}s + C(t)\, x_0;$$

$\Psi'(t) \in L_1(0, \infty)$ because $f'(t) \in L_1(0, \infty)$ and $C(t)$, $\mathrm{e}^{At} \in L_1(0, \infty)$. Thus the condition (A) of Theorem 1* is verified.

From (3), we have, on differentiation

$$K'(t) = \int_0^t C(s)\, A\mathrm{e}^{A(t-s)} B\mathrm{d}s + C(t)\, B.$$

As both $C(t)$ and $\mathrm{e}^{At} \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$, their convolution also b e longs to $L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$ (see [10]).

By hypothesis, L and $\Phi(\sigma)$ satisfy the conditions in (C) of Theorem 1*. It is easy to verify, from (3), that $\widetilde{K}(\mathrm{i}\omega) = \widetilde{C}(\mathrm{i}\omega)\, (\mathrm{i}\omega E - A)^{-1}\, B$. Thus the condition (v) of Theorem 1 implies

$$\mathcal{R}e\, \{(E + \mathrm{i}\omega Q)\, K(\mathrm{i}\omega)\} - p^{-1} - L \leqslant 0,$$

which is (D) of Theorem 1*. From Theorem 1*, the absolute stability of the system (1) follows.

T h e o r e m 2. *Suppose the system* (5) *satisfies the following conditions*:

(i) *The matrix* A *is stable*;

(ii) $f(t)$ *is defined for* $t \geqslant 0$ *and* $f(t)$, $f'(t) \in L_1(0, \infty)$;

(iii) (a) $D(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$ *for* $t \geqslant 0$;
(b) $C(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$ *for* $t \geqslant 0$;

(iv) (a) *The matrix* $(L + L^T)$ *is negative semi definite*;
(b) $\Phi(\sigma)$ *is bounded and differentiable for* $\sigma \in R^m$ and $0 < \sigma_i \Phi_i(\sigma_i) < p_{ii} \sigma_i^2$ $(\sigma_i \neq 0)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *where* $p_{ii} > 0$ *for* $i = 1, 2, \ldots, m$ and $L\, d\Phi(\sigma)/d\sigma \neq E$;

(v) $\exists$ *a constant,* $m \times m$, *diagonal matrix* $Q \geqslant 0$ *such that* $\mathcal{R}e\{(E + i\omega Q)\, \tilde{C}(i\omega)\, (i\omega E - A)^{-1}\, \tilde{D}(i\omega) + B\} - p^{-1} - L \leqslant 0$, *where* $\tilde{D}(i\omega) = \int_0^\infty D(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$.

Proof. We verify that the conditions of Theorem 1* are satisfied. $\Psi(t)$ is the same as in Theorem 1. From (7), we obtain

$$K_1'(t) = \int_0^t A e^{A(t-s)}\, D(s)\, ds + D(t) + A e^{At} B.$$

It is easy to see that $K_1(t)$, $K_1'(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$.

Since $C(t)$ and $K_1(t)$ both belong to $L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$, it can be seen, from (6), that $K(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$.

From (6) we obtain on differentiation

$$K'(t) = \int_0^t C(s)\, K_1'(t - s)\, ds + C(t)\, K_1(0).$$

Since $K_1'(t)$, $C(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$, $K'(t)$ also belongs to $L_1(0, \infty) \cap \cap L_2(0, \infty)$.

L and $\Phi(\sigma)$, by hypothesis, satisfy the conditions (a) and (b) in (C) of Theorem 1*. Also from (6) and (7), we see that

$$\tilde{K}(i\omega) = \tilde{C}(i\omega)\, (i\omega E - A)^{-1} [\tilde{D}(i\omega) + B].$$

Thus the condition (v) of Theorem (2) implies $\mathcal{R}e\{(E + i\omega Q)\, \tilde{K}(i\omega)\} - L - p^{-1} \leqslant 0$ which is (D) of Theorem 1*. It follows that the system (5) is absolutely stable.

If one of the characteristic roots of the matrix A is zero, then one is led to consider the following system of equations [11]

$$(8)\qquad \begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B\Phi(\sigma(t)) + \int_0^t D(t-s)\,\Phi(\sigma(s))\,ds, \\ \zeta' = \Phi(\sigma), \\ \sigma(t) = f(t) + L\Phi(\sigma(t)) + \int_0^t C(t-s)\,x(s)\,ds - \Gamma\zeta, \end{cases}$$

where A_1 is a stable $n \times n$, constant matrix, ζ is a m-vector and Γ is a real constant symmetric $m \times m$ matrix. It is easily verified that this system reduces to the integral equation (4), if we define

$$(9)\qquad \begin{cases} \Psi(t) = f(t) + \int_0^t C(t-s)\,e^{A_1 s}\,x_0\,ds - \Gamma\zeta_0, \\ K(t) = \int_0^t C(s)\,K_1(t-s)\,ds - \Gamma, \end{cases}$$

$$(10)\qquad K_1(t) = \int_0^t e^{A_1(t-s)}\,D(s)\,ds + e^{A_1 t}\,B.$$

We note that the kernel $K(t)$, defined in (9), **does not satisfy** the condition (B) of Theorem 1*. We state the following **theorem (for proof** see [8]) which is of use in such cases.

T h e o r e m 2*. *Let the integral equation* (4) *satisfy the following conditions*:

(A) $\Psi'(t)$, $\Psi''(t) \in L_1(0, \infty)$ *for* $t \geqslant 0$;

(B) *Let* $K(t) = H(t) - \rho$, *where* ρ *is a constant* $m \times m$, *positive definite symmetric matrix. Then* $H(t)$, $H'(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$;

(C) (a) *The matrix* $(L + L^T)$ *is negative semi definite*;

(b) $\Phi(\sigma)$ *is differentiable for* $\sigma \in R^m$ *and satisfies the condition* $0 < \sigma_i \Phi_i(\sigma_i) < p_{ii}\,\sigma_i^2$ $(\sigma_{ii} \neq 0;\ p_{ii} > 0,\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ *and* $L\ d\Phi(\sigma)/d\sigma \neq E$;

(D) *Let* $\tilde{H}(i\omega) = \int_0^\infty H(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$ *and* $G(i\omega) = \tilde{H}(i\omega) - \rho\,(i\omega)^{-1}$. *Then* $\exists$ *a constant* $m \times m$ *diagonal matrix* $Q \geqslant 0$ *such that* $\mathcal{R}e\,\{(E + i\omega Q)\,G(i\omega)\} - p^{-1} - L \leqslant 0$.

Then every solution, $\sigma(t)$, *of* (4) *tends to zero as* $t \to \infty$.

We now prove a stability theorem for the system (8).

T h e o r e m 3. *Let the system of equations* (8) *satisfy the following conditions*:

(i) *The matrix* A_1 *is stable*;

(ii) $f'(t), f''(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$ *for* $t \geqslant 0$;

(iii) (a) $D(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$ *for* $t \geqslant 0$;
(b) $C(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$ *and* $C'(t) \in L_1(0, \infty)$ *for* $t \geqslant 0$;

(iv) (a) *The matrix* $(L + L^T)$ *is negative semi definite*;
(b) $\Phi(\sigma)$ *is differentiable for* $\sigma \in R^m$ *and satisfies the condition* $0 < \sigma_i \Phi_i(\sigma_i) < p_{ii}\sigma_i^2$ $(\sigma_i \neq 0;\ p_{ii} > 0, i = 1, 2, \ldots, m)$ *and* $L\, d\Phi(\sigma)/d\sigma \not\equiv E$;

(v) $\exists$ *a constant diagonal* $m \times m$ *matrix* $Q \geqslant 0$ *such that* $\mathcal{R}e\{(E + i\omega Q)\, G(i\omega)\} - p^{-1} - L \leqslant 0$ *where* $G(i\omega) = \tilde{C}(i\omega)(i\omega E - A_1)^{-1} \times (\tilde{D}(i\omega) + B) - (i\omega)^{-1}\Gamma$, *with* $\Gamma > 0$.

Then the system of equations (8) *is absolutely stable.*

P r o o f. We will show that the conditions of Theorem 2* are satisfied. By definition

$$\Psi(t) = f(t) + \int_0^t C(s)\, e^{A_1(t-s)}\, x_0\, ds - \Gamma\zeta_0.$$

Therefore

$$\Psi'(t) = f'(t) + \int_0^t C(s)\, A_1 e^{A_1(t-s)}\, x_0\, ds + C(t)\, x_0,$$

$$\Psi''(t) = f''(t) + \int_0^t C(s)\, A_1^2\, e^{A_1(t-s)}\, x_0\, ds + C(t)\, A_1 x_0 + C'(t)\, x_0.$$

$\Psi'(t),\ \Psi''(t) \in L_1(0, \infty)$ because $f'(t)$, $f''(t)$, $C(t)$, $e^{A_1 t}$ all belong to $L_1(0, \infty)$. Thus (A) of Theorem 2* is verified. L and $\Phi(\sigma)$, by hypothesis satisfy the conditions in (C) of Theorem 2*. From (9), we get

$$K(t) + \Gamma = \int_0^t C(s)\, K_1(t - s)\, ds.$$

It is easily seen, from (10), that $K_1(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$. So, if

we now put $K(t) + \Gamma = H(t)$, it follows that $H(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$. It is easy to verify that $H'(t) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$. Also we note that

$$\widetilde{H}(i\omega) = \widetilde{C}(i\omega)\,(i\omega E - A_1)^{-1}\,(D(i\omega) + B),$$

where $\widetilde{H}(i\omega) = \int_0^\infty H(t)e^{-i\omega t}\,dt$. It is an easy matter to verify that condition (v) of Theorem 3 implies (D) of Theorem 2*. The absolute stability of system (8) follows.

Remarks. (i) The assumption in Theorem 1* that $\Phi(\sigma)$ is bounded, can be dropped if we assume a lower bound for $\sigma_i \Phi_i(\sigma_i)$ i.e. $0 < \varepsilon\sigma_i^2 < \sigma_i \Phi_i(\sigma_1) < p_{ii}\sigma_i^2$ ($\varepsilon > 0$; see [5]).

(ii) It is possible to consider the more general case when $\Phi_i(\sigma) = \Phi_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ by assuming the condition $< \Phi(\sigma), Qd\sigma > = dF$, where $F(\sigma)$ is positive definite [3], [9].

Received the 16 VIII 1969

University of Rhode Island, USA

REFERENCES

1. Popov V. M., *Absolute Stability of Nonlinear Systems of Automatic Control.* Automation and Remote Control, March 1962, **22**, *8*, pp. 857–875.
2. Corduneanu C., *Sur une équation intégrale de la théorie du réglage automatique.* C.R. Acad. Sc. Paris, 1963, **256**, pp. 3564–3567.
3. Luca N., *Sur quelques systèmes d'équations intégrales à noyau transitoire qui s'appliquent aux problèmes de réglage automatique.* An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza" Iași, 1964, **X**.
4. Corduneanu C., *Quelques problèmes qualitatifs de la théorie des équations intégro-différentielles.* Coll. Math., 1967, **XVIII**, pp. 83–94.
5. Desoer C. A., *A generalisation of the Popov Criterion.* I.E.E.E. Trans. on Automatic Control. Vol – AC – 10, No. *2*, April 1965.
6. Gheleg A. Kh., *The Absolute Stability of Nonlinear Control Systems with Distributed Parameters.* Automation and Remote Control, March 1965, **26**, *3*, pp. 395–403.
7. Blodgett E. R., King R. E., *Absolute Stability of a Class of Nonlinear Systems Containing Distributed Elements.* J. Franklin Inst., Sept. 1967, **284**, *3*, pp. 153-160.
8. Rao A. N. V., *Asymptotic Behaviour of Solutions of a Nonlinear Volterra Equation*(in print).
9. Anderson B. D. O., *Stability of Control Systems with Multiple Nonlinearities.* J. Franklin Inst., Sept. 1966, **282**, *3*, pp. 155–160.
10. Titchmarsh C. E., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals.* Oxford University Press, 1959.
11. Aizerman M. A., Gantmacher F. R., *Absolute Stability of Regulator Systems.* Holden Day, Inc., 1964.

STABILITATEA SISTEMELOR NELINIARE CU MAI MULTE VARIABILE, CONŢINÎND ELEMENTE DISTRIBUITE

(Rezumat)

Se extind rezultatele lui C. Corduneanu [4], N. Luca [3] şi R. E. Blodget şi R. E. King [7] la cazul stabilităţii absolute a unor sisteme de ecuaţii ce intervin în studiul sistemelor de reglare automată multiple cu elemente distribuite.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 512.9 ; 621—50

THE TRANSFERANCE OF A SYSTEM

BY

ALFRED BRAIER

1. Introduction

The author has introduced [1] ... [3] a correspondence between real functions of a single variable and the elements of some algebras on the real field[1]), so that to the derivation with respect to the independent variable corresponds the multiplication of the elements which represent symbolically the functions, with a certain element of the algebra, playing the rôle of a derivation operator. Thus

$$(1) \qquad f(t) \longleftrightarrow w = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i , \quad \frac{df}{dt} \longleftrightarrow w' = dw, \quad d = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \varepsilon_i ,$$

where $f(t)$ are the functions representable symbolically, $w \in A_n$ the corresponding elements of algebra A_n, $a_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ real numbers representing the components of w in the basis $\varepsilon_i \in A_n$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Such a correspondence, studied in detail in the Doctoral Dissertation [5], can be established for every function which are solution of a linear differential equation with constant coefficients. The order of the respective algebra coincide with that of the differential equation. In this way, in a single manner, the considered function can be regarded, symbolically trated and watched in hers relations with a linear or a linearized system (in the very particular case of harmonic functions, one obtains the well known symbolic representation by complex numbers).

For the classes of functions which are frequently encountered as inputs in feedback systems (aperiodic functions and especially modulated oscillations), the corresponding algebras may be chosen associative, commutative and with unit.

In this paper an attempt is made to put the basis of an unitary study of the behaviour of a linear or a suitable linearized system under inputs reprezentable by algebras. For this purpose it is necessary to introduce the notion of ,,transferance''.

---

[1]) Recently, the correspondence has been also extended to functions of many variables [6].

2. The Transferance of a System

2.1. Let be a physical system characterized by s independent parameters (degree of freedom) and described in his linear approximation by s linear differential equations with constant coefficients, nonhomogeneous, i.e. with different driving functions applied on his inputs:

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{ik} \ddot{x}_k + b_{ik} \dot{x} + c_{ik} x_k) = f_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{2}$$

The solutions are $x_i(t) = x_i^*(t) + x_i^{**}(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, corresponding to the free and steady state motions. We suppose either the system stable, i.e. $\lim_{t \to \infty} x_i^*(t) = 0$, or vanishing initial conditions; the steady state response is described by $x_i(t) = x_i^{**}(t)$, being dictate by the peculiarities of the driving functions (inputs) $f_i(t)$ and the system structure.

Let be all the inputs $f_i(t)$ of the same type and representable by the elements $F_i \in A_n$ of an associative algebra, with the unit u and the derivation operator (1_3). That means that $f_i(t)$ are theirself solutions of ordinary linear differential equations with constant coefficients, respectively in substance combinations of exponential functions. The particular solutions of (2) are in general of the same type; therefore the steady state response having the same forme as the inputs, will be represented by an element of the same algebra $X_i(t) \in A_n$:

$$f_i(t) \longleftrightarrow F_i, \quad x_i(t) \longleftrightarrow X_i, \quad \ddot{x}_i \longleftrightarrow d^2 X_i. \tag{3}$$

System (2) becomes

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{ik} d^2 + b_{ik} d + c_{ik} u) X_i = F_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{4}$$

After eliminating X_k $(k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, s)$ by performing operations which involve only multiplications and algebraic additions with the elements of A_n occuring in system (4), we obtain

$$\Delta(d) X_j = \sum_{k=1}^{s} \Delta_{kj}(d) F_k. \tag{5}$$

Obviously, elements Δ, $\Delta_{kj} \in A_n$ depend on the system parameters a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} and are polynomials of the derivation operator d of algebra A_n, which represents symbolically the inputs (degree of Δ_{kj} lower than degree of Δ). They can be obtained by formal application of Cramer's rule.

Supposing, for the time being, that $\Delta(d) \neq 0$, Δ_0, where $\Delta_0 \in A_n$ is a divisor of zero, (5) becomes

$$X_j = \sum_{k=1}^{s} W_{kj}(d)\, F_k \left(= \sum_{k=1}^{s} X_{kj} \right), \tag{6}$$

where

$$W_{kj}(d) = \frac{\Delta_{kj}(d)}{\Delta(d)}. \tag{7}$$

Element $W_{kj}(d) \in A_n$ will be called the *transferance* corresponding to input k and output j of the respective physical system. The beforehand investigated correspondence between the elements of A_n and the involved functions, allows to write $X_{kj} \longleftrightarrow x_{kj}(t)$.

Therefore, the transferance $W_{kj}(d)$ provides all the peculiarities of the effect of input $f_k(t)$ at the level of output j. She is the carrier of all response properties of the physical system due to a driving function symbolically represented by an element of an algebra. Eq. (6) is obviously a direct consequence of the superposition property (linearity of the system). If $f_i(t)$ belong to different classes, representable by different algebras, than the corresponding transferances are elements of these, each calculated with the respective derivation operator.

If system (2) is approached by Laplace transform, supposing vanishing initial conditions, one obtains a relation of type (6) between the images of functions f_i and of coordinates x_j, where $W_{kj}(p) = \Delta_{kj}(p)/\Delta(p)$ is the well known transfer function [7], [8], widely used in feedback system theory.

Then, *the transferance* of a system is that element of the algebra which represents symbolically the input, which *results by replacing in the transfer function the usual variable by the derivation operator of the respective algebra.*

2.2. The transferance can provide essential informations about the system steady state response. Let be the particular case of a system with a single input and a single output. Then

$$X_{(o)} = W(d) X_{(i)}, \quad \text{with} \quad W(d) = \frac{K(d)}{D(d)}. \tag{7'}$$

With 0 the zero element of A_n and Δ_0 a divisor of zero, the following situations are to be considered:

a) $K(d) = 0$ and $D(d) \neq 0$; the input has no effect on the system.

b) $K(d) = \Delta_0$ and $D(d) \neq 0, \Delta_0$; $X_{(o)}$ is a divisor of zero, which in the framework of the established correspondence belongs to a ,,degenerated'' function, i.e. simpler that the input and which can be represented by an algebra of lower order as A_n.

c) $K(d) \neq 0$, Δ_0 and $D(d) = 0$ or Δ_0; the response belongs no more to the classe of input functions, because now occurs resonance with infinite values of the response. Taking into account the usual way for seeking the particular solutions of ordinary differential equations with constant coefficients (one uses products with polynomials in the independent variable),

the algebra to which belongs now $X_{(o)}$ is the direct product of A_n and one or many dual algebras (which can represent symbolically polynomials of first degree [2]).

d) $K(d)$ and $D(d)$ ordinary elements of A_n ; $X_{(o)}$ is also an ordinary element, and within the framework of the correspondence furnishes $x_{(o)} = x_{(o)}(t)$. It should be outlined that (see [3], [5]) the components of certain elements resulting from direct products of algebras and which can represent symbolically amplitude modulated oscillations, answer some specific conditions ; for this reason they have been called ,,special elements''. The other elements of the same algebra represent symbolically amplitude and phase modulated oscillations, i.e. distorsionated responses. Then, if $x_{(i)}(t)$ is a purely amplitude modulated oscillation and $W(d)$ a special element, the output is also an oscillation with only amplitude modulation (since only the product of two special elements is also a special element [3]).

The above mentioned situations result immediately by imposing the respective conditions on the two elements $K, D \in A_n$ which join the transferance.

2.3. If we take now into account the exponential form of the elements of algebras, introduced in [4], the transferance may be written as

$$W(d) = \sum_{i=1}^{n} W_i(\delta_1, \ldots, \delta_n)\,\varepsilon_i = \prod_{i=1}^{n} e^{Y_i(\delta_1, \ldots, \delta_n)\,\varepsilon_i}, \tag{8}$$

where the components W_i and the arguments Y_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ are functions of the derivation operator components as well as of the parameters which characterize the physical system. The study of their variation for a given system provides complete informations about his response under a given classe of inputs, representable by an algebra. These dependencies with their possible graphical plotting, will be called *generalized steady state frequency response.*

R e m a r k . For an harmonical input, representable by complex numbers, the derivation operator is $d = j\omega$ ($j^2 = -1$), with ω the angular frequency. Substitution in (7$\frac{1}{2}$) gives the well known frequency response, of fundamental importance in the feedback control theory. The here introduced transferance extend widely this method for all kinds of inputs which are representable by means of algebras. The passing of such signals through a system can be now watched in an unitary manner, despite their periodic, pseudoperiodic or aperiodic character (when it must be used Fourier series and respectively Fourier integral [8]).

3. Applications

3.1. In order to illustrate the use of the transferance for studying the properties of steady state motions, we will choose a few simple examples.

a) In [1], [2] we have established the correspondence

$$w = a_1 + a_2\,\mathrm{i} + a_3\,\mathrm{j} + a_4\,\mathrm{ij} = A_1\,e^{\mathrm{i}\psi}\,e^{\mathrm{j}\varphi} + A_2\,e^{\mathrm{i}(\psi+\pi/2)}\,e^{\mathrm{j}(\varphi+\pi/2)} \longleftrightarrow \tag{9}$$

$$\longleftrightarrow f(t) = [A_1 \sin(pt+\psi)\sin(\omega t+\varphi) + A_2\cos(pt+\psi)\cos(\omega t+\varphi)]e^{\delta t},$$

with the derivation operator and multiplication table

$$d = \delta + p\mathrm{i} + \omega\mathrm{j}, \quad \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1, \quad (\mathrm{ij})^2 = (\mathrm{ji})^2 = 1, \tag{10}$$

where

$$\left\{\begin{array}{l} A_1, A_2 = \dfrac{1}{2}\,\nu\left[\sqrt{(a_1+a_4)^2+(a_2-a_3)^2} \pm \sqrt{(a_1-a_4)^2+(a_2+a_3)^2}\right], \\ \nu_1 = 1, \quad \nu_2 = \operatorname{sign}(a_1a_4 - a_2a_3), \quad \operatorname{tg}\psi,\ \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\Gamma^2+1} - \Gamma, \\ \Gamma_\psi = \dfrac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}{2(a_1a_2 + a_3a_4)}, \qquad \Gamma_\varphi = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{2(a_1a_3 + a_2a_4)}. \end{array}\right. \tag{11}$$

If the components of the polynion $\mathcal{P}$ [1] (9_1) satisfy the relation

$$a_1a_4 = a_2a_3, \tag{12}$$

i.e. he is a special element, then $A_2 = 0$, $A_1 = A$ and

$$\left\{\begin{array}{l} f(t) = Ae^{\delta t}\sin(pt+\psi)\sin(\omega t+\varphi), \\ A = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \dfrac{a_2}{a_1}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a_3}{a_1}. \end{array}\right. \tag{13}$$

The divisors of zero are the elements with

$$a_1 + a_4 = 0,\ a_2 - a_3 = 0 \quad \text{or} \quad a_1 - a_4 = 0,\ a_2 + a_3 = 0; \tag{14}$$

if $a_4 = a$, $a_2 = b$, they represent symbolically „degenerated" functions

$$f(t) = Ae^{\delta t}\sin[(\omega \pm p)t + \varphi], \quad A = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}, \tag{15}$$

which are respresentable by complex numbers.

b) For an element of Sobrero's algebra takes place the following correspondence [2], [3]:

$$w = a_1 + a_2\,\mathrm{u} + a_3\,\mathrm{j} + a_4\,\mathrm{uj} = Ae^{(B/A)\mathrm{u}}\,e^{\mathrm{i}\varphi} + C\mathrm{u}e^{\mathrm{i}(\varphi+\pi/2)} \longleftrightarrow \tag{16}$$

$$\longleftrightarrow [(At+B)\sin(\omega t+\varphi) + C\cos(\omega t+\varphi)]\,e^{\delta t},$$

with

$$d = \delta + \mathrm{u} + \omega\mathrm{i}, \quad \mathrm{u}^2 = 0, \quad \mathrm{i}^2 = -1, \quad (\mathrm{ui})^2 = (\mathrm{iu})^2 = 0, \tag{17}$$

and where

$$A = \sqrt{a_1^2+a_3^2}, \quad B = \frac{a_1a_2 + a_3a_4}{\sqrt{a_1^2+a_3^2}}, \quad C = \frac{a_1a_4 - a_2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_3^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a_3}{a_1}. \tag{18}$$

If (12) takes place, then obviously $C = 0$. The divisors of zero of Sobrero's algebra have

$$a_1 = a_3 = 0. \tag{19}$$

The corresponding functions are $f(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$, with A and φ expressed by (15_2) and (15_3), where now $a = a_4$, $b = a_2$.

3.2. Let be the transfer function $W(p) = K/(p + \Omega)$ [8] of an elementary feedback control link, with K and Ω real constants; the respective transferance is

$$W(d) = \frac{K}{d + \Omega}. \tag{20}$$

If (13_1) is the input, then using the corresponding derivation operator (9_1), (20) becomes $W = w_1 + w_2 \mathrm{i} + w_3 \mathrm{j} + w_4 \mathrm{ij}$, where

$$\left\{\begin{aligned} w_1 &= \frac{K}{W^*}(\delta + \Omega)[(\delta + \Omega)^2 + (\omega^2 + p^2)], \\ w_2 &= -\frac{Kp}{W^*}[(\delta + \Omega)^2 - (\omega^2 - p^2)], \\ w_3 &= -\frac{K\omega}{W^*}[(\delta + \Omega)^2 + (\omega^2 - p^2)], \\ w_4 &= \frac{2p\omega K}{W^*}(\delta + \Omega), \\ W^* &= (\delta + \Omega)^2 + 2(\omega^2 + p^2)(\delta^2 + \Omega^2) + (\omega^2 - p^2)^2. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

By performing elementary calculations it results that neither (12) nor (14) may be fulfiled, therefore the output always presents here the forme (9_2). Namely, by using the exponential forms of (13_1) and $W(d)$, we obtain

$$X_{(o)} = W(d)\, X_{(i)} = [W_1 e^{i\Psi} e^{j\Phi} + W_2 e^{i(\Psi+\pi/2)} e^{j(\Phi+\pi/2)}] A e^{i\psi} e^{j\varphi} =$$
$$= A W_1 e^{i(\psi+\Psi)} e^{j(\varphi+\Phi)} + A W_2 e^{i(\psi+\Psi+\pi/2)} e^{i(\varphi+\Phi+\pi/2)}.$$

Eqs. (11) give for $W(d)$ (21)

$$\left\{\begin{aligned} &(w_1 + w_4)^2 + (w_2 + w_3)^2 = \frac{K^2}{W^{*2}}[\Omega^2 + (\omega - p)^2][\Omega^2 + (\omega + p)^2]^2, \\ &(w_1 - w_4)^2 + (w_2 + w_3)^2 = \frac{K^2}{W^{*2}}[\Omega^2 + (\omega - p)^2]^2[\omega^2 + (\Omega + p)^2], \\ &w_1 w_4 - w_2 w_3 = W^*, \\ &\Gamma_\Psi = \frac{(\Omega + \delta)^2 + (\omega^2 - p^2)}{-2p(\Omega + \delta)}, \\ &\Gamma_\Phi = \frac{(\Omega + \delta)^2 - (\omega^2 - p^2)}{-2\omega(\Omega + \delta)}, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

which permet to calculate W_1, W_2, Ψ and Φ.

Thus, input (13_1) applied with vanishing intial conditions to a link (20), yields the output (9_2), where now $A_1 = W_1 A$, $A_2 = W_2 A$. All the quantities which occur in the output (9_2) (namely A_1, A_2, Ψ and Φ) depend on K, Ω, δ, p and ω. Their analysis as functions of δ, p, ω for K and Ω given, leads to the generalized steady state frequency response of (20) to the action of (13_1). But that analysis requires a supplementary study.

3.3. Let be the input

$$x_{(i)}(t) = (Xt + Y)\, e^{\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \tag{23}$$

applied to the same link (20). With the derivation operator (17), one obtains the transferance components, at present element of Sobrero's algebra:

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{K(\Omega + \delta)}{(\Omega + \delta)^2 + w^2}, & w_2 = -\dfrac{K[(\Omega + \delta)^2 - \omega^2]}{[(\Omega + \delta)^2 + \omega^2]^2}, \\ w_3 = -\dfrac{K\omega}{(\Omega + \delta)^2 + \omega^2}, & w_4 = \dfrac{2K\omega(\Omega + \delta)}{[(\Omega + \delta)^2 + \omega^2]^2}. \end{cases} \tag{24}$$

Using them, we can obtain the quantities (18), denoted now respectively W_1, W_2, W_3 and Φ:

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{K}{(\Omega + \delta)^2 + \omega^2}, & W_2 = -\dfrac{K(\Omega + \delta)}{(\Omega + \delta)^2 + \Omega^2}, \\ W_3 = \dfrac{K\omega}{(\Omega + \delta)^2 + \Omega^2}, & \operatorname{tg}\Phi = -\dfrac{\omega}{\Omega + \delta}. \end{cases} \tag{25}$$

The conditions (12) or (19) cannot be fulfiled; then, the output from the above considered link, with vanishing initial conditions, has always form (16_2). Namely

$$X_{(o)} = [W_1 e^{\frac{W_2}{W_1}u} e^{j\Phi} + W_2 u e^{j(\Phi+\pi/2)}] X e^{\frac{Y}{X}u} e^{j\varphi} =$$

$$= W_1 X e^{\frac{W_1 Y + W_2 X}{W_1 X}u} e^{j(\varphi+\Phi)} + W_3 X u e^{j(\varphi+\Phi+\pi/2)}\ ^{2})$$

and the output is

$$x_{(o)}(t) = \frac{K e^{\delta t}}{(\Omega + \delta)^2 + \omega^2}\{[Xt + Y - (\Omega + \delta)X] \sin(\omega t + \varphi + \Phi) + \tag{26}$$

$$+ X\omega \cos(\omega t + \varphi + \Phi)\}.$$

---

²) Because $u\text{-}e^{\frac{X}{Y}u} = u\left(1 + \frac{Y}{X}u\right) = \bar{u}$, since $u^2 = 0$.

It is obvioulsy needful to perform a methodical study of the response for typical feedback control system links, submited to the most important inputs, first ranking modulated oscillations, which can be represented by algebres.

3.4. Let be a feedback control system with the transfer function $W(p) = (p^2 + \Omega_1^2)(p^2 + \Omega_2^2)/D(p)$, where Ω_1, Ω_2 are real constants. The transferance is

$$W(d) = \frac{K(d)}{D(d)} = \frac{(d^2 + \Omega_1^2)(d^2 + \Omega_2^2)}{D(d)}. \tag{27}$$

We consider only the inputs

$$x_{(i)}(t) = X \sin(pt + \psi) \sin(\omega t + \varphi), \quad x_{(i)}(t) = (Xt + Y) \sin(\omega t + \varphi). \tag{28}$$

For the first, the derivation operator (10_1) becomes $d = p\mathrm{i} + \omega\mathrm{j}$ $(\delta = 0)$. If we suppose that $D(d) \neq 0$, Δ_0 (Δ_0 divisor of zero), than the components of $K(d)$ are

$$\begin{cases} k_1 = \Omega_1^2 \Omega_2^2 - (\omega^2 + p^2)(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + (p^2 + \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2, \\ k_2 = 0, \quad k_3 = 0, \\ k_4 = 2p\omega\,[(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2(\omega^2 + p^2)]. \end{cases} \tag{29}$$

The element $K(d) = 0$ if $k_1 = k_4 = 0$, i.e.

$$\Omega_1 = \omega + p, \quad \Omega_2 = \omega - p. \tag{30}$$

Than the output $x_{(o)}(t) = 0$; therefore, if the parameters are chosen so as (30) take place, the signal (28_1), with arbitrary X, ψ and φ cannot pass through the respective system.

Let be (28_2) the input; than (17_1) becomes $d = \mathrm{u} + \omega\mathrm{i}$ and finally the components of $K(d)$ are

$$\begin{cases} k_1 = \omega^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\,\omega^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2, \\ k_2 = 0, \quad k_3 = 0, \\ k_4 = 2\omega\,[(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2\omega^2]. \end{cases} \tag{31}$$

If

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \tag{32}$$

than $K(d) = 0$ and the system stopes the input (28_2). If however only

(33) $\Omega_1 = \omega$ or $\Omega_2 = \omega$,

element $K(d)$ is divisor of zero in Sobrero's algebra (because $k_1 = k_3 = 0$) and the output is pure harmonical.

4. Conclusion

1. We calle *transferance* the element of the algebra attached to inputs in a linear physical system with constant coefficients, which results by replacing the usual variable from the system transfer function by the element of algebra which play the rôle of derivation operator, in respect to that class of inputs. The element which represents symbolically the output is obtained by multiplying the transferance with the element attached to the input.

2. The transferance is the carrier of all the properties of the steady state response of a system (or of the motion with vanishing initial conditions). By using also the exponential form of the elements of algebras, the transferance allows an extension of the usual frequency response to all the inputs, periodic, pseudoperiodic or aperiodic, which can be represented symbolically by means of algebras (the actual frequency response for harmonic inputs corresponds to the derivation operator $j\omega$ of complex algebra).

3. By investigating the transferance one can easily discover the possible responses of the studied system: amplitude and phase modulated response for an input modulated only in amplitude (distorsionated motion); nondistorsionated response; ,,degenerated'' response; complet absence of response; resonance with infinite values.

4. As a first example, one gives a brief account regarding the passing of signals (13_1) and (23) through the elementary feedback control system link (20) as well of signals (28) through system (27). Under conditions (30) and respectively (32), these signals are stoped, and if (33) take place, to input (28_2) corresponds a purely harmonic output.

Received the 14 X 1969

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Theoretical Mechanics

REFERENCES

1. Braier A., *Sur la représentation par des nombres hypercomplexes des fonctions reélles d'une variable.* Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 89—96.
2. — *La représentation symbolique des fonctions qui vérifient des équations différentielles à coefficients constants.* Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *3—4*, pp. 93—100.
3. — *Représentation symbolique des produits de fonctions.* Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, pp. 63—70.
4. — *Exponential Form of the Elements of some Algebras.* Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*, pp. 115—122.

5. — *The Use of Algebras on the Real Field in the Mechanics of Vibration.* Doctoral Dissertation, Polytechnic Institute of Jassy, 1968 (in Romanian).
6. — *A Symbolic Calculus Using Algebras on the Real Field.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1969, **XV (XIX)**, *1—2*, Section I, pp. 129—134.
7. Aseltine J., *Transform Method in Linear System Analysis.* Mc Graw-Hill Book Comp., Inc., New York — Toronto — London, 1958.
8. Айзерман М. А., *Теория автоматического регулирования.* Изд. „Наука", М., 1966.

TRANSFERANŢA UNUI SISTEM

(Rezumat)

Se denumeşte *transferanţă* elementul algebrei care reprezintă simbolic mărimea de intrare într-un sistem fizic liniar cu coeficienţi constanţi şi care se obţine prin simpla înlocuire a variabilei curente din funcţia de transfer a sistemului prin elementul algebrei care joacă rolul de operator de derivare pentru respectiva clasă de funcţii de intrare. Atunci elementul algebrei care reprezintă simbolic răspunsul este produsul dintre transferanţă şi cel ataşat mărimii de intrare.

Transferanţa oferă informaţii complete privind răspunsul sistemului, indiferent de caracterul periodic, pseudoperiodic sau aperiodic al mărimii de intrare, extinzînd larg actualul studiu frecvenţial, cunoscut în prezent numai pentru intrări pur armonice.

Se cercetează pe scurt acţiunea mărimilor de intrare (13_1) şi (23) asupra verigii simple de sistem automat (20), precum şi trecerea semnalelor (28) prin sistemul (27). Dacă sînt satisfăcute condiţiile (30) (sau (32)), semnalul (28_1) (sau (28_2)) este oprit de sistem, iar dacă are loc (33), mărimea de intrare (28_2) produce o mişcare de regim permanent pur armonică.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 539.31; 536.7

TENSIUNI TERMICE STAŢIONARE ÎNTR-O PLACĂ SUBŢIRE COMPUSĂ DIN MATERIALE DIFERITE

DE

I. GRINDEI

1. Într-o placă subţire cîmpul de temperatură poate fi considerat invariabil în direcţia axei Ox_3, normală la planul plăcii. În prezenţa surseler de căldură, ecuaţia conducţiei termice va lua atunci următoarea formă, în regim staţionar:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = -\frac{M}{k}, \tag{1}$$

unde $T(x_1, x_2)$ reprezintă cîmpul de temperatură, $M(x_1, x_2)$ — debitul surselor de căldură iar k — coeficientul de conducţie termică.

În cazul stării de tensiune plană a plăcii, relaţiile dintre deformările ε_{ij} şi tensiunile σ_{ij} se scriu sub forma

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \alpha T, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) + \alpha T, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12}, \tag{2}$$

în care E este modulul de elasticitate al lui Young, α — coeficientul de dilatare termică liniară, iar

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{3}$$

Pentru rezolvarea problemelor bidimensionale ale termoelasticităţii este comod să exprimăm tensiunile σ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ cu ajutorul unei funcţii $F(x_1, x_2)$ prin relaţiile

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\nabla^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad (i, j = 1, 2), \tag{4}$$

δ_{ij} fiind simbolul lui Kronecker.

În baza relațiilor (4) ecuațiile de echilibru în tensiuni, în absența forțelor masice,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \qquad (i = 1, 2), \tag{5}$$

sînt verificate, iar condițiile pe frontiera plăcii

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \qquad (i = 1, 2), \tag{6}$$

pot fi scrise sub forma [1]

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -\int_{s_0}^{s} p_2 \, ds, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \int_{s_0}^{s} p_1 \, ds, \tag{7}$$

unde s este lungimea conturului plăcii, p_1 și p_2 — componentele pe axele de coordonate x_1 respectiv x_2 ale tensiunilor exterioare, iar n_1 și n_2 — componentele, pe aceleași axe, ale vectorului **n** al normalei exterioare la frontiera plăcii.

Ținînd seama de relațiile (2) și (4), ecuația de compatibilitate

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{8}$$

ne conduce la următoarea ecuație diferențială:

$$\nabla^4 F + \alpha E \nabla^2 T = 0. \tag{9}$$

Fie [2]

$$F = U - V, \tag{10}$$

unde V este o soluție a ecuației

$$\nabla^2 V = \alpha E T. \tag{11}$$

Ecuația (9) este echivalentă atunci cu sistemul de ecuații diferențiale

$$\nabla^2 V = \alpha E T, \qquad \nabla^4 U = 0. \tag{12}$$

Întrucît soluția generală a ecuației $\nabla^2 V = 0$ poate fi inclusă în soluția ecuației biarmonice $\nabla^4 U = 0$, este suficient să găsim numai o soluție particulară a ecuației (11).

În felul acesta, problema relativă la determinarea tensiunilor termice se reduce la integrarea sistemului (12) cu condiția la limită

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + i \frac{\partial U}{\partial x_2} = i \int_{s_0}^{s} (p_1 + i p_2) \, ds + \frac{\partial V}{\partial x_1} + i \frac{\partial V}{\partial x_2}. \tag{13}$$

Problema integrării ecuației biarmonice $\nabla^4 U = 0$, în ipoteza că se cunosc condițiile la limită ale derivatelor de ordinul întîi ale funcției $U(x_1, x_2)$, a fost studiată de mulți autori, în special de N. I. Mușhelișvili [1].

Funcția U poate fi exprimată cu ajutorul a două funcții analitice $\varphi(z)$ și $\psi_1(z)$, $(z = x_1 + i x_2)$, sub forma

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \psi_1(z) + \overline{\psi_1}(z). \tag{14}$$

Derivînd relația (14) și punînd $\psi_1'(z) = \psi(z)$ obținem

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + i\frac{\partial U}{\partial x_2} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'}(z) + \overline{\psi}(z). \tag{15}$$

Funcțiile $\varphi(z)$ și $\psi(z)$ pot fi, după cum se știe, uniforme sau multiforme după cum domeniul S al păcii este simplu conex sau multiplu conex.

Ținînd seama de (15), condiția pe frontieră dată de (11) devine

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'}(\bar{z}) + \overline{\psi}(\bar{z}) = i\int_{s_0}^{s} (p_1 + ip_2)\,ds + \frac{\partial V}{\partial x_1} + i\frac{\partial V}{\partial x_2}\,. \tag{16}$$

Ecuația (13) dă legătura între funcțiile U și V, așa încît condițiile la limită pentru U se determină din condițiile la limită ale funcției V. Pentru calculul expresiei $\dfrac{\partial V}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial V}{\partial x_2}$ ce intră în relația (13), urmează să găsim mai întîi o soluție particulară a ecuației

$$\nabla^2 V = \alpha E T,$$

în care T este considerată o funcție continuă de variabilele x_1 și x_2, satisfăcînd ecuația (1).

În teoria potențialului se arată că soluția ecuației de mai sus poate fi scrisă sub forma

$$V(x_1, x_2) = \frac{\alpha E}{2\pi}\int_{(S)} T(\xi_1, \xi_2) \log r\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{17}$$

în care (x_1, x_2) este un punct al domeniului S; (ξ_1, ξ_2) — un punct variabil în domeniul S, iar $r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2$. Se poate arăta ușor că tensiunile σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, respectiv deplasările u_1 și u_2, se exprimă în funcție de $\varphi(z)$, $\psi(z)$ și V, prin formulele

$$(18)\quad \begin{cases} \sigma_{11}+\sigma_{22}=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'}(\bar{z})]-\alpha ET, \\ \sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\,\sigma_{12}=2[z\overline{\varphi''}(z)+\psi'(z)]-\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}-2i\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_2}\right) \end{cases}$$

și

$$(19)\quad u_1+iu_2=\frac{3-\nu}{2(1+\nu)G}\varphi(z)-\frac{1}{2G}\left[z\overline{\varphi'}(\bar{z})+\overline{\psi}(\bar{z})-\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}+i\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)\right].$$

2. Metoda de rezolvare expusă în § **1** poate fi extinsă la cazul unei plăci, compusă din mai multe materiale, cu caracteristicile elastice și termice E, ν și α diferite. Să presupunem deci că secțiunea normală S a plăcii este formată din mai multe domenii S_0, $S_1,\ldots,S_m$, corespunzătoare diverselor materiale. Domeniul S_0 corespunde, prin ipoteză, materialului înconjurător (fig. 1). Fie L_j $(j=1,2,\ldots,m)$ contururile presupuse închise și disjuncte, ale domeniilor S_j; frontiera domeniului S_0 va consta deci din contururile închise L_1, $L_2,\ldots,L_m$, L_0, din care ultimul conține în interiorul său pe toate celelalte.

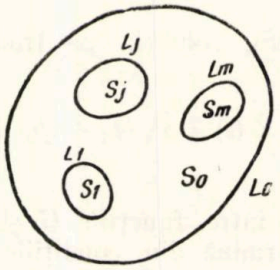


Fig. 1

Să notăm cu E_j, ν_j și α_j constantele fizice ale materialelor corespunzătoare domeniilor S_j $(j=0,1,\ldots,m)$. De asemenea, vom nota funcțiile U, V, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ corespunzătoare domeniilor S_j $(j=0,1,\ldots,m)$, cu U_j, V_j, $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$.

Determinarea tensiunilor termice într-o astfel de placă o vom face în ipoteza următoarelor condiții la limită:

1°. Tensiunile exterioare, aplicate conturului L_0 al plăcii, sînt nule:

$$(20)\qquad p_1=0,\qquad p_2=0\qquad \text{pe } L_0.$$

2°. Pe contururile de separație ale diverselor materiale avem:

$$(21)\qquad (p_1)_j=(p_1)_0,\qquad (p_2)_j=(p_2)_0,\qquad (j=1,2,\ldots,m),$$

unde indicii j, 0 indică asupra faptului că se consideră valorile lui p_1, și p_2 referitoare la domeniile în contact S_j și S_0. Cu alte cuvinte, condițiile (21) exprimă faptul că tensiunile aplicate elementelor contu-

rurilor de separație de o parte și de alta se echilibrează (sau că sînt continue pe L_1, L_2,..., L_m).

3°. Pe contururile de separație L_1, L_2,..., L_m, deplasările suferă discontinuități, adică

$$(u_1)_j - (u_1)_0 = g_{1j}, \quad (u_2)_j - (u_2)_0 = g_{2j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{22}$$

unde g_{1j} și g_{2j} sînt funcții cunoscute pe L_1, L_2,..., L_m.

Ținînd seama de relațiile (16) și (19), condițiile la limită enumerate mai sus pot fi scrise sub forma:

$$\varphi_0(z) + z\overline{\varphi_0'}(\bar{z}) + \overline{\psi}_0(\bar{z}) = f_{00}(s) \quad \text{pe} \quad L_0; \tag{23}$$

$$M_j \varphi_0(z) + N_j \varphi_j(z) + z\overline{\varphi_j'}(\bar{z}) + \overline{\psi_j}(\bar{z}) = f_{jj}(s) + P_j X_j(s) \quad \text{pe} \quad L_j, \ (j = 1, 2, \ldots, m); \tag{24}$$

$$(N_j - 1)\varphi_j(z) + (M_j + 1)\varphi_0(z) + z\overline{\varphi_0'}(\bar{z}) + \overline{\psi}_0(\bar{z}) = f_{0j}(s) \quad \text{pe} \quad L_j, \ (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{25}$$

în care s este lungimea conturului L_j, iar

$$\begin{cases} f_{jj}(s) = \dfrac{\partial V_j}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial V_j}{\partial x_2}, & f_{0j} = \dfrac{\partial V_0}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial V_0}{\partial x^2} \quad \text{pe} \quad L_j, \\ M_j = \dfrac{2G_j}{(1+\nu_0)(G_0 - G_j)}, & N_j = 1 - \dfrac{2G_0}{(1+\nu_j)(G_0 - G_j)}, \\ P_j = \dfrac{2G_0 G_j}{G_0 - G_j}, & X_j(s) = -(g_{1j} + ig_{2j}). \end{cases} \tag{26}$$

Este demn de remarcat faptul că condițiile (24) și (25) devin mult mai simple în cazul cînd caracteristicile E și ν sînt aceleași în tot domeniul $S = S_0 + S_1 + \cdots + S_m$ al plăcii, coeficienții de dilatare termică liniară rămînînd însă diferiți în domeniile S_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$. În cazul acesta, condițiile (24) și (25) devin

$$\varphi_j(z) = \varphi_0(z) \quad \text{pe} \quad L_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, m); \tag{24'}$$

$$\overline{\psi}_j(\bar{z}) - \overline{\psi}_0(\bar{z}) = f_{jj}(s) + P_j X_j(s) - f_{0j}(s) \quad \text{pe} \quad L_j, \ (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{25}$$

Prin urmare, $\varphi_j(z)$ este prelungirea analitică a funcției $\varphi_0(z)$. În ipoteza că deplasările sînt continue ($g_{1j} = g_{2j} = 0$) și că funcția $\alpha E T$ este mărginită și integrabilă, atunci derivatele de ordinul întîi ale funcției V, dată de (17), vor fi continue peste tot în domeniul plăcii și deci membrul al doilea al ecuației (25′) devine nul. În cazul acesta $\psi_j(z)$ este prelungirea analitică a funcției $\psi_0(z)$. Funcția U va fi continuă deci în tot domeniul plăcii.

Problema noastră se reduce astfel la o problemă relativă la un domeniu simplu conex, cu condiţia la limită sub forma (23).

Primită la 23 XI 1968 *Universitatea „Al. I. Cuza", Iaşi*

BIBLIOGRAFIE

1. Мусхелишвили Н. И., *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Gatewood B. E., *Note on the Thermal Stresses in a Long Circular Cylinder of Concentric Materials.* Quart. Appl. Math., 1948, *6*, pp. 84—86.

TENSIONS THERMIQUES STATIONAIRES DANS UNE PLAQUE MINCE COMPOSÉE DE PLUSIEURS MATÉRIAUX

(Résumé)

On réduit le problème de la détermination des tensions thermiques dans une plaque mince à l'intégration du systhème (12), avec la condition au contour (13). On obtient les relations (18) et (19). On utilise la méthode exposée pour étudier une plaque composée de plusieurs matériaux, avec différentes caractéristiques élastiques et thermiques.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. D. 532.5

MOUVEMENTS BAROTROPES SOUMIS À UN CHAMP DE FORCES MASSIQUES DONNÉ

PAR

C. ACKER

1. En continuant les travaux [1], ..., [3], nous allons considérer dans cette Note d'autres mouvements barotropes tridimensionels instationnaires (soumis à un champ de forces massiques donné), parmi lesquels aussi ceux qui admettent une variété (W) anholonôme quelconque définie par un champ de vecteurs unités stationnaire, orthogonal à la variété (W) et en même temps orthogonal au champ instationnaire des vitesses.

2. Si l'on utilise un repère local triorthogonal $T(I_1, I_2, I_3)$ pour lequel $I_3 = \mathbf{v}/v$ ($\mathbf{v}$ est le vecteur vitesse), alors le système différentiel extérieur fermé (S) du mouvement général barotrope tridimensionel instationnaire est le suivant:

$$(1)\qquad \mathrm{d}v = v_i\,\omega^i + v_t\,\mathrm{d}t, \qquad (2)\qquad \mathrm{d}\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_i\,\omega^i + \tilde{\rho}_t\,\mathrm{d}t,$$

$$(3)\qquad (q_t + 2vq_3)\,\mathrm{d}v + v\mathrm{d}q_t + v^2\,\mathrm{d}q_3 - \mathrm{d}\Phi_1 = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}^2}\right)\mathrm{d}\tilde{\rho} - f'\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}},$$

$$(4)\qquad (p_t + 2vp_3)\,\mathrm{d}v + v\mathrm{d}p_t + v^2\mathrm{d}p_3 + \mathrm{d}\Phi_2 = \left(f''\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}} - f'\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}^2}\right)\mathrm{d}\tilde{\rho} + f'\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}},$$

$$(5)\qquad \mathrm{d}v_t + v\mathrm{d}v_3 + v_3\mathrm{d}v - \mathrm{d}\Phi_3 = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}^2}\right)\mathrm{d}\tilde{\rho} - f'\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}},$$

$$(6)\qquad \begin{aligned}&\mathrm{d}\tilde{\rho}_t + [\tilde{\rho}_3 + \tilde{\rho}(q_1 - p_2)]\mathrm{d}v + [v_3 + v(q_1 - p_2)]\,\mathrm{d}\tilde{\rho} + \\ &+ v\mathrm{d}\tilde{\rho}_3 + \tilde{\rho}\mathrm{d}v_3 + v\tilde{\rho}\,(\mathrm{d}q_1 - \mathrm{d}p_2) = 0,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(7)\quad & [dv_i, \omega^i] + [dv_t, dt] + v_1(-[\omega^2, r_i\omega^i + r_t dt] + [\omega^3, q_i\omega^i + q_t dt]) + \\
& + v_2([\omega^1, r_i\omega^i + r_t dt] - [\omega^3, p_i\omega^i + p_t dt]) + \\
& + v_3(-[\omega^1, q_i\omega^i + q_t dt] + [\omega^2, p_i\omega^i + p_t dt]) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & [d\tilde{\rho}_i, \omega^i] + [d\tilde{\rho}_t, dt] + \tilde{\rho}_1(-[\omega^2, r_i\omega^i + r_t dt] + [\omega^3, q_i\omega^i + q_t dt]) + \\
& + \tilde{\rho}_2([\omega^1, r_i\omega^i + r_t dt] - [\omega^3, p_i\omega^i + p_t dt]) + \\
& + \tilde{\rho}_3(-[\omega^1, q_i\omega^i + q_t dt] + [\omega^2, p_i\omega^i + p_t dt) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(9)\quad & [dp_i, \omega^i] + [dp_t, dt] + p_1(-[\omega^2, r_i\omega^i + r_t dt] + [\omega^3, q_i\omega^i + q_t dt)] + \\
& + p_2([\omega^1, r_i\omega^i + r_t dt] - [\omega^3, p_i\omega^i + p_t dt]) + p_3(-[\omega^1, q_i\omega^i + q_t dt] + \\
& + [\omega^2. p_i\omega^i + p_t dt) = [r_i\omega^i + r_t dt, q_i\omega^i + q_t dt],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(10)\quad & [d\rho_i, \omega^i] + [dq_t, dt] + q_1(-[\omega^2, r_i\omega^i + r_t dt] + [\omega^3, q_i\omega^i + q_t dt]) + \\
& + q_2([\omega^1, r_i\omega^i + r_t dt] - [\omega^3, p_i\omega^i + p_t dt]) + q_3(-[\omega^1, q_i\omega^i + q_t dt] + \\
& + [\omega^2, p_i\omega^i + p_t dt) = [p_i\omega^i + p_t dt, r_i\omega^i + r_t dt],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(11)\quad & [dr_i, \omega^i] + [dr_t, dt] + r_1(-[\omega^2, r_i\omega^i + r_t dt] + [\omega^3, q_i\omega^i + q_t dt]) + \\
& + r_2([\omega^1, r_i\omega^i + r_t dt] - [\omega^3, p_i\omega^i + p_t dt]) + r_3(-[\omega_1, q_i\omega^i + q_t dt] + \\
& + [\omega^2, p_i\omega^i + p_t dt) = [q_i\omega^i + q_t dt, p_i\omega^i + p_t dt],
\end{aligned}
$$

où v est la grandeur de la vitesse, $\tilde{\rho}$ est la densité, Φ est la force massique et $p_i, p_t, q_i, q_t, r_i, r_t$ sont les coefficients des formes linéaires p, q, r qui définissent le vecteur Darboux du repère T à un déplacement

$$
(12)\qquad d\mathbf{M} = \omega^i I_i
$$

de l'origine M de ce repère (v. [1], [3]).

Dans ce système différentiel extérieur les formes linéaires ω^1, ω^2, ω^3, dt sont des formes indépendantes, $d\Phi_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont des formes linéaires données appartenant à l'anneau grassmannien $G(\omega^1, \omega^2, \omega^3, dt)$, tout les autres formes linéaires étant inconnues (en total 22) et appartenant aussi à l'anneau G.

En cherchant l'involution du système (S), nous pouvons établir l'existence et l'arbitrariété des variétés intégraux à 4 dimensions de ce système, sur lesquelles $[\omega^1, \omega^2, \omega^3, dt] \neq 0$. L'arbitrariété de ces variétés intégraux représentent pour nous l'arbitrariété des mouvements de la classe considérée[1]).

Par cette méthode nous avons établi l'existence des mouvements appartenant aux classes suivantes.

---

[1]) Cette arbitrariété n'est pas majorée par la recherche du mouvement proprement di et des autres variable de l'état thermodynamique.

A. Mouvements barotropes tridimensionels instationnaires soumis à un champ de forces massiques données (mouvements qui dépendent de 5 fonctions arbitraires de 3 arguments).

B. Mouvements (BTI)[2]) qui admettent une variété quelconque (W) anholonôme, soumis à un champ de forces massiques dont la composante comprise dans le plan trangent de la variété (W) est donnée (5 fonctions arbitraires de 3 arguments).

En utilisant le repère $T(I_1, I_2, I_3)$ ayant $I_3 = \mathbf{v}/v$ et I_2 normal au cône local des vitesses (T_1), ou normal au plan de Lamb (T_2), ou encore situé sur la binormale de la ligne du courent (T_3), signalons quelques propriétés pour la cas général du mouvement (BTI).

a) À un moment quelconque donné la courbure moyenne du champ des vecteurs unités $(\mathbf{v}/v)$ est égale à la somme de la dérivée logarithmique de la densité le long de la trajectoire (de la particule) et de la dérivée logarithmique de la grandeur de la vitesse le long de la ligne du courent

$$p_2 - q_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_{\mathrm{tr}}} \ln \tilde{\rho} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_{(\mathrm{l.c})}} \ln v. \tag{13}$$

b) Les projections du vecteur $(\Phi - c^2 \operatorname{grad} \ln \tilde{\rho})/v$, (où c est la vitesse locale du son), sur les axes I_1, I_2 du repère T_1 représentent à un moment quelconque donné la courbure géodésique, respectivement la courbure normale de la configuration Myller [tr., I_3, P_2], (où P_2 est le plan (I_3, I_1) du repère T_1).

c) En utilisant le repère T_2 on peut facilement observer à un moment quelconque donné l'égalité entre la courbure géodésique de la ligne du courent sur la variété instantanée de Lamb[3]) et de la dérivée logarithmique de la grandeur de la vitesse dans la direction perpendiculaire à la vitesse et comprise dans le plan tangent du cône local de Lamb [4]).

d) En utilisant le repère T_3 observons l'égalité entre la projection du vecteur $(\Phi - c^2 \operatorname{grad} \ln \tilde{\rho})/v$ sur la binormale de la ligne du courent et la différence entre les courbures normaux des configurations Myller [tr., I_3, P_2] et [(l. c), I_3, P_2), où P_2 sont les plans osculateurs des lignes du courent, à un moment quelconque donné.

Pour les mouvements (BTI) qui admettent une variété W anholonôme de l'espace E_3, nous allons utiliser exclusivement le repère T_1. Signalons tout d'abord une propriété qui caractérise ces mouvements dans la classe des mouvements (BTI) :

e) les torsions géodésiques des configurations Myller [tr., I_3, P_2] et des lignes du courent sur la variété définie par le champ des vecteurs I_2 (orthogonal à cette variété) sont égaux.

---

[2]) Barotropes tridimensionels instationnaires.

[3]) C'est l'ensemble des plans de Lamb à un moment donné.

[4]) Le cône local de Lamb est l'enveloppe des plans de Lamb à un point quelconque du domaine où se développe le mouvement.

f) Le vecteur unité I_3 ($= \mathbf{v}/v$) qui dans le cas général du mouvement (BTI) balayait le cône local des vitesses, balaie maintenant un secteur circulaire situé dans le plan tangent, stationnaire, de la variété W (anholonôme, à un point quelconque de celle-ci ; la vitesse de rotation q_t de I_3 dans ce plan est donnée par la relation :

$$q_t = v\left(\frac{1}{R^{(2)}_{gtr}} - \frac{1}{R^{(2)}_{g(l.c)}}\right), \tag{14}$$

où $1/R^{(2)}_{gtr}$ et $1/R^{(2)}_{g(l.c)}$ sont les corbures géodésiques des configurations Myller [tr., I_3, P_2] et [(l.c), I_3, P_2], (P_2 sont des plans (I_3, I_1) des repères T_1 à un moment donné). La même vitesse de rotation peut être exprimée en utilisant l'équation d'Euler projetée sur la direction I_1 perpendiculaire à la vitesse et située dans le plan tangent de la variété W, à un point quelconque de celle-ci :

$$q_t = \frac{1}{v}\left[I_1\left(\Phi - c^2 \operatorname{grad} \ln \tilde{\rho}\right)\right] - \frac{v}{R^{(2)}_{g(l.c)}}. \tag{15}$$

g) La vitesse de la variation de $|\mathbf{v}|$ (c'est à dire v_t) à un point qulconque du domaine où se développe le mouvement, a l'expression

$$v_t = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_{tr}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_{(l.c)}}\right)\frac{v^2}{2}, \tag{16}$$

et l'équation d'Euler projetée sur la direction I_3 de la vitesse permet d'obtenir pour la même fonction, l'expression

$$v_t = I_3\left(\Phi - c^3 \operatorname{grad} \ln \tilde{\rho}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_{(l.c)}}\left(\frac{v^2}{2}\right). \tag{16'}$$

h) Retenons aussi quelques relations mises en évidence par les conditions d'intégrabilité du système (S) écrit dans le repère T_1 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln\left(\frac{1}{R^{(2)}_{n(l.c_1)}}\right) = q_t\,(m_1 + m_2), \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln\left(\frac{1}{\tau^{(2)}_{g(l.c_1)}}\right) = q_t\,(m'_1 + m'_2), \tag{18}$$

où m_1, m_2 sont les coéficients angulaires des directions asymptotiques du champ (I_2) et m'_1, m'_2 sont les coéficients angulaires des directions des lignes de la courbure du même champ (I_2), dans le repère (I_3, I_1) ; $1/R^{(2)}_{n(l.c_1)}$, $1/\tau^{(2)}_{g(l.c_1)}$ sont la courbure normale et la torsion géodésique de la ligne $\omega^2 = \omega^3 = \mathrm{d}t = 0$ sur la variété W.

Reçue le 21 VII 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique Théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Аскер К., *Вариация направления скорости в слотстно неустановившемся течении идеавьной жидкости на семействе цилиндрических поверхностей*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*, pp. 123—130.
2. Acker C., *Quelques mouvements transversaux d'un fluide compressible sur une variété anholonôme*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3—4*, pp. 153—159.
3. — *Écoulements au long d'une variété linéaire (LAi) de l'espace E_3 dont les directions asymptotiques sont indéterminées*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1—2*, pp. 145—148.
4. Coburn N., *Intrinsec Relations Satisfied by the Vorticity and Velocity Vectors in Fluid Flow Theory*. Michigan, Math. J., 1954, *1*.
5. Георгиев Г., *Нестационарные движения идеавьной жидкости вдоль линейной неговономной поверхности*. An. Şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, 1959, **V**.
6. — *Дифференциально-геометричезкие свойсива нестационачных движений в гидродинамнке н в магнитной гидромеханике*. An. Şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, 1960, **VI**, *2*.
7. Miron R., *Geometria configuraţiilor Myller*. Ed. tehn., Buc., 1966.
8. Truesdell C., *Intrinsec Equations of Spatial Gas Flow*. ZAMM, 1960, *4*, *1—2*, pp. 9—14.

MIŞCĂRI BAROTROPE ÎNTR-UN CÎMP DE FORŢE MASICE DATE

(Rezumat)

Se rezolvă problema existenţei, într-un cîmp de forţe masice date, a mişcărilor barotrope ce admit o varietate neolonomă W definită de un cîmp staţionar de versori, ortogonal varietăţii şi ortogonal totodată cîmpului nestaţionar al vitezelor, punîndu-se în evidenţă şi unele proprietăţi locale ale acestor mişcări.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 532.54

FLOW OF NON-NEWTONIAN LIQUIDS THROUGH CIRCULAR TUBES

BY

A. MUKHERJEE

1. Introduction

The flow of fluids in circular tubes is encountered frequently in Physics, Chemistry, Biology and Engineering [1]. The flow of newtonian fluid was first discussed by G. Hagen [2] and next by Poiseuille [3] and subsequently by many others. But excepting air and water, a vast majority of common fluids obey laws of viscosity other than that given by Newton. So it became increasingly necessary to study the flow of non-newtonian fluids. The flow of Bingham plastic fluid through a circular tube has been discussed by E. Buckingham [4] and M. Reiner [5], [6].

In the present paper, the flow of Eyring and Reiner-Philippoff model fluids have been analysed.

2. The Eyring Model

The relation between shearing stress and shear rate in the case of Eyring model liquid in cylindrical coordinates is given by [1, p. 12]

$$\tau_{rz} = A \operatorname{arcsinh}\left(-\frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right). \tag{1}$$

The two parameter model is derivable by the Eyring kinetic theory of liquids and gives non-newtonian flow of liquids in general. It predicts pseudo plastic behaviour at finite values of τ_{rz} but reduces asymptotically to Newton's law of viscosity with $\mu = A/B$ as $\tau_{rz} \to 0$. Here

$$v_r = v_\theta = 0 \quad \text{and} \quad v_z = v_z(r). \tag{2}$$

From (1) $\tau_{rz} = \tau_{rz}(r)$.

For cylindrical symmetry the equations of motion are

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\tau_{rz}) = \frac{\partial p}{\partial z}, \tag{5}$$

$$p = p(z). \tag{6}$$

From (5) we find L.H.S. is a function of r only and R.H.S. of z; each must be a constant $= -2\lambda$ (say), where $\lambda = (p_0 - p_L)/(2L)$, with $p = p_0$ at $z = 0$; $p = p_L$ at $Z = L$; L = lenght of the pipe.

From (5) $r\tau_{rz} = \lambda r^2 + C_1$, where C_1 is a constant of integration, i. e.

$$\tau_{rz} = \lambda r + \frac{C_1}{r}, \tag{7}$$

where $\lambda R = (\tau_{rz})_{\max}$, with R = radius of the outer cylinder.

The momentum flux is not infinite at $r = 0$, hence $C_1 = 0$.

From (1) and (7) we obtain $\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}r = -B \sinh(\lambda r/A)$, whence

$$v_z = \frac{AB}{\lambda}\left(\cos \mathrm{h}\frac{\lambda R}{A} - \cosh\frac{\lambda r}{A}\right), \tag{8}$$

since on the boundary of the cylinder $r = R$, $v_z = 0$.

Maximum velocity v_m occurs at $r = 0$,

$$v_m = \frac{AB}{\lambda}\left(\cosh\frac{\lambda R}{A} - 1\right). \tag{9}$$

The average velocity over a cross-section is

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta} = \tag{10}$$

$$= \frac{AB}{\lambda}\left[\left(1 + \frac{2A^2}{\lambda^2 R^2}\right)\cosh\frac{\lambda R}{A} - \frac{2A}{\lambda R}\left(\sinh\frac{\lambda R}{A} + \frac{A}{\lambda R}\right)\right],$$

and the volume rate of flow (area $\times$ average velocity)

$$Q = \frac{\pi AB R^2}{\lambda}\left[\left(1 + \frac{2A^2}{\lambda^2 R^2}\right)\cosh\frac{\lambda R}{A} - \frac{2A}{\lambda R}\left(\sinh\frac{\lambda R}{A} + \frac{A}{\lambda R}\right)\right]. \tag{11}$$

In the limiting case when $\tau_{rz} \to 0$ this model reduces asymptotically to Newton's model of viscosity with $A/B \to \mu$ [1, p. 14].

In that case $\lambda R/A$ is smal and so

$$v_z \approx \frac{B\lambda R^2}{2A}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{\lambda}{2\mu} R^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = v_m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),$$

$$\bar{v}_z \approx \frac{B\lambda R^2}{4A} = \frac{\lambda R^2}{4\mu}, \qquad Q = \frac{\pi (p_0 - p_L) R^4}{8\mu L},$$

which are Hagen-Poisseuille's [3] result for a newtonian fluid.

3. The Reiner-Philippoff Model

The relation between shear stress and shear rate in the case of Reiner-Philippoff model fluid is given by [1, p. 14]

$$-\frac{dv_z}{dr} = \frac{\tau_{rz}}{\mu_\infty + \dfrac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \tau_{rz}/\tau_s^2}}. \tag{12}$$

This model contains three adjustable parameters μ_0, μ_∞, τ_s and reduces to Newton's law of viscosity when $\mu_0 = \mu_\infty = \mu$.

Molten sulpher at 120 °C, cholesterol butyrate at 100 °C, 30.4% methanol in hexane at 34 °C, 0.4% polystyrene in tetralin at 20 °C etc. obey this law of viscosity. The values of μ_0, μ_∞, τ_s for a number of liquids are given in [1, p. 14].

Integrating (12) with the help of (7) we find

$$v_z = C_2 - \left[\frac{\lambda r^2}{2\mu_\infty} + \frac{\tau_s^2 (1 - \mu_0/\mu_\infty)}{2\mu_\infty \lambda} \log\left(r^2 + \frac{\mu_0 \tau_s^2}{\mu_\infty \lambda^2}\right)\right].$$

Since $v_z = 0$ at $r = R$, we obtain

$$v_z = \frac{\lambda R^2}{2\mu_\infty}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{\tau_s^2 (1 - \mu_0/\mu_\infty)}{2\mu_\infty \lambda} \log \frac{b + R^2}{b + r^2}, \tag{13}$$

where

$$b = \frac{\mu_0 \tau_s^2}{\mu_\infty \lambda^2} = \frac{\mu_0 \tau_s^2}{\mu_\infty \tau_{\max}^2} R^2 \; (= \alpha R^2),$$

so that

$$v_z = \frac{\lambda R^2}{2\mu_\infty}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{\tau_s^2 (1 - \mu_0/\mu_\infty)}{2\lambda\mu_\infty} \log \frac{\alpha + 1}{\alpha + r^2/R^2}. \tag{13'}$$

Maximum velocity occurs at $r = 0$,

$$v_m = \frac{\lambda R^2}{2\mu_\infty} + \frac{\tau_s^2(1-\mu_0/\mu_\infty)}{2\lambda\mu_\infty}\log\frac{\alpha+1}{\alpha+r^2/R^2} \quad (14)$$

The average velocity is

$$\bar{v}_z = \frac{\lambda R^2}{4\mu_\infty} + \frac{\tau_s^2}{2\lambda\mu_\infty}\left(1-\frac{\mu_0}{\mu_\infty}\right)\left(1-\alpha\log\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \quad (15)$$

and the rate of discharge

$$Q = \frac{\pi\lambda R^4}{4\mu_\infty} + \frac{\pi R^2\tau_s^2}{2\lambda\mu_\infty}\left(1-\frac{\mu_s}{\mu_\infty}\right)\left(1-\alpha\log\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \quad (16)$$

For a newtonian fluid $\mu_0 = \mu_\infty = \mu$ and therefore

$$v_z = \frac{\lambda R^2}{2\mu_\infty}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right), \qquad v_m = \frac{\lambda R^2}{2\mu_\infty},$$

$$\bar{v}_z = \frac{\lambda R^2}{4\mu_\infty}, \qquad Q = \frac{\pi\lambda R^4}{4\mu_\infty}.$$

These results have already been deduced by Hagen [2]-Poiseuille [3].

Acknowledgement. I express my indebtedness to Mr. S. Ghoshal of the Department of Mathematics, Jadarpur University, for his help and guidance.

Received the 29 VIII 1967

Jadarpur University, Calcutta, India

REFERENCES

1. Bird R. B., Steward W. E., Lighfoot E. N., *Transport Phenomena.* John Wiley and Sons, New York, 1962.
2. Hagen G., Ann. Phys. Chem., 1839, **46,** pp. 423–442.
3. Poiseuille H., C.r. de l'Acad. des Sc. de Paris, 1840, **10,** p. 41, **11,** pp. 961; 1841, **12,** p. 112.
4. Buckingham E., Proc. ASTM, 1921, **21,** pp. 1154–1161.
5. Reiner M., *Deformation and Flow.* Lewis, London, 1949.
6. — *Phenomenological Macrorheology.* Ch. 2 in F. R. Eirich, „Rheology", Vol. **1,** Academic Press, New York, 1956, p. 45.

CURGEREA LICHIDELOR NENEWTONIENE PRIN TUBURI CIRCULARE

(Rezumat)

Se studiază curgerea unor fluide descrise de modelul Eyring și modelul Reiner-Philippoff. Se arată că rezultatele bine cunoscute ale lui Hagen-Poiseuille privind curgerea fluidelor newtoniene prin tuburi circulare reprezintă cazuri limită ale celor ce se stabilesc în lucrare pentru modelele analizate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

Д. К. 530.145

НИЖНЫЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ ЭКСИТОНА В НЕКОТОРЫХ КРИСТАЛЛАХ

С. Г. РЫЖАНОВ

1. Как известно, у бромида и иодида серебра, предварительно слабо засвеченных, при 425 ммк. имеется резкий максимум внутреннего фототока (у иодида серебра он немного сдвинут в длинноволновую область спектра). Поглощение света в визуальной области спектра в интервале от 520 ммк до 390 ммк для бромида, всеми относится за счёт генерации светом диссоциирующих экситонов [1], [2]. Для того, чтобы ето могло-бы иметь место, как тепловым путём, так и под действием флуктуаций внутрикристаллических полей, экситоны должны обладать достаточно малой энергией связи.

В работе [3] показано, что для объяснения всех сюда относящихся эмпирических фактов, нужно считать, что энергия связи экситона будет порядка 0,01 эл. в., а возможно и ниже. Экспериментально установлены водородо-подобные линии поглощения, которые следует приписать экситонам с энергией связи в 0,2...0,33 эл. в. [4]. Такая-же энергия связи слишком велика для рассматриваемых диссоцирующиих экситонов.

Здесь мы покажем теоретически, что в кристаллах типа указанных галогенидов серебра возможны как экситоны сравнительно малого радиуса с энергией связи в пару десятых эл. в., так и экситоны большого радиуса с энергией связи в десяток раз меньше.

2. Для энергии связи экситона в поляризующейся среде существует формула Мотта [5] выражающая собою энергетическое отстояние основного экситонного уровня от дна зоны проводимости:

$$E_1 = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2\varepsilon^2}. \tag{1}$$

Здесь: ε — диэлектрическая проницаемость среды, μ — эффективная масса экситона, e — заряд электрона. Знак минус указывает на то, что основной уровень лежит ниже дна зоны проводимости располагаясь в запрещённой полосе диэлектрика.

При допустимый величине ε энергия связи не должна превышать нескольких десятых эл.в. Напомним, что эффективная масса экситона

$$\mu = (m_e^{-1} + m_n^{-1})^{-1}. \tag{2}$$

Весъма малая энергия связи, в сотые доли эл.в. и ниже, выходит лишь

при выполнении неравенств $m_e \ll m_0, m_n \ll m_0$, где m_0 — масса свободного электрона, в это несовместимо с эмпирическим значением [7] ширины валентной зоны.

Рассмотрим уравнение Шредингера для экситона:

$$\Delta\Psi + \varkappa^2 U(r)\Psi = E\Psi, \tag{3}$$

где $\varkappa^2 = 2\mu/\hbar^2$, $U(r)$ — потенциальная энергия экситона, E — его полная энергия, а Ψ — волновая функция в состоянии с энергией E.

Потенциальная энергия экситона $U(r)$, при взятом расстоянии между электроном и дыркой состоит из двух слагаемых. Из чисто кулоновского взаимодействия электрона с дыркой находящихся в поляризующейся среде $U_c(r) = -e^2/(\varepsilon r)$; это слагаемое есть результат статической поляризации. Кроме этого имеет место динамическая поляризация среды благодаря обмену фононами между электроном и дыркой. В куперовской паре [8] электроны с противоположно ориентированными импульсами и спинами притягиваются друг к другу таким взаимодействием, тогда как в экситоне электрон и дырка должны этим взаимодействием отталкиваться, ибо электрические заряды компонентов пары разноимянны. Однофононное взаимодействие создаёт потенциальную энергию, согласно [9, гл. 7] ввиде

$$U_\Phi(r) = \left(\frac{1}{\varepsilon_\infty} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right)\frac{e^2}{r}; \tag{4}$$

здесь ε_0 и ε_∞ — диелектрические проницаемости на малых и больших частотах. У экситонов большого радиуса существенно экранирование свободных зарядов зарядами поляризации, введя фактор Дебая — Гюккеля [10, стр. 135—138], получаем окончательно

$$U(r) = \left(\frac{1}{\varepsilon_\infty} - \frac{2}{\varepsilon_0}\right)\frac{e^2}{r}e^{-\lambda r}, \tag{5}$$

где $\lambda = 1/r_0$, а r_0 — радиус экранирования. Будем искать решение уравнения (3) ввиде $\Phi = r\Psi$. Введя безразмерные величины $\rho = \lambda r$, $a = \mu E/(m_0^2 c^2)$, $b = \mu e^2/(m_0 \bar{\varepsilon}\hbar c)$ где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\infty^{-1} - 2\varepsilon_0^{-1})^{-1}$ приведём уравнение (3) к виду

$$\frac{d^2\Phi}{d\rho^2} + \left(a + b\frac{e^{-\rho}}{\rho}\right)\Phi = 0. \tag{6}$$

Положив $\Phi = \rho \exp[-(1/2)\alpha\rho]$ можно получить решение уравнения (6) в параметрической форме с помощию параметра ρ; оно приводится в монографии [10]. Сделаем оценку возможных значений параметра ρ, исходя из модели прямоугольного потенциального колодца [11]. Легко видеть, что

$$d\rho = \frac{2}{\hbar}(2\mu E)^{1/2} r.$$

Использовав значения входящих параметров по цитированным источникам, получаем $d \simeq 1$, а в таком случае

$$E_1 = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \varepsilon^2}(\alpha - 1), \quad \mu \cong \frac{m_0}{2}. \tag{7}$$

Несложное вычисление показывает, что $|E_1|$ не больше 0,01 эл. в. Многофононное взаимодействие между электроном и дыркой в экситоне учитывается в первом приближении теории возмущений квантовой механики, что даёт формулу

$$E_1 = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \varepsilon^2}(\alpha - 1) + 0{,}3\frac{\hbar^2}{\alpha \mu r_{1s}^2}, \tag{8}$$

где r_{1s} — радиус основного эскитонного состояния. Поправочный член в правой части последнего равенства вносит лишь несущественное уменьшение $|E_1|$ по (7).

Так как экситон обладает трансляционными степенями свободы, то энергетический уровень размывается в полосу, ширина которой выражается ввиде

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{\bar{\mu} d^2}, \tag{9}$$

где $\bar{\mu}$ — трансляционная масса экситона [14] а d — период решётки. График зависимости „энергия — квазиимпульс" $E(P)$, где E — энергия состояния с квазиимпульсом P, имеет при $P = 0$ параболическую форму, а так как экситоны генерируются светом в приповерхностном слое дислокаций [13], [14], то зона экситонных состояний оказывается двуполой. Одна из них дно которой отстоит от дна зоны проводимости на сотые доли зд. в. пересекает зону проводимости образуя с нею перекрытие. Вторая ветвь, обращённая вершиной вверх по оси энергий, имеет по обе стороны от вершины по энергетическому минимуму отстоящему от вершины на несколько десятых долей эл. в.. Экситоны Ванье-Мотта находящиеся в метастабильнои состоянии на вершине зоны могут сваливаться в энергетические минимумы образуя на ряду с первыми экситоны Ф р е н к е л я [16] с энергией связи 0,2...0,3 эл.в.

Поступила 18 VI 1968

Кишиневский университет,
Кишинёв, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Зейтц Ф., *Современая теория твёрдого тела.* ГИТТЛ, М., 1949, стр. 604.
2. Рыжанов С. Г., *О механизме образования скрытого фотографического изображения.* ЖЭТФ, 1945, , стр. 108.
3. — *Роль оптическим запрещённых переходов в механизме поглощения света бромидом серебра.* Журн. научн. и прикл. фотографии и кинематографии, 1959. *4*, *2*, стр. 136.
4. Козырева В. Б., Мейкляр П. В., *Спектры люминесценции галогенидов серебра.* Оптика и спектроскопия, 1967 *3*, стр. 23.,
5. Нокс Р., *Теория экситонов.* МИР, М, 1966 стр. 66,
6. Мотт Н., Гёрни Р., *Электроные процессы в ионных кристаллах.* ИЛ, М, 1950, стр. 138.
7. O'Bryan H. M., Skinner H., Proc. Roy. Soc., 1940, **A 176**, p. 229.
8. Займан Дж., *Принципы теории твёрдого тела.* МИР, М., 1966, стр. 384.
9. Киттель Ч., *Квантовая теория твёрдых тел.* Г.Р.Ф.—М.Л., М., 1967.
10. Мотт Н., Снеддон И., *Волновая механика и её приложения.* Г.Р.Ф.—М.Л., М., 1966, гл. *5*, стр. 149
11. Френкель Я. И., *Волновая механика.* Г.Т.—Т.И., Л., 1933, стр. 148.
12. Heller W. R., Marcus A., Phys. Rev., 1951, **84**, p. 609.
13. Brown F., Seltz F., *Imperfections in the Silver Halide*, 1957.
14. Рыжанов С. Г., *О механизме образования скрытого фотографического изображения.* Журн. научн. и прикл. фотографии и кинематографии, 1958, *3*, стр. 3.
15. Fränkel I. I., Phys. Rev., 1931, **37**, *17*, p. 1276.

LIMITA INFERIOARĂ A ENERGIEI DE LEGĂTURĂ A EXCITONULUI ÎN UNELE CRISTALE

(Rezumat)

Se demonstrează pe cale teoretică că la cristalele de bromură și iodură de argint se pot întîlni atît excitoni cu raza relativ mică și energia de legătură de ordinul zecimilor de eV, cît și excitoni cu rază mare, avînd energia de legătură de zeci de ori mai mică.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Secţia I
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. D. 534.8

LA PROPAGATION DES ONDES MAGNÉTOACOUSTIQUES RAPIDES DANS LE CHAMP D'UN MONOPÔLE

PAR

R. V. DEUTSCH et F. LAUR

1. Introduction

Lorsque l'ordre de grandeur de la vitesse Alfvèn diffère beaucoup de l'ordre de grandeur de la vitesse du son c_0 dans le plasma, apparaît la possibilité d'étudier la transmission des ondes magnétoacoustiques rapides dans des milieux nonhomogènes, en utilisant le principe de Fermat [1].

Dans cet ouvrage nous allons nous limiter à l'étude de la transmission de ces ondes dans le plasma homogène situé dans le champ d'un monopôle magnétique.

En l'occurence, le champ possède une symétrie sphérique et, en coordonnées sphériques il peut être caractérisé par les composants de l'induction magnétique

$$B_r = \frac{a}{r}, \quad B_\varphi = B_\nu = 0. \tag{1.1}$$

Par conséquent, il y a différents domaines d'intensité du champ magnétique et nommément :

$$U \gg c_0, \quad \text{si} \quad r \ll r^* = \sqrt{\frac{a}{c_0 \sqrt{\mu \rho}}}, \tag{1.2}$$

$$U \approx c_0, \quad \text{si} \quad r \approx r^*, \tag{1.3}$$

$$U \ll c_0, \quad \text{si} \quad r \gg r^*. \tag{1.4}$$

Nous avons noté avec μ la perméabilité magnétique du milieu et avec ρ sa densité.

Le principe de Fermat peut être appliqué sous la forme connue dans l'optique géométrique dans le premier et le dernier cas. Nous allons étudier la propagation des perturbations magnétoacoustiques dans les domaines qui correspondent aux inégalités (1.2) et (1.3). Nous calculerons aussi les corrections du premier ordre par rapport à l'anisotropie de la vitesse de transmission de l'onde magnétoacoustique rapide.

Les résultats obtenus nous permettent de trouver une représentation calitative de la propagation des ondes magnétoacoustiques aussi dans les domaines où les inégalités (1.2) et (1.4) ne sont pas satisfaites.

2. Propagation dans le voisinage du pôle magnétique

Quand la relation (1.2) est satisfaite, c'est-à-dire dans le voisinage du pôle, la vitesse de propagation des ondes rapides peut être écrite sous la forme

$$v = U = \frac{a}{\sqrt{\mu\rho}} \frac{1}{r^2} \tag{2.1}$$

et le problème de la transmission des ondes rapides se réduit à un problème de transmission des ondes dans le plan. L'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = k r^4, \tag{2.2}$$

où nous avons noté

$$k = \frac{\mu\rho}{a^2} . \tag{2.3}$$

Puisque φ est une variable cyclique, $\partial S/\partial\varphi = \text{const} = \beta$ et par conséquent

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{\frac{k r^6 - \beta^2}{r^2}} . \tag{2.4}$$

En intégrant, nous trouvons l'expression de S

$$S = \frac{1}{3}\beta\left(\sqrt{\frac{r^6 k}{\beta^2} - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r^6 k}{\beta^2} - 1}\right) + \beta\varphi, \tag{2.5}$$

d'où

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r^6}{r_0^6} - 1} + \varphi = \varphi_0 = 0, \tag{2.6}$$

où nous avons mis

(2.7) $$r_0^6 = \frac{\beta^2}{k}.$$

Donc l'équation des rayons qui correspondent aux ondes rapides dans le domaine $r \ll r^*$ est

(2.8) $$r = \frac{r_0}{\sqrt[3]{\cos 3\varphi}}.$$

On remarque que l'expression (2.5) de l'action est réelle seulement pour $r > r_0$. Par conséquent, r_0 peut être interprété comme la distance minime jusqu'à laquelle l'onde magnétoacoustique peut s'approcher du centre du champ.

On observe que la solution présente des assymptôtes obliques pour $\varphi = \pm \pi/6$. La perturbation intiale se propagera à travers des ,,rayons'' qui se courbent dans le point de coordonnées $(r = r_0,\ \varphi = 0)$, en restant toujours du même coté de la tangente en ce point.

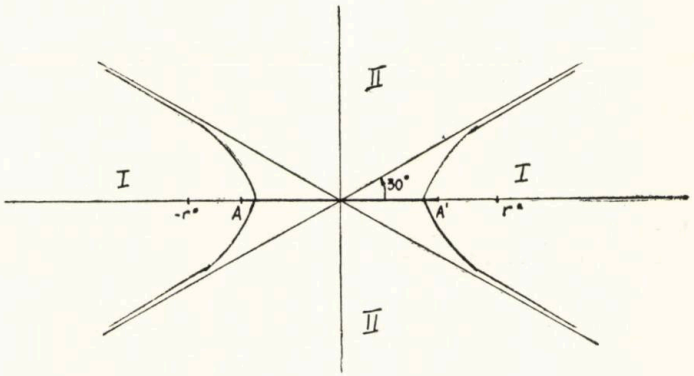


Fig. 1.

On remarque aisément que l'angle formé par le rayon incident etle rayon émergent est $\pi/3$.

Puisque la famille des trajectoires qui dépend du paramètre r_0 occupe seulement le domaine I, nous pouvons nous attendre qu'il existe un domaine II, dans lequel les perturbations qui initialement ont occupé une portion plane AA' dans le voisinage du monopôle magnétique, ne peuvent pas pénétrer.

L'influence de l'anisotropie de la vitesse de propagation apparaît dans le domaine où r ne diffère trop de r_0. Pour apprécier l'influence de cette anisotropie, nous pouvons développer en série la vitesse de phase des ondes magnétoacoustiques rapides par rapport à c_0/U ; on obtient ainsi dans l'approximation du premier ordre

$$v = U\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{c_0}{U}\right)^2 \sin^2\theta\right]. \tag{2.9}$$

Si nous nous bornons à l'approximation du premier ordre pour la déviation de l'action par rapport à la valeur (2.5) nous obtenons

$$\Delta S = c_0^2 \sqrt{k}\, \beta^2 r. \tag{2.10}$$

D'ici résulte

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r^6}{r_0^6} - 1} + \varphi + 2c_0^2 k r_0^3 r = \varphi_0 = 0 \tag{2.11}$$

et l'équation de la trajectoire a la forme

$$r^6 = r_0^6\,[1 + \operatorname{tg}^2(3\varphi + 6c_0^2 k r_0^3 r)]. \tag{2.12}$$

On observe que cette correction conduit à un élargissement du domaine I et en même temps, à la disparition de l'assymptôte.

3. Propagation à des grandes distances du pôle magnétique

C'est instructif à étudier l'autre cas limite, $U \ll c_0$. Dans l'approximation d'ordre 0 pour les ondes rapides nous avons

$$v_\varphi \approx c_0, \tag{3.1}$$

c'est à dire le problème se réduit à l'étude d'une onde acoustique pure. L'équation Hamilton-Jacobi conduit à l'action

$$S_0 = \frac{1}{c_0}\sqrt{r^2 - \beta^2 c_0^2} - \beta \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{r^2 - \beta^2 c_0^2}}{\beta c_0} + \beta\varphi, \tag{3.2}$$

et celle-là à l'équation du rayon

$$r = \frac{r_0}{\cos\varphi}, \tag{3.3}$$

où $r_0 = \beta c_0$ est la distance minime jusqu'à laquelle arrive la perturbation par rapport au centre du champ du monopôle.

On trouve ainsi un résultat tout à fait prévisible : l'équation des „rayons" (3.3) est une ligne droite qui passe à la distance r_0 du monopôle. Ce résultat représente une conséquence de l'indépendance de la transmission des ondes acoustiques de la présence du champ.

L'approximation utilisée dans la relation (3.2) est valable seulement dans l'occurence où $r \gg r^*$.

À des distances plus petites apparaît l'influence du champ magnétique. En telle circonstance, s'avère essentielle la considération des termes

d'ordre supérieur. Dans l'approximation du premier ordre nous trouvons pour la vitesse de phase

$$v = c_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{U}{c_0}\right)^2 \sin^2\theta\right]. \tag{3.4}$$

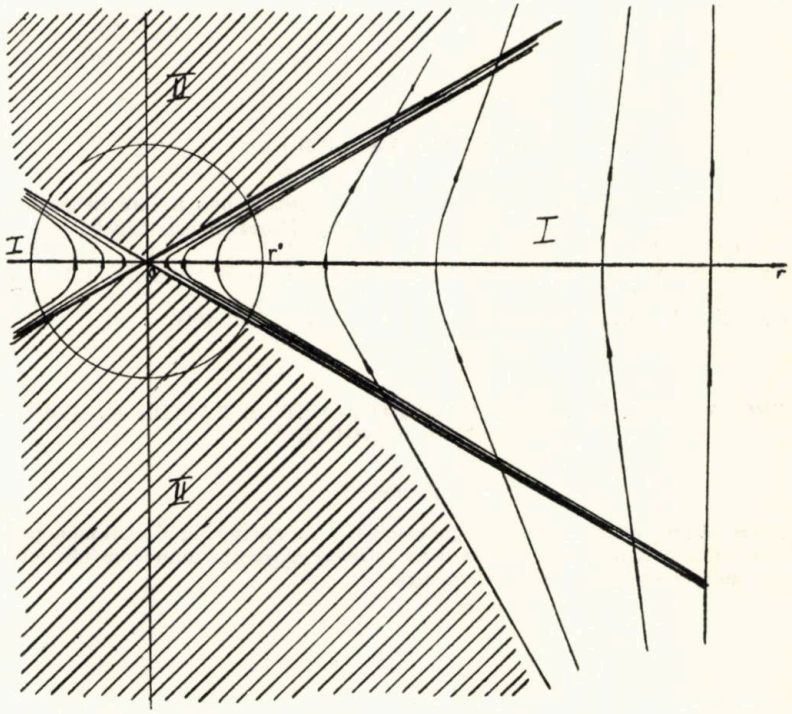


Fig. 2

En utilisant cette approximation pour la vitesse de phase des ondes magnétoacoustiques rapides nous obtiendrons une déviation petite par rapport à la trajectoire droite.

En synthétisant les résultats antérieurs et en élargissant ces résultats aussi dans les domaines où ne sont pas satisfaites les conditions (1.2) et (1.4) nous obtenons pour la propagation des ondes magnétoacoustiques qui pour un certain moment forment une onde plane (dont la surface d'onde est un plan qui contient aussi le pôle magnétique O) l'image représentée dans la fig. 2, qui reflète toutes les propriétés, antérieurement analysées, des rayons.

En outre, nous devons encore préciser qu'il y a un domaine II où les perturbations avec la propriété mentionnée ne peuvent pas pénétrer. Ce

domaine est limité par la surface obtenue par la rotation des enveloppes des „rayons" autour de la normale à la surface initialement plane des ondes magnétoacoustiques rapides. Ce domaine „interdit" est hachuré sur la fig. 2.

Reçue le 16 III 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Physique
et
Académie de la République
Socialiste de Roumanie,
Filiale de Jassy

BIBLIOGRAPHIE

1. Доич Р. В., Труды третьей конференции по исследования в области физики пласмы и управляемых термоядерных реакций. Новосибирск, СССР, 1—7 авг. 1968, СН—24/Г.—14.
2. Deutsch R. V., *Teoria magnetohidrodinamică în fizica plasmei.* Ed. Acad. RSR, Buc., 1966.
3. Ленерт Б., *Динамика заряженных частиц.* Гостех., М., 1966.

PROPAGAREA UNDELOR MAGNETOACUSTICE RAPIDE ÎN CÎMPUL UNUI MONOPOL

(Rezumat)

Se studiază propagarea undelor magnetoacustice rapide în cimpul unui monopol magnetic Folosind metodele opticii geometrice se demonstrează existența unui domeniu interzis unde nu pot pătrunde aceste unde magnetoacustice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 3—4, 1969

SECŢIA II

CHIMIE INDUSTRIALĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV XIX), вып. 3- 4, 1969

СЕКЦИЯ II

ИНЖЕНЕРНАЯ ХИМИЯ

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 3—4, 1969

SECTION II

CHEMICAL ENGINEERING

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia II
CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 661.731; 661.847

STUDIUL TERMOGRAVIMETRIC ŞI AL SPECTRULUI DE ABSORBŢIE IN INFRAROŞU AL ACETAŢILOR BAZICI DE ZINC

DE

TIBERIU GOLGOŢIU şi I. ROŞCA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Este cunoscut că ionii de zinc ca şi ionii altor metale pot forma în anumite condiţii hidroxizi greu solubili, săruri bazice şi produşi de compoziţie complexă. Astfel, din soluţiile apoase amoniacale ale acetatului de zinc pot precipita săruri bazice de compoziţie variabilă [1]:

$$Zn(OH)_{2-x} \cdot Ac_x \cdot nH_2O, \quad Zn(OH)_{2-x} \cdot Ac_x \cdot nH_2O \cdot sNH_3$$

(se notează prescurtat CH_3COO^- cu Ac^-).

Formarea şi stabilitatea acestor acetaţi bazici în mediu apos amoniacal, a fost studiată de autori [1], urmînd ca în această lucrare să continuăm cu analiza termică şi spectroscopică în infraroşu.

Recent au apărut studii interesante [2], [3], privind descompunerea acetaţilor de Ca, Sr, Ba, Mg, Zn şi Cd, ca produşi intermediari ai cetonizării catalitice a acidului acetic pe carbonaţi sau oxizi.

Descompunerea acetaţilor în acetonă şi bioxid de carbon ca produşi gazoşi, este menţionată în numeroase lucrări [4]...[10]. După unii autori [11], [12], prin descompunerea acetaţilor se formează şi anhidridă acetică. Descompunerea sărurilor acizilor organici, în particular a acetaţilor, se presupune a fi de tip ionic [13]...[17], radicalic [7], [8], [18]...[20] sau autocatalitic [17].

Varietatea proceselor de descompunere termică a acetaţilor şi în special a acetaţilor bazici este strîns legată de ionii metalelor din aceste săruri şi de condiţiile în care se efectuează distrucţia termică.

Astfel, acetaţii bazici de aluminiu se descompun pe faze, formîndu-se intermediar oxiacetaţi şi anhidridă acetică [21] ca şi acetaţi bazici de fier şi crom [22].

2. Studiul termogravimetric

Studiul termogravimetric pe care îl prezentăm în această lucrare implicînd şi cinetica descompunerii termice se referă la acetaţii bazici de zinc obţinuţi din soluţiile apoase amoniacale ale acetatului de zinc. Condiţiile de obţinere şi determinarea compoziţiei acetaţilor bazici de zinc sînt date în lucrarea [1].

Au fost luaţi în studiu acetaţi bazici de zinc corespunzători formulelor :

(I) $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O$,

(II) $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \cdot 2NH_3$,

(III) $3Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot H_2O$,

(IV) $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$.

Din termograma $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$ se constată că apa de hidratare se degajă pînă la temperatura de 110 °C (fig. 1).

Descompunerea acetatului de zinc începe şi se termină la o temperatură mai mare decît temperatura sa de topire (242 °C) [23], ceea ce contrazice datele obţinute în [24]. Experienţele noastre, ca şi ale unor alţi cercetători, au arătat că dacă se încălzeşte acetatul de zinc pînă la 180 °C şi apoi se menţine constantă temperatura, atunci dihidratul acetatului de zinc se descompune total cu formare de ZnO.

Acetatul de zinc anhidru, uscat la 160 °C, începe să se descompună la o temperatură mai mică decît 200 °C şi dacă temperatura se menţine constantă la 205 °C se descompune total [3].

Din termograma descompunerii acetatului de zinc dihidrat se observă că după eliminarea apei în intervalul de temperatură 100°...110 °C, urmează alt interval de temperatură, mult mai mare, în care acetatul anhidru este stabil, şi abia la temperaturile de 245° şi 250 °C se observă efecte endoterme corespunzătoare formării oxisărurilor de compoziţie Zn_4OAc_6 care se descompune apoi în ZnO, CH_3COCH_3 şi CO_2.

Termograma descompunerii $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O$ (fig. 2) indică degajarea completă a celor două molecule de apă pînă la 140 °C, marcată de un proces endoterm. Urmează apoi, începînd cu temperatura de 230 °C, descompunerea $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2$ în oxiacetat iar acesta se descompune imediat în carbonat de zinc şi acetonă. Carbonatul de zinc se descompune în continuare foarte repede în oxid de zinc şi bioxid de carbon. Deci compusul solid care provine din descompunerea termică a acetatului bazic de zinc este oxidul de zinc iar produsele gazoase care se formează din acest proces sînt acetona, bioxidul de carbon şi apa.

Pe baza produselor obţinute la descompunerea termică a acetatului bazic de zinc putem admite ipotetic mai multe mecanisme de reacţie ale acestui proces, însă justeţea lor trebuie verificată prin datele experimentale

ale investigării adecvate elucidării mecanismului reacţiilor de descompunere termică.

După cum s-a arătat mai sus prima etapă a descompunerii termice a $4Zn(OH)_2\ ZnAc_2 \cdot 2H_2O$ o constituie deshidratarea completă prin degajarea celor două molecule de apă din acetatul bazic.

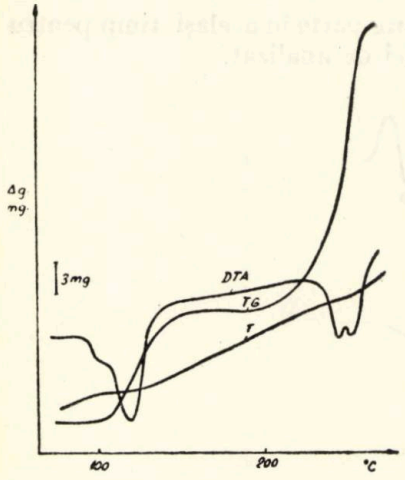


Fig. 1. — Descompunerea termică a $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$.

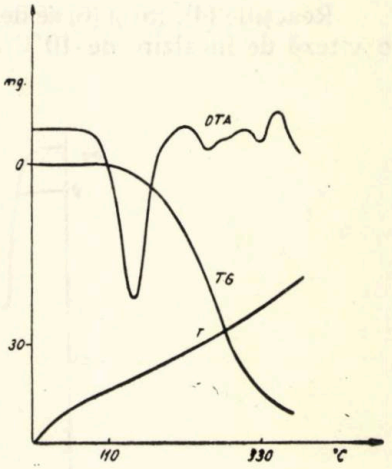


Fig. 2. — Descompunerea termică a $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O$

Desăvîrşirea descompunerii termice a acetatului bazic de zinc anhidru fie ar urma să se petreacă într-o singură treaptă, prin care s-ar obţine ca produse finale oxid de zinc, acetonă şi bioxid de carbon, fie are loc după un mecanism mai complicat, obţinîndu-se intermediar produse solide ca oxicarbonat sau carbonat de zinc din care ar urma să se obţină aceleaşi produse finale de descompunere ca în prima ipoteză. Curba DTA (fig. 2) înregistrată în intervalul descompunerii termice a $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2$ indică trei efecte endoterme; primul efect endoterm corespunde temperaturii de 245 °C la care se desfăşoară reacţia (2); urmează apoi un interval de temperatură în care are loc descompunerea oxiacetatului la carbonat şi acetonă, care începe înainte de a se sfîrşi formarea totală a oxiacetatului şi se desvăsîrşeşte prin descompunerea carbonatului de zinc cu un maxim endoterm la temperatura de 370 °C.

Din analiza curbelor DTA şi TG (fig. 2) se poate confirma că procesul de descompunere termică a $4ZnAc_2(OH)_2 \cdot 2H_2O$ se desfăşoară după reacţiile:

(1) $$4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O = 4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 + 2H_2O,$$

(2) $$4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 = Zn_4OAc_6 + 11ZnO + 12H_2O,$$

$$(3) \qquad Zn_4OAc_6 = 4ZnO + 3CH_3COCH_3 + 3CO_2,$$

$$(4) \qquad Zn_4OAc_6 = ZnO + 3ZnAc_2,$$

$$(5) \qquad ZnAc_2 = ZnCO_3 + CH_3COCH_3,$$

$$(6) \qquad ZnCO_3 = ZnO + CO_2.$$

Reacţiile (4), (5) şi (6) se desfăşoară în mare parte în acelaşi timp pentru o viteză de încălzire de 10 °C/minut a probei de analizat.

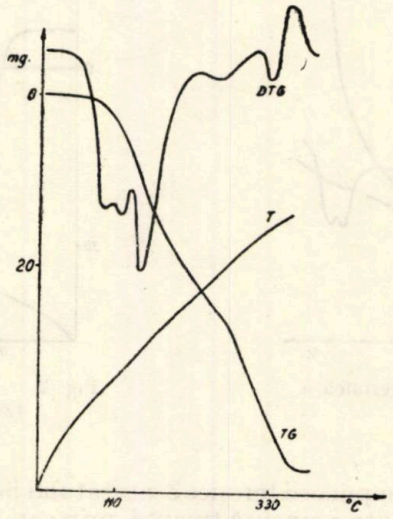
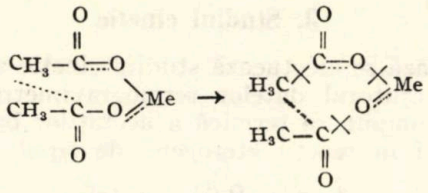


Fig. 3. — Descompunerea termică a $4Zn(OH)_2\ ZnAc_2\ 5H_2O{\cdot}2\ NH_3$

Descompunerea termică a $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \cdot 2NH_3$ decurge în în mod diferit pînă la temperatura de 140 °C faţă de descompunerea termică a $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O$, după care nu se mai observă vreo deosebire. Astfel din curbele DTA şi TG (fig. 3) se constată că pînă la temperatura de 88 °C are loc eliminarea completă a celor două molecule de amoniac după care începe eliminarea a trei molecule de apă pînă la temperatura de 113 °C, de la fiecare moleculă de acetat bazic de zinc. Deshidratarea acetatului bazic de zinc, cu formula $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \cdot 2NH_3$, se termină la temperatura de 140 °C, obţinîndu-se $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2$, care se descompune în continuare după reacţiile (1) ... (6) arătate mai sus, în acelaşi interval de temperatură observat la descompunerea termică a $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2$ rezultat din deshidratarea $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O$.

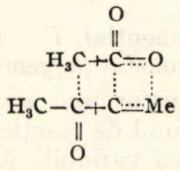
După unii autori [25], [26] descompunerea acetaţilor ar decurge cu formarea mai întîi a unui complex activat, cu şase atomi în ciclu, de forma :



La oxigenul grupei carbonilice (C = O) se vor deplasa în funcţie de legăturile covalente Me—O, electronii acestei legături sau de la alte legături, în particular de la legăturile C—H ale grupei metilenice [27].

Cu creşterea tăriei grupei covalente Me—O electronii grupei metilenice vor fi deplasaţi mai puternic şi acest fapt va produce încărcarea electrică pozitivă pe hidrogen şi încărcarea electrică negativă pe carbon. Astfel deplasarea electronilor la carbon şi oxigen duce la formarea legăturii $H_3C^- \ldots C^+ = O^-$, ceea ce atrage după sine micşorarea energiei de activare a reacţiei de descompunere a acetaţilor. Din acest considerent admitem formarea ciclurilor de şase atomi în complexul intermediar, care duce la micşorarea energiei de activare şi asigură deplasarea reacţiei de descompunere a acetaţilor cu formarea acetonei şi carbonatului respectiv. Mărirea procentului legăturii covalente Me—O, care poate fi calculată după relaţiile date în [28], [29], micşorarează energia de activare a acestui proces de descompunere termică, a cărui valoare, pentru acetatul de Zn, a fost calculată de cercetătorii japonezi [68] ca fiind de 45 kcal/mol.

Prin descompunerea acetatului este necesară ruperea legăturii C—O pentru formarea acetonei, care se realizează cu atît mai uşor, cu cît este mai pronunţată proprietatea electrodonoare a metalului respectiv din acetat. În momentul descompunerii complexului intermediar cu şase atomi, se formează carbonatul metalului respectiv



În cazul formării carbonatului, reîmpărţirea legăturilor poartă un caracter izoenergetic, fiind un proces avantajos. Dacă se formează în locul carbonaţilor oxizii metalelor respective, reîmpărţirea legăturilor nu mai are caracter izoenergetic: se rup legăturile C—C, Me—O, C—O şi se formează legăturile C—C, Me—O, C—O.

Aceste consideraţii teoretice le considerăm valabile în cazul descompunerii termice a numeroşi acetaţi, inclusiv a acetaţilor bazici de zinc la care mai admitem, aşa după cum rezultă din datele termogravimetrice, formarea intermediară a oxiacetaţilor.

3. Studiul cinetic

În cele ce urmează se efectuează studiul cinetic al reacției de descompunere termică cu ajutorul datelor termogravimetrice.

Reacția de descompunere termică a acetaților bazici de zinc se încadrează pe etapele ei în reacții eterogene de tipul

$$A\,(s) \rightarrow B\,(s) + C\,(g). \tag{V}$$

Spre deosebire de metodele izoterme, metodele termogravimetrice de studiu a cineticii reacției eterogene necesită o încălzire continuă și uniformă a sistemului supus analizei, astfel ca

$$\frac{dT}{dt} = a, \tag{7}$$

a urmînd a fi menținut constant. Recent în lucrarea [30] s-a făcut o prezentare critică a metodelor utilizate pentru determinarea parametrilor cinetici din date termogravimetrice. Metodele Freeman-Carrol [31] și Coats-Redfern [32] sînt considerate ca cele mai sigure și mai ușor adaptabile mijloacelor de investigație de care dispunem.

Pentru determinarea ordinului de reacție și energiei de activare am folosit metoda elaborată de Coats și Redfern [32] pentru procesele de tipul (V) în care viteza de reacție este exprimată prin relația

$$\frac{d\alpha}{dt} = k\,(1-\alpha)^n, \tag{8}$$

unde α este gradul de transformare, n — ordinul de reacție, k — constanta vitezei de raecție dată de relația lui Arrhenius

$$k = k_0 e^{-\frac{E}{RT}}, \tag{9}$$

în care : k_0 este factorul preexponențial, T — temperatura, [°K], E — energia de activare a reacției, R — constanta generală a gazelor.

Considerînd gradul de transformare α variabil se poate determina cu ajutorul relațiilor (8) și (9) ordinul de reacție și energia de activare.

Introducînd temperatura ca variabilă (cu ajutorul relației (7)) și utilizînd (8), (9) se poate scrie

$$a\frac{d\alpha}{dT} = k_0 e^{-\frac{E}{RT}}(1-\alpha)^n. \tag{10}$$

Integrînd se obține pentru $n \neq 1$

$$\log\frac{1-(1-\alpha)^{1-n}}{T^2(1-n)} = \log\frac{k_0 R}{aE}\left(1-\frac{2RT}{E}\right) - \frac{E}{2{,}3\,RT}, \tag{11}$$

iar pentru $n = 1$

$$(12) \qquad \log\left[-\log\frac{(1-\alpha)}{T^2}\right] = \log\frac{k_0 R}{aE}\left(1-\frac{2RT}{E}\right) - \frac{E}{2{,}3RT}\,.$$

Din datele termogravimetrice se construiesc graficele de coordonate:

$$\log\frac{1-(1-\alpha)^{1-n}}{T^2(1-n)} \text{ şi } 1/T \text{ pentru } n \neq 1\,;$$

$$\log\left[-\log\frac{(1-\alpha)}{T^2}\right] \text{ şi } 1/T \text{ pentru } n = 1\,,$$

care trebuie să fie cîte o dreaptă cu panta $E/(2{,}3RT)$ pentru valoarea corectă a lui n.

Mărimea α se determină din relaţia $\alpha = \omega/\omega_c$ [12] unde ω_c este cantitatea din componenta volatilă ce poate fi eliminată din sistem într-un proces de tipul (V), ω — cantitatea din componenta volatilă eliminată la timpul t. Pentru simplificarea calculelor valorile ω şi ω_c au fost evaluate direct din termogramă, în număr convenţional de diviziuni.

Astfel ordinul de reacţie s-a găsit egal cu valoarea 0,58 şi energia de activare egală cu 20 kcal/M pentru reacţia (1), iar pentru reacţia (2) s-a determinat valoarea $E = 35$ kcal/M.

Pentru reacţia $ZnAc_2 \rightarrow ZnCO_3 + CH_3{-}CO{-}CH_3$, $n = 0{,}75$ şi $E = 46$ kcal/M iar pentru reacţia $ZnCO_3 \rightarrow ZnO + CO_2$, $n = 0{,}85$ şi $E = 54$ kcal/M. Ordinul de reacţie pentru $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \cdot 2NH_3 \rightarrow 4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O + 2NH_3$ este $n = 0{,}56$ iar $E = 14$ kcal/M iar reacţia $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \rightarrow 4Zn(OH)_2 \cdot ZnAC_2 \cdot 2H_2O + 3H_2O$ are $n = 0{,}60$ şi $E = 18$ kcal/M.

În lucrarea [30] se arată că la descompunerea termică în trepte a complecşilor bogaţi în componente volatile, ordinul de reacţie creşte avînd valori cuprinse între zero şi unu. Astfel la descompunerea amminelor clorurii de nichel ordinul de reacţie ia următoarele valori: zero pentru hexammină; 0,2 pentru diammină şi 0,5 pentru monoammină.

S-ar putea da următoarea interpretare variaţiei ordinului de reacţie pe măsura avansării gradului de descompunere termică a substanţelor. Din literatura de specialitate se pot da numeroase date din care rezultă că procesele de descompunere endoterme în sistemul solid—gaz sînt caracterizate în general prin ordine de reacţie cu valori cuprinse între zero şi unu [30], [69], [70].

Ordinul de reacţie ia valori fracţionare deoarece în aceste cazuri reacţia chimică propriu-zisă nu este determinată de viteza sa ci de fenomenele de transport ale componentelor volatile prin cristal, fenomenele de interfază sau fenomenele de „vaporizare" ale compuşilor gazoşi la suprafaţa liberă a cristalelor. Deci descompunerea termică pentru substanţe cristaline sau pentru orice compus solid este determinată şi de fenomene fizice.

Fenomele pur chimice s-ar putea manifesta dacă s-ar obţine o dispersie maximă (dispersie moleculară) încît substanţa solidă să fie depusă înain-

te de încălzirea aparatului sub formă de strat unimolecular. În aceste condiţii ordinul de reacţie ar trebui să fie egal cu unu deoarece este vorba despre o descompunere termică eterogenă prozpiu-zisă a unui compus solid asupra căruia acţionează numai transformările chimice. În realitate aceste condiţii limită de descompunere pur chimică a compuşilor solizi nu se pot realiza şi atunci ordinul de reacţie este afectat şi de procesele fizice care pot avea loc în ansamblul procesului de descompunere termică.

Dacă gradul de dispersie creşte, acest fapt determină şi mărirea ordinului de reacţie care tinde către valoarea unu. Creşterea gradului de dispersie se poate realiza prin însăşi desfăşurarea reacţiei chimice.

În cazul reacţiilor care au loc pe etape, gradul de dispersie creşte pe măsura eliminării componenţilor volatili aducînd după sine mărirea ordinului de reacţie. Astfel putem explica de ce în cazul nostru se obţin valori crescătoare ale ordinului de reacţie pe măsura desfăşurării etapelor de descompunere a acetaţilor bazici de bismut.

Pentru efectuarea descompunerii termice a acetaţilor bazici de zinc s-a folosit aparatul de tip Linseis destinat analizei termice. Proba de analizat a fost luată de fiecare dată fin mărunţită. de aproximativ 80 mg, şi a fost încălzită cu o viteză de 10 °C/minut.

4. Spectrul de absorbţie în infraroşu al acetaţilor bazici de zinc

În prezenta lucrare s-au efectuat analizele de absorbţie în infraroşu ale $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$, $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O$ şi $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \cdot 2NH_3$, cu scopul de a obţine date care să ajute a explica în parte structura acestor compuşi. Determinările s-au efectuat cu un aparat de tip Leitz Wetzler III G, folosind metoda pastilării în domeniul de absorbţie 2,5 ... 1,9 μ.

Din datele existente în literatura de specialitate [36] ... [49] se constată că spectrul de absorbţie în infraroşu al sărurilor acidului acetic se deosebeşte mult de spectrul acidului liber.

În cazul acetaţilor bazici de zinc (tabelul 1) se observă că valorile $\nu_{sim\ CO}$ sînt mai mici decît cele ale $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$, $ZnAc_2 \cdot 2NH_3$ şi chiar ale Zn_4OAc_6 . Deci legătura Zn—O din acetaţii bazici este mai pronunţată ionic decît în acetatul de zinc hidratat sau în oxiacetatul de zinc.

Prin formarea legăturii de hidrogen se măreşte lungimea legăturii O—H şi banda de absorbţie în infraroşu se deplasează spre frecvenţele mai mici [50] ... [65]. Acest fapt se poate observa şi în cazul spectrului de absorbţie în infraroşu al acetaţilor de zinc studiaţi de noi: $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$, $ZnAc_2 \cdot 2NH_3$, $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O$, $4\ Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \cdot 2NH_3$.

Se constată că frecvenţa vibraţiei asimetrice a legăturii C—O, prin trecerea de la $ZnAc_2$ la oxiacetat, creşte de la 1545 la 1600 cm^{-1}, iar frecvenţa de deformare a vibraţiei grupei COO scade de la 694 la 668 cm^{-1} (tabelul 1).

Tabelul 1

Frecvenţa vibraţiilor normale ale CH_3COO^- *din acetaţi diferiţi* (cm^{-1})

Compusul	ν_{CO}		ν_{C-C}	δ_{OCO}
	$\nu_{as}CO$	$\nu_{sim}CO$		
$ZnAc_2$	1 545	1 459, 1 445, 1 405	955	694
$ZnAc_2 \cdot 2\,H_2O$	1 550	1 445, 1 379	953	695
$ZnAc_2 \cdot 2\,NH_3$	1 580	1 443, 1 380	927	—
$4Zn(OH)_2\ ZnAc_2 \cdot 2H_2O$	1 613	1 418 (1 334)	943	668
$4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \cdot 2NH_3$	1 600	1 400 (1 334)	934	678
Zn_4OAc_6	1 600	1 441	942	668
$AlAc_3$	1 595	1 472, 1 417	980	—
$Al(OH)Ac_2$	1 583	1 473, 1 442, 1 406	980	—
$Al(OH)Ac_2 \cdot 2{,}5\ H_2O$	1 592	1 479, 1 463, 1 427	980	—
KAc	1 573	1 402	919	—

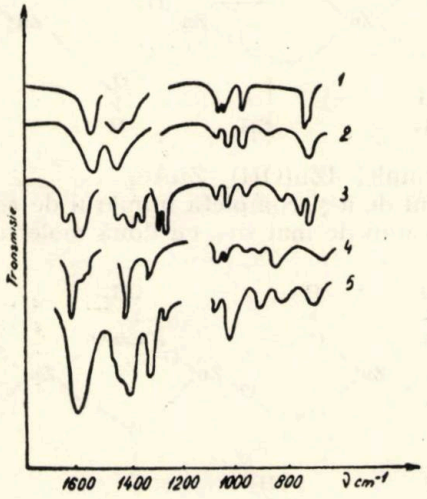


Fig. 4. — Spectrul de absorbţie în infraroşu în domeniul 1 800 ... 560 cm^{-1}: *1* — $ZnAc_2$; *2* — $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$; *3* — $ZnAc_2 \cdot 2NH_3$; *4* — $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O$; *5* — $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \cdot 2NH_3$.

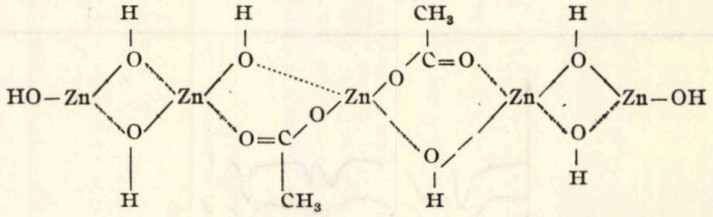
În spectrul de absorbţie al acetaţilor bazici de zinc $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O$ şi $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \cdot 2NH_3$ apare o bandă lată cu unele maxime în domeniul 3 200 ... 3 390 cm^{-1}, corespunzătoare grupelor OH (fig. 4). Această bandă lipseşte în spectrul de absorbţie al $ZnAc_2$ iar în spectrul de absorbţie al $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$ apare în domeniul 3 400 cm^{-1}.

5. Concluzii

Structura acetaţilor bazici de zinc încă nu a fost studiată. Se cunoaşte structura unor acetaţi ca $CuAc_2 \cdot 2NH_3$ care este foarte apropiată de cea a $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$ [35]. În dihidratul acetatului de zinc legătura metal — metal [33] lipseşte, spre deosebire de acetatul dihidrat de cupru care este un dimer în care se manifestă legătura cupru—cupru [34].

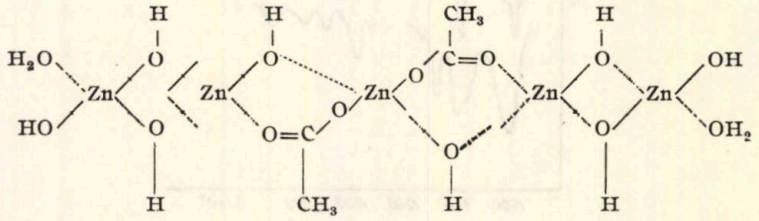
În acord cu H u k e y [33], $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$ are o configuraţie octaedrică în care fiecare grupă acetat se leagă cu un atom de zinc. În oxiacetat, metalul formează legături tetraedrice şi fiecare grupă acetat este legată cu doi atomi de metal [66].

Deşi ne lipsesc încă multe date pentru a putea stabili structura exactă a acetaţilor bazici de zinc, propunem, pe baza datelor noastre şi ale unor lucrări menţionate mai sus, următoarea structură:

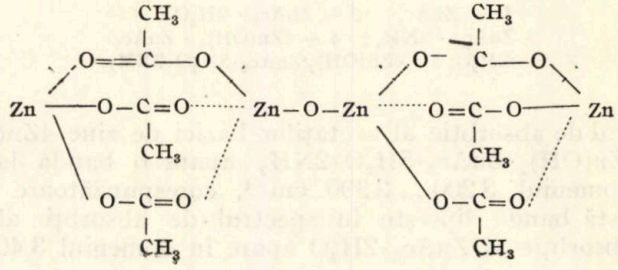


care corespunde formulei $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2$.

Tendinţa zincului de a-şi completa numărul de coordinaţie patru, duce la hidratarea compusului de mai sus, cu două molecule de apă:



Oxiacetatului de zinc i s-ar putea atribui structura:



în care se observă că sînt saturaţi coordinativ numai doi atomi de zinc.

Pentru elucidarea structurii acetaţilor bazici de zinc mai sînt necesare multe cercetări în acest domeniu interesant.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Golgoţiu T., Roşca I., Petracovschi V., Apostol S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1969, **XV—XIX**, *1—2*, s. II, p. 11.
2. Рубинштейн М. А., Якерсон И. В., ЖОХ, 1960, **9**, стр. 2789.
3. — ЖОХ, 1960, **10**, стр. 3154.
4. Ипатьев Н. В., Шульмон Г. Г., ЖРФХО, 1904, **36**, стр. 764.
5. Ипатьев Н. В., ЖРФХО, 1908, **40**, стр. 514.
6. Senderens B. G., Ann. Chem. Phys., 1913, **28**, p. 243.
7. Неферов Д. В., Торошова А. М., Скульский А. И., ЖФХ, 1955, **29**, стр. 2236.
8. Kuriacase C. I., Jungers G. C., Bull. Soc. Chim. Belg., 1955, **64**, p. 502.
9. Reed R. G., J. Chem. Soc., 1955, p. 4423.
10. Bamberger E., Ber., 1910, **43**, S. 3517.
11. Kanewskaia O. S., Schemiakin M. M., Bamdass-Schemiakin E. M., Ber., 1936, **69**, S. 2152.
12. Бамдас М. Э., Шемякин М. М., ЖОХ, 1948, **18**, стр. 324.
13. Wiberg B. K., J. Am. Chem. Soc., 1952, **74**, p. 4381.
14. Lee C. C., Spinks W. G., J. Org. Chem., 1953, **18**, p. 1079.
15. Kenner I., Morton F., Ber., 1939, **72**, S. 452.
16. Kenner I., Wain L. R., Ber., 1939, **72**, S. 456.
17. Reed G. R., Thornley B. M., J. Chem. Soc., 1957, p. 3714.
18. Reed G. R., J. Chem. Phys., 1953, **21**, p. 377.
19. Bell I., Reed G. R., J. Chem. Soc., 1952, p. 1383.
20. Miller L. A., Cook C. N., Whitmore C. F., J. Am. Chem. Soc., 1950, **72**, p. 2732.
21. Максимов Н. В., Семененко Н. К., Наумова Н. Т., Новоселова В. А., ЖНХ, 1960, **3**, стр. 558.
22. Golgoţiu T., Roşca I., Bul Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII** (**XVI**), *3—4*, p. 127.
23. Späth E., Monatsh., 1912, **33**, S. 240.
24. Семененко Н. К., ЖНХ, 1957, **2**, стр. 2115.
25. Сыркин К. Я., ДАН СССР, **105**, стр. 1018.
26. — Изв. АН СССР, ОХН, 1959, **238**, стр. 389.
27. Миклухин П. Т., ЖФХ, 1951, **25**, стр. 688.
28. Поулинг Л., ЖФХ, *Природа химической связи*. Москва, 1947, (trad. din l. engl.).
29. Алгофанов Л. И., ЖНХ, 1959, *4*, стр. 1270.
30. Murgulescu G. I., Segal E., St. şi cerc. chim., 1967, **15**, *4*, p. 261.
31. Fruman S. E., Carroll B., J. Phys. Chem., 1958, **62**, p. 394.
32. Coats W. A., Redfern P. J., Nature, 1964, **201**, p. 68.
33. Niekerk N. J., Schoenins L. R. F., Talbot H. J., Acta cristallogr., 1953, **6**, p. 720.
34. — Acta cristallogr., 1953, **6**, p. 227.
35. Симонов А. Ю., Аблов В. А., Малиновский И. Т., Кристаллография, 1963, **8**, стр. 270.
36. Herman C. E., Hofstodter R., J. Chem. Phys., 1938, **6**, p. 534.
37. Brokway O. L., J. Amer. Chem. Soc., 1944, **66**, p. 574.
38. Nakamura K., J. Chem. Soc., Japan, 1958, **66**, p. 141.
39. Lecomte J., Freimann R., C.r. Ac. Sci., Paris, 1939, **208**, p. 1403.
40. Douville F., Duval C., Lecomte J., C. r., Ac. Sci., Paris, 1941, **212**, p. 953.

41. Jones H. L., Laren M. E., J. Chem. Phys., 1954, **22**, p. 1796.
42. Wilmshurst I. K., J. Chem. Phys., 1955, **23**, p. 2463.
43. Bush H. D., Bailar C. J., J. Am. Chem. Soc., 1956, **78**, p. 716.
44. Morris L. M., Bush H. D., J. Am. Chem. Soc., 1956, **78**, p. 5178.
45. Kirschner S., J. Am. Chem. Soc., 1956, **78**, p. 2372.
46. Sawyer T. D., Ann. N. Y. Acad. Sci., 1960, **88**, p. 307.
47. Sawyer T. D., Paulsen Y. P., J. Am. Chem. Soc., **19**.
48. Григорьев И. А., ЖНХ, 1963, **4**, стр. 702.
49. Rocchiccioli C., Chim. analyt., 1964, **46**, *9*, p. 452.
50. Hortert E., Naturwissenschaften, 1956, **43**, S. 275.
51. Veniger A., Phys. Rev., 1910, **31**, p. 388.
52. — J. Opt. Soc. Am., 1923, **7**, p. 517.
53. Lidell U., Wulf, J. Am. Chem. Soc., 1933, **53**, p. 3574.
54. — J. Am. Chem. Soc., 1955, **57**, p. 1464.
55. Nakamoto K., Margoses M., Rundle R. E., J. Am. Chem. Soc., 1955, **77**, p. 6480.
56. Hilbert H., Wulf, Hendricks, Liddel U., Nature, 1935, **135**, p. 147.
57. — J. Am. Chem. Soc., 1936, **58**, pp. 548, 1911.
58. Fox J., Martin A. E., Trans. Faraday Soc., 1940, **36**, p. 897.
59. — Proc. Roy. Soc., 1937, **A 162**, p. 419.
60. Badger R. M., Bauer S. H., J. Chem. Phys., 1937, **5**, p. 839.
61. Thompson H. W., J. Chem. Soc., 1948, p. 328.
62. Goltherp J., J. Opt. Soc. Am., 1950, **40**, p. 397.
63. Дункан А., *Применение спектроскопии в химии*. ИИЛ,, М., 1959, (trad. din l. engl.).
64. Наконисси К., *Инфракрасные спектры и строения органических соединений*. Изд. Мир, М., 1965.
65. Kössler I., *Methoden der Infrarot Spektroscopie in der Chemischen Analyse*. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1961.
66. Koyama H., Saifo J., Bull. Chem. Soc., Japan, 1954, **27**, p. 112.
67. Григорьев А. И., ЖНХ, 1964, **11**, стр. 2499.
68. Ichikowa T., Yamamura H., Kato H., Komuro Y., Scienc G., Hirosh, Univ., 1953, Ser. A, **16**, p. 587.
69. Gregg S. J., Rozonk I. K., J. Chem. Soc., 1949, **36**.
70. Scromovski S., Forster R., Rütting F. G., Z. phys. Chem., 1934, **B 25**, *1*.

ТЕРМОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ИФРАКРАСНЫЕ СПЕКТРЫ ПОГЛОЩЕНИЯ ОСНОВНЫХ АЦЕТАТОВ ЦИНКА

(Резюме)

Были изучены основны ацетаты цинка термическим разложением и с помощью ИК спектров поглощения.

В отличие от формиата цинка, дигидрата уксуснокислый цинк и основные ацетаты цинка переходят в оксисоль состават Zn_4OAc_6 а потом в $ZnCO_3$ и наконец переходят в ZnO.

Объяснение рисунков

Рис. 1.—Термическое разложение $ZnAc_2 \cdot 2H_2O$.
Рис. 2.—Термическое разложение $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 2H_2O$.
Рис. 3.—Термическое разложение $4Zn(OH)_2 \cdot ZnAc_2 \cdot 5H_2O \cdot 2NH_3$.
Рис. 4.—ИК-спектры в области **1 800,..650** $см^{-1}$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia II
CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. D. 54—128; 546.72; 546.621

LA RÉDUCTION SUR GOUTTE DE MERCURE DES IONS Fe^{3+} ET Al^{3+} D'UN MÉLANGE DE SOLVANTS

PAR

GH. BURLACU, CORNELIA IOAN et ELENA ŞTEFANCU

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 28—30 septembre 1967

1. Introduction

Les solvants non-aqueux et les mélanges de l'eau avec des solvants non-aqueux sont utilisés aujourd'hui sur une échelle de plus en plus large en divers buts: pour préciser certains mécanismes de réaction, pour séparer les éléments par la méthode de l'extraction dans des solvants non-aqueux, etc.

Le comportement des ions Fe^{3+} et Al^{3+} dans des solvants non-aqueux est moins étudié. I. A. Zolatov [1] étudie par voie spectroscopique la formation de certains complexes qui aparaissent à l'extraction du chlorure ferrique dans des solvants non-aqueux, en présence des ions Cl^-. B. V. Volkov [2] étudie la formation de certains composés complexes de chlorure d'aluminium avec des hydrocarbures aromatiques.

Compte tenant que certains sels ferriques et d'aluminium sont solubles dans l'acétone et dans l'alcool, nous nous sommes proposés à effectuer leur étude polarographique dans ces solvants, pour les séparer d'autres ions et pour les doser.

2. La réduction du cation Fe^{3+}

Dans la plupart des cas, on utilise l'ion Fe^{3+} dans un milieu aqueux à pH acide, à cause de l'hydrolyse de ses sels. Dans ces conditions (HCl 0,1 *N*), en présence de chlorure de lithium comme électrolyte support et par l'élimination de l'oxygène avec l'azote, on obtient des ondes sans palier inférieur avec $E_{1/2}$ (ESC) $\approx -0{,}090$ V (fig. 1). Parce que l'onde de l'ion Cl^- se continue avec l'onde du cation Fe^{3+}, sa hauteur a été mesurée en prenant pour ligne zéro l'onde de la solution de base et on a obtenu des valeurs directement proportionnelles à la concentration (fig. 2).

Mais le chlorure ferrique se dissout dans l'acétone sans être nécessaire à ajouter l'acide chlorhydrique, et le chlorure de lithium se dissout dans l'alcool. Dans ces solvants, en milieu d'acide chlorhydrique, la première

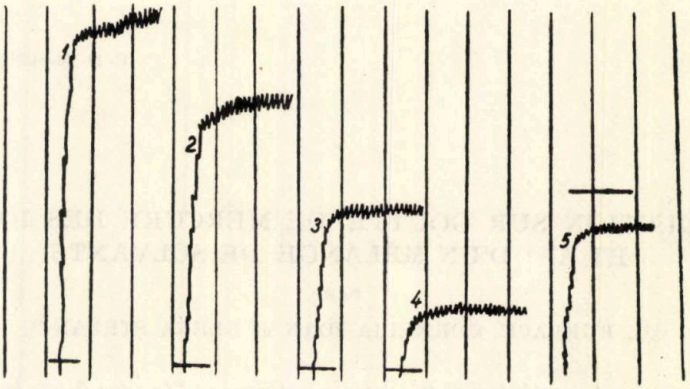


Fig. 1. — *1* — 2 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 5 ml LiCl sat. + 2 ml H_2O + 1 ml gélatine 0,2%; *2* — 1,5 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 5 ml LiCl sat. + 2 ml H_2O + 1 ml gélatine 0,2% + 0,5 ml HCl 1 *n*; *3* — 1 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 5 ml LiCl sat. + 2 ml H_2O + 1 ml gel. 0,2% + 1 ml HCl 1*n*; *4* — 0,5 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 5 ml LiCl sat. + 2 ml H_2O + 1 ml gel. 0,2% + 1,5 ml HCl 1*n*; *5* — solution de base. Accumulateur 3,8 V; sensibilité 1/15.

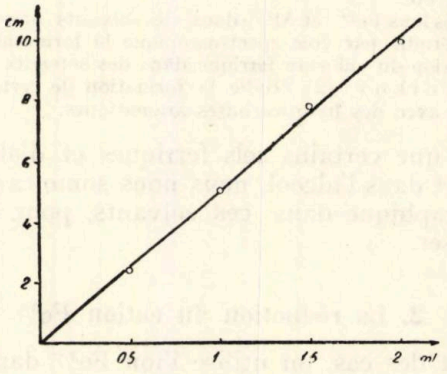


Fig. 2.

onde apparait à 0 V (fig. 3, curbe *1*) et à −1,2 V apparait une seconde onde, très nette, où a lieu la réduction $Fe^{2+} \rightarrow Fe$ (fig. 3, les courbes *2...5*). Si la concentration des cations Fe^{3+} est sous $2{,}66 \cdot 10^{-3}$ *m*, on obtient, pour la seconde onde, des hauteurs directement proportionelles à la concentra-

tion des ceux-ci (fig. 4). L'onde apparait très nette et elle peut être mesurée seulement après le vieillisement de la solution de chlorure ferrique dans l'acétone.

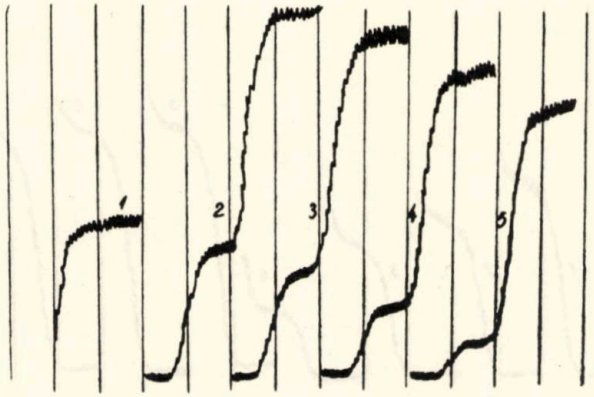


Fig. 3. — *1*—4 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *n* + 6,5 ml H_2O + 1 ml gélatine 0,2%; *2* — 4 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *n* + 6,5 ml H_2O + 1 ml gélatine 0,2%; *3* — 3 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *n* + + 6,5 ml H_2O + 1 ml gélatine 0,2% + 1 ml acétone; *4* — 2 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *n* + 6,5 ml H_2O + 1 ml gélatine 0,20% + 2 ml acétone; *5* — 1 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *n* + 6,5 ml H_2O + 1 ml gélatine 0,2% + + 3 ml acétone. Accumulateur 3,8 V; sensibilité 1/100.

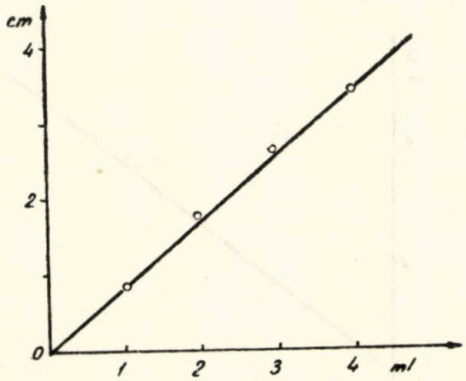


Fig. 4

À —1,7 V apparait une troisième onde dont la hauteur ne dépend pas de la concentration des cations Fe^{3+}, comme on peut observer dans la fig. 3. Cette onde est due à la réduction du cation H^+, parce que sa hauteur, à une concentration constante de Fe^{3+}, dépend de la valeur du pH.

Pour des concentrations d'acétone plus grandes (53%) on obtient aussi des ondes très nettes (fig. 5) avec $E_{1/2} \approx -1{,}1$ V, dont la hauteur varie directement proportionnel à la concentration des cations Fe^{3+} (fig. 6).

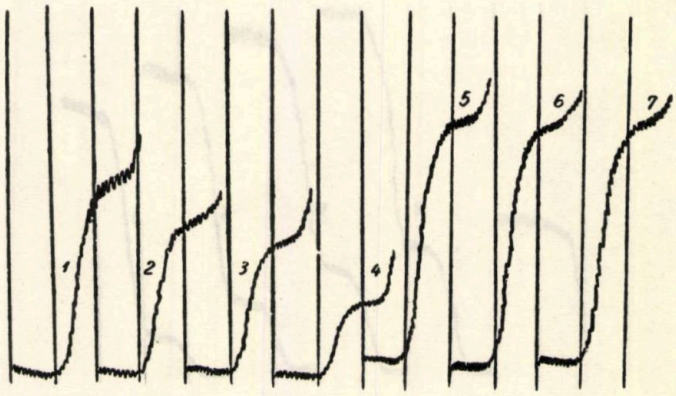


Fig. 5. — *1* — 4 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *m* + 2,5 ml H_2O + 5 ml acétone ; *2* — 3 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *m* + 2,5 ml H_2O + 6 ml acétone ; *3* — 2 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *m* + 2,5 ml H_2O + 7 ml acétone ; *4* — 1 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *m* + 2,5 ml H_2O + 8 ml acétone ; *5* — 4 ml Fe^{3+} 0,02 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *m* + 2,5 ml H_2O + 5 ml acétone ; *6* — 3 ml Fe^{3+} 0,02 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *m* + 2,5 ml H_2O + 6 ml acétone ; *7* — 2 ml Fe^{3+} 0,02 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 0,5 ml HCl 0,1 *m* + 2,5 ml H_2O + 7 ml acétone. Accumulateur 3,8 V ; sensibilité 1/100 pour les courbes *1*...*4* et 1/70 pour les courbes *5*...*7*.

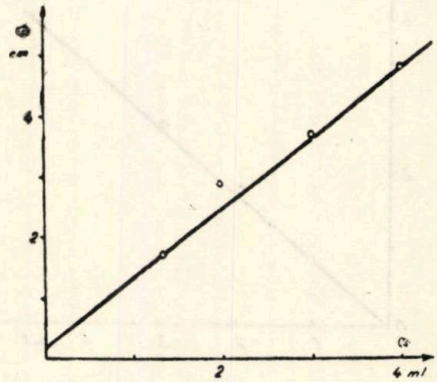


Fig. 6

On constate que par l'augmentation de la quantité d'acétone dans un mélange, l'onde du cation Fe^{3+} devient plus positive. C'est ainsi qu'à une concentration d'acétone de 25%, $E_{1/2} = -1{,}2$ V et à 50%, $E_{1/2} = -1{,}1$ V.

Si la concentration des cations Fe^{3+} dépasse $2{,}66 \cdot 10^{-3}$ m et on augmente aussi la concentration en acétone, les hauteurs des ondes de la réduction $Fe^{2+} \rightarrow Fe$ ne varient plus avec la concentration. Cet aspect mène à la conclusion qu'un phénomène d'adsorbtion apparait, phénomène qui a été observé aussi par G. Schröber et V. Gutmann [3] à la réduction de certains ions dans des solutions non-aqueuses. Le phénomène est mis en évidence d'une façon très nette dans la fig. 5 (les courbes *5*, *6*, *7*), où la concentration des cations Fe^{3+} varie jusqu'à 100% et la hauteur de l'onde reste constante.

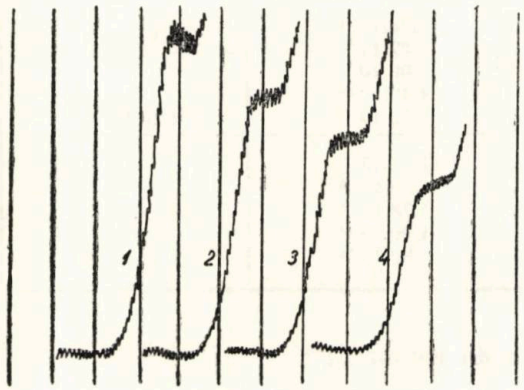


Fig. 7. — *1* — 1,75 ml Fe^{3+} 0,01 m + 10 ml LiCl 1,5 m + 5ml alcool + 3,25 ml acétone; *2* — 1,50 ml Fe^{3+} 0,01 m + 10 ml LiCl 1,5 m + 5 ml alcool + 3,5 ml acétone; *3* — 1,25 ml Fe^{3+} 0,01 m + 10 ml LiCl 1,5 m +5 ml alcool + 3,75 ml acétone; *4* — 1 ml Fe^{3+} 0,01 m+10 ml LiCl 1,5 m + 5 ml alcool + 4 ml acétone. Accumulateur 3,8 V; sensibilité 1/20.

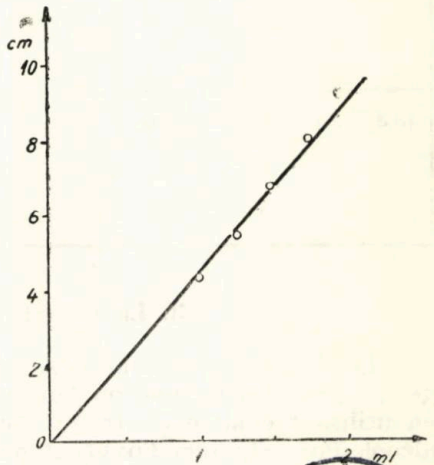


Fig. 8.

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

Compte tenu que dans des solutions acides la seconde onde du cation Fe^{3+} n'est pas reproductible avec le temps, on a étudié la réduction dans des milieux neutres, dans un mélange acétone — alcool. Dans ces conditions, pour la seconde onde on obtient $E_{1/2} \approx -1{,}450$ V (fig. 7), et sa hauteur est directement proportionnelle à la concentration (fig. 8). L'onde du cation Fe^{3+} est reproductible dans le temps.

Si l'on observe la vitesse de réaction sur goutte de mercure [4], [5], on constate que celle-ci diminue au fur et à mesure que la concentration du solvant organique augmente (tableau 1).

Tableau 1

Solvant	K min^{-1}	K en moyenne
13% acétone + 20% alcool	$6,53.10^{-3}$ $6,66.10^{-3}$ $6,35.10^{-3}$ $6,34.10^{-3}$ $6,45.10^{-3}$ $6,52.10^{-3}$	$6,47.10^{-3}$
60% acétone + 20% alcool	$4,36.10^{-3}$ $4,27.10^{-3}$ $4,00.10^{-3}$ $4,40.10^{-3}$ $4,30.10^{-3}$	$4,26.10^{-3}$
13,3% acétone + 83% alcool	$1,87.10^{-3}$ $1,80.10^{-3}$ $1,78.10^{-3}$ $1,90.10^{-3}$ $1,80.10^{-3}$	$1,85.10^{-3}$

3. La réduction du cation Al^{3+}

Le chlorure d'aluminium se dissout bien dans l'alcool et dans un mélange d'alcool et d'acétone où l'on a étudié le comportement polarographique en utilisant comme electrolyte support le chlorure de lithium dissout en alcool. Pour éliminer l'oxygène on a fait barboter l'hydrogène. On a ajouté aux récipients à laver, deux autres, le premier à l'acide sulfurique concentré, le deuxième à un mélange de solvants dans les mêmes proportions que la solution polarographiée. Ainsi, après le barbotage de l'hydrogène pendant 30 à 40 minutes, les ondes obtenues restent constantes.

Sans acétone, à 40% d'eau et dans des solutions neutres, on obtient des ondes avec des discontinuités sans un courant de diffusion constante et qui ont $E_{1/2} \approx -1,7$ V (fig. 9, les courbes *1*, *2*, *3*). Des meilleures possibilités à mesurer les ondes apparaissent chez les courbes dérivés correspondantes (fig. 9, les courbes *1'*, *2'*, *3'*.)

Si à ces solutions on ajoute des quantités augmentées d'acétone, deux ondes deviennent de plus en plus claires, qui sont formées par la réduction du cation Al^{3+} (fig. 9, les courbes *4*, *5*, *6*). Les deux ondes peuvent être observées plus clairement, et leur séparation est plus visible sur les courbes dérivées (fig. 9, les courbes *4'*, *5'*, *6'*). Ces observations montrent que la présence de l'acétone transforme la discontinuité de la courbe dans une onde très nette. En même temps apparait un phénomène qui d'abord peut sembler curieux et ça précisement parce que l'onde du cation Al^{3+}

devient plus positive au fur et à mesure que la concentration en acétone augmente. Mais, on sait que si on ajoute un solvant organique la résistance de la cellule s'accroit et ainsi les ondes devraient être plus négatives. En conséquence dans nos expériences la conductibilité spécifique diminue avec

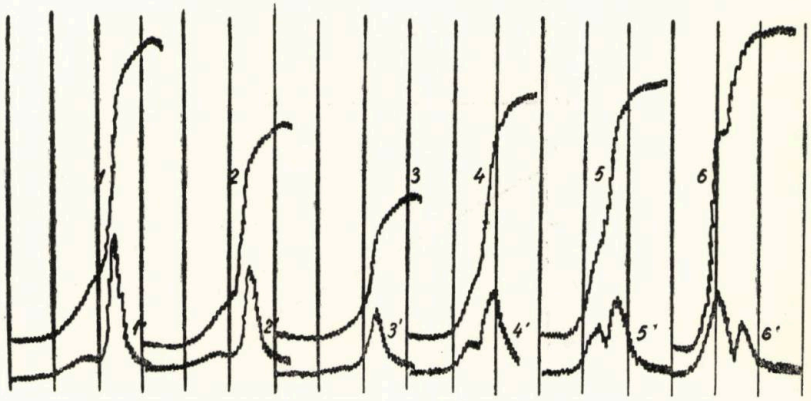


Fig. — 9. *1-1'* — 4 ml Al^{3+} 0,01 *m* + 2 ml LiCl 1,5 *m* + 4 ml H_2O ; *2-2'* — 3 ml Al^{3+} 0,01 *m* + + 2 ml LiCl 1,5 *m* + 4 ml H_2O + 1 ml alcool ; *3-3'* — 2 ml Al^{3+} 0,01 *m* + 2 ml LiCl 1,5 *m* + + 4 ml H_2O + 2 ml alcool ; *4-4'* — 3 ml Al^{3+} 0,01 *m* + 2 ml LiCl 1,5 *m* + 3 ml H_2O + 1 ml acétone ; *5-5'* — 3 ml Al^{3+} 0,01 *m* + 2 ml LiCl 1,5 *m* + 2 ml H_2O + 2 ml acétone ; *6-6'* — 3 ml Al^{3+} 0,01 *m* + 2 ml LiCl 1,5 *m* + 1 ml H_2O + 3 ml acétone. Accumulateur 3,8 V ; sensibilité 1/50 pour les courbes normales et 1/5 pour les courbes dérivés.

l'accroissement de la concentration en acétone, ce qu'on voit dans la fig. 10 *a*. Mais conformément à la relation $E_{1/2\ \text{apparent}} = E_{1/2\ \text{corrigé}} + ri$, les valeurs $E_{1/2\ \text{corrigé}}$ établies à l'aide de la méthode de l'extrapolation [6] montrent, au contraire, qu'elles deviennent plus positives quand la concentration en acétone augmente (fig. 10 *b*). On observe, en même temps, une variation de la hauteur des ondes (fig. 9). Le faits observés par nous s'expliquent si on suppose qu'il s'établit un équilibre entre deux complexes formés par le cation Al^{3+} et des molécules du solvant organique. B. V. Volkov [2] montre que la molécule $AlCl_3$ forme des complexes avec des hydrocarbures aromatiques en présence de l'eau, où la partie anorganique a la forme : $H(AlCl_3OH)$, $H(Al_2Cl_6OH)$, $H(Al_2Cl_5O)$ et $Al_2Cl_6.HCl$, en fonction de la valeur du rapport $AlCl_3/H_2O$, analogues aux complexes de l'aluminium avec l'acide chlorhidrique de la forme : $H(AlCl_4)$ et $Al_2Cl_6.HCl$. En notre cas, les deux ondes de la courbe directe, ainsi que celles de la courbe dérivée, montrent que l'acétone peut aussi former des composés complexes avec le cation Al^{3+}.

Le phénomène apparait plus evident lorsqu'on travaille seulement avec des solvants organiques (acétone + alcool 96%), quand on observe le déplacement des ondes vers des valeurs plus positives, leur netteté et ensuite leur

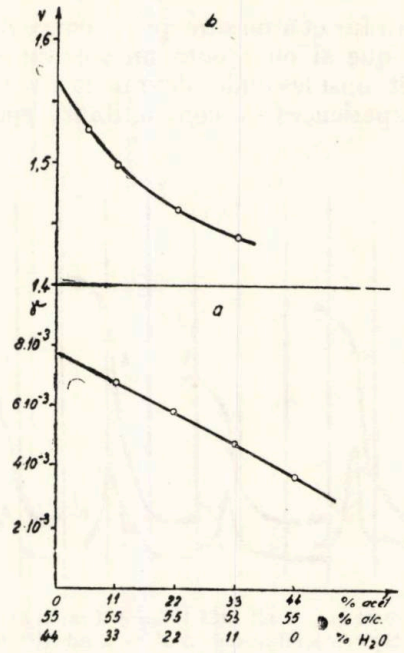


Fig. 10.

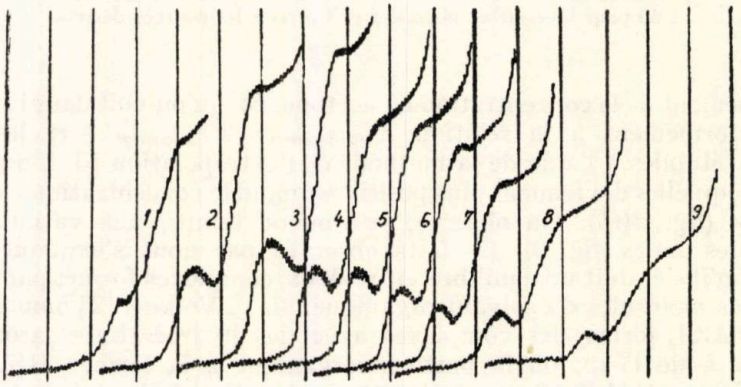


Fig. 11. *1* — 2 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 2 ml alcool + 1 ml acétone ; *2* — 2 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 1 ml alcool + 2 ml acétone ; *3* — 2 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 0 ml alcool + 3 ml acétone ; *4* — 2 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 3 ml alcool + 0 ml acétone ; *5* — 1,75 Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 3 ml alcool + 0,25 ml alcool + acétone 1/1 ; *6* — 1,5 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 3 ml alcool + 0,50 ml alcool + acétone 1/1 ; *7* — 1,25 Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 3 ml alcool + 0,75 ml alcool + acétone 1/1 ; *8* — 1 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 3 ml alcool + 1 ml alcool + acétone 1/1 ; *9* — 0,75 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 3 ml alcool + 1,25 ml alcool + acétone 1/1. Accumulateur 3,8 V ; sensibilité 1/30.

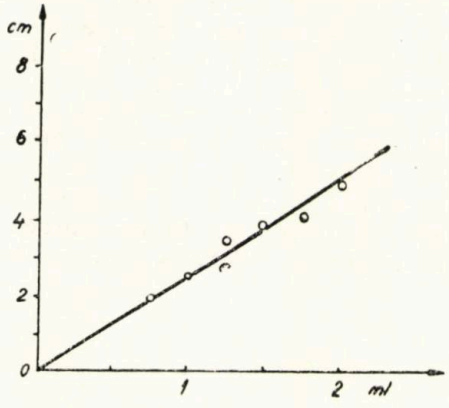


Fig. 12

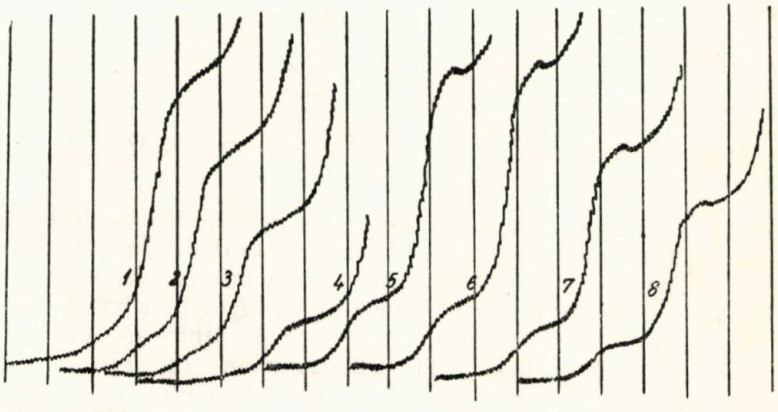


Fig. 13. — *1* — 2 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 4 ml LiCl 3 *m* + 3 ml alcool; *2* — 1,5 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 3,5 ml alcool; *3* — 1 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 4 ml alcool; *4* — 0,5 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 4,5 ml alcool; *5* — 5 ml Al^{3+} 0,005 *m* + + 5 ml LiCl 3 *m* + 4,5 ml alcool; *6* — 4 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 1 ml alcool absolu; *7* — 3 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 2 ml alcool absolu; *8* — 2 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 3 ml alcool absolu. Accumulateur 3,8 V; sensibilité 1/20 pour les courbes *1* ... *4* et 1/70 pour les courbes *5* ... *8*.

déformation (fig. 11, les courbes *1*, *2*, *3*) au fur et à mesure que la concentration en acétone croît. En modifiant la concentration des cations Al^{3+} (fig. 11, les courbes *4* ... *9*) la hauteur de la seconde onde varie directement proportionnel, à celle-ci, mais avec certaines déviations à cause des modifications du courant limite (fig. 12).

Dans l'alcool 96% on obtient une seule onde précédée d'une discontinuité (fig. 13), dont la hauteur varie directement proportionnel à la concentration des cations Al^{3+} (fig. 14).

En travaillant avec de l'alcool absolu la discontinuité se transforme dans une onde nettement distincte (fig. 13, les courbes *5* ... *8*) et les hauteurs sont directement proportionnelles à la concentration des cations Al^{3+} (fig. 15).

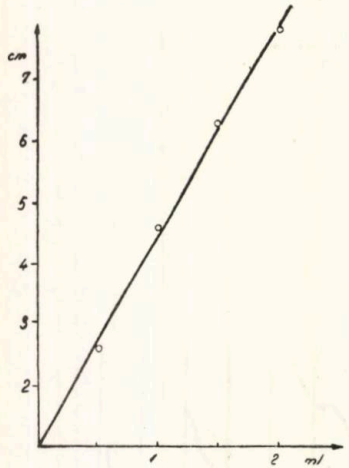


Fig. 14.

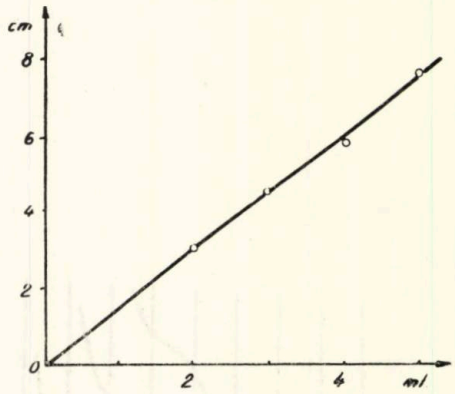


Fig. 15

Si dans le mélange des solvants non-aqueux on ajoute de l'eau, la déformation disparait peu à peu et reste une seule onde (fig. 16, les courbes *1* ... *4*). En utilisant aussi la gélatine au mélange qui correspond à la courbe *4* (fig. 16) on obtient des ondes plus nettes, sans irrégularités et discontinuités (fig. 16, les courbes *5* ... *8*). Elles sont reproductibles et ont les hauteurs directement proportionnelles à la concentration (fig. 17).

Si l'on travaille avec un mélange de solvants acétone + alcool + eau, dans un milieu d'acide chlorhydrique, l'onde du cation Al^{3+} est beaucoup négativisée (−1,9 V). Mais on obtient, auparavant, une autre onde, très grande par rapport à la seconde, dont la hauteur ne varie pas avec la concentration des cations Al^{3+} (fig. 18). Elle se maintient également dans la solution de base, étant dûe aux ions H^+, comme on l'a constaté aussi dans le cas du cation Fe^{3+}. Donc une solution acide gène le dosage du cation Al^{3+} parce qu'on voit apparaître l'onde plus positive de l'ion H^+.

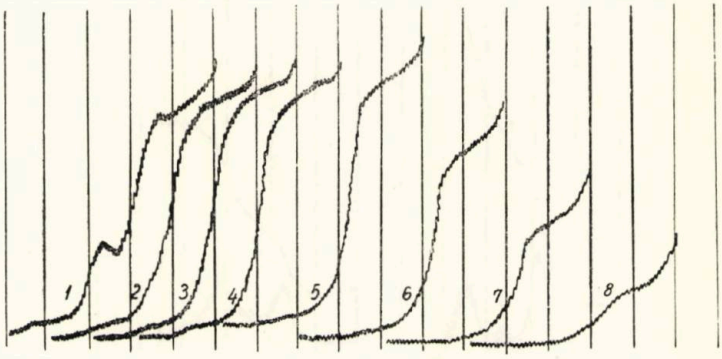


Fig. 16. *1* — 2 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 3 ml alcool ; *2* — 2 ml Al^{3+} 0,005 *m* + + 5 ml LiCl 3 *m* + 2 ml alcool + 1 ml H_2O ; *3* — 2 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 1 ml alcool + 2 ml H_2O ; *4* — 2 ml Al^{3+} 0,005 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 0 ml alcool + 3 ml H_2O ; *5* — 2 ml Al^{3+} 0,025 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 2 ml H_2O + 1 ml gélatine 0,2% ; *6* — 1,5 ml Al^{3+} + + 0,025 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 2 ml H_2O + 1 ml gélatine + 0,5 ml alcool + acétone 1/1 ; *7* — 1 ml Al^{3+} 0,025 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 2 ml H_2O + 1 ml gélatine + 1 ml alcool + acétone 1/1 ; *8* — 0,5 ml Al^{3+} 0,025 *m* + 5 ml LiCl 3 *m* + 2 ml H_2O + 1 ml gélatine + 1,5 ml alcool + acétone 1/1. Accumulateur 3,8 V ; sensibilité 1/20.

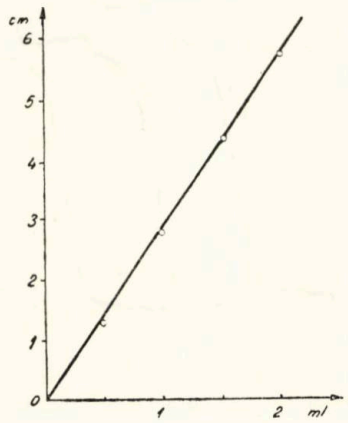


Fig. 17

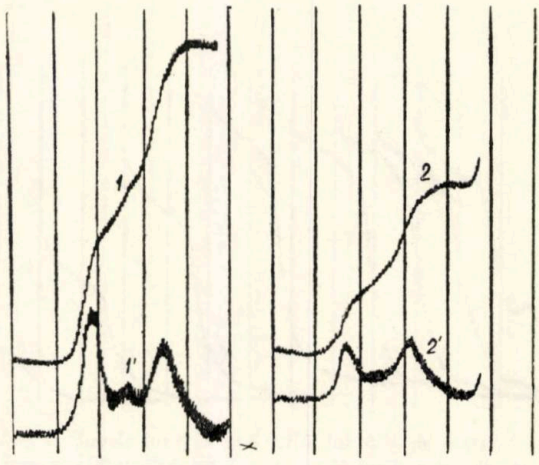


Fig. 18. — *1*—3 ml Al^{+3} 0,0025 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 2 ml acétone + 1 ml gélatine 0,2% + + 4,5 ml H_2O; *2* — 1,5 Al^{3+} 0,0025 *m* + 3 ml LiCl 1,5 *m* + 2 ml acétone + 1 ml gélatine 0,2% + 4,5 ml H_2O + 1,5 ml alcool + acétone 1/1; *3* — solution de base. Accumulateur 3,8 V; sensibilité 1/150.

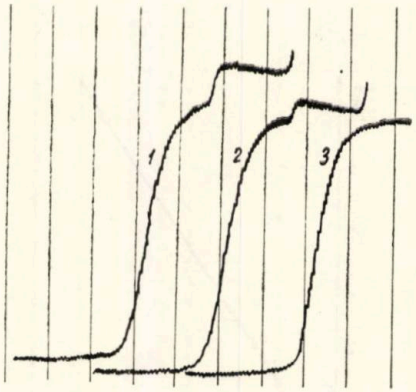


Fig. 19. — *1-1'* — 3 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 3 ml Al^{3+} 0,01 *m* + 2 ml LiCl 1,5 *m* + 2 ml H_2O + + 1,5 ml alcool + 1,5 ml acétone; *2-2'* — 1,5 ml Fe^{3+} 0,01 *m* + 1,5 ml Al^{3+} 0,01 *m* + 2 ml LiCl 1,5 *m* + 2 ml H_2O + 3 ml alcool + 3 ml acétone. Accumulateur 3,8 V; sensibilité 1/150.

Si l'on observe la vitesse de réaction sur la goutte de mercure [4], [5] pour la réduction $Al^{3+} \rightarrow Al$, on y constate aussi que celle-ci diminue au fur et a mesure que la quantité de solvant organique augmente (tableau 2).

Tableau 2

Solvant	K min^{-1}	K en moyenne
55% alcool + 45% H_2O	$4,50.10^{-3}$ $4,33.10^{-3}$ $4,46.10^{-3}$ $4,51.10^{-3}$	$4,45.10^{-3}$
55% alcool + 22% acétone + 23% H_2O	$3,71.10^{-3}$ $3,90.10^{-3}$ $3,80.10^{-3}$ $3,70.10^{-3}$ $3,65.10^{-3}$	$3,75.10^{-3}$
55% alcool + 33% acétone + 12% H_2O	$3,26.10^{-3}$ $3,45.10^{-3}$ $3,30.10^{-3}$ $3,50.10^{-3}$ $3,40.10^{-3}$	$3,38.10^{-3}$

4. La réduction simultanée du cation Fe^{3+} et Al^{3+}

Compte tenant du comportement polarographique de ces deux ions, on a étudié leur réduction dans un mélange. Pour les courbes normales, dans un milieu neutre, la possibilité de séparation nette de leurs ondes n'apparait pas, parce qu'avant que l'onde du cation Fe^{3+} soit terminée, commence celle du cation Al^{3+} (fig. 19, les courbes *1*, *2*) Par contre, le phénomène est clair dans les courbes dérivées (fig. 19, les courbes *1'*, *2'*), où la séparation des ondes est évidente. Dans ces conditions les hauteurs des ondes de ces deux ions sont directement proportionnelles à leurs concentrations. C'est ainsi qu'apparait la possibilité du dosage simultanée des ions Fe^{3+} et Al^{3+}.

5. Conclusions

1. La présence de l'acétone et de l'alcool dans un mélange aqueux où non-aqueux permet d'obtenir d'une façon très très nette l'onde du cation Fe^{3+} et rend possible son dosage dans ces solvants si la concentration est moindre que $2,6.10^{-3}$ *m*. Au-dessus de cette concentration apparaissent des phénomènes d'adsorbtion.

2. L'onde de réduction du cation Al^{3+} apparait très nette dans un mélange de solvants organiques et de l'eau lorsque leur concentration croît jusqu'à une certaine limite. Cette onde est formée de deux paliers et les expériences montrent que en présence de l'eau, le cation Al^{3+} forme des complexes avec les solvants organiques.

3. Par l'intermède des courbes dérivées on entrevoit la possibilité de separer et de doser les deux ions dans un mélange, en présence de l'alcool et de l'acétone.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Chimie Générale

BIBLIOGRAPHIE

1. Золатов І. А., Гереанкова І. В., Антипова Каратачева, ЖНХ, 1962, **VIII**, *5*, стр. 1197—1203.
2. Волков Б. В., ЖФХ, 1962, **XXXV**, стр. 1136—1138.
3. Schöber G., Gutman V., Mh. Chem., 1958, **89**, S. 401.
4. Стромберг А. Г., Таркачева Т. М., ЖНХ, 1954, *4*, стр, 671—672.
5. Ralea R., Burlacu G., Giurgiu D., Rev. chim., 1962, **VII**, *2*, pp. 1187—1195.
6. Schröber G., Mh. Chem., 1958, **89**, S. 671.

REDUCEREA PE PICĂTURĂ DE Hg A IONILOR Fe^{3+} ŞI Al^{3+} DIN AMESTEC DE SOLVENŢI

(Rezumat)

Prezenţa acetonei şi a alcoolului în amestec cu apă sau fără apă conturează bine pragul fierului şi face posibilă dozarea lui în aceşti solvenţi, dacă concentraţia este mai mică decît $2{,}6.10^{-3}$ *m* Peste aceste concentraţii apar fenomene de adsorbţie.

Pragul de reducere al Al^{3+} apare mult mai bine conturat în amestec de solvenţi organici şi apă, cînd concentraţia solvenţilor organici creşte pînă la o anumită limită. Acest prag este format din două părţi şi datele experimentale duc la concluzia că Al^{3+} formează cu solvenţii organici, în prezenţa apei, substanţe complexe. Prezenţa solvenţilor organici favorizează dozarea Al^{3+}.

Prin intermediul curbelor derivate se întrevede posibilitatea de separare şi dozare a celor doi ioni în amestec, în prezenţa alcoolului şi acetonei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia II
CHIMIE INDUSTRIALĂ

D. C. 66.046 ; 66.092

MACROKINETICS OF $NaHCO_3$ THERMICAL DECOMPOSITION (II)

BY

C. CALISTRU and LIVIA IFRIM

Paper presented at the Scientific Session of the Polyteehnic Institute, Jassy, 28—30 September 1967

1. Introduction

In a previous paper [1] we have shown the principal macrokinetic models of the process of thermical decomposition of NaH CO_3, and presented the experimental installation and the experimental conditions with a view to find the determining macrokinetic model (or models) for the above mentioned process.

In the present paper we continue the investigations concerning the macrokinetics of the decomposition and the mathematical description of this.

Nomenclature. K_s — reaction rate, [moles per unit time per unit surface area], ρ^* — molar density, R — initial radius of granule, K — rate of reaction, D_{CO_2} — diffusion coefficient of CO_2, $C^s_{CO_2}$ — CO_2 concentration at the reacting surface, τ — time.

2. Experiments

The experimental researches were effectuated in the same installation which was utilised in the previous work. As we have mentioned, to study in detail every step of the chemical process, by preliminary experiments there were selected the conditions when the mass transfer through external gaseous phase and the heat transfer don't influence the development of the process.

2.1. Macrokinetic Model: Chemical Reaction is Rate Controlling Step

In experiments we have employed another sort of $NaHCO_3$ prepared in laboratory controlled conditions, named $NaHCO_3$, sort B, unlike $NaHCO_3$, sort A, utilized in the previous work.

From this product there were sorted the fractions: $\Phi_1 = -0.63 + + 0.50$ mm, $\bar{r}_1 = 0.282$ mm; $\Phi_2 = -0.10 + 0.09$ mm, $\bar{r}_2 = 0.0475$ mm.

The kinetical curves obtained with these fractions, at the temperature interval 80° ... 95 °C, are shown in Fig. 1 and 2.

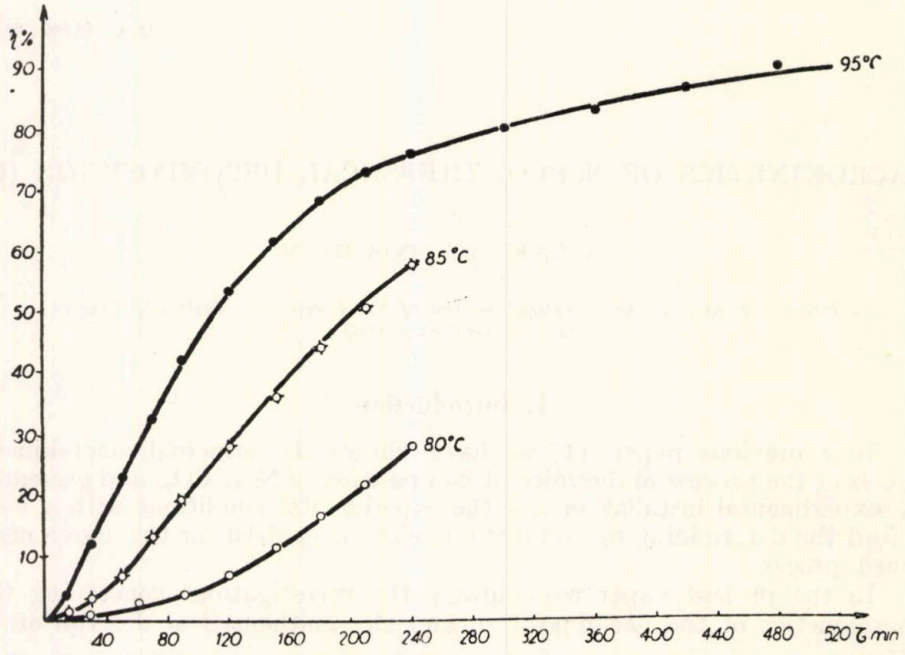


Fig. 1. — Variation of transforming degree (η %) with the time (θ, min) for $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0.282$ mm.

Using for the macroscopic structure of reaction mass the model of one granule, the suitable mathematical model in the case of chemical reaction-rate controlling step is that mentioned in the previous paper, namely:

$$\tau \frac{K_s}{\rho^* R} = 1 - (1 - \eta)^{1/3}. \tag{1}$$

The test of the supposed model was made using the integral method of analysis; the results are shown in Fig. 3 and 4.

To detach more complete conclusions concerning this macrokinetic model we take again the results obtained with $NaHCO_3$, sort A, formerly published [1] (Fig. 5).

Using these diagrams and the relationship

$$K_s = \rho^* R K \tag{2}$$

we have calculated the values of K_s. The results are presented in Table 1.

Table 1

$NaHCO_3$, sort A, $\bar{r}_3 = 0.075$ mm	t [°C]	85	90	95
	$K_s \left[\frac{\text{moles}}{\text{m}^2\,\text{s}}\right]$	2.24×10^{-5}	4.46×10^{-5}	7.83×10^{-5}
$NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0.282$ mm	t [°C]	80	85	95
	$K_s \left[\frac{\text{moles}}{\text{m}^2\,\text{s}}\right]$	5.82×10^{-5}	1.425×10^{-4}	2.41×10^{-4}
$NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_2 = 0.0475$ mm	t [°C]	80	85	95
	$K_s \left[\frac{\text{moles}}{\text{m}^2\,\text{s}}\right]$	1.00×10^{-5}	0.24×10^{-4}	0.86×10^{-4}

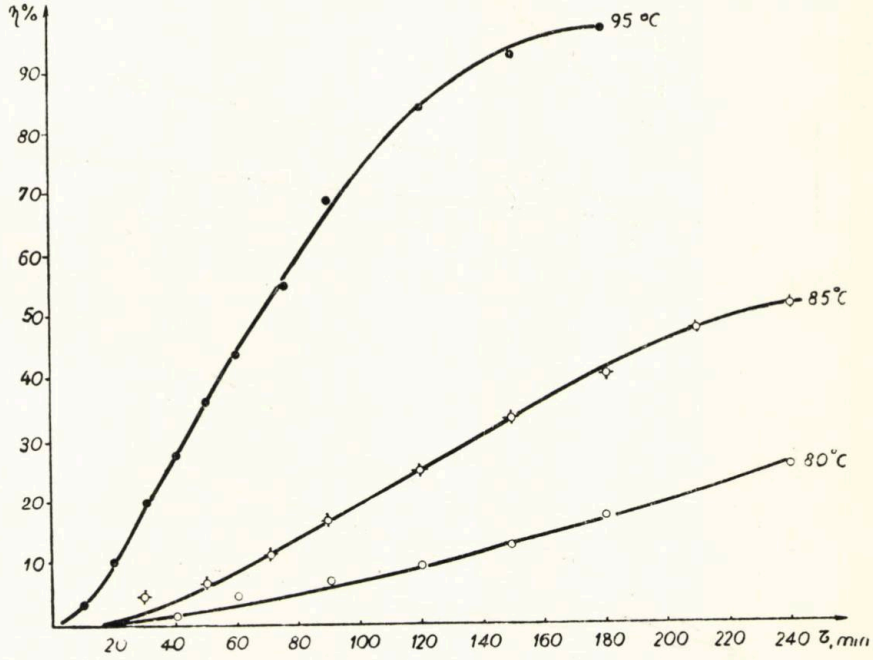


Fig. 2. — Variation of transforming degree (η %) with the time (τ, min) for $NaHCO_3$ sort B, $\bar{r}_2 = 0.0475$ mm.

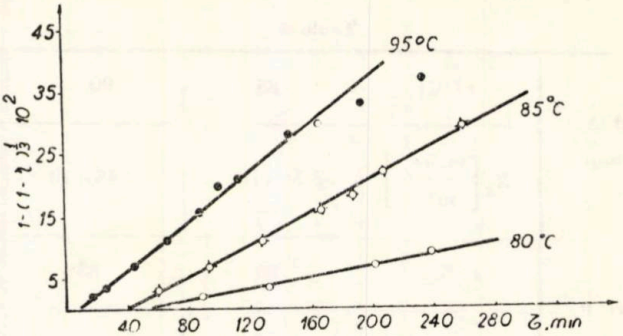


Fig. — 3. The graph τ vs. $1 - (1 - \eta)^{1/3}$ for $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0.282$ mm.

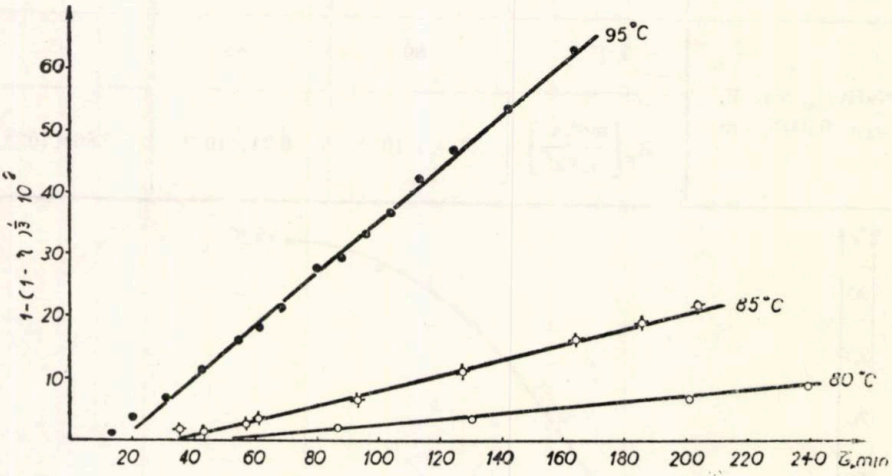


Fig. 4. — The graph τ vs. $1 - (1 - \eta)^{1/3}$ for $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_2 = 0.0475$ mm.

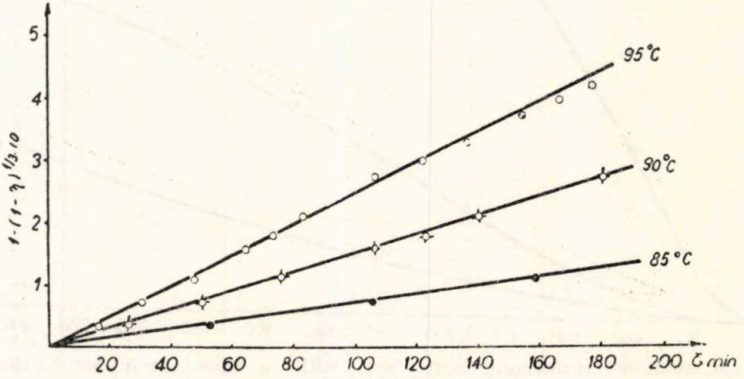


Fig. 5. — The graph τ vs. $1 - (1 - \eta)^{1/3}$ for $NaHCO_3$, sort A, $\bar{r}_3 = 0.075$ mm.

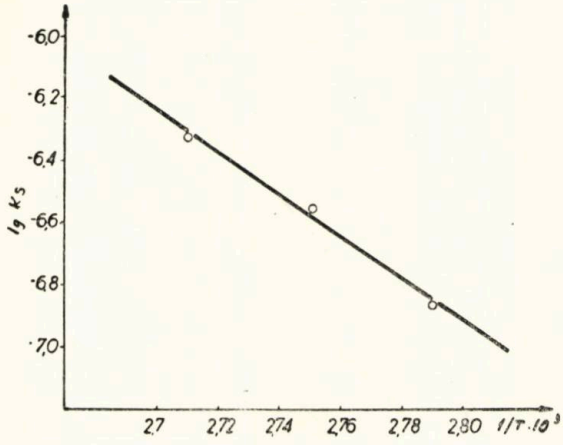


Fig. 6. — Arrhenius plots for experimental results of $NaHCO_3$, sort A, $\overline{r}_3 = 0{,}075$ mm.

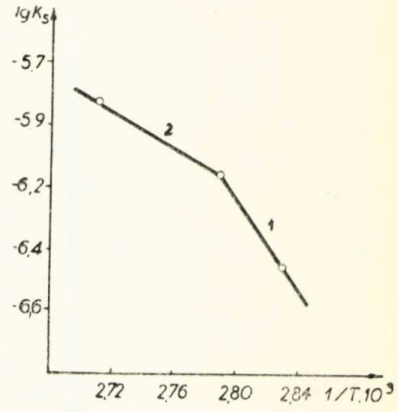


Fig. 7. — Arrhenius plots for experimental results of $NaHCO_3$, sort B, $\overline{r}_1 = 0{,}282$ mm.

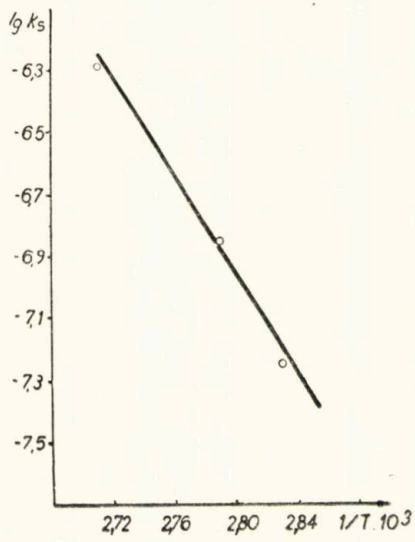


Fig. 8. — Arrhenius plots for experimental results of $NaHCO_3$, sort B, $\overline{r}_2 = 0{,}0475$ mm.

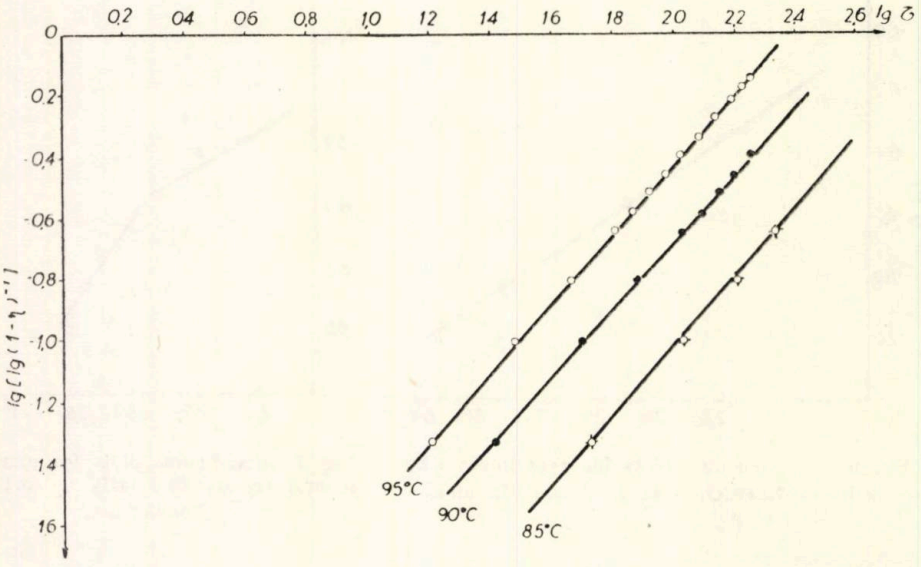


Fig. 9. — Plot of log [log $(1 - \eta_i]^{-1}$ vs. log τ for $NaHCO_3$, sort A, $\bar{r}_3 = 0{,}075$ mm.

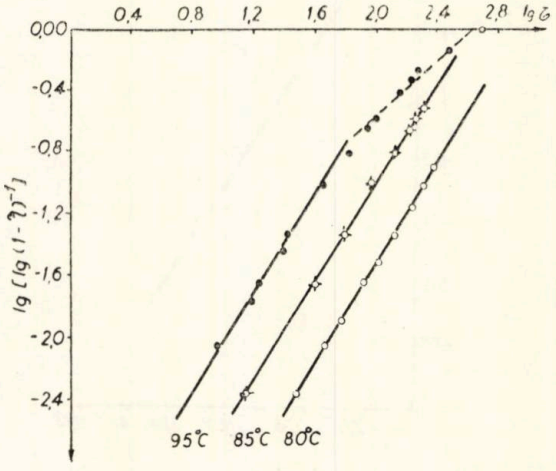


Fig. 10. — Plot of log [log $(1 - \eta_i)^{-1}$] vs. log τ for $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0.282$ mm.

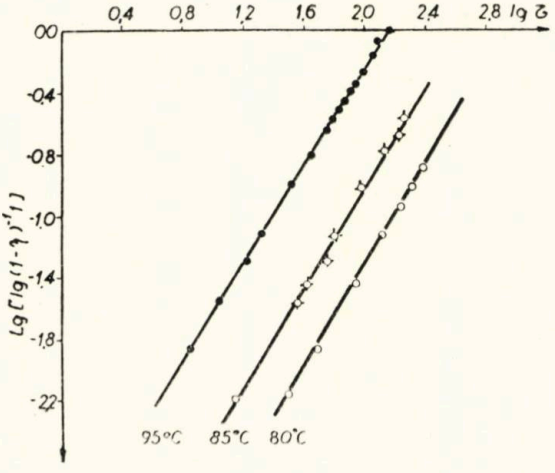


Fig. 11. — Plot of log [log $(1 - \eta)^{-1}$] vs. log τ for $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_2 = 0{,}0475$ mm.

With the values of K_s there were plotted the graphs $\log K_s$ vs. $1/T$, from which we have determined the activation energy (Fig. 6, 7 and 8). We have obtained the following values for activation energy: $E = 15\,500$ cal.g. mole^{-1} in the case of decomposition of $NaHCO_3$, sort A, $\bar{r}_3 = 0.075$ mm and $E = 22\,000$ cal.g.mole^{-1} in the case of decomposition of $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_2 = 0.0475$ mm.

At the thermical decomposition of $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0.282$ mm, we have obtained not only one straight line but two and the corresponding activation energies are $E_1 = 17\,000$ cal. g. mole^{-1} and $E_2 = 6\,500$ cal. g. mole^{-1}.

The above mentioned results allow us to detach the following con clusions:

a) in the case of thermical decomposition of $NaHCO_3$, sort A, the experimental values satisfactorily agree with the proposed model for all researched transforming degrees and temperatures;

b) in the case of thermical decomposition of $NaHCO_3$, sort B, we remark some deviations from the proposed model, both in the domain of small transforming degrees and in the domain of large transforming degrees;

c) at the same time we remark the fact that at temperatures of 80° and 85°C, indifferently of the size of $NaHCO_3$ granules the transforming degrees are the same (Fig. 1 and 2), the deviations ranging in the limits of experimental errors. This phenomenon does not appear at 95°C ($NaHCO_3$, sort B).

2.2. Macrokinetic Model: the Formation and the Growing of the Germs of Na_2CO_3 — Rate Controlling Step

Since the experimentally obtained values don't verify entirely the macrokinetic model: chemical reaction — controlling resistance, we have also researched the importance of crystallization process in the development of the decomposition. This model is described by the equation [1]:

$$\frac{dn_{Na_2CO_3}}{d\tau} = n^c_{Na_2CO_3} \frac{dN_c}{d\tau} + N_c \frac{dn^c_{Na_2CO_3}}{d\tau}. \tag{3}$$

If we consider the growing rate of bi- and tridimensions germs as constant, the obtained equation by adequate transformations of Eq. (3) is

$$\eta = 1 - e^{-k\tau^n}. \tag{4}$$

Fig. 9, 10 and 11 show the plotting of experimental values using equation (4).

Table 2 contains the values of terms K and n determined from the slopes and the intercepts of plots above mentioned.

Table 2

$NaHCO_3$	Parameters			
sort A $\bar{r}_3 = 0.075$ mm	t[°C]	85	90	95
	K	4.64×10^{-4}	1.32×10^{-3}	2.24×10^{-3}
	n	1.14	1.10	1.11
sort B $\bar{r}_1 = 0.282$ mm	t[°C]	80	85	95
	K	5.49×10^{-5}	1.04×10^{-4}	3.98×10^{-4}
	n	1.41	1.50	1.42
sort B $\bar{r}_2 = 0.0475$ mm	t[°C]	80	85	95
	K	5.49×10^{-5}	1.04×10^{-4}	4.36×10^{-4}
	n	1.41	1.50	1.56

Previous data allow us to conclude: in the limits of errors resulting from the approximations made in the case of this model, equation (4) describes sufficiently accurate the thermical decomposition of $NaHCO_3$, excepting the large values of η in the case of $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0.282$ (Fig. 10).

2.3. Macrokinetic Model: Transfer through ash Layer—Rate Controlling Step

The analysis of experimental values concerning the macrokinetics of thermical decomposition of $NaHCO_3$, with the help of two previous models, shows that the process doesn't take place and respectively can't be described by one model alone. The presence of the broken line on Arrhenius plot (Fig. 10) and the values of activation energies indicate the possibility of decomposition — both for large size granules and η — according to an other model, namely: the transfer through ash layer. The equation which describes the development of the process in this case is known [2], [3]:

$$\tau = \frac{R^2}{12 D_{CO_2} C^s_{CO_2}} [1 - 3\,(1 - \eta)^{2/3} + 2(1 - \eta)].$$

The plots $1 - (1 - \eta)^{2/3} + 2\,(1 - \eta)$ vs. τ, calculated from the experimental results (Fig. 12, ... , 14), show that excepting the decomposition of $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0.282$ mm, for large values of η the suitable doesn't appear. As a result, we consider that the transfer through ash may become — rate controlling step with the increase of size of $NaHCO_3$ granules.

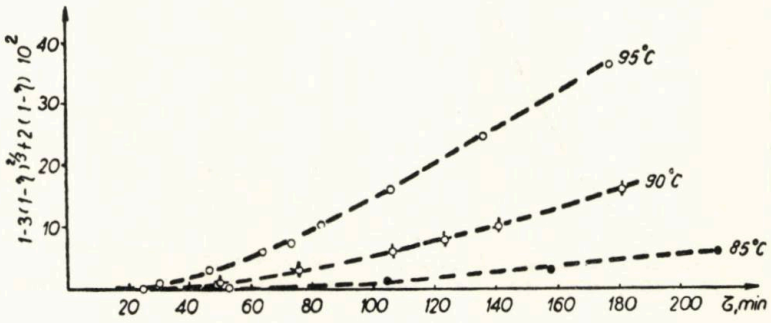


Fig. 12. — Plot of $1 - (1 - \eta)^{2/3} + 2(1 - \eta)$ vs. θ, for $NaHCO_3$, sort A, $\bar{r}_3 = 0.075$ mm.

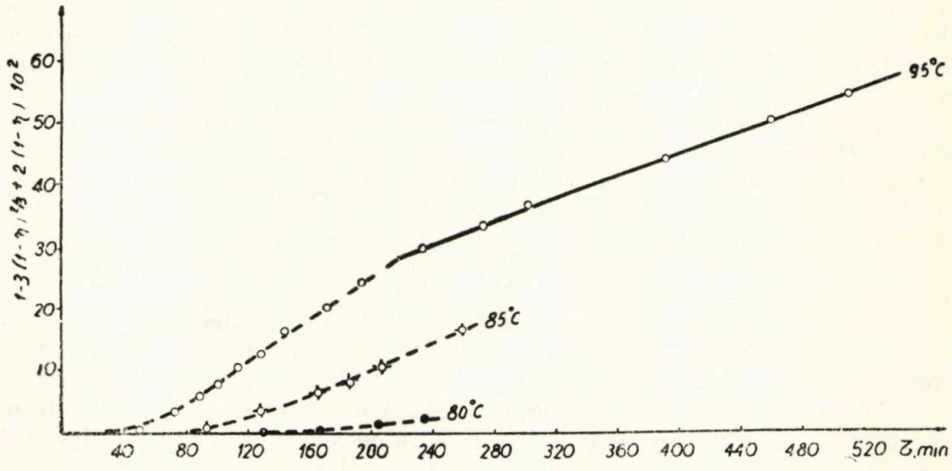


Fig. 13. — Plot of $1-(1 - \eta)^{2/3} + 2(1-\eta)$ vs. τ, for $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0.282$ mm.

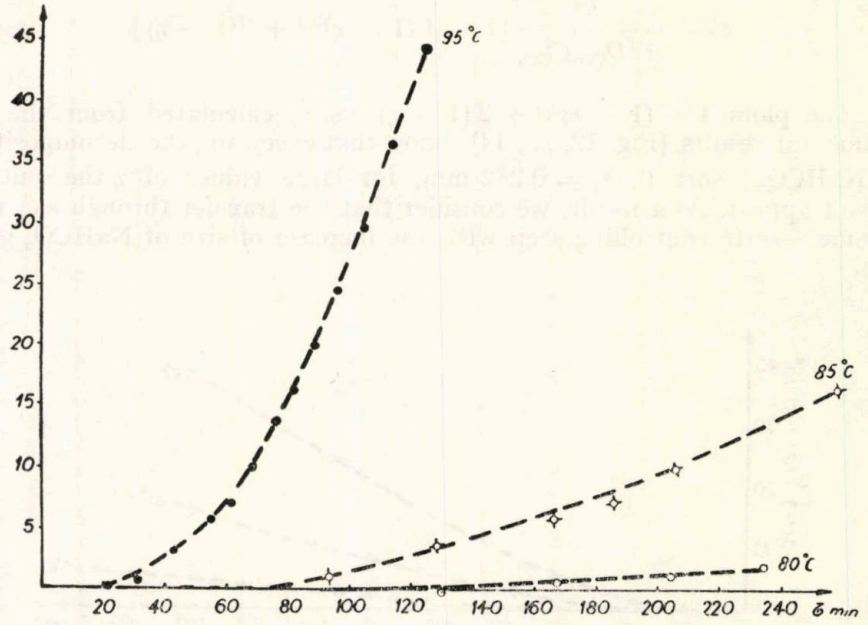


Fig. 14. — Plot of $1 - (1 - \eta)^{2/3} + 2(1 - \eta)$ vs. τ, for $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_2 = 0.0475$ mm.

3. Analysis

Based on the results obtained from kinetic curves, in determined experimental conditions, we may detach the following conclusions: the thermical decomposition of $NaHCO_3$ may be controlled by a chemical step or a transfer step (transfer of gaseous products of reaction through ash layer).

The process is controlled by the chemical reaction in the case of small size $NaHCO_3$ granules for all investigated temperatures and both sorts of granules. The process which is controlled by the chemical reaction may be determined either by the surface chemical reaction, or by the crystallization of Na_2CO_3. The results obtained from the analysis of experimental values in the case of chemical step allow to specify the conditions in which one or another of these become rate controlling step.

Thus, for the first sort of $NaHCO_3$ (sort A) the model chemical reaction — controlling resistance, satisfactorily describes the development of process. At the same time, for the same conditions, the development of the process is described by the crystallization model. The term n from equation (4) has values near 1. Such a value shows that in reality not exactly the crystallization but chemical reaction is the rate controlling step.

In the case of $NaHCO_3$, sort B, some new aspects appear: the value of term n is larger than 1 and as a result there may be raised the question that chemical reaction isn't the rate controlling step. We obtain the same conclusions if we researche the influence of initial size of $NaHCO_3$ on overall rate of process. As we have mentioned, it is evident from kinetic curves that to temperatures of 85 °C, the overall rate of process does not depend on the size of radius of granule. This influence can't appear in the case when chemical reaction is rate controlling step. For this reason, we arrive at the conclusion that, in this case, the development of the process may be described by the crystallization model. When the temperature increases, the description of the process may ba made, as in the previous case, with the suitable model of chemical reaction.

The values of K_r are different both from one sort of $NaHCO_3$ to another and even in the case of the same sort. In our opinion, this difference is determined by factors connected with properties of the solid (solid reactivity, crystallite size, surface characteristics, etc.).

Finally, it is important to underline the fact that when the size of granule and η increase, the rate controlling step becomes the diffusion through ash layer.

4. Conclusions

1. In the present paper we have researched the macrokinetics of thermical decomposition of $NaHCO_3$ at temperatures from 80°...95 °C, using two sorts of $NaHCO_3$ and two different initial sizes. The experiments are effectuated in fixed bed, in batch reactor, with the elimination of the possibilities which would allow as rate controlling step—the transfer through external gaseous phase.

2. In these experimental conditions, it is shown on the basis of makrokinetical and mathematical modelling that the decomposition process of $NaHCO_3$ can't be described by one model alone.

3. The overall rate process which is determined for a great extent of transforming degrees and initial sizes by kinetical model can't entirely be described by this model, because of supplementary laws which appear at small temperatures on one hand and at large sizes of $NaHCO_3$, on the other.

4. From the experimental results, it is possible to detach the conclusions that at small temperatures besides the chemical reaction even crystallization may become rate — controlling step; at large sizes of $NaHCO_3$ granules and transforming the diffusion through ash layer may become rate — controlling step.

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Anorganic Chemical Technology

REFERENCES

1. Calistru C., Ifrim L., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3—4*, p. 209.
2. Levenspiel O., *Chemical Reaction Engineering*. New York—London—Sidney, 1962.
3. Wen C. Y., Ind. and Eng. Chem., 1968, **60**, *9*, p. 34.

MACROCINETICA DESCOMPUNERII TERMICE A $NaHCO_3$ (II)

(Rezumat)

În lucrarea de faţă se cercetează, în continuare, macrocinetica procesului de descom punere termică a $NaHCO_3$ şi modelarea matematică a acestuia. Cercetările privesc interv alu de temperatură 80°...95 °C şi două sorturi de $NaHCO_3$ (obţinute în condiţii experimentale diferite) cu două granulaţii diferite.

În condiţiile experimentale menţionate, se stabileşte, pe baza modelelor macrocinetice şi matematice utilizate, că procesul de descompunere termică nu poate fi descris de o singură lege cinetică.

Pe baza rezultatelor experimentale obţinute se poate desprinde concluzia că, alături de stadiul cinetic, la temperaturi coborîte, stadiul limitativ poate deveni procesul de apariţie a germenilor fazei solide noi, iar la granulaţii mari, la un anumit grad de transformare, poate deveni limitativ stadiul de transfer al produselor gazoase prin crusta de produs de reacţie.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Diagrama grad de transformare ($\eta\%$) — durată (τ, min) pentru $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0{,}282$ mm.
Fig. 2. — Diagrama grad de transformare ($\eta\%$) — durată (τ, min) pentru $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_2 = 0{,}475$ mm.
Fig. 3. — Graficul $1 - (1 - \eta)^{1/3}$ funcţie de τ pentru $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0{,}282$ mm.
Fig. 4. — Graficul $1 - (1 - \eta)^{1/3}$ funcţie de τ pentru $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_2 = 0{,}0475$ mm.
Fig. 5. — Graficul $1 - (1 - \eta)^{1/3}$ funcţie de τ pentru $NaHCO_3$, sort A, $\bar{r}_3 = 0{,}0750$ mm.
Fig. 6. — Graficul $\log K_3$ funcţie de $1/T$ pentru $NaHCO_3$, sort A, $\bar{r}_3 = 0{,}075$ mm.
Fig. 7. — Graficul $\log K_5$ funcţie de $1/T$ pentru $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1 = 0{,}282$ mm.
Fig. 8. — Graficul $\log K_5$ funcţie de $1/T$ pentru $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_2 = 0{,}0475$ mm.
Fig. 9. — Graficul $\log (1 - \eta)^{-1}$ funcţie de $\log \tau$ pentru $NaHCO_3$, sort A, $\bar{r}_3$.
Fig. 10. — Graficul $\log (1 - \eta)^{-1}$ funcţie de $\log \tau$ pentru $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1$.
Fig. 11. — Graficul $\log (1 - \eta)^{-1}$ funcţie de $\log \tau$ pentru $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_2$.
Fig. 12. — Graficul $1 - 3(1 - \eta)^{2/3} + 2(1 - \eta)$ funcţie de τ pentru $NaHCO_3$, sort A, $\bar{r}_3$.
Fig. 13. — Graficul $1 - 3(1 - \eta)^{2/3} + 2(1 - \eta)$ funcţie de τ pentru $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_1$.
Fig. 14. — Graficul $1 - 3(1 - \eta)^{2/3} + 2(1 - \eta)$ funcţie de τ pentru $NaHCO_3$, sort B, $\bar{r}_2$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia II
CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 661.183.12 ; 678.7

SCHIMBĂTORI DE CATIONI DIN CAUCIUC ROMANESC

DE

ELEONORA DIACONESCU şi FLORENTINA CHIRIAC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1969

1. Introducere

În cadrul preocupărilor noastre privitoare la obţinerea de schimbători de ioni şi plecînd de la materii prime indigene [1]...[6], ne-am propus, în lucrarea de faţă, să efectuăm un studiu asupra valorificării unor deşeuri industriale pe schimbători de ioni, ca de pildă obţinerea de schimbători de ioni din deşeurile ce rezultă de la prelucrarea cauciucului din fabricile de cauciuc din ţara noastră. Este vorba de cauciucul românesc Carom.

2. Materiale şi metode

Cauciucul romanesc este un copolimer al butadienei cu α-metilstirenul, iar valorificarea deşeurilor de la prelucrarea acestui cauciuc este propusă cu scopul de a obţine schimbători de cationi printr-un proces de sulfonare cu acid sulfuric concentrat ($d = 1,84$), atît al copolimerului ca atare, cît şi a produselor de vulcanizare ale acestui copolimer.

Copolimerii nevulcanizaţi, utilizaţi în încercările noastre, conţin 6,87, 30 şi 54,9% α-metilstiren, iar produsele vulcanizate sînt obţinute cu 1,02% şi 10,4% sulf legat, ele avînd următoarea compoziţie : cauciuc Carom—71,8%, parafină — 0,72%, ZnO — 0,72%, negru de fum — 8,6%, mazut — 14,4%, colofoniu — 0,36%, difenilguanidină — 1,4%, kaptax — 1,8%.

Atît produsele polimerizate cît şi cele vulcanizate în granule de circa 5 mm diametru, au fost supuse în prealabil unui tratament cu acid sulfuric ($d=1,84$), timp de 24 ore. După ce s-a îndepărtat cît mai complet acidul, probele s-au supus sulfonării cu acid sulfuric ($d = 1,84$), la temperatura de 100°...

... 105 °C și durate de timp variabile de la 5...50 ore, sub o agitare lentă a masei de reacție.

Raportul cauciuc: acid sulfuric a fost de 1:10 în greutate. Mărirea cantității de acid sulfuric nu a avut nici o influență asupra capacității de schimb [7].

Cationiții bruți obținuți, aduși prin sfărîmare sub formă de granule cu diametrul de 1...2 mm, au fost trecuți în ciclul de hidrogen cu o soluție de 3% HCl și apoi spălați pînă la reacție neutră.

Pentru cationiții astfel obținuți s-au determinat: coeficientul de umflare K_u, capacitatea de schimb sulfonică K_{SO_3H}, capacitatea de schimb carboxilică K_{COOH}, capacitatea de schimb totală K_T, conținutul în sulf total, capacitatea de schimb totală în funcție de valoarea pH-ului soluției de acetat de calciu și capacitatea de schimb față de diverși cationi. Capacitățile de schimb au fost determinate prin metode statice complexometrice.

3. Rezultatele experimentale

Rezultatele cercetărilor întreprinse asupra acestor cationiți sînt date în tabelele 1...7 și fig. 1...3. Din analiza datelor din tabelele 2 și 3 reies o serie de concluzii, care pot fi astfel rezumate:

a) Coeficientul de umflare K_u al cationiților variază cu timpul de sulfonare și cu natura materiei prime supuse sulfonării. Mărirea duratei de sulfonare și a cantității de α-metilstiren sau sulf în copolimerii sau produsele vulcanizate supuse sulfonării, produce o micșorare apreciabilă a coeficientului de umflare.

b) Capacitatea de schimb sulfonică K_{SO_3H} crește odată cu conținutul de α-metilstiren din copolimerul supus sulfonării și cu durata de sulfonare. Dacă la cationiții care provin din copolimerul cu numai 6,87% α-metilstiren, capacitatea de schimb sulfonică are valoarea maximă de 0,86 mechiv/g, la cationitul care provine din copolimerul cu 54,9% α-metilstiren, capacitatea de schimb sulfonică are valoarea maximă de 3,19 mechiv/g.

Timpul de sulfonare pentru obținerea capacităților de schimb sulfonice maxime este de 20 ore.

La cationiții proveniți din vulcanizate, capacitatea de schimb sulfonică are valori cuprinse între 0,88...1,10 mechiv/g; timpul de sulfonare pentru obținerea capacității de schimb sulfonice maxime variază între 40 și 50 ore.

c) Capacitatea de schimb carboxilică K_{COOH} variază între 0,17...0,87 mechiv/g și rămîne aproximativ constantă pentru fiecare grupă de cationiți obținuți. Ea se formează ca rezultat al acțiunii oxidante a acidului sulfuric.

d) Capacitatea de schimb totală K_T este influențată de asemenea de conținutul de α-metilstiren din polimerul supus sulfonării și de durata de sulfonare, obținîndu-se cationiți cu o capacitate de schimb totală maximă de 3,79 mechiv/g.

Tabelul 1

Greutatea volumetrică a copolimerilor butadien α-metilstiren sulfonați și a produselor vulcanizate sulfonate

Nr. probei	Natura copolimerului supus sulfonării	Timp de sulfonare ore	Greutate volumetrică kg/l
1	Copolimeri butadien α-metilstiren cu 30% metilstiren	5	0,3562
2		10	0,3220
3		15	0,3762
4		20	0,3691
5		25	0,3880
6	Copolimer butadien α-metilstiren cu 54,9% metilstiren	5	0,5327
7		10	0,5298
8		15	0,5447
9		20	0,5329
10		25	0,5283
11	Copolimer butadien α-metilstiren cu 6,87% metilstiren	5	0,2873
12		10	0,3022
13		15	0,3068
14		20	0,2872
15		25	0,3106
22	Cauciuc Carom vulcanizat, cu 10,4% sulf legat	5	0,7030
23		10	0,7137
24		20	0,7260
25		30	0,7087
26		40	0,7240
27		50	0,7198

e) Sulfonarea este însoțită de o puternică umflare a copolimerului și de o abundentă degajare de SO_2, datorită faptului că paralel cu sulfonarea are loc și un proces intens de oxidare; de aceea cationiții obținuți sînt polifuncționali conținînd alături de grupele sulfonice și carboxilice și alte grupe active — grupe hidroxilice — care la valori mai ridicate ale pH-ului pot participa la schimbul de cationi. Din acest motiv pentru cîțiva schimbători s-a determinat capacitatea de schimb cu ajutorul soluției de NaOH 0,1 *N*.

f) În aceste condiții schimbătorii cercetați au o capacitate de schimb mai mare decît la titrarea lor cu soluții de acetat de calciu (K_T), datorită existenței grupelor hidroxilice. Rezultatele sînt date în tabelul 4, de unde rezultă că la pH-ul corespunzător soluției de NaOH 0,1 *N* se obțin capacități de schimb cuprinse între 5,19 și 5,45 mechiv/g, deci cu aproximativ 50...56% mai mari decît capacitatea de schimb determinată cu soluție de acetat de calciu.

Tabelul 2

Capacitatea de schimb a copolimerilor sulfonaţi

Nr. probei	Natura copolimerului supus sulfonării	Timp de sulfonare ore	Coeficient de umflare K_u	Capacitatea de schimb mechiv/g			Sulf %		
				K_{SO_3H}	K_{COOH}	K_T	total S_t (Eschka)	activ S_a	inactiv S_i
1	Copolimer	5	2,31	2,58	0,80	3,38	9,27	8,24	1,03
2	butadien α-	10	2,12	2,62	0,87	3,49	—	8,38	—
3	metilstiren, cu	15	1,98	2,70	0,82	3,52	—	8,64	—
4	30% α-me-	20	1,93	2,86	0,73	3,59	—	9,15	—
5	tilstiren	25	1,76	2,85	0,60	3,45	10,53	9,12	1,41
6	Copolimer bu-	5	1,87	2,95	0,57	3,52	11,02	9,44	1,58
7	tadien α-me-	10	1,76	3,06	0,61	3,67	—	9,79	—
8	tilstiren cu	15	1,33	3,12	0,62	3,74	—	9,98	—
9	54,9% α-me-	20	1,26	3,19	0,60	3,79	—	10,20	—
10	tilstiren	25	1,22	3,16	0,45	3,61	12,40	10,11	2,29
11		5	3,54	0,67	0,25	0,92	3,57	2,14	1,43
12	Copolimer buta-	10	3,49	0,72	0,34	1,06	—	2,30	—
13	dien α-metil-	15	3,45	0,86	0,27	1,13	—	2,75	—
14	stiren cu 6,87%	20	3,29	0,85	0,27	1,12	—	2,73	—
15	α-metilstiren	25	3,28	0,82	0,21	1,03	3,82	2,62	1,20

Capacitatea de schimb hidroxilică a fost considerată ca diferenţa dintre capacitatea de schimb determinată cu hidroxid de sodiu şi cea determinată cu acetat de calciu. Capacitatea de schimb hidroxilică capabilă să schimbe hidrogenul în medii alcaline s-a confirmat şi prin determinarea capacităţii de schimb totale în funcţie de valoarea pH-ului. Rezultatele sînt date în tabelul 5, de unde se constată că valoarea capacităţii de schimb totale variază de la 1,85 mechiv/g pentru pH = 1,05 la 4,05 mechiv/g pentru pH = 11.

g) Capacitatea de schimb a cationiţilor obţinuţi faţă de diverşi cationi s-a determinat static complexometric întrebuinţînd soluţii 0,01 *M* de $Ni(NO_3)_2$, $CaCl_2$, $MgCl_2 \cdot 7H_2O$, $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ şi $FeCl_3 \cdot 6H_2O$. Soluţiile aveau o valoare a pH-ului cuprinsă între 6,5 şi 7. Capacitatea de schimb a

Tabelul 3

Capacitatea de schimb a produselor vulcanizate sulfonate

Nr. probei	Natura vulcanizatului supus sulfonării	Timp de sulfonare ore	Coeficient de umflare K_u	Capacitatea de schimb mechiv/g			Sulf %		
				K_{SO_3H}	K_{COOH}	K_T	total S_t (Eschka)	activ S_a	inactiv S_i
16		5	1,67	0,88	0,21	1,09	5,01	2,81	2,20
17	Cauciuc Carom	10	1,65	0,91	0,21	1,12	—	2,91	—
18	vulcanizat, cu	20	1,60	0,93	0,22	1,15	—	2,97	—
19	1,02% sulf legat	30	1,41	0,99	0,23	1,22	—	3,07	—
20		40	1,35	0,99	0,26	1,25	—	3,16	—
21		50	1,32	1,02	0,23	1,25	6,45	3,26	3,19
22		5	1,61	0,82	0,28	1,10	—	2,62	—
23	Cauciuc Carom	10	1,38	0,89	0,26	1,15	—	2,84	—
24	vulcanizat cu	20	1,31	0,94	0,27	1,21	—	3,00	—
25	10,4% sulf legat	30	1,11	0,99	0,26	1,25	—	3,16	—
26		40	—	1,10	0,17	1,27	—	3,42	—
27		50	—	1,10	0,18	1,28	—	3,52	—

Tabelul 4

Capacitatea de schimb totală, determinată cu soluţie de NaOH 0,1 *N şi cu soluţie de* $Ca(CH_3COO)_2$ 0,1 *N*

Nr. probei	Capacitatea de schimb mechiv/g		Capacitatea de schimb hidroxilică mechiv/g
	Determinată cu soluţie NaOH 0,1 *N*	Determinată cu soluţie $Ca(CH_3COO)_2$ 0,1 *N*	
1	5,28	3,38	1,90
2	5,31	3,49	1,82
3	5,45	3,52	1,93
4	5,39	3,59	1,80
5	5,19	3,45	1,74

cationitului nr. *5* în ciclul de hidrogen faţă de aceşti cationi (tabelul 6) arată că el posedă o apreciabilă capacitate de schimb pentru cationii consideraţi. Astfel s-a putut stabili ordinea de schimb a acestor cationi pe schimbătorul copolimer butadien α-metilstiren sulfonic şi anume:

$$Cu > Mg > Ca > Ni > Fe.$$

Tabelul 5

Dependenţa capacităţii de schimb totale a cationiţilor nr. 5 şi nr. 25, de valoarea pH-ului

Denumirea cationitului	pH	Capacitatea de schimb mechiv/g
Cationit nr. *5*	1,05	1,85
	2,85	2,25
	5,4	2,45
	7,4	3,15
	9,1	3,75
	11,0	4,05
Cationit nr. *25*	1,05	1,10
	2,85	1,15
	5,4	1,30
	7,4	1,42
	9,1	1,55
	11,0	1,76

Tabelul 6

Capacitatea de schimb a cationitului nr. 5, în ciclul de hidrogen, pentru diverşi cationi

Denumirea cationului schimbat	pH-ul soluţiei	Capacitatea de schimb mechiv/g
Fe	6,8	1,75
Ni	6,5	2,03
Ca	7,1	2,07
Mg	7,0	2,12
Cu	6,7	2,42

Determinările experimentale (tabelele 2 şi 3) arată că conţinutul în sulf al cationiţilor este funcţie de natura copolimerului sau produsului vulcanizat supus sulfonării şi de durata de sulfonare ; el creşte cu conţinutul de α-metilstiren în materia primă.

h) Determinările de sulf au permis de asemenea să se constate dependenţa dintre conţinutul în sulf şi capacitatea de schimb sulfonică a cationiţilor obţinuţi, aceasta din urmă fiind aproximativ direct proporţională cu conţinutul în sulf al cationiţilor polibutadien sulfonici.

Se constată însă în toate cazurile că conţinutul în sulf determinat experimental (S_T) este mai mare decît cel teoretic, calculat

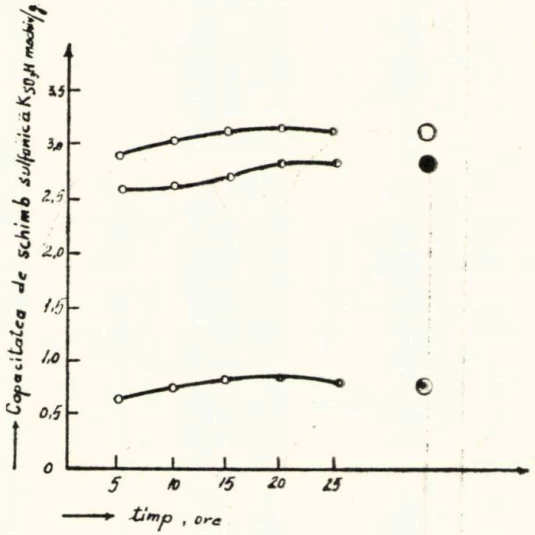


Fig. 1. — Variaţia capacităţii de schimb sulfonice K_{SO_3H} în funcţie de durata de sulfonare:
○ cationit din copolimer cu 6,87% α-metilstiren,
● cationit din copolimer cu 30% α-metilstiren,
⊙ cationit din copolimer cu 54,9% α-metilstiren.

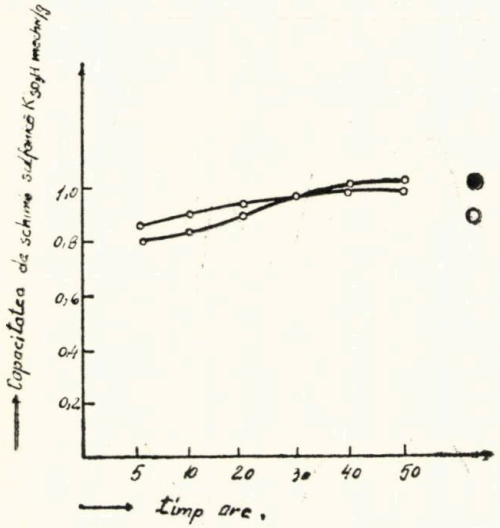


Fig. 2. — Variaţia capacităţii de schimb sulfonice K_{SO_3H} în funcţie de durata de sulfonare: ○ cationit din produsul vulcanizat cu 1,02% sulf legat, ● cationit din produsul vulcanizat cu 10,4% sulf legat.

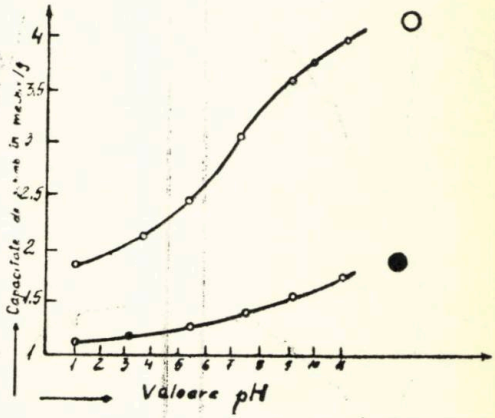
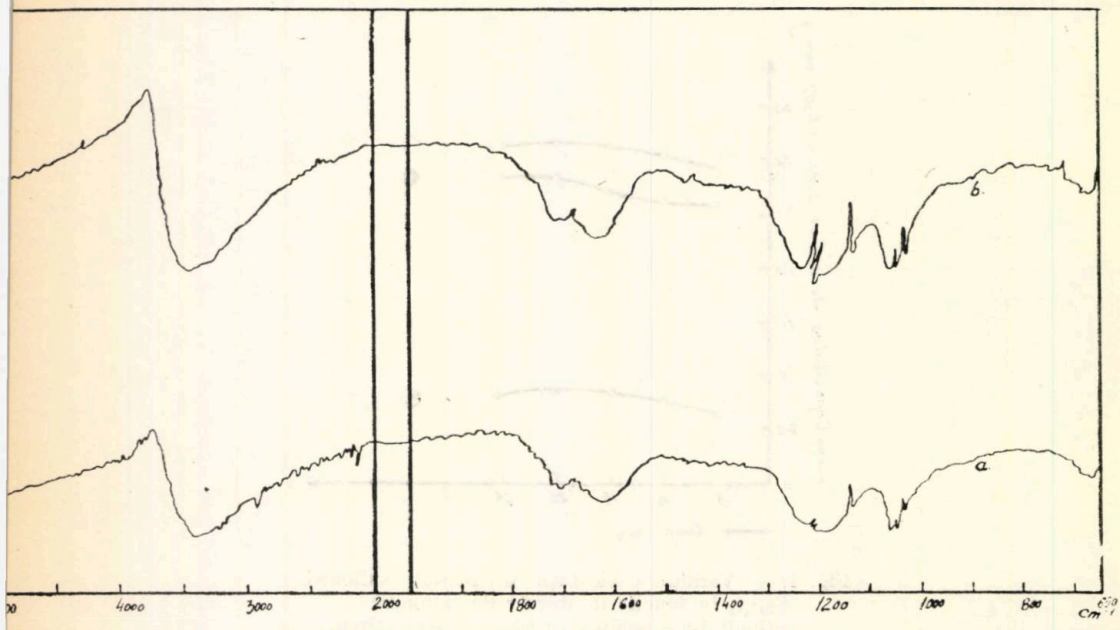
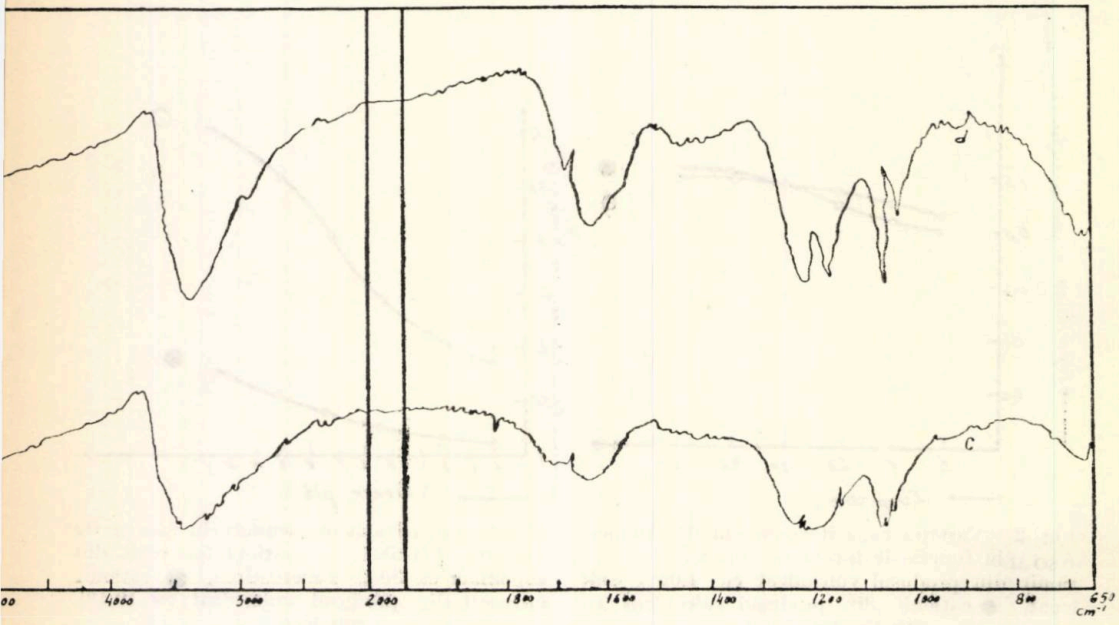


Fig. 3. — Capacitatea de schimb în funcţie de valoarea pH-ului: ○ cationit provenit din copolimer cu 30% α-metilstiren, ● cationit provenit din produsul vulcanizat cu 10,4% sulf legat.



ig. 4. — Spectrul de absorbţie în infraroşu al cationitului obţinut din copolimerul cu 30% α-metilstiren sulfonat: *a*—timp de 5 ore; *b*—timp de 25 ore.



g. 5. — Spectrul de absorbţie în infraroşu al cationitului obţinut din copolimerul cu 54,2% α-metilstiren sulfonat: *a*—timp de 5 ore, *b*—timp de 20 ore.

Tabelul 7

Variația numărului de unități structurale X, Y, U, Z, ale cationiților copolimeri butadien-α-metilstiren sulfonici, în funcție de condițiile de obținere (timpul de sulfonare și natura materiei prime)

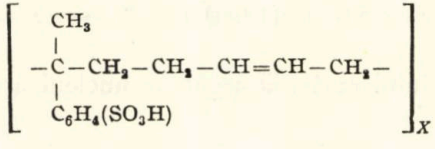
Nr. probei	Capacitatea de schimb mechiv/g		Sulf %			Unități structurale la 100 unități			
	K_{SO_3H}	K_{COOH}	total S_T	activ S_a	inactiv S_i	X	Y	U	Z
1	2,58	0,80	9,77	8,24	1,03	60,14	18,56	7,45	13,75
5	2,85	0,60	10,53	9,82	1,41	68,34	14,38	9,59	7,69
6	2,95	0,57	11,02	9,44	1,58	72,48	14,00	12,28	1,24
10	3,16	0,45	11,41	10,11	1,29	76,88	10,94	9,73	2,45
11	0,67	0,25	3,57	2,14	1,43	12,73	4,75	7,59	74,93
15	0,82	0,21	3,82	2,62	1,20	15,74	4,03	7,38	72,85
16	0,88	0,21	5,01	2,81	2,20	17,29	4,12	13,94	64,65
21	1,02	0,23	6,45	3,26	3,19	18,78	4,23	18,23	58,76

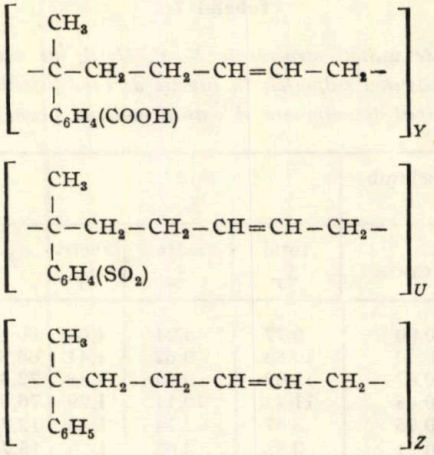
din capacitatea de schimb sulfonică (S_a). Această diferență dintre conținutul în sulf teoretic (calculat) și cel determinat experimental, arată existența în masa cationitului a sulfului „inactiv" (S_i), a cărei proveniență se poate explica prin transformarea, sub acțiunea temperaturii și a duratei tratamentului, a sulfului de formă activă $-SO_3H$, în sulf inactiv (S_i) sub formă de $-SO_2-$, care participă la reticularea tridimensională a cationitului.

i) Randamentul ionitului este de 120 g la 100 g polimer de plecare.

j) Mărirea duratei de sulfonare duce la obținerea de cationiți cu o rezistență mecanică mai mare. Foarte rezistenți se dovedesc a fi cationiții proveniți din produse vulcanizate.

k) În funcție de rezultatele experimentale referitoare la capacitățile de schimb sulfonice, carboxilice, a conținutului în sulf inactiv și notînd cu X numărul unităților structurale ale macromoleculei cationitului care conține grupele sulfonice, cu Y — al celor ce conțin grupele carboxilice, cu U — al celor ce conțin sulf inactiv și cu Z — al unităților structurale netrasformate, acești cationiți pot fi reprezentați prin unitățile structurale mai importante de tipul:



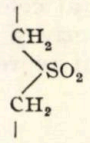


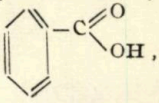
Valorile numerelor de unităţi structurale X, Y, U şi Z, calculate pentru unii cationiţi [8], în funcţie de condiţiile de obţinere (durata de sulfonare şi natura materiei prime întrebuinţate), sînt date în tabelul 7.

Din analiza acestor date se constată că numărul de unităţi structurale X corespunzătoare grupelor de schimb sulfonice creşte odată cu durata de sulfonare, iar numărul de unităţi structurale Y corespunzătoare grupelor de schimb carboxilice, scade odată cu timpul de sulfonare.

1) Pentru unii dintre cationiţii obţinuţi s-au cercetat şi spectrele în infraroşu, cu scopul de a pune în evidenţă şi pe aceasta cale grupele funcţionale schimbătoare de ioni — sulfonice, carboxilice şi fenolice, create în procesul de sulfonare. În fig. 4 curbele *a* şi *b* reprezintă spectrele de absorbţie ale cationiţilor obţinuţi din copolimerul cu 30% α-metilstiren sulfonat timp de 5, respectiv 25 ore, iar în fig. 5, curbele *c* şi *d* reprezintă spectrele de absorbţie ale cationiţilor obţinuţi din copolimerul cu 54,2% α-metilstiren sulfonat timp de 5, respectiv 20 ore.

Din studiul acestor curbe se constată existenţa unor benzi de absorbţie comune la $\lambda = 9{,}1\ \mu$ (1 090 cm^{-1}) şi $\lambda = 9{,}0\ \mu$ (1 100 cm^{-1}), care corespund vibraţiei nucleului aromatic monosubstituit şi la $\lambda = 7{,}4\ \mu$ (1 340 cm^{-1}) şi $\lambda = 8{,}7\ \mu$ (1 140 cm^{-1}) atribuite grupei sulfone alifatice



Absorbţiile de la $\lambda = 5{,}95\ \mu$ (1 680 cm^{-1}) şi $\lambda = 5{,}5\ \mu$ (1 800 cm^{-1}) corespund grupei acidului carbonic legat de nucleul aromatic  ,

grupă creată în procesul de sulfonare. La curbele *b* şi *d*, benzile de absorbţie de la $\lambda = 9{,}6\ \mu$ (1 040 cm^{-1}), $\lambda = 8{,}2\ \mu$ (1 210 cm^{-1}), $\lambda = 9{,}4\ \mu$ (1 060 cm^{-1}) şi $\lambda = 8{,}3\ \mu$ (1 200 cm^{-1}), atribuite grupelor acide sulfonice, provenite în cationiţi din procesul de sulfonare, grupe care conferă acestor cationiţi bune proprietăţi de schimb de ioni, sînt mult mai intense decît la curbele *a* şi *c*.

În toate curbele spectrale ale acestor schimbători sînt prezente benzile de absorbţie de la $\lambda = 2{,}70\ \mu$ (3 700 cm^{-1}) şi $\lambda = 2{,}64\ \mu$ (3 750 cm^{-1}), atribuite grupelor hidroxilice.

4. Concluzii

1. Prin sulfonarea cu acid sulfuric concentrat a unor copolimeri butadien α-metilstiren cu cantităţi variabile de stiren şi a unor produse vulcanizate cu cantităţi variabile de sulf legat, se obţin sulfocationiţi avînd capacitatea totală de schimb cuprinsă între limitele 1,09...3,79 mechiv/g.

2. Titrarea cu soluţie de NaOH 0,1 *N* şi determinarea capacităţii de schimb totale a acestor cationiţi la diverse valori ale pH-u lui pun în evidenţă faptul că ei conţin o apreciabilă cantitate de grupe slab acide, hidroxilice.

3. Determinarea capacităţii de schimb a ionitului pentru diverşi cation. a permis stabilirea seriei de schimb a acestor cationi cu ionitul considerati

4. În funcţie de rezultatele experimentale referitoare la capacităţile de schimb sulfonice, carboxilice, a conţinutului de sulf inactiv, s-a stabilit tipul de unităţi structurale la unii din cationiţii obţinuţi şi s-a calculat numărul de unităţi structurale la 100 g cationit.

5. Prin spectrele în infraroşu au fost puse în evidenţă grupele funcţionale schimbătoare de ioni apărute în urma procesului de sulfonare şi oxidare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie generală

BIBLIOGRAFIE

1. Diaconescu E., Dima M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI** (**X**), *1—2*, pp. 139—156.
2. Dima M., Diaconescu E., Ionescu I., Florea E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI** (**X**), *1—2*, pp. 112—126.
3. Diaconescu E., Dima M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X** (**XIV**), *3—4*, pp. 111—122,
4. Diaconescu E., Chiriac F., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII** (**XVI**), *1—2*. pp. 163—170.
5. — Bul. Inst. polit, Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *3—4*, pp. 127—134.
6. Diaconescu E., Dima M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *1—2*, pp. 129—136.
7. Старобинец Г. Л., ЖПХ, 1960, **XXXIII**, *3*, стр. 690—694.
8. Scondac I., Petraru T., Dima M., St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1962, **XIII**, *1*, pp. 67—80.

KATIONEN-AUSTAUSCHER AUS RUMÄNISCHEM KAUTSCHUK

(Zusammenfassung)

1. Durch die Sulfonierung mittels konzentrierter Schwefelsäure von aus Butadien α-Methylstyrol mit verschiedenen Mengen Styrol erhaltenen Mischpolymeren, sowie einiger Vulkanisate mit verschiedenen Mengen gebundenene Schwefels, wurden Sulfo-Kationiten erhalten, deren gesammte Austauschkapazität in den grenzen 1,09...3,79 mval/g liegt.

2. Es wurde die Austauschfähigkeit des Ionenaustauschers für verschiedene Kationen bestimmt, wobei die Austauschordnung dieser Kationen an dem betreffenden Ionenaustauscher bestimmt wurde.

3. Auf Grund der Versuchergebnisse wurde für einige der erhaltenen Kationenaustauscher der Typus der Baueinheiten festgestellt und die Anzahl dieser Einheiten in 100 g Kationit berechnet.

4. Durch die Infrarotspektren wurden die funktionellen Gruppen die zum Ionenaustausch befähigt sind nachgewiesen; sie sind beim Sulfonierungs- und Oxydierungs-Vorgang enstanden.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. — Veränderung der sulfonischen Austauschkapazität K_{SO_3H} in Abhängigkeit von der Sulfonierungsdauer: ⊙ Kationit aus dem Mischpolymer mit 6,87% α-Methylstyrol, ● Kationit aus dem Mischpolymer mit 30% α-Methylstyrol, o Kationit aus dem Mischpolymer mit 54,9% α-Methylstyrol.

Abb. 2. — Veränderung der sulfonischen Austauschkapazität K_{SO_3H} in Abhängigkeit von der Sulfonierungsdauer: ⊙ Kationit aus einem Vulkanisat mit 1,02% gebundenen Schwefel, ● Kationit aus einem Vulkanisat mit 10,4% gebundenem Schwefel.

Abb. 3. — Austauschkapazität in Abhängigkeit von pH-Wert: o Kationit aus einem Misch polymer mit 30% α-Methylstyrol, ● Kationit aus einem Vulkanisat mit 10,4% gebundenem Schwefel.

Abb. 4. — Infrarotspektren: *a* — Absorptionsspektren der aus dem mit 30% α-Methylstyrol 5 Stunden lang sulfoniertem Mischpolymer erhaltenen Kationen, *b* — Absorptionsspektren des aus dem mit 30% α-Methylstyrol 25 Stunden lang sulfoniertem Mischpolymer erhaltenen Kationiten.

Abb. 5. — Infrarotspektren: *c* — Absorptionsspektren der aus dem mit 54,2% α-Methylstyrol 5 Stunden lang sulfoniertem Mischpolymer erhaltenen Kationiten: *d* — Absorptionsspektren der aus dem mit 54,2% α-Methylstyrol 20 Stunden lang sulfoniertem Mischpolimer erhaltenen Kationiten.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia II
CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. D. 66.091 ; 678.674

SYNTHÈSES MÉCANOCHIMIQUES PAR POLYCONDENSATION SUR SUPPORT POLYESTÉRIQUE

NOTE II
INFLUENCE DE CERTAINS FACTEURS PHYSIQUES ET CHIMIQUES

PAR

Acad. CRISTOFOR SIMIONESCU, CLEOPATRA VASILIU-OPREA
et CLAUDIA NEGULEANU

1. Introduction

L'activation par voie mécanique des composés chimiques est équivalente à la modification des angles de valence et des distances interatomiques, respectivement des énergies potentielles, en produisant successivement des changements structuraux au niveau inter- et intramoléculaire, concrétisés par l'apparition des structures excitées par voie mécanique, semblables aux complexes intermédiaires actifs, obtenus par les méthodes habituelles de la chimie.

Sous cet aspect, on constate d'une façon tout à fait claire que la méthode mécanochimique représente une voie générale de transformation des composés chimiques, en permettant, fonction de leur structure et de la forme sous laquelle on confère l'énergie mécanique, l'initiation des plus divers types de réaction.

En dehors des processus de destruction et de synthèse mécanochimique, ayant à leur base la polymérisation, déjà discutés multilatéralement dans la littérature de spécialité, on mentionne aussi, parfois, comme réactions secondaires ou même comme processus de première importance, certaines transformations similaires à celles des composés organiques ayant un poids moléculaire réduit [1] aux produits inorganiques micro- et macromoléculaires [2]...[19] aussi bien que la possibilité de l'initiation, pour le moment sur un support macromoléculaire, de certains processus chimiques tels que la nitration [20], [21], la xantogénation [22], la deshydrochloruration [21]...[23], la deshydrocyanuration [23], ce qui atteste en essence l'unité des phénomènes qui sont à la base d'une nouvelle science, la ,,mécanochimie".

En partant de ces résultats de même que de nos propres données, nous nous sommes proposés l'initiation d'un nouveau type de synthèse dans le domaine de la mécanochimie des polymères, à savoir la polycondensation mécanochimique [24], [25].

Dans un travail antérieur [26], nous avons mis en évidence la possibilité de l'initiation par voie mécanochimique des réactions de polycondensation, réalisées par l'interaction des groupes fonctionnels — préexistants et générés par destruction mécanochimique — appartenant aux polymères (polyé-

thylènetérephtalate) avec des agents adéquats (diamines), en utilisant pour l'activation du polymère l'énergie mécanique fournie par un broyeur vibrant de laboratoire du type „Labowi LS-60" (amplitude des vibrations 4 mm, nombre de tours du moteur 1 420/min.).

Dans ce travail nous présentons l'étude de l'influence excercée par les facteurs de base qui conditionnent un tel processus : paramètres mécaniques (rapport de remplissage, nature du matériel de construction de l'appareillage, durée du processus), température de travail, nature chimique et quantité de l'agent de condensation, en utilisant comme partenaires de réaction le polyéthylènetéréphtalate et différentes diamines.

2. Partie expérimentale

La réaction de polycondensation entre le polyéthylènetéréphtalate et les diamines s'est réalisée par voie mécanochimique en employant un broyeur vibrant. Le polymère a été soumis au traitement chimique sous forme de poudre, résultée par sa dissolution à 60 °C, dans un mélange formé de phénol-chloroforme (40 : 60 p. vol.) et reprécipitation avec méthanol ; l'éloignement des traces de solvent retenues s'est effectué par extraction à poids constant dans un extracteur Soxhlet ; le séchage été réalisée dans le vide à la température de 80 °C.

La poudre ainsi obtenue a été introduite dans les récipients de broyage, construits en acier V_2A et thermostatés à 20 °C, dans le cas de la détermination de l'influence de tous les paramètres pris en discussion, à l'exception de la température dont l'influence a été étudiée dans l'intervalle de −5° à + 120 °C. Comme agent de condensation on s'est servi dans tous les cas de l'éthylènediamine sauf celui de la détermination de l'influence de la nature de la diamine lorsqu'on a utilisé aussi d'autres produits.

Le milieu de réaction a été inerte, obtenu par l'éloignement de l'air des récipients à l'aide d'une pompe à vide, suivi par quelques lavements successifs à l'azote purifié, qui a constitué aussi le milieu de travail.

Les produits de réaction ont été purifiés par extraction de l'agent de condensation à l'eau, dans le Soxhlet, jusqu'au poids constant ; le séchage s'est effectué dans le vide à la température de 60 °C.

3. Influence de quelques paramètres mécaniques

3.1. Rapport de remplissage et durée de broyage

Un premier paramètre mécanique étudié a été le rapport de remplissage η, défini par la quantité de matériel soumise au traitement mécanique (polymère + diamine) et la quantité de billes, exprimée en grammes × × 100. On a réalisé dans ce but trois séries de broyage, en variant la durée entre 1 et 24 heures pour $\eta = 0{,}2$; 0,8 et 3,2 %. Les résultats sont indiqués comparativement dans la fig. 1.

La réaction de polycondensation a été poursuivie par la variation du pourcentage d'azote chimiquement lié au polyéthylènetéréphtalate (déterminée quantitativement par la méthode Kjeldahl), qui mise en corrélation avec le rapport de remplissage mène à la conclusion que de petites valeurs de celle-ci assurent le pourcentage d'azote le plus élevé $\eta = 0{,}2$ (fig. 1, courbe *1*). De la même représentation graphique il résulte aussi l'influence du deuxième paramètre — la durée du broyage, prouvant l'augmentation du pourcentage d'azote dans le temps.

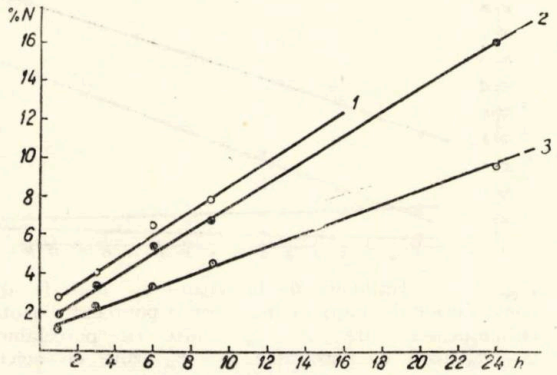


Fig. 1. — Influence du rapport de remplissage sur le pourcent d'azote lié chimiquement : *1* — $\eta = 0{,}2\%$, *2* — $\eta = 0{,}8\%$, *3* — $\eta = 3{,}2\%$.

3.2. Influence de la nature du matériel de construction de l'appareillage

Cette corrélation a été déterminée en effectuant deux séries de broyage — l'une dans des récipients et billes en acier, l'autre dans un appareillage en porcelaine. Cette dernière n'étant pas adaptée du point de vue constructif pour la thermostatation et l'introduction des gaz, on a été obligé à effectuer toutes ces expérimentations à la température du milieu ambiant (à cause du frottement entre les parois du récipient, les billes et le matériel, il est possible que la température ait atteint 28°...30 °C) et en présence de l'air. Comme agent de condensation on a employé l'éthylène diamine, le rapport de remplissage $\eta = 0{,}8\%$ et la durée de broyage 3...18 heures. Les résultats comparatifs sont indqués dans la fig. 2.

On constate, en effit, des différentiations caractéristiques. Ainsi dans les conditions de l'emploi de l'appareillage métallique, les pourcents d'azote se disposent sur une droite ascendante (fig. 2, droite *3*), tandis que lorsqu'il s'agit de l'appareillage en porcelaine, ils diminuent si l'on prolonge la durée et sont de beaucoup inférieurs en valeur absolue.

En partant de l'idée de l'existence d'une grande différence en ce qui concerne la dureté des deux matériaux de construction utilisés, nous nous

sommes proposés de corriger les résultats en déterminant les cendres. Dans les cas de l'appareillage métallique ceci a été possible, mais de cette façon on ne peut modifier que très peu les résultats, le pourcentage de cendres étant réduit et presque constant dans le temps (fig. 2, droite *4*). Ce processus ne se déroule pas de la même manière lorsqu'il s'agit de l'appareillage en porcelaine. Le produit de polycondensation obtenu dans celui-ci, laisse par la pyrolyse des quantités croissantes de résidu, proportionelles à la durée de broyage, atteig-

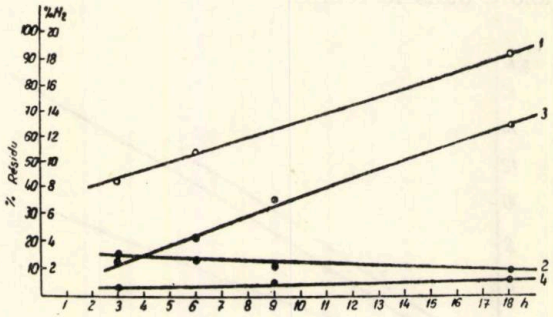


Fig. 2. — Influence de la nature du matériel de construction de l'appareillage sur le pourcent d'azote chimiquement lié : *1* — % cendre en porcelaine, *2* — % azote en porcelaine, *3* — % azote en acier, *4* — % cendre en acier.

nant dans 18 heures, aproximativement 90% (fig. 2, droite *1*). La forte variation avec la durée et l'augmentation sensible dans le temps de la quantité calculée en pourcents nous a conduit à l'idée de l'existence d'une réaction chimique entre le poudre inorganique—porcelaine finement divisée — qui existe inévitablement dans le récipient de broyage comme résultat du frottement des billes et du matériel contre les parois de l'appareillage.

D'ailleurs, dans la littérature de spécialité on a déjà démontré la possibilité de l'activation par voie mécanochimique des matériaux inorganiques à l'aide d'un broyeur vibrant [2]...[4], [7]...[9].

Afin d'obtenir quelques indications structurales concernant le composé thermostable à la température de 900°C pour lequel on a déterminé la cendre, on a passé à l'enregistrement des spectres d'absorbtion dans le domaine IR pour la porcelaine témoin en provenance d'une bille identique à celles employées pour la réaction, et le résidu resté à la pyrolyse du produit de polycondensation. Les différences sont évidentes (fig. 3). Dans le produit obtenu par voie mécanochimique (fig. 2, courbe *2*) apparaissent des maximum d'absorption spécifiques à 810 et surtout à 1 100 et 1 190 cm^{-1}, correspondants [27] aux liaisons —C—NH— et $-\overset{\diagdown}{C}-\overset{\diagup}{N}-$ et qui manquent dans la preuve témoin (fig. 3, courbe *1*). Ceci justifie la conclusion quant à l'existence d'une réaction chimique soit du produit de polycondensation finale avec les centres actifs de la masse inorganique, soit contre ceux-ci

et les deux constituants : le polymère support et la diamine. Nous considérons que les valeurs très réduites de l'azote ainsi lié pourrait être dues aux nouvelles formes dans lesquelles il se fixe, nondosables par la méthode Kjeldahl, couramment utilisée pour les analyses. Nous supposons l'existence de différences structurales entre le produit obtenu par voie mécanochimique et le résidu de la pyrolyse.

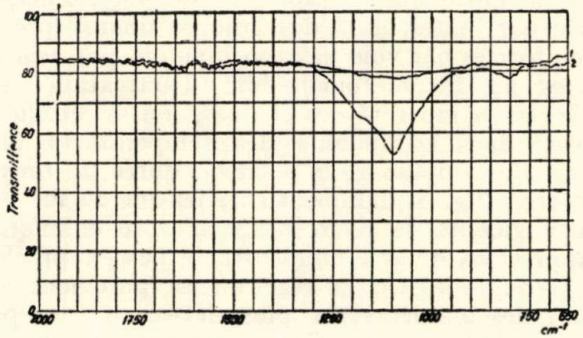


Fig. 3. — Représentation comparative des spectres d'absorption dans le domaine IR : *1* — porcelaine, *2* — porcelaine réactionnée par voie mécanochimique.

3.3. Influence de la température

Comme les processus de destruction et de synthèse mécanochimique découlent par l'intermédiaire des particules actives de nature radicalique, ionique ou mixte (radical-ionique) décrites jusqu'à présent dans la litté-

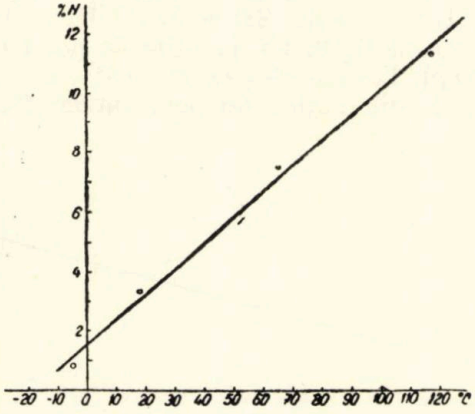


Fig. 4. — Influence de la température sur la polycondensation mécanochimique du polyéthylènetéréphtalate avec éthylène diamine.

rature de spécialité ils sont favorisés par les températures basses en commençant par celle du milieu ambiant en se développant vers celles négatives ; les effets les plus marquants s'obtiennent à la température de l'azote liquide, le nombre des centres actifs formées par la scission des chaînes étant une fonction directe de leur rigidité qui croît au fur et à mesure que la température augmente.

En partant de l'idée que le processus de polycondensation mécanochimique découle par l'interaction des groupes finaux (préexistants sur le polymère ou bien formés par voie mécanochimique par scission des chaînes macromoléculaires au hétéroatome) dont l'activation est conditionnée en grande partie par la mobilité des chaînes, on a étudié l'influence de ce facteur surtout dans le domaine des températures positives (−5 ... +120 °C ; rapport de remplissage $\eta = 0{,}8\%$, durée de broyage 3 heures). Les résultats obtenus (fig. 4) indiquent en effet que au fur et à mesure que la température augmente, le pourcentage d'azote chimiquement lié augmente. Nous apprécions qu'aux températures basses, proches de celles du milieu ambiant (−5 ... +40 °C), la réaction est purement mécanochimique tandis que pour des températures plus élevées, il n'est pas exclu que le facteur thermique collabore avec celui mécanique pour la réalisation de la polycondensation.

3.4. Influence de la quantité de diamine

L'influence de la quantité de l'agent de condensation présent dans le milieu de travail a été étudiée par deux voies : en utilisant l'éthylène diamine à l'état pur et en modifiant le volume introduit dans le récipient de broyage entre 10 ... 30 ml ou en maintenant ce volume constant (30 ml), mais en modifiant la quantité de diamine par dissolution dans l'eau (25 ml ED + 5 ml H_2O ; 20 ml ED + 10 ml H_2O ; 15 ml ED + 15 ml H_2O ; 10 ml ED + 20 ml H_2O). La quantité de polymère a été constante dans les deux cas (10 g). Les données expérimentales, représentées dans les fig. 5 et 6, attestent la diminution du pourcentage d'azote chimiquement

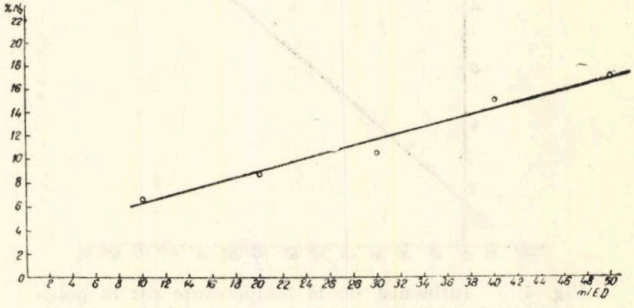


Fig. 5. — Influence de la quantité de diamine sur le pourcentage d'azote chimiquement lié.

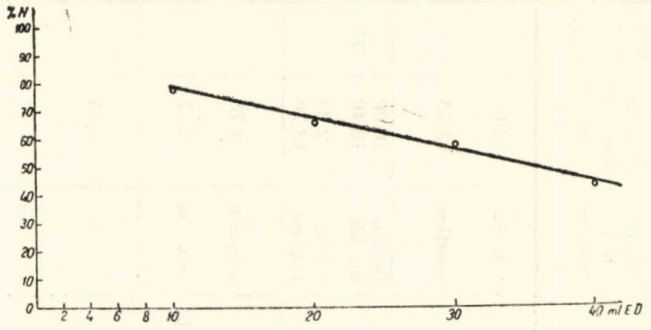


Fig. 6. — Influence de la dissolution de la diamine dans l'eau sur le pourcentage d'azote chimiquement lié.

lié par la réduction de la quantité d'éthylène diamine, soit par une voie, soit par l'autre.

3.5. Influence de la nature chimique de la diamine

Afin d'établir la capacité de réaction des goupes fonctionnels appartenant au polyéthylènetéréphtalate avec différents agents de condensation, on a selectionné quelques diamines, de telle façon pour qu'il résulte des indications concernant l'influence de leur caractère alifatique ou aromatique, la longueur de la chaîne hydrocarbonée lorsqu'elles sont alifatiques, le nombre de cycles quand elles sont aromatiques, le nombre de groupes aminiques aussi bien que la position relative de celles-ci dans le noyau.

Étant donné que la majeure partie des amines ainsi sélectionnées se trouve à l'état solide, forme sous laquelle leur capacité de réaction serait certainement sensiblement limitée, on les a utilisées soit en solution tetrachlorétannique soit, dans quelques cas isolées, pour mettre en évidence aussi l'influence de l'état d'agrégation (solide ou liquide), à l'état de fusion, en travaillant à 75° C. Les résultat concernant l'influence de la structure chimique des amines sont indiqués dans le tableau 1.

De l'analyse des données inclues dans le tableau 1, concernant l'influence de la structure chimique de la diamine, il résulte que les plus actives, dans la réaction de polycondensation, sont les amines aromatiques ayant un nombre plus petit de cycles dans la molécule. Dans le cas de celles alifatiques, la capacité de réaction est limitée par la croissance de la chaîne hydrocarbonée qui sépare les deux groupements actifs.

L'influence du nombre de groupements sur le processus de polycondensation a été étudiée dans la série aromatique en utilisant l'aniline, *m*- et *p*-phénylène diamine ; on est arrivé à la conclusion que les diamines sont plus actives que les monoamines, surtout lorsque les deux groupes aminiques sont disposés en position *para*.

Tableau 1

Influence de la structure chimique de la diamine

(η = 0,8%, durée de broyage — 24 heures, température — 20°C)

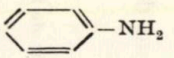
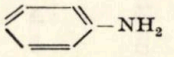
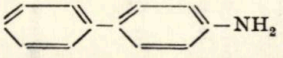
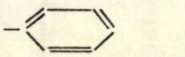
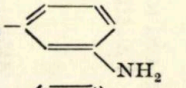
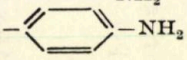
Élément structural de la diamine	Dénomination de la diamine	Formule chimique de la diamine	État de la diamine	Quantité d'azote chimique lié %	Observations
Caractère alifatique-aromatique	Éthylène diamine	$NH_2 - CH_2 - CH_2 - NH_2$	solution	2,0	
	p-Phénylène diamine		solution	3,75	
Longueur de la chaîne hydrocarbonée pour les amines alifatiques	Éthylène diamine	$NH_2 - (CH_2)_2 - NH_2$	liquide liquide	16.00 18,40	75°
	Hexaméthylène diamine	$NH_2 - (CH_2)_6 - NH_2$	solide fondue	2,20 13,70	
Nombre de cycles dans la molécule des amines aromatiques	*p*-Phénylène diamine		solution	3,75	
	Benzidine		solution	2,37	
Nombre de groupes aminiques et leur position relative dans le noyau aromatique	Aniline		liquide	0,59	
	m-Phenylène diamine		solution	1,67	
	p-Phenylène diamine		solution	3,75	

Tableau 2

Comportement thermique de quelque produits de polycondensation mécanochimique

Polymère analysé	Azote chimiquement lié %	Pertes en poids jusqu'à 390 °C %	Pertes en poids jusqu'à 410 °C %	T^{**}_{vmax} °C	Pertes en poids à T_{vmax} %	T^{***}_{max} °C	Pertes en poids à T_{max} %
PET*) initial	—	6,0	12,0	455	51,00	590	80,5
PET broyé à la durée de la synthèse des copolymères	—	5,5	16,0	452	45,00	580	81,5
PET + Hexaméthylène diamine	2,2	6,0	11,45	450	43,25	600	73,4
PET + Benzidine	2,37	4,5	9,18	450	45,90	600	80,1
PET + *p*-Phénilène diamine	3,75	3,5	11,00	441	45,00	585	75,0
PET + Aniline	0,59	3,5	8,84	450	47,45	585	81,5

*) PET — polyéthylènetéréphtalate ; **) T_{vmax} — température à laquelle la vitesse de décomposition est maxima ; ***) T_{max} — température à laquelle la perte en poids est maxima.

3.6. Caractérisation des produits de polycondensation mécanochimique

Les copolymères qui résultent par polycondensation mécanochimique ont été caractérisés du point de vue chimique en utilisant la méthode Kjeldahl pour la détermination de l'azote et une méthode spectrale dans le domaine IR, lorsqu'on a pu mettre en évidence certaines nouvelles bandes d'absorption, correspondantes aux groupements fonctionnels introduits par la réaction avec les amines, à savoir : à 1 470, 1 640, 2 990 et 3 100 cm^{-1} appartenant aux groupes peptidiques (—CO—NH—), à 3 330 cm^{-1} appartenant au groupe iminique et à 920 cm^{-1} appartenant au groupe aminique primaire. Les spectres ont été discutés en détail et les résultats publiés dans un travail antérieur [26].

Du point de vue de la composition chimique (les données se rapportent aux produits de réaction à l'éthylène diamine), après le processus de polycondensation, il résulte deux fractions, l'une insoluble dans l'eau et autres

solvents usuels (benzène, DMF, dichlorétan, tetrachlorétan) dont le pourcent d'azote chimiquement lié varie entre 2,8% à une heure et 16% à 24 heures et l'autre soluble, dont la caractérisation n'a pas encore été obtenue jusqu'a présent à cause des grandes difficultés d'éloigner quantitativement l'agent de condensation qui en est retenu. En échange on a reussi à calculer le rapport insoluble/soluble, déterminé par la durée de broyage et la quantité de diamine utilisée dans la réaction, comme on l'observe dans les fig. 7, 8. En fonction de la durée ce rapport est compris entre 4,25 (pour une heure de broyage) et 0,57 (pour 24 heures), ou bien lorsque la durée est constante, 9 heures par exemples, de 2,51 pour 10 ml diamine à 0,07 si l'on utilise 40 ml d'agent de condensation.

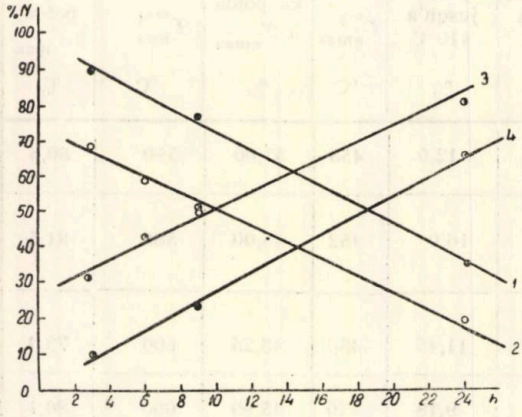


Fig. 7 — Variation du contenu procentuel en fractions (*1* — insoluble, $\eta = 0{,}2\%$; *2* — insoluble, $\eta = 0{,}8\%$; *3* — soluble $\eta = 0{,}2\%$; *4* — soluble, $\eta = 0{,}8\%$) avec la durée de broyage.

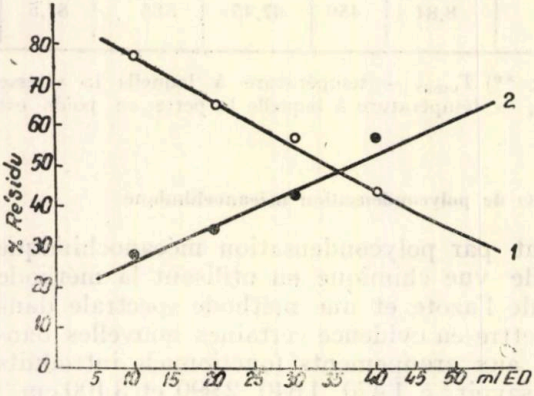


Fig. 8 — Variation du contenu procentuel en fractions (*1* — insoluble, *2* — soluble) avec la quantité de diamine.

Les quelques propriétés que nous mentionnons ci-dessous se réfèrent au produit insoluble qui a pu être correctement purifié.

Ainsi le copolymère du poléthylènetéréphtalate avec l'éthylène diamine, caractérisé par un contenu d'azote chimiquement lié de 16%, présente un degré d'orientation plus élevé par rapport au celui du polymère témoin (le polyéthylènetéréphtalate broyé à la même durée), tel qu'il résulte qualitativement des fig. 9 et 10 et possède des propriétés semiconductrices caractérisées par $\sigma = 0{,}22 \cdot 10^{-12} \ldots 0{,}55 \cdot 10^{-8}\ \Omega\ cm^{-1}$, mesuré entre 84 ... 184 °C et une valeur de l'énergie d'activation $E = 0{,}98$ eV.

Du tableau 2, il résulte une posibilité d'apprécier la thermostabilité de quelques polymères obtenus. On remarque, en appréciant par DTG les

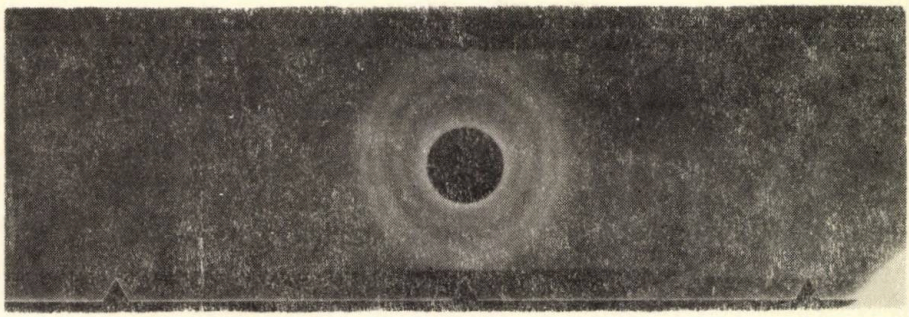


Fig. 9. — Roentgenogramme du produit de polycondensation mécanochimique du polyéthylènetéréphtalate avec éthylènediamine.

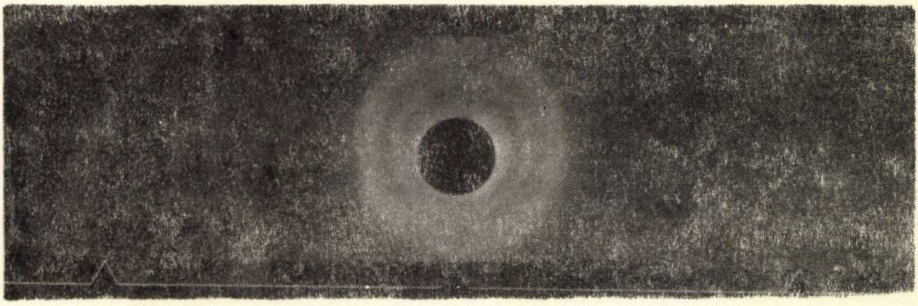


Fig. 10. — Roentgenogramme du polyéthylènetéréphtalate témoin, broyé pendant la même durée.

pertes en poids, que la thermostabilité des produits obtenus ne descend pas sous celle du polymère support (nontransformé ou broyé pendant une même durée).

La thermostabilité la plus avancée est présentée par les produits de réaction avec les amines aromatiques-aniline, *p*-phénylènediamine, benzidine, qui jusqu'à la température de 390°C ne perdent en poids que 3,5% en comparaison avec environ 6% dans le cas des témoins ; le copolymère l'ethylène diamine garde à cette température la même valeur des pertes (6%), mais il est plus résistant à des températures plus élevées, en perdant par exemple à 600°C à peine 73% vis-à-vis de 80...82% à 590°C dans le cas du polymère support.

L'objectif principal de nos efforts ultérieurs dans ce domaine sera la recherche détaillée des propriétés des produits de polycondensation mécanochimique (solubilité, viscozité, poids moléculaire, stabilité aux différents réactifs, thermostabilité, etc.) et ensuite nous essayerons d'élucider le mécanisme de réaction.

4. Conclusions

1. La polycondensation mécanochimique est déterminée par le régime mécanique appliqué (durée du broyage, rapport de remplissage, le matériel de construction de l'appareillage), par la température, la quantité et la structure chimique des diamines utilisées.

2. Les copolymères représentent un mélange de fractions insolubles et solubles dont le rapport quantitatif dépend de la durée du broyage et la quantité d'agent de condensation utilisé.

3. La fraction insoluble peut s'encadrer dans la classe des polymères semiconducteurs et présente, fonction de l'agent de condensation, des propriétés de thermostabilité très proches et parfois même supérieures à celles du support.

Reçue le 15 VI 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de macromolécules naturelles et synthétiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Ходаков Т. С., ДАН СССР, 1964, **156**, стр. 1416.
2. Deuel H., Gentili R., Helv. Chim. Acta, 1956, **39**, p. 1586.
3. Benson R. E., Castle J. E., J. Physic. Chem., 1958, **62**, p. 840.
4. Каргин В. А., Плате Н. А., Высокомол. соедин., 1959, **1**, стр. 1713.
5. Плате Н. А., Прокопенко В. В., Каргин В. А., Высокомол. соедин., 1959, **1**, стр. 1753.
6. Каргин В. А., Кабанов Н. И., Рапопорт-Молдцова Н. И., Высокомол. соедин., 1961, **3**, стр. 787.
7. Grohn H., Paudert R., J. prakt. Chem., 1960, **11**, S. 64.
8. — Wiss. Z. der TH fur Chemie, Leuna-Merseburg, 1960/61, **3**, S. 203.
9. Grohn H., Paudert R., Hoselbarth B., Plaste u. Kautschuk, 1966, **3**, S. 203.
10. Kramer J., *Der metallische Zustand.* Springer-Verlag, Gottingen, 1950.
11. — Ber. dtsch. keram. Ges., 1954, **30**, S. 204.

12. Kramer J., Acta Physica Austriaca, 1957, **10**, S. 392.
13. — Z. Physik, 1952, **133**, S. 629.
14. Lohff J., Raetner H., Naturwissenschaften, 1955, **42**, S. 66.
15. Mayer K., Habilitationschrift, Berlin, 1964.
16. Tobolsky A. V., J. Polymer Sci., 1958, **31**, p. 123.
17. Paudert R., Grohn H., Chem. Techn., 1960, **12**, S. 430.
18. Paudert R., Dissertation, TH fur Chemie, Leuna-Merseburg, 1962.
19. Ceresa R. I., *Blok and Graft Copolymers*. Butterworths, London, 1962, p. 65.
20. Grohn H., Bischoff K., Plaste u. Kautschuk, 1959, **6**, S. 631.
21. Simionescu Cr., Vasiliu-Oprea Cl., Cellulose Chem. and Technol., 1968, **2**, p. 155.
22. Финкельштейн Т. А., Сулятизова И. В., Науч. тр. ВНИИВ, Гизелпром, 1957, стр. 25.
23. Grohn H., Bischoff K., Heusinger H., Wiss. Z. der TH für Chemie, Leuna-Merseburg, 1962, **4**, p. 247.
24. Grohn H., Vasiliu-Oprea Cl., Rev. Roum. Chim., 1964, **9**, p. 757.
25. Simionescu Cr., Vasiliu-Oprea Cl., Neguleanu Cl., European Polymer Journal, 1970, **6**, p. 181.
26. Vasiliu-Oprea Cl., Neguleanu Cl., Simionescu Cr., Makromol. Chem., 1969, **126**, p. 217.
27. Avram M., Mateescu Gh. D., *Spectroscopia în infraroşu. Aplicaţii în chimia organică*. Ed. Tehn., Buc., 1966, p. 383.

SINTEZE MECANOCHIMICE PRIN POLICONDENSARE PE SUPORT POLIESTERIC

Nota II

Influenţa unor factori fizici şi chimici

În lucrare se prezintă studiul influenţei factorilor de bază, ce condiţionează procesul de policondensare mecanochimică: parametrii mecanici (raportul de umplere, natura materialului de construcţie al aparaturii, durata procesului), temperatura, structura chimică şi cantitatea agentului de condensare folosit.

Copolimerii rezultaţi se caracterizează prin termostabilitate apropiată şi uneori superioară suportului, cei cu etilendiamină prezintă un grad de orientare mai pronunţat decît polietilentereftalatul martor (măcinat la aceeaşi durată) şi proprietăţi semiconductoare ($\sigma = 0{,}22 \cdot 10^{-12} \ldots 0{,}55 \cdot 10^{-8}\ \Omega\ cm^{-1}$, între 84°...184 °C şi $E = 0{,}98$ eV).

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Influenţa raportului de umplere asupra procentului de azot chimic legat: *1* — $\eta = 0{,}2\%$, *2* — $\eta = 0{,}8\%$, *3* — $\eta = 3{,}2\%$.

Fig. 2. — Influenţa naturii materialului de construcţie al aparaturii asupra procentului de azot chimic legat: *1* — oţel, *2* — porţelan.

Fig. 3 — Reprezentarea comparativă a spectrelor de absorbţie în domeniul IR la: *1* — porţelan, 2 — porţelan reacţionat mecanochimic, *3* — cenuşa produsului obţinut în vasele metalice.

Fig. 4. — Influenţa temperaturii asupra policondensării mecanochimice a polietilentereftalatului cu etilendiamina.

Fig. 5. — Influenţa cantităţii de diamină asupra procentului de azot chimic legat.

Fig. 6. — Influenţa diluării diaminei cu apă asupra procentului de azot chimic legat.

Fig. 7. — Variaţia conţinutului procentual în fracţiuni (*1* — insolubilă, *2* — solubilă) cu durata de măcinare.

Fig. 8. — Variaţia conţinutului procentual în fracţiuni (*1* — insolubilă, *2* — solubilă) cu cantitatea de diamină.

Fig. 9. — Roentgenograma produsului de policondensare mecanochimică a polietilentereftalatului cu etilendiamina.

Fig. 10. — Roentgenograma polietilentereftalatului martor, măcinat la aceeaşi durată.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia II
CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. Z. 661.717; 615.777

NOI COMPUŞI CU ACTIVITATE ANTITUBERCULOASĂ (V)

DE

ILIE MATEI, EUGENIA COMANIŢĂ şi SERGIU NIŢESCU
membru corespondent al Academiei
Republicii Socialiste România

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Proprietăţile antituberculoase cunoscute ale derivaţilor de tiouree, precum şi ale derivaţilor tiosemicarbazidei, au sugerat cercetarea şi altor compuşi înrudiţi, cum sînt cei din clasa acil-tiosemicarbazidelor-4-substituite.

Încercările biologice întreprinse pentru prima oară de către B u u - H o i şi colaboratorii [1] au arătat că aproape toate acil-tiosemicarbazidele au un efect de inhibiţie net la concentraţii de 100 γ/ml, care pentru unele grupări haptofore favorabile este şi mai pronunţat. Activitatea antituberculoasă a acestor compuşi este pusă pe seama proprietăţii de a forma cu uşurinţă complecşi cu metalele.

Alţi autori [2] consideră că deşi acil-tiosemicarbazidele conţin în moleculă grupa $\rangle C(=O)-NH-N=C\langle$ caracteristică substanţelor active şi dau cu uşurinţă chelaţi cuprici, ele sînt lipsite complet de activitate.

În anul 1961, R u n t i şi C o l l i n o [3] reiau acelaşi studiu şi constată că din cei nouă compuşi examinaţi, numai trei manifestă o apreciabilă activitate inhibitoare în vitro.

W. D y m e k [4] presupune că astfel de diferenţe în aprecierea proprietăţilor biologice la aceleaşi categorii de compuşi pot să depindă de metoda de cercetare şi mai ales de rezistenţa bacilului.

Noi am cercetat acţiunea inhibitoare în vitro a acil-tiosemicarbazidelor-4-substituite şi a 5-mercapto-triazolilor-3,4-disubstituiţi, preparaţi

în cadrul unor lucrări anterioare [5]...[7] şi pe care îi prezentăm în tabelele următoare. Încercările s-au efectuat cu tulpina de B. K. uman Rathy, în mediu nutritiv Joumans.

2. Rezultatele cercetării

Metoda de lucru folosită a fost următoarea: 1 ml sau 0,1 ml soluţie substanţă $M/2.100$ (care în prealabil a fost tratată cu cantitatea echivalentă de soluţie NaOH $n/10$ pentru a uşura solvirea) s-a adăugat la mediul nutritiv, astfel ca volumul final să fie de 50 ml. După însămînţare probele au fost menţinute timp de 14 şi 21 zile la 37,5 °C, după care s-a făcut examinarea probelor.

Rezultatele sînt consemnate în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

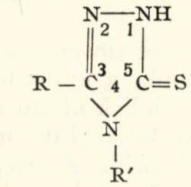
Acţiunea antituberculoasă a unor acil-tiosemicarbazide (R—CO—NH—NH—CS—NH—R')

Nr. crt.	Denumirea substanţei	Concentraţia care produce 100 γ	Limita de inhibare B.K. 10 γ
1	1-Fenoxiacetil-4-fenil-tiosemicarbazida	+++	++++
2	1-Fenoxiacetil-4-alil-tiosemicarbazida	++	++++
3	1-Fenoxiacetil-4-*p*-tolil-tiosemicarbazida	—	++
4	1-(2,4-Diclor-fenoxiacetil)-4-fenil-tiosemicarbazida	—	++
5	1-(2,4-Diclor-fenoxiacetil)-4-alil-tiosemicarbazida	—	+++
6	1-(2,4-Diclor-fenoxiacetil)-4-*p*-tolil-tiosemicarbazida	++	++++
7	1-(2,4,5-Triclor-fenoxiacetil)-4-fenil-tiosemicarbazida	—	++
8	1-(2,4,5-Triclor-fenoxiacetil)-4-alil-tiosemicarbazida	—	+++
9	1-(2-Metil-4-clor-fenoxiacetil)-4-fenil-tiosemicarbazida	—	—
10	1-(2-Metil-4-clor-fenoxiacetil)-4-alil-tiosemicarbazida	—	++
11	1-(2-Metil-4-clor-fenoxiacetil)-4-*p*-tolil-tiosemicarbazida	—	++
12	1-Fenilacetil-4-fenil-tiosemicarbazida	—	+++
13	1-Fenilacetil-4-alil-tiosemicarbazida	+	+++
14	1-Fenilacetil-4-*p*-tolil-tiosemicarbazida	+++	++++
15	1-Amigdaloil-4-fenil-tiosemicarbazida	++++	++++
16	1-Amigdaloil-4-alil-tiosemicarbazida	++++	++++
17	1-Amigdaloil-4-*p*-tolil-tiosemicarbazida	+++	++++
18	1,1'-Izoftaloil-bis-(4-fenil-tiosemicarbazida)	—	—
19	1,1'-Izoftaloil-bis-(4-alil-tiosemicarbazida)	++	++
20	1,1'-Tereftaloil-bis-(4-fenil-tiosemicarbazida)	—	—

++++ dezvoltare normală; +++ dezvoltare uşor inhibată; ++ dezvoltare inhibată accentuat; + dezvoltare inhibată aproape complet; — dezvoltare inhibată total.

Tabelul 2

Acţiunea antituberculoasă a unor 5-mercapto-triazoli-3,4-disubstituiţi



Nr. crt.	Denumirea substanţei	Concentraţia care produce 100 γ	Limită de inhibare B.K. 100 γ
1	3-Fenoximetil-4-fenil-5-mercapto-1,2,4-triazol	++	++++
2	3-Fenoximetil-4-alil-5-mercapto-1,2,4-triazol	−	+++
3	3-Fenoximetil-4-*p*-tolil-5-mercapto-1,2,4-triazol	−	−
4	3-(2,4-Diclor-fenoximetil)-4-fenil-5-mercapto-1,2,4-triazol	−	−
5	3-(2,4-Diclor-fenoximetil)-4-alil-5-mercapto-1,2,4-triazol	+	++
6	3-(2,4-Diclor-fenoximetil)-4-*p*-tolil-5-mercapto-1,2,4-triazol	++	++
7	3-(2,4,5-Triclor-fenoximetil)-4-fenil-5-mercapto-1,2,4-triazol	+	++
8	3-(2,4,5-Triclor-fenoximetil)-4-alil-5-mercapto-1,2,4-triazol	++	+++
9	3-(2-Metil-4-clor-fenoximetil)-4-fenil-5-mercapto-1,2,4-triazol	−	−
10	3-(2-Metil-4-clor-fenoximetil)-4-alil-5-mercapto-1,2,4-triazol	−	−
11	3-(2-Metil-4-clor-fenoximetil)-4-*p*-tolil-5-mercapto-1,2,4-triazol	++	+++
12	3-Benzil-4-fenil-5-mercapto-1,2,4-triazol	++	+++
13	3-Benzil-4-alil-5-mercapto-1,2,4-triazol	+	++
14	3-Benzil-4-*p*-tolil-5-mercapto-1,2,4-triazol	+++	++++
15	3-(Oxi-benzil)-4-fenil-5-mercapto-1,2,4-triazol	++++	++++
16	3-(Oxi-benzil)-4-alil-5-mercapto-1,2,4-triazol	++++	++++
17	*m*-Bis(4-fenil-5-mercapto-1,2,4-triazolil-3)-benzen	−	−
18	*m*-Bis(4-alil-5-mercapto-1,2,4-triazolil-3)-benzen	++	++
19	*m*-Bis(4-*p*-tolil-5-mercapto-1,2,4-triazolil-3)-benzen	−	−

Acil-tiosemicarbazidele preparate de noi, aşa cum a semnalat N.P. Buu-Hoi la o serie de compuşi asemănători [1], prezintă o acţiune de inhibiţie asupra bacilului Koch mai evidentă la concentraţia de 100 γ/ml.

Radicalul fenoxiacetil este favorabil apariţiei proprietăţilor bacteriostatice la aceşti compuşi, în special cînd nucleul benzenic este substituit cu atomi de clor în poziţiile 2, 4, 5 (ca în 2,4,5-triclorfenoxiacetil-tiosemicarbazidele-4-substituite) sau cu halogen şi metil (ca în cazul derivaţilor hidrazidei 2-metil-4-clor-fenoxiacetice).

O activitate remarcabilă se observă şi la ditiosemicarbazidele obţinute din acizi bibazici, în care era de aşteptat ca *acumularea a două grupări tiosemicarbazidice* în aceeaşi moleculă, să accentueze acţiunea inhibitoare asupra bacilului Koch.

Se mai constată că în timp ce tiosemicarbazidele cu radical fenilacetil influenţează dezvoltarea normală a culturii pe mediu, derivaţii hidroxilaţi proveniţi din hidrazida amigdalică nu au nici o acţiune.

În seria *mercapto-triazolilor* sintetizaţi de noi [6], [7] am găsit compuşi chiar *mai activi decît tiosemicarbazidele de plecare.* Astfel explicaţia dată de unii autori [2] pentru a motiva lipsa de activitate a mercapto-triazolilor prin introducerea grupării active $\rangle C-NH-N=C\langle$ în ciclu, nu pare să fie valabilă în acest caz. Radicalul fenoximetil sau fenoximetil substituit ataşat ciclului mercapto-triazolic, imprimă substanţelor o acţiune de *inhibiţie totală sau parţială* la concentraţia de 100 sau chiar 10 γ/ml.

O activitate mai slabă se întîlneşte la mercapto-triazolii cu radical benzil, în timp ce compuşii hidroxilaţi corespunzători sînt complet inactivi. Ca şi în seria tiosemicarbazidelor, produşii de ciclizare cu *două nuclee triazolice* în moleculă prezintă o activitate crescută faţă de produşii cu un singur nucleu triazolic.

Nu se observă o influenţă marcantă a radicalilor alil şi *p*-tolil din poziţia 4 a tiosemicarbazidelor şi a mercapto-triazolilor. În unele cazuri compuşii substituiţi cu radical fenil se dovedesc a fi chiar mai activi.

Rezultatele încercărilor biologice confirmă că prezenţa grupării tioureice în molecula acil-tiosemicarbazidelor şi a compuşilor mercapto-triazolici conferă acestora proprietăţi tuberculostatice, care în cazul grupărilor haptofore favorabile se manifestă pînă la concentraţia de 10 γ/ml. Este probabil ca acţiunea de inhibiţie asupra bacilului Koch să se păstreze şi la concentraţia de 1 γ/ml, în special la compuşii ditiosemicarbazidici şi ditriazolici pe care îi considerăm cei mai activi.

Încercările care continuă vor aduce precizări în această direcţie.

3. Concluzii

1. Acil-tiosemicarbazidele prezintă o acţiune de inhibiţie asupra bacilului Koch, mai frecventă la concentraţia de 100 γ/ml. O activitate remarcabilă se observă în special la ditiosemicarbazidele obţinute din acizi bibazici, în care acumularea a două grupe tiosemicarbazidice în aceeaşi moleculă accentuează acţiunea inhibitoare asupra bacilului Koch.

2. În seria mercapto-triazolilor s-au găsit compuşi chiar mai activi decît tiosemicarbazidele de plecare. Produşii de ciclizare cu două nuclee triazolice prezintă o activitate crescută faţă de cei cu un singur nucleu triazolic.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică

BIBLIOGRAFIE

1. Buu-Hoi N. P., Xuong N. D., Nam N. H., C. r. Ac. Sci. Paris, 1954, **238**, p. 295.
2. Постовский И., Верещягина Н., ЖОХ, 1956, **26**, стр. 2583.
3. Runti C., Collino F., Boll. chim. farmac., 1961, **100**, p. 837.
4. Dymek W., Dziewonska M., Dissert. Pharm., 1961, **13**, p. 313.
5. Matei I., Comaniță E., Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, p. 189.
6. — Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, p. 175.
7. — Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*, p. 269.

NOUVEAUX COMPOSÉS TUBERCULOSTATIQUES (V)

(Résumé)

Les acyl-thiosemicarbazides présentent une action d'inhibition sur le bacile Koch surtout à la concentration de 100 γ/ml.

On observe une activité remarquable surtout chez des thiosemicarbazides obtenues d'acides bibasiques puisque l'accumulation des deux groupements thiosemicarbazidiques dans la même molécule accentue l'action d'inhibition sur le bacile Koch.

Dans la série des mercapto-triazoles on a trouvé des composés même plus actifs que les thiosemicarbazides de départ. Les produits cycliques contenant deux noyaux triazoliques, possèdent une activité accrue par rapport à ceux qui possèdent seulement un noyau triazolique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia II
CHIMIE INDUSTRIALĂ

C. D. 615.778.2

SULFAMIDES DES ACIDES PHÉNOXIPROPIONIQUES

DÉRIVÉS SULFAMIDÉS DES ACIDES α-(CHLOR-PHÉNOXI)-PROPIONIQUES

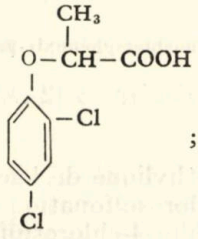
PAR

CORNELIU ONISCU et GH. BOTEZ

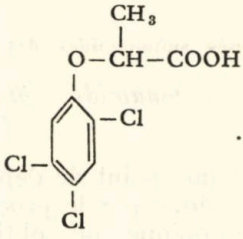
1. Introduction

L'étude de l'action stimulatrice sur la croissance des plantes des dérivés des acides phénoxiacétiques a commencé immédiatement après la découverte, en 1942, par P. W. Zimermann [1], de l'action herbicide et stimulatrice du développement de l'acide 2,4-dichlorphénoxiacétique. On a constaté que les acides α-(chlor-phénoxi)-propioniques n'exercent pas d'actions herbicides et stimulatrices sur la croissance supérieures aux celles des acides chlorphénoxiacetiques, mais ils possèdent une sélectivité élevée.

Les acides α-(chlor-phénoxi)-propioniques ont trouvé une utilisation pratique ayant la structure suivante :



;

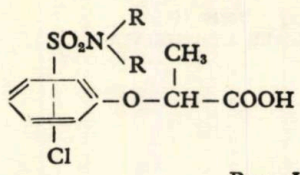


.

L'acide α-(2,4-dichlor-phénoxi)-propionique a une large utilisation comme stimulateur tant pour la croissance des fruits que pour prévenir leur chute prématurée [2].

L'acide α-(trichlor-phénoxi)-propionique est employé comme herbicide sélectif pour les cultures de maïs, de coton etc., étant en même temps un précieux stimulateur [3]. Par l'arrosement des arbres fruitiers avec ce produit on obtient une augmentation considérable des récoltes de fruits.

Dans nos recherches nous avons étudié la synthèse des composés sulfamidés des acides α-(chlor-phénoxi)-propioniques qui ont la structure suivante :



$R = -H ; -C_2H_5$

Les recherches effectuées ont comme le but la découverte de nouveaux stimulateurs selectifs qui possèdent une toxicité réduite pour les plantes utiles. La synthèse des composés sulfamidés des acides α-(chlor-phenoxi)-propioniques n'est pas décrite dans la littérature de spécialité.

Pour obtenir ces produits nous avons appliqué la méthode de synthèse élaborée dans un ouvrage antérieur [4] qui se basait sur la réaction de chlorosulfonation des esters éthyliques des acides α-(chlor-phénoxi)-propioniques en obtenant par cette voie des esters sulfochlorurés respectifs. Ceux-ci, soumis à la réaction de l'ammoniaque, produisent les esters sulfamidés ; par l'hydrolyse alcaline de ceux-ci il en résulte des acides chlor-phénoxi-propioniques sulfamidés.

D'une autre part, par la réaction entre les esters sulfochlorurés et la diéthylamine on obtient les esters diéthylsulfonamidés. Par l'hydrolyse alcaline de ceux-ci il en résulte des acides chlor-phénoxi-α-propioniques diéthylsulfonamidés.

2. Résultats des recherches

En employant la méthode générale de synthèse mentionnée ci-dessus nous avons préparé une série de composés sulfamidés des groupes suivants :

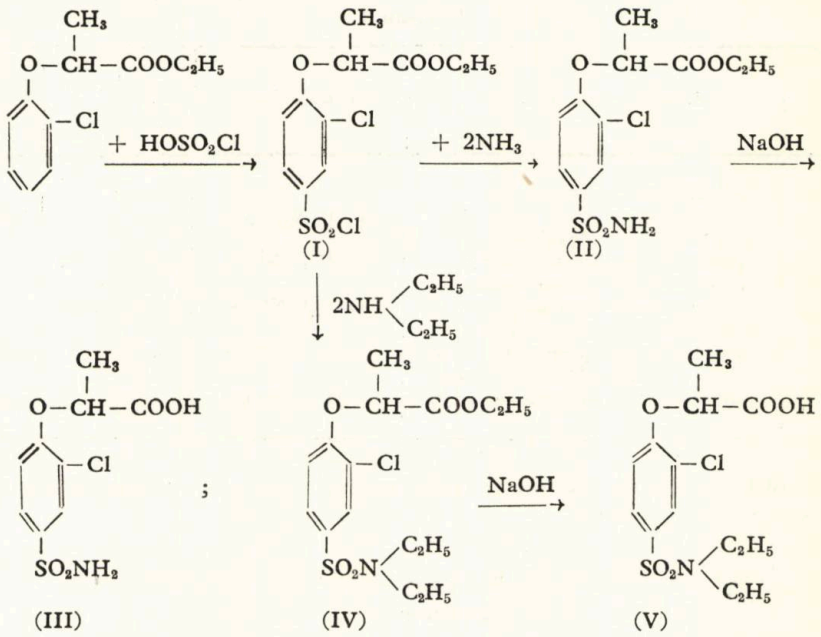
2.1. Composés sulfonamidés des acides α-(monochlor-phénoxi)-propioniques

a) *Composés sulfonamidés provenus de l'acide α-(2-chlor-phénoxi)-propionique*

Prenant comme point de départ l'ester éthylique de l'acide α-(2-chlor-phénoxi)-propionique par le processus de chlorosulfonation avec un exces d'acide chlorsulfonique on obtient α-(2-chlor-4-chlorosulfonyl-phénoxi)-propionate d'ethyl (I). L'ester sulfochloruré en réaction avec l'ammoniaque (2 mol) forme α-(2-chlor-4-sulfonylamidophénoxi)-propionate d'éthyl (II) ; celui-ci, par hydrolyse alcaline dans une solution hidroalcoolique, conduit à l'acide α-(2-chlor-4-amidosulfonylphénoxi)-propionique (III).

De l'autre côté l'ester sulfochloruré (I) en réaction avec le diéthylamine (2 mol) forme α-(2-chlor-4-diéthylamidosulfonyl-phénoxi)-propionate d'éthyl (IV). Par l'hydrolyse alcaline celui-ci conduit à l'acide α-(2-chlor-4-diéthylamidosulfonyl-phénoxi)-propionique (V).

Les réactions découlent selon le schéma ci-dessous :



Dans ces réactions le groupe chlorosulfonyl ($-SO_2Cl$) substitue nettement le hydrogène de la position *para* envers le groupe métoxycarboxylique estérifié dont l'effet d'orientation, conformément à la série H o l l e m a n n [5], est supérieur à l'effet d'orientation du chlore.

Dans le schéma ci-dessus la réaction la plus importante est celle de la chlorosulfonation pour la réalisation de la quelle nous avons employé un rapport molare entre l'ester et l'acide de 1 :7. Cet exces est nécessaire pour obtenir un rendement optimum en sulfochlorure, en évitant par cette voie la réaction de formation de l'acide sulfonique résulté de la sulfochlorure et l'acide sulfonique.

b) *Composés sulfamidés provenus de l'acide* α-(3-*chlor-phénoxi*)-*propionique*

En soumettant à la réaction de chlorosulfonation l'ester éthylique de l'acide α(-3-chlor-phénoxi)-propionique et en poursuivant la même succession de réactions comme dans le cas précédent on a synthétisé les composés indiqués dans le tableau 1.

Dans la réaction de chlorosulfonation le groupe chlorosulfonyl intervient dans la position 4 où il y a une orientation concordante à tous les deux groupes existant dans le noyau.

La substitution de l'hydrogène par le groupe chlorosulfonyl dans la position 6 est rendue plus difficile à cause de l'empêchement stérique produit par la chaîne d'atomes latérale ramifiée.

Tableau 1

Nr. crt.	Dénomination chimique	Formule brute	N calculé %	N dosé %	Point de fusion °C
VI	α-(3-Chlor-4-chlorosulfonyl-phénoxi)-propionate d'ethyl	$C_{11}H_{12}Cl_2O_5S$	—	—	liquide
VII	α-(3-Chlor-4-amidosulfonyl-phénoxi)-propionate d'ethyl	$C_{11}H_{14}ClNO_5S$	4,54	4,60	100
VIII	Acide α-(3-chlor-4-amidosulfonyl-phénoxi)-propionique	$C_9H_{10}ClNO_5S$	5,00	5,07	153
IX	α-(3-Chlor-4-diéthylamidosulfonyl-phénoxi)-propionate d'ethyl	$C_{15}H_{22}ClNO_5S$	—	—	liquide
X	Acide α-(3-chlor-4-diéthylamidosulfonyl-phénoxi)-propionique	$C_{13}H_{18}ClNO_5S$	—	—	liquide

On obtient des rendements maximums pour des températures comprises entre 35° ... 36°C.

c) *Composés sulfamidés provenus de l'acide* α-(4-*chlor-phénoxi*)-*propionique*

Par la chlorosulfonation de l'ester éthylique de l'acide α-(4-chlorphénoxi)-propionique et en suivant le schéma des réactions ci-dessus on a synthétisé les composés sulfamidés donnés dans le tableau 2.

Tableau 2

Nr. crt.	Dénomination chimique	Formule brute	N calculé %	N dosé %	Point de fusion °C
XI	α-(4-Chlor-6-chlorosulfonyl-phénoxi)-propionate d'ethyl	$C_{11}H_{12}Cl_2O_5S$	—	—	75
XII	α-(4-Chlor-6-amidosulfonyl-phénoxi)-propionate d'ethyl	$C_{11}H_{14}O_5ClNS$	4,54	4,72	112
XIII	Acide α-(4-chlor-6-amidosulfonyl-phénoxi)-propionique	$C_9H_{10}ClNO_5S$	5,00	5,25	188
XIV	α-(4-Chlor-6-diéthylamidosulfonyl-phénoxi)-propionate d'etyl	$C_{15}H_{22}ClNO_5S$	—	—	liquide
XV	Acide α-(4-chlor-6-diéthylamidosulfonyl-phénoxi)-propionique	$C_{13}H_{18}ClNO_5S$	4,16	4,22	136

Grâce au fait que le groupe chlorosulfonyl s'introduit dans la position 6 où se manifeste l'effet de l'empêchement stérique produit par la chaîne

d'atomes latérale, il est nécessaire une énergie d'activation plus grande. On la réalise par l'augmentation de la température jusqu'à 65°... 66°C, lorsqu'on obtient des rendements maximum de 80%.

2.2. Composés sulfamidés des acides α-(dichlor-phénoxi)-propioniques

Par l'augmentation du nombres des atomes de chlor dans le noyau benzénique celui-ci se désactive [6], [7] et par conséquent l'introduction d'un nouveau atome dans le noyau devient difficile.

De l'autre côté la présence de la chaîne d'atomes ramifiée produit l'empèchement stérique. Par conséquent les composés dichlorurés qui ont la position *para* occupée et la chaîne d'atomes ramifiée (par exemple l'acide α-(2,4-dichlor-phénoxi)-propionique), exigent pour la chlorosulfonation, une température élevée, qui favorise les réactions secondaires et empèche l'obtention des dérivés désirés.

a) *Derivés sulfamidés provenus de l'acide α-(2,5-dichlor-phénoxi)-propionique*

L'ester éthylique de l'acide α-(2,5-dichlor-phénoxi)-propionique ayant la position *para* libre peut être chlorosulfoné ; en soumettant la sulfochlorure aux réactions mentionnées dans le schéma ci-dessus on peut obtenir les produits du tableau 3.

Tableau 3

Nr. crt.	Dénomination chimique	Formule brute	N calculé %	N dosé %	Point de fusion °C
XVI	α-(2,5-Dichlor-4-chlorosulfonyl-phénoxi)-propionate d'ethyl	$C_{11}H_{11}Cl_3O_5S$	—	—	71
XVII	α-(2,5-Dichlorphénoxi-4-amido-sulfonyl)-propionate d'ethyl	$C_{11}H_{13}Cl_2NO_5S$	4,09	4,29	123
XVIII	Acide α-(2,5-dichlor-4-amidosul-fonyl-phénoxi)-propionique	$C_9H_9Cl_2NO_5S$	4,45	4,40	193
XIX	α-(2,5-Dichlor-4-diéthylamidosul-fonyl-phénoxi)-propionate d'ethyl	$C_{15}H_{21}Cl_2NO_5S$	—	—	liquide
XX	Acide α-(2,5-dichlor-4-diéthyl-amido-sulfonyl-phénoxi)-propionique	$C_{13}H_{17}Cl_2NO_5S$	3,78		

Bien que dans le noyau benzénique il y a deux atomes de chlore, la réaction de chlorosulfonation a lieu pourtant avec de bons rendements à 45°... 50°C parce que la position *para* est libre et il y a aussi dans cette position une orientation concordante du groupe métoxilique et du chlore.

2.3. Propriétés des composés sulfamidés des acides α-(chlor-phénoxi)-propioniques

Les composés sulfamidés des acides α-(chlor-phénoxi)-propioniques sont des substances blanches, cristallines, avec des points de fusions caractéristiques. Les esters sulfochlorurés sont solubles dans l'acétone, peu solubles en alcool à froid et solubles à chaud et insolubles dans l'eau.

Les esters sulfonamidés sont solubles en alcool tant à froid qu'à chaud et insolubles dans l'eau.

Les acides sulfonamidés sont solubles dans l'eau chaude pouvant être purifiés par recristallisation, et dans l'alcool pur ou dilué 50%. Les acides diéthylsulfonamidés sont difficilement solubles dans l'eau, même dans l'eau bouillante, mais il sont solubles en alcool à chaud et à froid. Tous les acides réagissent avec les hydroxydes et les carbonates alcalines en formant des sels solubles dans l'eau.

2.4. Spectres dans l'I.R. des dérivés sulfonamidés provenus des acides α-(chlor-phénoxi)-propioniques

On a cherché de préciser la structure des composés synthétisés par l'étude des spectres dans l'I.R. L'appareil utilisé pour l'enregistrement des spectres est un spectrophotomètre U.R. 10 Karl Zeiss-Jena, équipé avec des prismes de KBr, NaCl et LiCl. On a examiné les substances dans une émulsion de nyol.

Les vibrations de déformation en dehors du plan des liaisons C—H constituent le principal argument indiquant la position de remplaçant dans le noyau aromatique [8]. La fréquence de ces vibrations dépend du nombre et de la position des remplaçants dans le noyau ; elle est indépendante de leur nature [9]. Dans la fig. 1 est présenté le spectre I.R. de l'acide α(-2-chlor-4-sulfamido-phénoxi)-propionique.

De l'analyse de ce spectre il résulte que les vibrations de déformation en dehors du plan de la liaison C—H (ν_{C-H}) apparaissent dans une bande intense à 809 cm^{-1}, dans une bande d'intensité moyenne à 840 cm^{-1}, dans des bandes caractéristiques pour deux atomes de hydrogène adjacents et aussi dans la bande de 890 cm^{-1}, caractéristique pour un atome de hydrogène isolé. Ces valeurs nous conduissent à la conclusion que les remplaçants se trouvent dans la position 1, 2, 4. Compte tenu que nous avons utilisé comme point de départ un composé avec deux remplaçants dans la position 1, 2, il résulte qu'on a introduit le groupe sulfonamidique dans la position 4, envers l'oxygène éthérique.

En même temps, en dehors des vibrations de déformation dans le plan de la liaison C—H on trouve aussi des bandes aigues caractéristiques à la substitution 1, 2, 4. D cette façon sur le spectre ci-dessus apparaît une bande d'intensité réduite à 960 cm^{-1}, deux bandes d'intensité moyenne à 1 050 cm^{-1} et 1 070 cm^{-1} et puis on remarque 4 bandes dans la zone 1 450 ... 1 650 cm^{-1}. Les bandes les plus caractéristiques sont celles de 1 490 et 1 580 cm^{-1}. La bande de 1 255 cm^{-1} est spécifique à

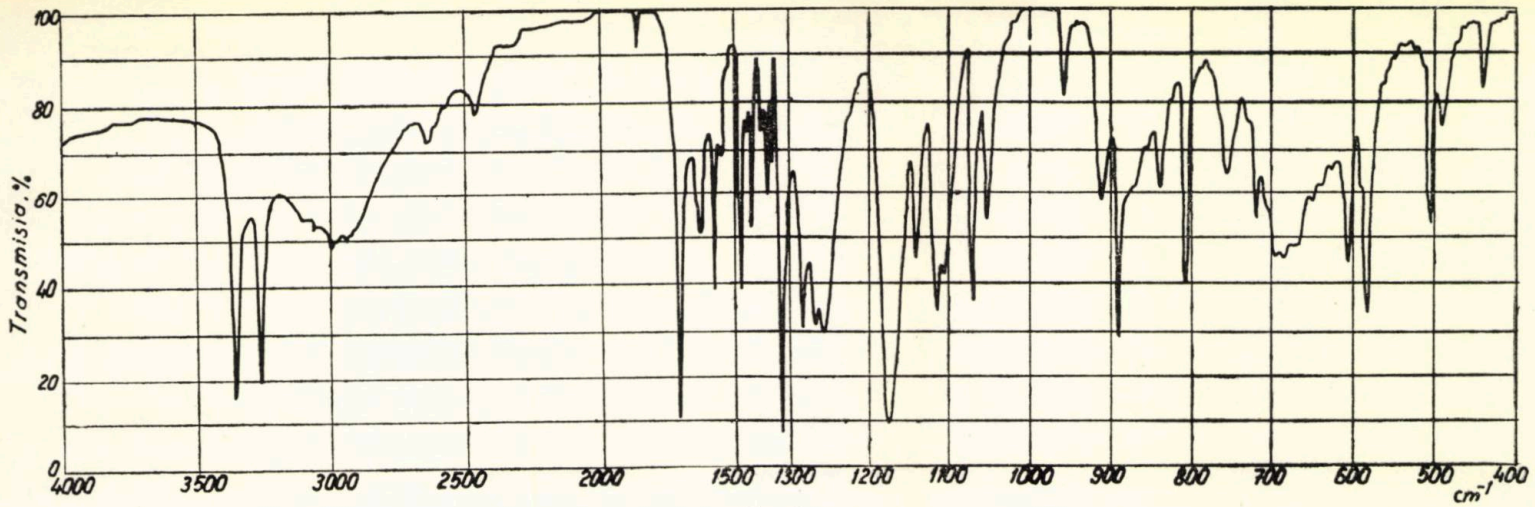


Fig. 1

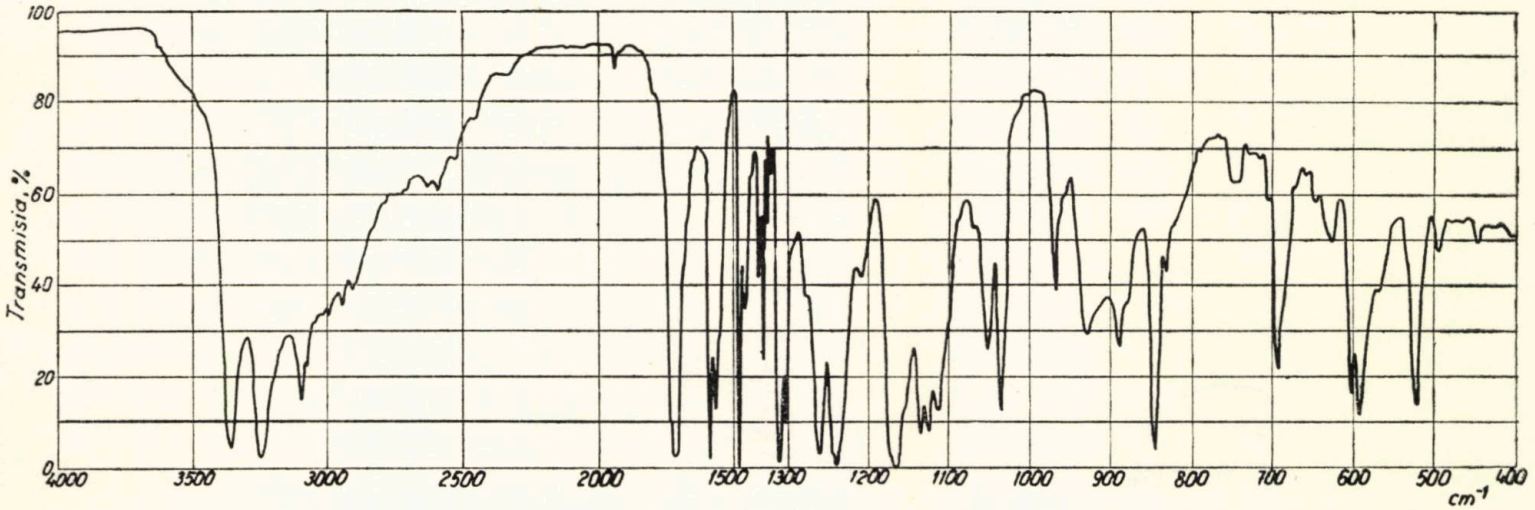


Fig. 2

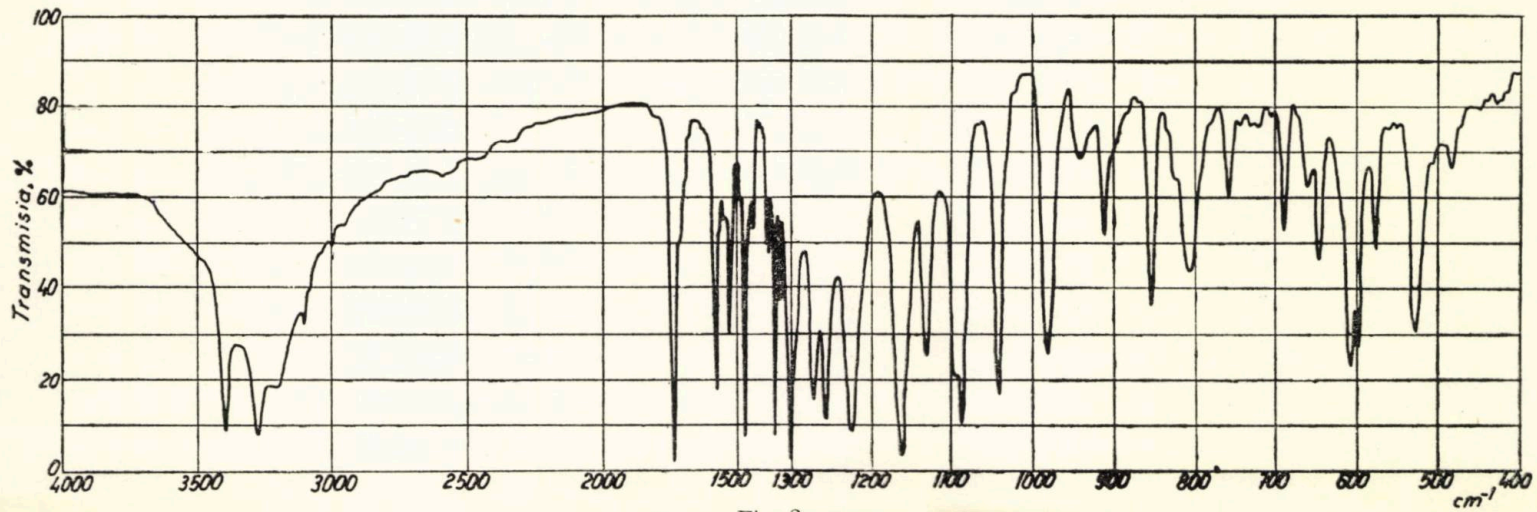


Fig. 3

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI
1948
KÖNYVTÁRA

l'oxygène éthérique, tandis que celle de 1 175 cm^{-1} représente la bande d'absorbtion du groupe sulfonamidique.

Dans le spectre I.R. analysé par nous il apparait une bande à 610 cm^{-1} que nous l'attribuons à la liaison C—S et de même une bande à 1 715 cm^{-1}, caractéristique au groupe carboxilique de l'acide. Par conséquent, de l'analyse du spectre dans I'I.R. il résulte que la structure ci-dessus proposé pour l'acide α-(2-chlor-4-sulfonamido-phénoxi)-propionique est celle juste.

La fig. 2 représente le spectre I.R. de l'acide α-(3-chlor-4-sulfonamido-phénoxi)-propionique. De l'analyse du spectre il en résulte une bande intense à 845 cm^{-1}, caractéristique pour la vibration de déformation en dehors du plan de la liaison C—H de deux atomes de hydrogène adjacents et aussi une bande d'intensité réduite à 890 cm^{-1}, spécifique pour l'atome de hydrogène isolé ; elle montrent que dans le noyau benzénique les remplaçants se trouvent dans la position 1, 2, 4. Comme nous avons pris comme point de départ un composé avec deux remplaçants dans la position *meta* il résulte qu'on a introduit le groupe sulfonamidique dans la position *para* envers l'oxygène éthérique. Il y a encore deux bandes d'intensité réduite à 970 cm^{-1} et 1 052 cm^{-1} et une à 1038 cm^{-1} qui sont spécifiques pour la vibration dans le plan de la liaison C—H et qui confirment la substitution 1, 2, 4.

La vibration de valence de la liaison C—C apparait à 1 445, 1 490 et 1 580 cm^{-1}, celle de la bande de l'oxygène éthérique, à 1 240 et 1 260 cm^{-1} et celle de la bande du carbonile du groupe carboxylique, à 1 710 cm^{-1}.

Dans la fig. 3 est représenté le spectre I.R. de l'acide α-(2,5-dichlor-4-sulfonamido-phénoxi)-propionique. On remarque la bande de 855 cm^{-1} qui caractérise la substitution 1, 2, 4, 5.

La vibration de déformation dans le plan de la liaison C—H apparait à 1 042 et 1 089 cm^{-1}, la bande de 1 165 cm^{-1} indique le présence du groupe sulfonamidique et les bandes de 1 430 cm^{-1} et 1 490 cm^{-1} correspondent à la vibration de valence de la liaison C—C.

De cette manière, à l'aide du spectre I.R. on a réussi à établir correctement la structure des composés synthétisés.

2.5. Action physiologique

Les composés synthétisés dans ce travail étant les dérivés de l'acide 2 M-4 C et ayant un hydrogène du noyau substitué par une reste de l'acide sulfamique présentent une action physiologique.

Étant donné le fait que l'action stimulatrice de croissance des deux composants peut se cumuler, l'étude de ces composés est très importante.

Dans les recherches préliminaires concernant les propriétés physiologiques des composés synthétisés on a étudié le processus de germination et de croissance du maïs traité avec des sels de sodium des acides obtenus.

On a constaté que tous les acides sont plus actifs que l'acide 2,4-D, ont une toxicité réduite et possèdent une action physiologique remar-

quable. L'acide (α-4-chlor-2-sulfonamido-phénoxi)-propionique est le plus actif tandis que l'acide α-(2,5-dichlor-4-sulfonamido-phénoxi)-propionique est le moins actif, ayant aussi une toxicité plus grande à cause des deux atomes de chlore.

3. Partie expérimentale

a) α-(2-*Chlor*-4-*chlorosulfonyl-phénoxi*)-*propionate d'éthyl*

On ajoute à 20 g acide chlorsulfonique refroidi à 2° ... 3 °C sous agitation, 5 g α-(2-chlor-phénoxi)-propionate d'éthyl. On élève la température jusqu'à 40 °C et on maintient l'agitation pendant 30 min.

La masse de réaction se refroidit à 10° ... 15 °C et puis on la verse en l'agitant sur 200 g glace pour la décomposition de l'acide et la séparation de la sulfochlorure. La substance précipitée est filtrée, lavée et séchée en plein air. Le produit se purifie de l'éthanol. Rendement 90%.

Le produit se présente sous forme de cristals blancs ayant le p.f. 81 °C, soluble dans l'acétone à froid et dans l'alcool après un léger réchauffement.

	Cl hydrolysable (%)
$C_{11}H_{12}Cl_2O_5S$	Calculé : 10,84 ;
$M = 327,19$	Dosé : 11,01.

b) α-(2-*Chlor*-4-*sulfonamido-phénoxi*)-*propionate d'éthyl*

5 g ester sulfochlorure se dissout dans 15 ml acétone en y ajoutant la quantité nécessaire d'ammoniaque (25%). La réaction étant exoterme, se refroidit à 30 °C pour éviter les réactions secondaires (hydrolyse de l'esther etc.). Après 15 min d'agitation la masse de réaction se dilue dans 100 ml de l'eau et le produit qui précipite se filtre et se recristalise de l'éthanol 90%, en obtenant des cristals blancs avec le p.f. 130 °C. L'ester sulfonamidé obtenu est soluble au froid en acétone, esther, éthanol.

	N (%)
$C_{11}H_{14}ClNO_5S$	Calculé : 4,54 ;
$M = 307,72$	Dosé : 4,42.

c) *Acide* α-(2-*Chlor*-4-*sulfonamido-phénoxi*)-*propionique*

3 g ester sulfonamidé se soumet à l'hydrolise avec 40 ml solution hydroalcoolique (50%) de NaOH (3%) par réchauffement pendant 30 min. La solution obtenue se purifie avec du charbon actif, on recupère l'alcool et on augmente le pH jusqu'à la valeur 2, quand elle précipite l'acide et se recristalise de l'eau sous forme de cristals blancs avec p.f. 170 °C, solubles en alcool et en hydroxydes.

	N (%)
$C_9H_{10}ClNO_5S$	Calculé : 5,00 ;
$M = 279,68$	Dosé : 5,14.

d) α-(2-*Chlor*-4-*diéthylamidosulfonyl-phénoxi*)-*propionate d'ethyl*

5 g sulfochlorure se dissout dans 20 ml acétone ; on y ajoute sous agitation diéthylamine (solution 50%). Après 30 min d'agitation la masse de réaction se dilue avec de l'eau en se séparant un liquide huileux qui ne cristalise jamais ; il est caractérisé par p.f. 135 °C à 6 mm Hg.

e) *Acide α-(2-chlor-4-diéthylamidosulfonyl-phénoxi)-propionique*

4 g ester diéthylsulfonamidé se soumettent à l'hydrolyse avec 60 ml solution hydroalcoolique de NaOH par ébullition pendant 20 min. La solution obtenue et purifiée et acidulée à pH = 2, quand il se sépare un liquide huileux qui cristalise après 24 heures. Il se purifie dans l'eau ayant le p.f. 135 °C.

	N (%)
$C_{13}H_{18}ClNO_5S$	Calculé : 4,16 ;
$M = 335,78$	Dosé : 3,95.

Tous les autres dérivés présentés dans ce travail se préparent dans des conditions semblables.

4. Conclusions

À la suite des recherches effectués on a abouti aux conclusions suivantes :

1. Les esters des acides chlor-phénoxi-α-propioniques peuvent se chlorsulfoniser avec de bons rendements (80 ... 90%) à des températures entre 30° et 65 °C, en utilisant un exces de l'acide chlorsulfonique de 7 : 1.

2. Les esters sulfochlorurés obtenus réactionnent facilement avec l'ammoniaque et la diéthylamine en résultant des esters sulfonamidés et diéthylsulfonamidés qui peuvent se transformer dans les acides corespondants.

3. Les spectres I.R. ont confirmé la structure proposée par les auteurs pour les produits qui ont été synthétisés.

4. Les recherches biologiques effectuées ont prouvé que nombre de produits synthétisés ont une remarquable action stimulatrice de developpement.

Ont été synthétisés vingt nouveaux composés qui peuvent trouver des utilisations pratiques.

Reçue le 24 VI 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Industries Organiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Zimmerman P. W., Contribs. Boice, 1942, **12**, p. 321.
2. Башкаков И. А., Ф. Общ. Химий, 1950, **5**, стр. 254.
3. Мелников Н. Н., Башкаков И. А., *Химиа гербицидов и регульяторов раста растении*. М., 1962.
4. Botez Gh., Oniscu C., Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X (XIII)**, *3—4*, p. 139.
5. Holemann A., Chem. Rev, 1924, **1**, p. 187.
6. Reutov O. A., *Probleme teoretice ale chimiei organice*. Ed. Acad. R.S.R., Buc., 1964, p. 387, (traduit du russ).
7. Ingold C. K., *Structure and Mechanism in Organic Chemistry*. New-York, 1953, p. 236
8. Bellamy J. L., *Ultrarot-Spektrum und chemische Konstitution*. Darmstadt, 1955.
9. Avram M., Mateescu Gh., *Spectroscopia în infraroșu. Aplicații în chimia organică*. Ed. tehn., Buc., 1966.

SULFAMIDELE ACIZILOR FENOXIPROPIONICI

Derivaţi sulfamidaţi ai acizilor α-(clor-fenoxi)-propionici

(Rezumat)

În prezenta lucrare se expun rezultatele cercetărilor întreprinse în vederea sintezei derivaţilor sulfamidaţi ai acizilor α-(clor-fenoxi)-propionici.

Din cercetările efectuate s-a constatat că esterii acizilor clor-fenoxi-α-propionici se clorosulfonează cu randamente bune (80 ... 90%) la temperaturi cuprinse între 30° şi 65 °C folosind un exces de acid clorsulfonic de 7 : 1.

Sulfocloruri le obţinute reacţionează uşor cu amoniacul şi dietilamina dînd esteri sulfonamidaţi, care prin hidroliză se transformă în acizi corespunzători.

S-au sintetizar 20 noi compuşi a căror structură a fost stabilită prin spectre în I.R.; prin încercări biologice s-a constatat că unii produşi au o acţiune stimulatoare de creştere remarcabilă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 3—4, 1969

SECŢIA III

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 3—4, 1969

СЕКЦИЯ III

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 3—4, 1969

SECTION III

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D. C. 621.319.2

THERMO-ELECTRETS BASED ON SULPHAMIDATED DERIVATIVES OF THE PHENOXIACETIC ACIDS WITH POLYSTYRENE SUPPORTS

BY

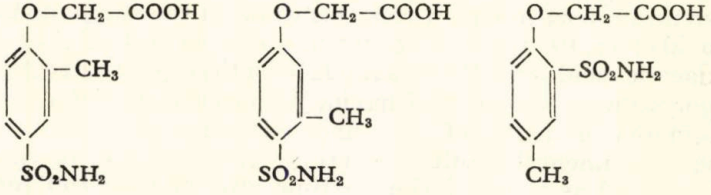
EMIL LUCA, EUGEN OSADEŢ, GEORGETA STRAT and GH. MAFTEI

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, the 28—30 September 1967

1. General Considerations

The existence inside the body of the molecules of the sulphamidate derivatives of phenoxiacetic acids [1] of the polar group COOH, which, according to G e m a n t and P a d g e t t [3], is specific for its electric properties, led us to the study not only of the dielectrical properties [4], [5], but also of the behaviour as electrets of these organic compounds. In order to obtain electrets with the best possible mechanical properties and according to the fact that only small quantities of these organic substances were available for making samples, a support having no electretic properties was used which could serve, at the same time, as a liant of the substance powder.

In order to form electrets, three sulphamidated derivatives of the phenoxiacetic acids were used:



Polystyrene, having no electretic properties was used as a support.

2. Research Method

To prepare the samples, the polystyrene was disolved in benzene and then it was mixted up with the sulphamidated derivate of the phenoxiacetic acid.

The mixture thus obtained, introduced into cylindrical glass tubes, was kept under pressure untill complete hardening. There were obtained discoid samples, 4 cm diameter and 37 mm thick, of very good elasticity and hardness, which could be very easily lathed. In order to determine the thermo-electric properties, the samples placed between metallic electrodes, were introduced into a drying closet, heated first at 120 °C, and then cooled to room temperature (20 °C). At the same time they were subjected to the action of a continuous electric field of 10 kV/cm supplied by a high tension rectifier manufactured in our laboratory.

The polarization current was measured by means of a galvanometer having a constant 10^{-9} A/div., connected only when measuring. The potential at the surface of the electrets thus formed was determined by means of an electrometer provided with a gold leaf, manufactured by us. The deviation was observed under microscop provided with an ocular micrometer.

To this end the electret was brought in neighborhood of the top plate of the electrometer thus determining the deviation of the gold leaf up to a certain division on the micrometer scale. The electret was then replaced by a conductor of the same shape, to which a measurable variable potential was applied until the gold leaf deviated in the same direction and up to the same scale division as in the case of the studied electret. The potential value applied to the conductor represented, in this case, the value of potential at the surface of the electret. During measurements, shielding provisions for the whole system of measurement were made and the experimental data of the studied electrets were constantly refered to a polystyrene check-test.

3. Experimental Results

Experimental measurements were made with the following samples a) three samples made of 4-sulphamido-2-methyl-phenoxiacetic acid on polystyrene support having a concentration, in the sulphamidated derivate, of the acid of 15, 10, and 5 per cent; b) a sample of 4-sulphamido-3-methyl-phenoxiacetic acid and 2-sulphamide-4-methyl phenoxiacetic acid, using also a polystyrene support and having a concentration of 10 per cent in the sulphamidated derivate of the phenoxiacetic acid.

The experimental results concerning the variation of the polarization current, as well as the variation in time after the electret forming, of the superficial charge — that is of the electret potential — are given in the curves represented in Figs. 1 ... 6.

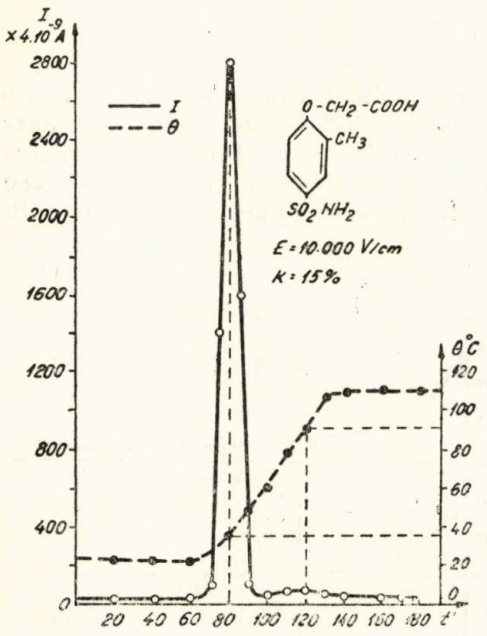


Fig. 1

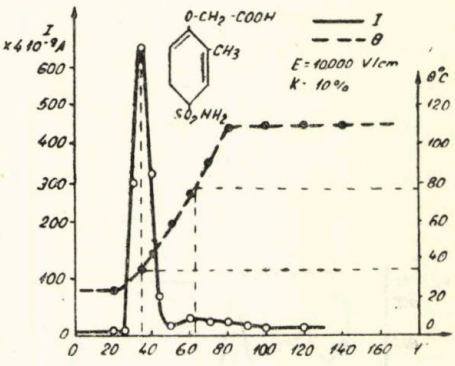


Fig. 2

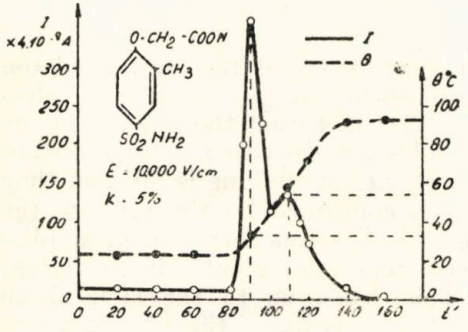


Fig. 3

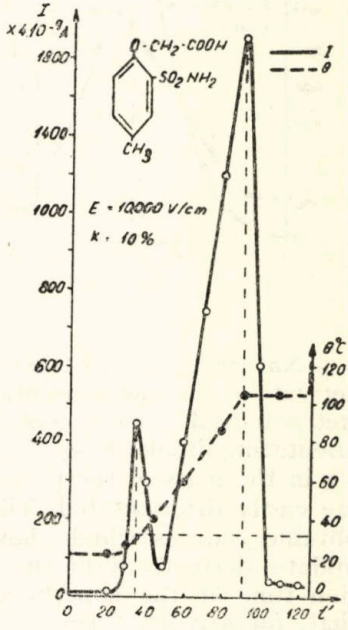


Fig. 4

The main results of the analyses of these curves are:

1. The sulphamidated derivatives of the phenoxiacetic acids show remarkable electric properties, which are evident from the fact that the value of the superficial charge (that is of the electret potential) immediately after its forming, has a sufficiently raised value and this value is maintained for a rather long time after the forming process, depending on the concentration of sulphamidated derivatives of the phenoxiacetic acid in the samples.

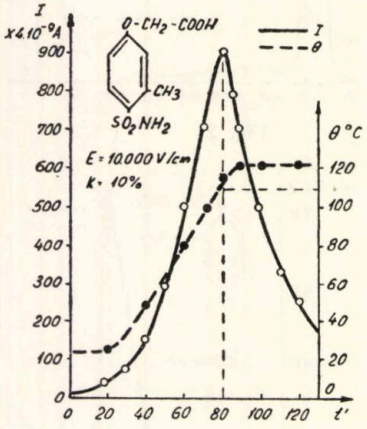


Fig. 5

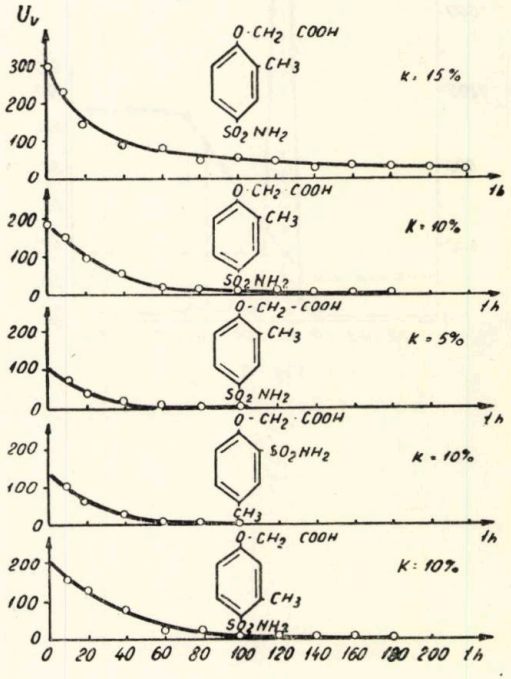


Fig. 6

Naturally, in the case of small concentrations of the sulphamidated derivate of the phenoxiacetic acid, the superficial charge — that is the electret potential — decreases rapidly due to the fact that the number of the orientating dipoles is small; thus, the dipoles are dissipated at large distances in the mass of the polystyrene support, *i.e.* the linking is lax and they are easily disorientated. The hypothesis is confirmed by the form of the obtained curves which show that bigger is the concentration in sulphamidate derivatives of the phenoxiacetic acid, tho greater is the retention time of the superficial charge. This leads us to the supposition that, for samples formed of sulphamidated derivate of the phenoxiacetic acid, rather stable long-lived electretes could be obtained.

2. The curve of the polarization current in case of samples containing 3-sulphamido-4-methyl phenoxiacetic acid show two maxima, a very evident one occuring in the case of all samples at 33°C and attributed to the polar group COOH, and a less evident one occuring at various temperatures, and which was attributed by us to the moment being of the sulphamidic group.

3. For the other samples the most evident maximum occurs at about 105°C, while the least evident one occurs at 33°C. We consider that this is due to the different way of grafting of the sulphamidic and methylic groups.

The occurence of these maxima in the variation of the polarization current show anomalies known, until now, only for plexiglass (methyl polimetacrilat) and amber 2 and 4 which, like the substances studied by us, are organic substances.

To elucidate the anomalous behaviour relative to the process of polarization of these substances, researches will be further carried out, when greater quantities of sulphamidated derivatives of phenoxiacetic acids will be available, allowing to made samples only of theat particular substance. To this aim, grafting in different positions the two constituents, the sulphamidic group and the methylic one, we shall try based on experimental results to give certain interpretations concerning the structure, in connection with the general forming process of electrets.

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Physics

REFERENCES

1. Botez Gh., Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI** (**X**), *3—4*, p. 133.
2. Gubkin A. N., *Electreți*. Ed. tehn., Buc., 1963, (translated from Russian).
3. Gemant A., Phil. mag., 1935, **20**, p. 929.
4. Luca E. Scutaru V., Bul. Inst. polit. Iași, 1968, **XV** (**XIX**), *1—2*, p. 324.
5. Luca I., Osadeț E., Luca E., Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII** (**XVI**), *1—2*, p. 229.

TERMOELECTREȚI PE BAZĂ DE DERIVAȚI SUFLAMIDAȚI AI ACIZILOR FENOXIACETICI CU SUPORT DE POLISTIREN

(Rezumat)

Plecînd de la existența în cadrul moleculei derivaților sulfamidați ai acizilor fenoxiacetici a grupării polare COOH, caracteristică unora din electreții cunoscuți, derivații sulfamidați respectivi au fost studiați și din acest punct de vedere.

Cantitatea de substanță disponibilă din fiecare produs fiind redusă, s-a utilizat ca suport la confecționarea electreților polistirenul, care nu are proprietăți electretice dar conferă electreților proprietăți mecanice bune.

În urma măsurătorilor experimentale efectuate s-a ajuns la următoarele concluzii:

1. În procesul de polarizare în cîmpuri electrice continue intense derivații sulfamidați ai acizilor fenoxiacetici prezintă anomalii similare celor ce s-au obținut la plexiglas și chilimbar și care se manifestă printr-un maxim al curentului de polarizare la o anumită temperatură.

Specifică însă derivaților sulfamidați ai acizilor fenoxiacetici este apariția a două maxime, atribuite, unul, grupării polare COOH și altul, grupării sulfonamidice SO_2NH_2.

2. Electreții obținuți prezintă proprietăți electretice remarcabile, starea de stabilitate fiind cu atît mai accentuată cu cît este mai mare concentrația în derivat sulfamidat a acidului fenoxiacetic.

3. Procesul de polarizare prezintă particularități specifice modului de grefare a grupării sulfonamidice sau a celei metilice în moleculă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Matematică. Mecanică teoretică. Fizică
Secţia I
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

Д. К. 621.372.8

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ (I)

В. М. СТАРЖИНСКИЙ и В. И. КОРОЗА

1. *Постановка задачи*

Процесс распространения скалярной (например акустической) волны в волноводе описывается волновым уравнением

$$\Delta U - v_0^{-2}(r)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0\,, \tag{1.1}$$

в котором Δ — трехмерный оператор Лапласа, $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ — скорость распространения волны в неограниченном пространстве, $U(\mathbf{r}, t)$ — потенциал, определяющий мгновенную скорость частиц колеблющейся среды согласно выражению $\mathbf{v} = \operatorname{grad} U$ (здесь $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ — радиус вектор точки наблюдения). Будем рассматривать волну, гармонически изменяющуюся со временем, т.е. предположим, что

$$U(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})\,e^{-i\omega t}\,.$$

Функция $u(\mathbf{r})$ подчиняется скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{1.2}$$

в котором $k = \omega/v_0$ — волновое число, зависящее, вообще говоря, от $\mathbf{r}$.

Рассмотрим задачу о распространении волн в некоторой трехмерной области W, содержащей ось z и ограниченной поверхностью Π и плоскостями $z=z_0$ и $z=z_1$, $(z_0<z_1)$, (рис. 1). Предположим, что все возможные сечения $S(z_i)$, $(z_0 \leqslant z_i \leqslant z_1)$, внутренности волновода W плоскостями $z = z_i$ односвязные и ограничены. Распространение монохроматической волны частоты ω во внутренней части волновода W описывается уравнением (1.2), а краевое условие при идеально жесткой границе есть

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Pi} = 0, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Π. Ниже будет рассматриваться либо более общее краевое условие смешанного типа

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u\right]_{\Pi} = 0, \tag{1.4}$$

где $\alpha = \alpha(\mathbf{r})$ — некоторая вещественная функция, заданная на поверхности Π, либо краевое условие

$$u|_{\Pi} = 0, \tag{1.5}$$

соответствующее идеально мягкой границе.

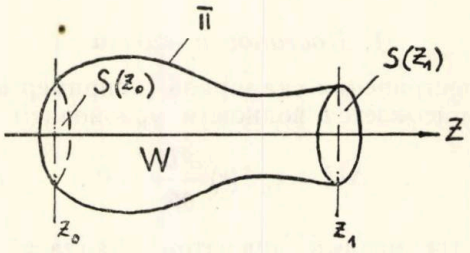


Рис. 1

Практический интерес представляют периодические вдоль оси z волноводы, в которых либо α, либо k^2 являются периодическими функциями z периода D, либо граница повторяется через период D. Решения краевой задачи (1.2)...(1.4) (или (1.2)...(1.5)), удовлетворяющие условию

$$u(x, y, z + D) = \rho u(x, y, z), \tag{1.6}$$

где ρ — некоторое комплексное число, называются решениями Флоке. Мультипликатор ρ и решение Флоке u будут зависеть от параметров, определяющих границу, а также, возможно, входящих в функции k^2 и α. При определенных предположениях ρ и u будут непрерывными функциями этих параметров. Если в некотором интервале изменения одного из этих параметров мультипликатор ρ все время расположен на единичной окружности, а в любом большем интервале это не выполнено, то этот интервал называется полосой пропускания по заданному параметру для соответствующего решения u. Важной практической задачей является определение полос пропускания. В §§ **4** и **5** (ч. II) получены расчетные формулы для полос пропускания в первом (а

иногда и во втором) приближении. Другой важной оадачей, рассматриваемоь в §6 (ч. III), является определение фазы мульиипликатора (параметра Флоке), поскольку с ней непосредственно связаоы фазовые и груповые скоросии волн.

2. *Сведение к системе обыкновенных дифференциальных уравненний*

Будем рассматривать сформулированные выше задачи (1.2)...(1.4) и (1.2)...(1.5). Обе эти задачи не обладают свойством единственности решения, например в силу того, что поверхность П, на которой определены краевые условия (1.4) и (1.5), не является замкнутой.

Рассмотрим указанные задачи в вариационной постановке. Для задачи (1.2)...(1.4) применим функционал

$$J(u) = \iiint\limits_{W} [(\operatorname{grad} u)^2 - k^2 u^2]\, dV + \iint\limits_{\Pi} \alpha u^2 d\sigma. \tag{2.1}$$

Вычислим вариацию функционала (2.1)

$$\delta J = \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(u + \varepsilon \xi(x, y, z))\right]_{\varepsilon=0} =$$

$$= 2 \iiint\limits_{W} [\operatorname{div}(\xi \operatorname{grad} u u) - (\Delta u + k^2 u)\xi]\, dV + 2 \iint\limits_{\Pi} \alpha u \xi d\sigma$$

и используя формулу Гаусса-Остроградского будем иметь

$$\delta J = -2 \iiint\limits_{W} (\Delta u + k^2 u)\xi dV + 2 \iint\limits_{\Pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u\right) \xi\, d\sigma +$$

$$+ 2 \iint\limits_{S(z_0)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, \xi\, dS + 2 \iint\limits_{S(z_1)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, \xi\, dS. \tag{2.2}$$

Потребуем, чтобы вполнялось условие ,,закрепленных концов'':

$$\xi(x, y, z_0) = \xi(x, y, z_1) \equiv 0. \tag{2.3}$$

Тогда для любого решения краевой задачи (1.2)...(1.5) получим $\delta J = 0$, при этом краевое условие (1.4) оказывается для рассматриваемого функционала естественным.

Для краевой задачи (1.2)...(1.5) рассмотрим финкционал (2.1) с $\alpha=0$ на множестве функций u, удовлетворяющих краевому условию (1.5), не являющемуся для функционала естественным. При этом для любого решения задаче (1.2)...(1.5) снова будем иметь $\delta J = 0$ при варьирооании с условиями (2.3).

Применяя метод Галеркина-Ритца-Канторовича [1] будем искать решение исходной задачи в виде конечной суммы [1])

$$u(x, y, z) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \eta_n^m(x, y, z) f_n^m(z). \tag{2.4}$$

Здесь $\eta_n^m(x, y, z)$, $(m = 0, 1, \ldots, M-1;\ n = 0, 1, \ldots, N-1)$ — некоторая заданная в W система функций, на которую в краевой задаче (1.2)…(1.4) накладывается дополнительное требование

$$\eta_n^m(x, y, z)|_{\Pi} = 0,\ (m = 0, 1, \ldots, M-1;\ n = 0, 1, \ldots, N-1). \tag{2.5}$$

Функции $f_n^m(z)$ неизвестны и должны быть определены из вышеизложенных соображений об экстремуме функционала (2.1)

Подстановка (2.4) в функционал (2.1) приводит к выражению

$$J(u) = \sum_{m,n} \sum_{m',n'} \left(\int_{z_0}^{z_1} dz \iint_{S(z)} \left\{ [(\operatorname{grad} \eta_n^m, \operatorname{grad} \eta_{n'}^{m'}) - k^2 \eta_n^m \eta_{n'}^{m'}] f_n^m f_{n'}^{m'} + \right.\right.$$

$$+ \eta_n^m \eta_{n'}^{m'} \frac{df_n^m}{dz} \cdot \frac{df_{n'}^{m'}}{dz} + \frac{\partial \eta_n^m}{\partial z} \eta_{n'}^{m'} f_n^m \frac{df_{n'}^{m'}}{dz} + \frac{\partial \eta_{n'}^{m'}}{dz} \eta_n^m \frac{df_n^m}{dz} f_{n'}^{m'} \left.\right\} dS +$$

$$\left. + \iint_{\Pi} \alpha \eta_n^m \eta_{n'}^{m'} f_n^m f_{n'}^{m'} d\delta \right).$$

Варьированием полученного выражения для $J(u)$ при условии неизменности значений $f_n^m(z)$ в точках z_0 и z_1, приходим к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $f_n^m(z)$, которую и будем исследовать.

Всюду далее будем предполагать, что граница Π волновода может быть задана уравнением в цилиндрических координатах

$$\rho = R(z, \varphi),\ (z_0 \leqslant z \leqslant z_1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}), \tag{2.6}$$

причем граница предполагается гладкой. Тогда условие $\delta J(u) = 0$ при варьировании с „закрепленными концами“ (2.3) приводит к следующей системе уравнений

---

[1]) Двухиндексная система нумерации выбрана лишь для удобства дальнейших расчетов. Отметим, что исходная задача получается из рассматриваемой при подходящем предельном переходе $M \to \infty$ $N \to \infty$. Этот вопрос здесь на обсуждается.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{m'=0}^{M-1}\sum_{n'=0}^{N-1}\left[G_{nn'}^{mm'}\frac{\mathrm{d}f_{n'}^{m'}}{\mathrm{d}z}+Q_{nn'}^{mm'}f_{n'}^{m'}\right]-$$

(2.7)

$$-\sum_{m',n'}Q_{n'n}^{m'm}\frac{\mathrm{d}f_{n'}^{m'}}{\mathrm{d}z}+\sum_{m',n'}P_{nn'}^{mm'}f_{n'}^{m'}=0,\ (m=0,1,\ldots,M-1\,;\ n=0,1,\ldots,N-1).$$

Здесь

$$G_{nn'}^{mm'}(z)=\iint_{S(z)}\eta_n^m\,\eta_{n'}^{m'}\,\mathrm{d}S,\quad Q_{nn'}^{mm'}(z)=\iint_{S(z)}\eta_n^m\,\frac{\partial\eta_{n'}^{m'}}{\partial z}\,\mathrm{d}S,$$

(2.8)

$$P_{nn'}^{mm'}(z)=k^2G_{nn'}^{mm'}-\iint_{S(z)}(\operatorname{grad}\eta_n^m,\ \operatorname{grad}\ \eta_{n'}^{m'})\,\mathrm{d}S-\int_0^{2\pi}(\eta_n^m\,\eta_{n'}^{m'})_{\Pi}\frac{\alpha R(z,\varphi)}{c_z c_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi,$$

при этом $c_z=|\cos(\tau_z,\mathbf{e}_z)|$, $c_\varphi=|\cos(\tau_\varphi,\ \mathbf{e}_\varphi)|$, τ_z и τ_φ — единичные векторы касательные к Π, причем τ_z расположен в плоскости, проходящей через ось z, а τ_φ — в плоскости перпендикулярной оси z. Система (2.7) может быть записана в виде матричного уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\mathbf{G}\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}z}+\mathbf{Q}\mathbf{f}\right]-\mathbf{Q}^{\tau}\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}z}+\mathbf{P}\mathbf{f}=0,$$

где верхний индекс τ означает транспонирование. Способ расположения элементов $\mathbf{f}$ вектора в дальнейшим будет таков

$$\mathbf{f}=(f_0^0,f_1^0,\ldots,f_{N-1}^0,f_0^1,f_1^1,\ldots,f_{N-1}^1,\ldots,f_0^{M-1},f_1^{M-1},\ldots,f_{N-1}^{M-1})^{\tau}.$$

При этом порядок расположения элементов в каждой из матриц будет следующим

$$\mathbf{A}=\|A_{mm'}\|=\begin{pmatrix}A_{00}&\ldots A_{0M-1}\\A_{M-1\,0}\ldots A_{M-1\,M-1}\end{pmatrix},$$

где $A_{mm'}$ — матрицы вида

$$\mathbf{A}_{mm'}=\|A_{nn'}^{mm'}\|=\begin{Vmatrix}A_{00}^{mm'}\ldots A_{0\,N-1}^{mm'}\\A_{N-1\,0}^{mm'}\ldots A_{N-1\,N-1}^{mm'}\end{Vmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{A}$ — любая из матриц $\mathbf{G}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$, т. е. $A_{nn'}^{mm'}$ — величины вида $G_{nn'}^{mm'}$, либо $Q_{nn'}^{mm'}$, либо $P_{nn'}^{mm'}$. Легко проверить, что в силу очевидных соотношений

$G^{m'm}_{n'n} = G^{mm'}_{nn'}$, $P^{m'm}_{n'n} = P^{mm'}_{nn'}$, $(m, m' = 0,1,\dots,M-1;\ n, n' = 0,1,\dots,N-1)$,

матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{P}$ являются симметрическими.

Нас, в соответствии с изложенным в § **1** будут интересовать лишь решения Флоке уравнения (2.9) и точнее — его мультипликаторы ибо, как было указано в § **1**, полосы непропускания соответствующих волноводов отвечают наличию мультипликатора, лежащего вне единичной окружности.

Полагая

$$\mathbf{g} = \mathbf{G}\frac{d\mathbf{f}}{dz} + \mathbf{Q}\mathbf{f} \quad \text{и} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix}\mathbf{g}\\ \mathbf{f}\end{pmatrix}$$

получим для вектора $\mathbf{h}$ каноническое уравнение

$$\mathbf{J}\frac{d\mathbf{h}}{dz} = \mathbf{H}(z)\mathbf{h}, \tag{2.11}$$

где кососимметрическая постоянная матрица $\mathbf{J}$ и симметрическая матрица-функция $\mathbf{H}(z)$ суть вещественные квадратные матрицы порядка $2MN$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix}0 & -\mathbf{I}_{MN}\\ \mathbf{I}_{MN} & 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(z) = \begin{pmatrix}\mathbf{P}+\mathbf{Q}^{\tau}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q} & -\mathbf{Q}^{\tau}\mathbf{G}^{-1}\\ -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q} & \mathbf{G}^{-1}\end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

а $\mathbf{I}_{MN}$ — единичная матрица порядка MN.

Ограничимся всюду ниже (кроме 1, § **3**) случаем азимутально-симметричного волновода, когда $k^2 = k^2(z)$, $\alpha = \alpha(z)$ и поверхность Π является поверхностью вращения, заданной уравнением

$$\rho = R(z), \quad (z_0 \leqslant z \leqslant z_1). \tag{2.13}$$

Для упрощения дальнейших выкладок выберем функции $\eta^m_n(r)$ в (2.4) так, чтобы тождественно по z были выполнены условия ортогональности

$$G^{mm'}_{nn'}(z) = \delta_{mm'}\,\delta_{nn'}\,F(z), \quad (m, m' = 0,1,\dots,M-1;\ n, n' = 0,1,\dots,N-1),$$

где $\delta_{\nu\mu}$ — символ Кронекера, а $F(z)$, $(z_0 \leqslant z \leqslant z_1)$, — некоторая скалярная функция. Тогда $\mathbf{G} = F(z)\,\mathbf{I}_{MN}$. Этим требованиям удовлетворяют, например, функции [2])

$$\eta^m_n(\mathbf{r}) = [\pi(1+\delta_{0m})]^{-1/2}\,\psi^m_n(\rho, z)\cos m\varphi, \tag{2.14}$$

$$(m = 0,1,\dots,M-1;\ \ n = 0,1,\dots,N-1),$$

---

[2]) Система (2.14) должна быть дополнена функциями $\pi^{-1/2}\psi^m_n(\rho, z)\sin m\varphi$. Последние, однако, могут выть получены из (2.14) простой заменой $\varphi = \varphi' - \pi/(2m)$.

где

$$(2.15)\quad \psi_n^m(\rho,z)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\,\mu_n^m}{J_m\,\mu_n^m}\left[(\mu_n^m)^2-m^2\right]^{-1/2}J_m\left(\mu_m^n\dfrac{\rho}{R(z)}\right), & \text{для задачи (1.2)}\cdots\text{(1.4)},\\ \dfrac{\sqrt{2}}{J_{m+1}(\nu_n^m)}\,J_m\left(\nu_n^m\dfrac{\rho}{R(z)}\right), & \text{для задачи (1.2)}\cdots\text{(1.5)}.\end{cases}$$

Здесь $J_m(x)$ цилиндрические функции (функции Бесселя) первого рода m-го порядка; μ_n^m и ν_n^m $(m=0,1,\dots,M-1;\ n=0,1,\dots,N-1)$, $-(n+1)-e$ положительные корни уравнений $J_m'(x)=0$ и $J_m(x)=0$ соответственно. Будем иметь по первой из формул (2.8), (2.15)

$$G_{nn'}^{mm'}(z)\,\frac{1}{(1+\delta_{0m})\pi}\int_0^{R(z)}\psi_n^m(\rho,z)\,\psi_{n'}^{m'}(\rho,z)\,\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\cos m\varphi\,\cos m'\varphi\,d\varphi=$$

$$=2\delta_{mm'}R^2(z)\,\mu_n^m\mu_{n'}^{m'}\left[(\mu_n^m)^2-m^2\right]^{-1/2}\left[(\mu_{n'}^{m})^2-m^2\right]^{-1/2}J_m(\mu_n^m)^{-1}\,J_m(\mu_{n'}^m)^{-1}\times$$

$$\times\int_0^1 J_m(\mu_n^m x)\,J_{m'}(\mu_{n'}^m x)\,x\,dx\,.$$

Используя формулы [2] для интегралов от цилиндрических функций, найдем для задачи (1.2)$\cdots$(1.4):

$$(2.16)\quad G_{nn'}^{mm'}(z)=\delta_{mm'}\delta_{nn'}R^2(z),\ (m,m'=0,1,\dots,M-1;\ n,n'=0,1,\dots,N-1).$$

Аналогичным образом получим те же выражения (2.16) и для краевой задачи (1.2)...(1.5).

3. *Простейшие частные случаи*

1° Пусть форма границы Π и функция $\alpha(\mathbf{r}_\Pi)$ не зависят от координаты z, т.е. граница волновода является поверхностью цилиндра с произвольной кладкой замкнутой направляющей без точек самопересечения. Тогда $R=R(\varphi)$, $\alpha=\alpha(\varphi)$ и функции η_n^m в (2.14) не зависят от z. Поэтому, в силу (2.8) $\mathbf{Q}=0$, а матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{P}$ постоянны. Уравнение (2.9) примет вид:

$$(3.1)\qquad \frac{d^2\mathbf{f}}{dz^2}+\mathbf{P}_1\mathbf{f}=0,\quad (\mathbf{P}_1=\mathbf{G}^{-1}\mathbf{P}),$$

и общее его решение есть

$$(3.2)\qquad \mathbf{f}=\cos(z\mathbf{P}_1^{1/2})\,\mathbf{f}_0+\mathbf{P}_1^{-1/2}\sin(z\mathbf{P}_1^{1/2})\left(\frac{d\mathbf{f}}{dz}\right)_0,$$

где $\cos(z\mathbf{P}_1^{1/2})$ и $\mathbf{P}_1^{-1/2}\sin(z\mathbf{P}_1^{1/2})$ есть целые функции матрицы (зависящие от z как от параметра). Поскольку $\mathbf{P}_1$ симметрическая матрица, то общее решение (3.2) является линейной комбинацией функций вида $\cos(h_j z)$, $\sin(h_j z)$, где h_j — вещественные или чисто мнимые числа, являющиеся квадратными корнями из собственных значений матрицы $\mathbf{P}_1$. Вещественные из чисел h_j называются постоянными распространения волноводных волн. Чисто мнимые из чисел h_j соответствуют затухающим или нарастающим колебаниям; последние должны быть отброшены из физических соображений. Явный вид решения $\mathbf{f}(z)$ удобно находить обычным образом. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{P}}_1$ жорданову форму матрицы $\mathbf{P}_1$, т. е. положим $\mathbf{P}_1 = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{P}}_1\mathbf{S}^{-1}$, где $\widetilde{\mathbf{P}}_1$ вещественная диагональная, а $\mathbf{S}'$ — вещественная неособая матрицы. Линейным преобразованием $\mathbf{f} = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{f}}$ векторное уравнение (3.1) сводится к уравнению

$$\frac{d^2\widetilde{\mathbf{f}}}{dz^2} + \widetilde{\mathbf{P}}_1\widetilde{\mathbf{f}} = 0.$$

Общее решение последнего уравнения есть

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \cos(z\widetilde{\mathbf{P}}_1^{1/2})\widetilde{\mathbf{f}}_0 + \widetilde{\mathbf{P}}_1^{-1/2}\sin(z\widetilde{\mathbf{P}}_1^{1/2})\left(\frac{d\widetilde{\mathbf{f}}}{dz}\right)_0,$$

где $\cos(z\widetilde{\mathbf{P}}_1^{1/2})$ и $\widetilde{\mathbf{P}}_1^{-1/2}\sin(z\widetilde{\mathbf{P}}_1^{1/2})$ — диагональные матрицы. После подстановки и него $\widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}$ получим выражение для $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}$ в виде комбинации собственных волн рассматриваемого волновода, гармонически изменяющихся с координатой z:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{f} = \cos(z\widetilde{\mathbf{P}}_1^{1/2})\mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}_0 + \widetilde{\mathbf{P}}_1^{-1/2}\sin(z\mathbf{P}_1^{1/2})\mathbf{S}^{-1}\left(\frac{d\mathbf{f}}{dz}\right)_0.$$

2° Пусть граница Π волновода есть поверхность вращения и функция (r_Π) в (1.4) не зависит от азимута φ (случай азимутальной симметрии). В этом случае функция R в (2.6) не зависит от φ, т. е. $R = R(z)$ и коэффициенты $G_{nn'}^{mm'}$, $Q_{nn'}^{mm'}$, $P_{nn'}^{mm'}$ пропорциональны $\delta_{mm'}$. Это приводит к расщеплению системы (2.7) на M независимых подсистем

$$\frac{d}{dz}\sum_{n'=0}^{N-1}\left[G_{nn'}^{mm}\frac{df_{n'}^{m}}{dz} + Q_{nn'}^{mm}f_{n'}^{m}\right] -$$

$$-\sum_{n'=0}^{N-1}Q_{nn'}^{mm}\frac{df_n^m}{dz} + \sum_{n'=1}^{N-1}P_{nn'}^{mm}f_{n'}^{m} = 0, \quad (n = 0,1,\ldots,N-1), \tag{3.3}$$

соответствующих фиксированным значениям индекса m, $(m = 0,1,\ldots,M-1)$, что свидетельствует о независимости волн с различными значениями индекса азимутальных вариаций m.

В качестве примера, объединяющего случаи 1° и 2°, рассмотрим однородный цилиндрический волновод круглого сечения : $R = a = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$. Выделим в соответствии с вышеизложенным подсистему (3.3) с индексом $m=0$, т. е. рассмотрим задачу о распространении азимутально сумметричной волны в указанном волноводе. Из формул (2.8), (2.16) имеем :

$$P^{0\,0}_{n\,n'} = \begin{cases} [k^2a^2 - (\mu_n^0)^2]\,\delta_{nn'} = 2\alpha a, & \text{для задачи (1.2)...(1.4)}, \\ [k^2a^2 - (\nu_n^0)]\,\delta_{nn'}, & \text{для задачи (1.2)...(1.5)}. \end{cases}$$

Ограничимся первой из задач для случая малого α. Определим собственные значения матрицы

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{P}(\alpha) = \frac{1}{a^2}\|P^{0\,0}_{n\,n'}\| = k^2\mathbf{I}_N - \operatorname{diag}\left(\frac{\mu_n^0}{a}\right)^2 - 2\frac{\alpha}{a}\mathbf{E}_N,$$

где $\mathbf{I}_N$ и diag — единичная и диагональная $N \times N$ матрицы, а $\mathbf{E}_N$ — матрица также порядка $N \times N$, все элементы которой равны единице. Будем иметь для собственных значений матрицы $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{P}(\alpha)$,

$$(h_n^0)^2 = k^2 - \left(\frac{\mu_n^0}{a}\right)^2 - 2\frac{\alpha}{a} + O(\alpha^2), \quad (n = 0,1,\ldots,N-1).$$

Отсюда получаем с точностью до $O(\alpha^2)$ значения постоянных распространения в задаче (1.2)...(1.4) :

$$h_n^0 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_n^0}{a}\right)^2 - 2\frac{\alpha}{a}}, \quad (n = 0,\ldots,N-1), \tag{3.4}$$

которые при $\alpha=0$ переходят в хорошо известные выражения для круглого цилиндрического волновода с жесткими стенками. Для каждого значения n существует критическое значение волнового числа k равное

$$k_n^{\text{кр}} = \sqrt{\left(\frac{\mu_n^0}{a}\right)^2 + 2\frac{\alpha}{a}},$$

определяющее граничную частоту $\omega_n^{\text{кр}} = k_n^{\text{кр}} v_0$ такую, что при $\omega > \omega_n^{\text{кр}}$ соответствующая волна может распространяться в волноводе (h_n^0 — вещественное), а при $\omega < \omega_n^{\text{кр}}$ — распространяться не может.

Во второй и третьей части нашей статьи, помещаемой в последующих выпусках этого же журнала, будут изложены наиболее интересные приложения нашей теории.

Поступила 19 I 1969 г.

ЗИЛТП и МГУ, Москва, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Крылов В. И., *Приближенные методы высшего анализа.* Изд. 5-е, ГИФМЛ, 1962.
2. Рыжик И. М., Градштейн И. С., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Изд. 3-е, ГИТТЛ, 1951.

ASUPRA TEORIEI GHIDURILOR PERIODICE DE UNDE (I)

(Rezumat)

Utilizînd şi rezultatele lui Floquet, autorii studiază problema propagării undelor în ghiduri periodice, avînd ca punct de plecare sistemul de ecuaţii (1.2)...(1.4) sau (1.2)...(1.5) şi (1.6).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 621.372.5

TEOREME DE TRANSFER A PUTERII ACTIVE MAXIME ÎN REGIMURILE PERMANENTE SINUSOIDALE REZONANTE ALE CUADRIPOLILOR DIPORŢI, LINIARI, PASIVI ŞI RECIPROCI (I)

DE

HUGO ROSMAN

1. Introducere

Este binecunoscută proprietatea cuadripolilor diporţi liniari, pasivi şi reciproci (CDLPR) de a transfera unui receptor pasiv, în regim permanent sinusoidal, în anumite condiţii, o putere activă maximă, cînd este menţinută constantă fie valoarea efectivă a tensiunii la poarta de intrare [1], fie valoarea efectivă a curentului la aceeaşi poartă [2].

Această proprietate îşi păstrează valabilitatea, în condiţii ce vor fi precizate în cele ce urmează, şi în regimurile permanente sinusoidale, în care este realizată fie rezonanţa la poarta de intrare [3], fie rezonanţa la poarta de ieşire [4], fie, în sfîrşit, rezonanţa globală la porţile de acces ale unui CDLPR [5]. Importanţa teoretică şi practică a regimurilor rezonante la una sau, simultan, la ambele porţi de acces ale unui CDLPR în regim permanent sinusoidal a fost pusă în evidenţă în teza de doctorat a autorului [6].

2. Teoremele transferului puterii active maxime în regimurile de rezonanţă la poarta de intrare

Se consideră un CDLPR, în regim permanent sinusoidal, avînd ecuaţiile

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

cu

$$\det \underline{A}_{st} = 1, \quad (s, t = 1, 2). \tag{2}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

O condiţie necesară pentru ca un astfel de cuadripol să admită cel puţin un regim de rezonanţă ($X_{e1} = 0$) la poarta de intrare (RCI), unde X_{e1} reprezintă reactanţa echivalentă la această poartă, este ca parametrii fundamentali ai cuadripolului să satisfacă inegalitatea [3]:

$$|\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})| \leqslant 1. \tag{3}$$

În acest caz rezistenţa echivalentă la poarta de intrare a cuadripolului poate lua valori numai în intervalul [3]:

$$\mathcal{I}_{RCI} \equiv [R_{e1RCI_{\inf}},\ R_{e1RCI_{\sup}}], \tag{4}$$

unde

$$\begin{cases} R_{e1RCI_{\inf}} = \dfrac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21}) - \sqrt{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})]^2}}{2\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}\underline{A}^{*}_{22})}, \\ R_{e1RCI_{\sup}} = \dfrac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21}) + \sqrt{1 - [\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})]^2}}{2\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}\underline{A}^{*}_{22})}. \end{cases} \tag{5}$$

Condiţiile în care un CDLPR este capabil, în regim RCI, să transfere unui receptor pasiv o putere activă maximă, au fost stabilite în [7], în cazul cînd cuadripolul este alimentat sub o tensiune de valoare efectivă constantă. Aceste condiţii sînt conţinute în

T e o r e m a I. *Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca un CDLPR alimentat în sens direct, în regim permanent sinusoidal, sub o tensiune de valoare efectivă constantă, să furnizeze unui receptor pasiv, la RCI, o putere activă maximă sînt: a) parametrii fundamentali ai cuadripolului să satisfacă inegalitatea* (3); *b) rezistenţa echivalentă la poarta de intrare a cuadripolului să fie dată de* [7]:

$$R_{e1}P^{(U_1)}_{2RCI\max} = \frac{2\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{12})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})} \in \mathcal{I}_{RCI}. \tag{6}$$

În acest caz puterea activă furnizată receptorului este:

$$P^{(U_1)}_{2RCI\max} = \frac{1 - [\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})]^2}{4\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{12})}\,U_1^2. \tag{7}$$

Este posibil să se calculeze şi randamentul sub care se transferă receptorului această putere. În acest scop se particularizează pentru regimurile RCI ($X_1 = 0$) expresia (3) [8] a randamentului:

$$\eta_{RCI} = \mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21}) - \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}^{*}_{22})\mathcal{R}e_1^2 + \mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{12})}{R_{e1}}. \tag{8}$$

Substituind în (8) rezistența R_{e1} cu expresia (6) se obține:

$$\eta_{P_{2RCI_{\max}}^{(U_1)}} = \frac{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2}{2\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})}, \tag{9}$$

unde s-a ținut seama de identitatea [8]:

$$[\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2 + [\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2 - 4\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^{*})\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^{*}) = 1, \tag{10}$$

valabilă pentru orice CDLPR, în regim permanent sinusoidal.

Deoarece parametrii unui CDLPR satisfac inegalitatea [9]:

$$\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*}) > 1, \tag{11}$$

și dacă în plus se are în vedere condiția de realizare a regimurilor RCI (3), rezultă:

$$\eta_{P_{2RCI_{\max}}^{(U_1)}} < 0{,}5. \tag{12}$$

Dacă se ține seama că puterea activă transferată unui receptor pasiv printr-un CDLPR alimentat sub o tensiune de valoare efectivă constantă are valoarea maximă [1]:

$$P_{2\max}^{(U_1)} = \frac{U_1^2}{4\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}^{*})}, \tag{13}$$

comparînd această expresie cu (7) rezultă:

$$\frac{P_{2RCI_{\max}}^{(U_1)}}{P_{2\max}^{(U_1)}} = 1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2 \leqslant 1, \tag{14}$$

unde s-a avut în vedere inegalitatea (3). Egalitatea are loc în cazul particular cînd parametrii fundamentali ai CDLPR satisfac relația:

$$\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*}) = 0. \tag{15}$$

În acest ultim caz regimul de transmisie a puterii active maxime prin cuadripol este un regim RCI.

Egalitatea (15) este satisfăcută, în particular, de liniile omogene lipsite de dispersie. Într-adevăr, în cazul unei linii omogene parametrii fundamentali ai cuadripolului echivalent sînt:

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \operatorname{ch}\underline{\gamma}l, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_c \operatorname{sh}\underline{\gamma}l, \quad \underline{A}_{21} = \frac{\operatorname{ch}\underline{\gamma}l}{\underline{Z}_c}, \tag{16}$$

iar dacă linia este lipsită de dispersie [10]:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{R_l G_l} + j\omega\sqrt{L_l C_l}, \quad \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}, \tag{17}$$

cu: $\underline{\gamma}$ — constanta de propagare lineică, $\underline{Z}_c$ — impedanța caracteristică, R_l, G_l, L_l, C_l — parametrii lineici primari ai liniei.

Se constată cu ușurință că $\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}) = \mathcal{I}m(\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21}) = 0$, ceea ce antrenează după sine satisfacerea egalității (15) *la orice frecvență* a tensiunii de alimentare.

În cazul regimurilor RCI ale CDLPR alimentați sub curent de valoare efectivă constantă se scriu ecuațiile (1) sub forma echivalentă:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & -\underline{A}_{12} \\ -\underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix}, \tag{1'}$$

unde s-a ținut seama de condiția de reciprocitate (2).

Puterea aparentă complexă la poarta de ieșire va fi:

$$\underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \underline{U}_2\underline{I}^*_2 = (\underline{A}_{22}\underline{U}_1 - \underline{A}_{12}\underline{I}_1)(-\underline{A}^*_{21}\underline{U}^*_1 + \underline{A}^*_{11}\underline{I}^*_1). \tag{18}$$

Regimul fiind RCI:

$$\underline{U}_1 = R_{e1}\underline{I}_1, \tag{19}$$

încît puterea activă furnizată receptorului rezultă în acest caz:

$$P^{(I_1)}_{2RCI} = [-\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22})R^2_{e1} + \mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})R_{e1} - \mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{12})]I^2_1. \tag{20}$$

Valoarea extremă a puterii $P^{(I_1)}_{2RCI}$ se obține anulînd derivata:

$$\frac{dP^{(I_1)}_{2RCI}}{dR_{e1}} = [-2\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22})R^2_{e1} + \mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})]I^2_1, \tag{21}$$

al cărui zero este:

$$R_{e1P^{(I_1)}_{2RCImax}} = \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})}{2\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22})}. \tag{22}$$

Acest extrem este un *maxim* deoarece

$$\left.\frac{d^2P^{(I_1)}_{2RCI}}{dR^2_{e1}}\right|_{R_{e1}=R_{e1P^{(I_1)}_{2RCImax}}} = -\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})I^2_1 < 0, \tag{23}$$

unde s-a ținut seama de (11).

Comparînd relațiile (22) și (5) rezultă:

$$R_{e1P_{2RCI_{max}}^{(I_1)}} = \frac{R_{e1RCI_{inf}} + R_{e1RCI_{sup}}}{2} \in \mathcal{J}_{RCI}. \tag{24}$$

Cu alte cuvinte maximul puterii active $P_{2RCI}^{(I_1)}$ are loc efectiv în intervalul $\mathcal{J}_{RCI}$.

Valoarea maximă a puterii active transferate receptorului în regimurile care realizează RCI, cuadripolul fiind alimentat sub un curent de valoare efectivă constantă, se obține substituind expresia (22) a rezistenței $R_{e1P_{2RCI_{max}}^{(I_1)}}$ în relația (20); rezultă:

$$P_{2RCI_{max}}^{(I_1)} = \frac{1 - [\mathcal{J}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2}{4\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}^{*}\underline{A}_{22})} I_1^2, \tag{25}$$

unde s-a ținut seama de identitatea (10).

Am stabilit astfel

Teorema II. *Condițiile necesare și suficiente pentru ca un CDLPR alimentat în sens direct, în regim permanent sinusoidal, sub un curent de valoare efectivă constantă, să furnizeze receptorului, la RCI, o putere activă maximă, sînt: a) parametrii fundamentali ai cuadripolului să satisfacă inegalitatea* (3); *b) rezistența echivalentă la poarta de intrare a cuadripolului să fie dată de* (25).

Pentru a determina randamentul sub care se transferă receptorului această putere se substituie în (8) rezistența R_{e1} cu expresia (25) rezultînd:

$$\eta_{P_{2RCI_{max}}^{(I_1)}} = \frac{1 - [\mathcal{J}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2}{2\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})}, \tag{26}$$

unde s-a avut în vedere identitatea (10).

Dacă se compară relațiile (9) și (26) se obține egalitatea remarcabilă:

$$\eta_{P_{2RCI_{max}}^{(U_1)}} = \eta_{P_{2RCI_{max}}^{(I_1)}} < 0{,}5. \tag{27}$$

Puterea activă transferată unui receptor pasiv printr-un CDLPR alimentat sub un curent de valoare efectivă constantă are valoarea maximă [2]:

$$P_{2max}^{(I_1)} = \frac{I_1^2}{4\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}^{*}\underline{A}_{22})}. \tag{28}$$

Efectuînd raportul expresiilor (24) și (28) rezultă:

$$\frac{P_{2RCI_{max}}^{(I_1)}}{P_{2max}^{(I_1)}} = 1 - [\mathcal{J}m(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2 \leqslant 1, \tag{29}$$

unde s-a avut în vedere inegalitatea (3). Egalitatea are loc atunci cînd parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia (13), deci, în particular, în cazul liniilor omogene lipsite de dispersie.

Confruntînd relaţiile (12) şi (29) rezultă totodată:

$$\frac{P^{(U_1)}_{2RCI_{\max}}}{P^{(U_1)}_{2\max}} = \frac{P^{(I_1)}_{2RCI_{\max}}}{P^{(I_1)}_{2\max}}. \tag{30}$$

Într-o notă viitoare se vor stabili teoremele de transfer ale puterii active maxime prin CDLPR în regimurile permanente sinusoidale care realizează fie rezonanţa la poarta de ieşire, fie rezonanţa globală, la ambele porţi ale cuadripolului.

3. Concluzii

1. În regimurile permanente sinusoidale care realizează rezonanţa la poarta de intrare a unui CDLPR puterea activă transferată unui receptor pasiv poate avea o valoare maximă, în cazul alimentării cuadripolului fie sub o tensiune de valoare efectivă constantă, fie sub un curent de valoare efectivă constantă.

2. Valorile maxime ale puterilor active transferate receptorului, în aceste condiţii, sînt date de relaţiile (7), respectiv (28).

3. În ambele cazuri randamentul transferului puterii active maxime este acelaşi ((19) sau (26)); valoarea sa nu depăşeşte 50%.

Primită la 7 X 1969

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică
şi măsuri electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Răduleţ R., *Bazele teoretice ale electrotehnicii.* Vol. **III**, Lit. Invăţ., Buc., 1955, p. 138.
2. Rosman H., *Asupra transferului puterii active maxime.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV** (**XVIII**), *1—2*, pp. 335—340.
3. Rosman H., Braier A., Saal C., *Rezonanţa în sistemele de tip cuadripol* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X** (**XIV**), *3—4*, pp. 233—242.
4. — *Rezonanţa în sistemele de tip cuadripol* (II). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *1—2*, pp. 247—260.
5. Rosman H., *Rezonanţa globală la porţile de acces ale unui cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, în regim permanent sinusoidal.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1969, **XV** (**XIX**), *1—2*, s. III, pp. 19—24.
6. — *Rezonanţa la porţile de acces ale unei reţele electrice liniare de tip cuadripol diport, pasiv şi reciproc, în regim permanent sinusoidal.* Teză de doctorat, Iaşi, 1968.
7. Rosman H., Braier A., *Asupra transmisiei cu factor de putere optim a energiei active prin sisteme electrice* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII** (**XI**), *3—4*, pp. 243—256.

8. Rosman H., Braier A., *Randamentul transmisiei energiei electrice prin cuadripoli* (IV). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1955, **I (V)**, *1—2*, pp. 159—172.
9. Rosman H., *Asupra condiţiilor de pasivitate ale unui cuadripol diport liniar, în regim permanent sinusoidal*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3—4*, pp. 317—323.
10. Răduleţ R., *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. Vol. **IV**, Tip. şi Lit. M.I., Buc., 1965.

THÉORÈMES DE TRANSFERT DE LA PUISSANCE ACTIVE MAXIMUM EN RÉGIMES PERMANENTS SINUSOÏDAUX RÉSONANTS DES QUADRIPÔLES DIPORTS, LINÉAIRES, PASSIFS ET RÉCIPROQUES

(Résumé)

Dans les régimes permanents sinusoïdaux qui réalisent la résonance à la porte d'entrée d'un quadripôle diporte, linéaire, passif et réciproque, la puissance active transférée à un récepteur passif peut avoir une valeur maximum lorsqu'on alimente le quadripôle soit sous une tension de valeur effective constante, soit sous un courant de valeur effective constante.

Les valeurs maximum des puissances actives transférées au récepteur dans ces conditions sont données par les relations (7), respectivement (28).

Dans les deux cas le rendement est le même ; on le peut calculer à l'aide des relations équivalentes (9) ou (26) ; sa valeur ne dépasse pas 50%.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 621.317.78

ANALIZA INDICAŢIILOR UNUI WATTMETRU (CONTOR) MONOFAZAT MONTAT CU NEUTRU ARTIFICIAL ÎNTR-O REŢEA TRIFAZATĂ CU TREI CONDUCTOARE, ÎN REGIM DEZECHILIBRAT DE CURENŢI

DE

LAURIAN PREDA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Galaţi, mai 1967

1. Introducere

Într-un sistem trifazat cu trei conductoare, un wattmetru (contor) monofazat poate fi montat utilizînd neutru artificial în nouă moduri distincte. Pentru fiecare montaj se obţine o deviaţie a acului indicator al wattmetrului monofazat (proporţională cu cuplul) pe care o notăm cu a', b', ..., i', după cum este indicat în tabelul 1.

Tabelul 1

	I_R	I_S	I_T
U_{RO}	a'	b'	c'
U_{SO}	d'	e'	f'
U_{TO}	g'	h'	i'

Cu ajutorul metodei componentelor simetrice se pot determina expresiile analitice ale indicaţiilor instrumentului, funcţie de ordinea curenţilor nesimetrici (tensiunile fiind simetrice). Considerînd trei valori efective oarecare ale curenţilor nesimetrici (de exemplu 5 A, 4 A şi 3 A), există şase posibilităţi (A, B, ..., F) de repartizare a lor pe cele trei faze (deci şase diagrame fazoriale — fig. 1 ..., 6), pentru aceleaşi valori ale puterilor active, reactive şi de nesimetrie. Expresia analitică a indicaţiei instrumentului monofazat este funcţie de modul de montare şi de ordinea curenţilor nesimetrici în raport cu cele trei faze [6].

2. Analiza indicațiilor wattmetrului

Cele șase cazuri posibile ale repartiției acelorași trei curenți dezechilibrați pe faze sînt:

A) $I_R > I_S > I_T$, B) $I_S > I_T > I_R$, C) $I_T > I_R > I_S$,

D) $I_R > I_T > I_S$, E) $I_S > I_R > I_T$, F) $I_T > I_S > I_R$.

Efectuînd descompunerea grafică în componente simetrice a tensiunilor simetrice și curenților nesimetrici se obțin situațiile din fig. 1 ... 6. Utilizînd aceste diagrame fazoriale precum și expresiile analitice ale componentelor simetrice [5], se poate constata că în cele șase cazuri (A, B, ..., F) între unghiuri au loc relațiile:

$$
(1)\quad \begin{cases}
\text{(A)}\ \varphi_A = \varphi' - \varphi''_A, & \text{(D)}\ \varphi''_D = 2\varphi' - \varphi''_A = \\
\varphi' = \dfrac{\varphi''_1 + \varphi''_2}{2}, & \quad + 2\pi + \varphi' - \varphi_D, \\
\text{(B)}\ \varphi''_B = \varphi''_A + \dfrac{4\pi}{3} = 2\pi + \varphi' - \varphi_B, & \text{(E)}\ \varphi''_E = 2\varphi' - \varphi''_A + \dfrac{4\pi}{3} = \\
& \quad = 2\pi + \varphi' - \varphi_E, \\
\text{(C)}\ \varphi''_C = \varphi''_A + \dfrac{2\pi}{3} = 2\pi + \varphi' - \varphi_C, & \text{(F)}\ \varphi''_F = 2\varphi' - \varphi''_A + \dfrac{2\pi}{3} = \\
& \quad = 2\pi + \varphi' - \varphi_F.
\end{cases}
$$

Fie $P = 3UI_d \cos\varphi'$, $Q = 3UI_d \sin\varphi'$ puterile activă și reactivă și $p = 3UI_i \cos\varphi''$, $q = 3UI_i \sin\varphi''$ puterile activă și reactivă de nesimetrie [4], [7]. Dacă nu se ține seama de repartiția celor trei curenți dezechilibrați pe faze ci numai de modul de montare al wattmetrului monofazat, se obține:

$$
(2)\quad \begin{cases}
a' = +\dfrac{P}{3} + \dfrac{p}{3}, & b' = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p}{6} + \dfrac{q}{2\sqrt{3}}, \\
c' = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p}{6} - \dfrac{q}{2\sqrt{3}}, & d' = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p}{6} + \dfrac{q}{2\sqrt{3}}, \\
e' = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p}{6} - \dfrac{q}{2\sqrt{3}}, & f' = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p}{3}, \\
g' = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p}{6} - \dfrac{q}{2\sqrt{3}}, & h' = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p}{3}, \\
i' = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p}{6} + \dfrac{q}{2\sqrt{3}}.
\end{cases}
$$

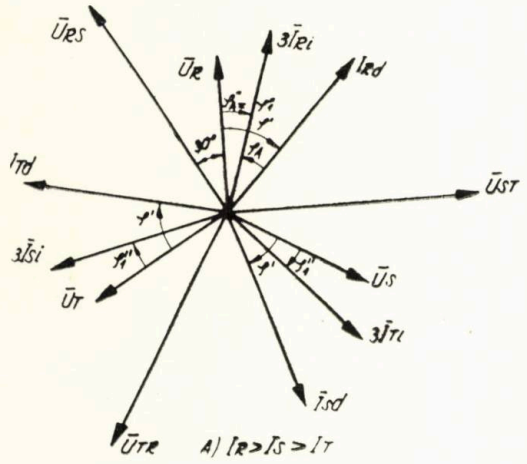


Fig. 1

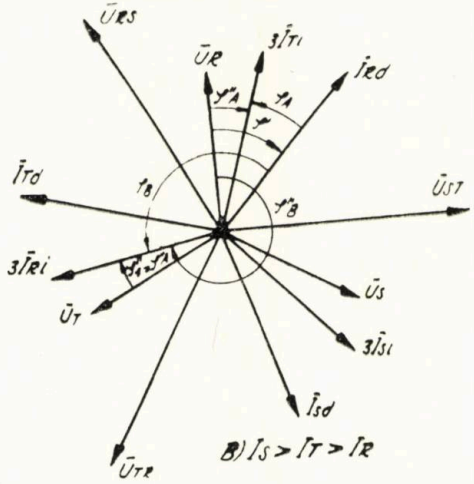


Fig. 2

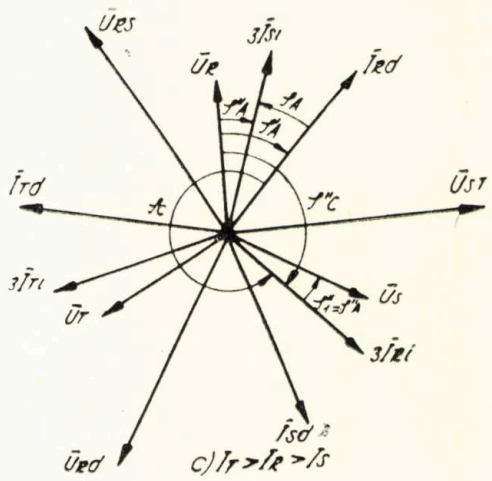


Fig. 3

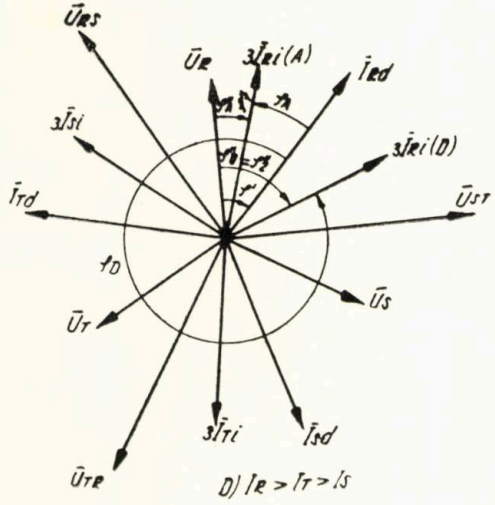


Fig. 4

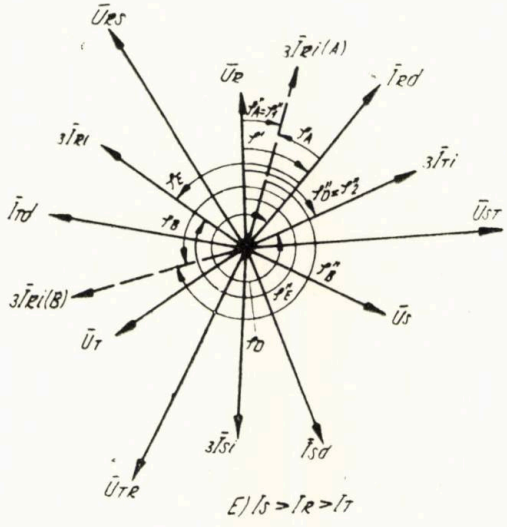


Fig. 5

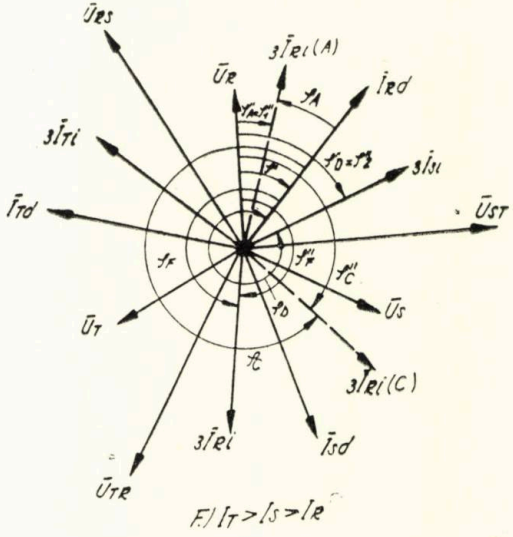
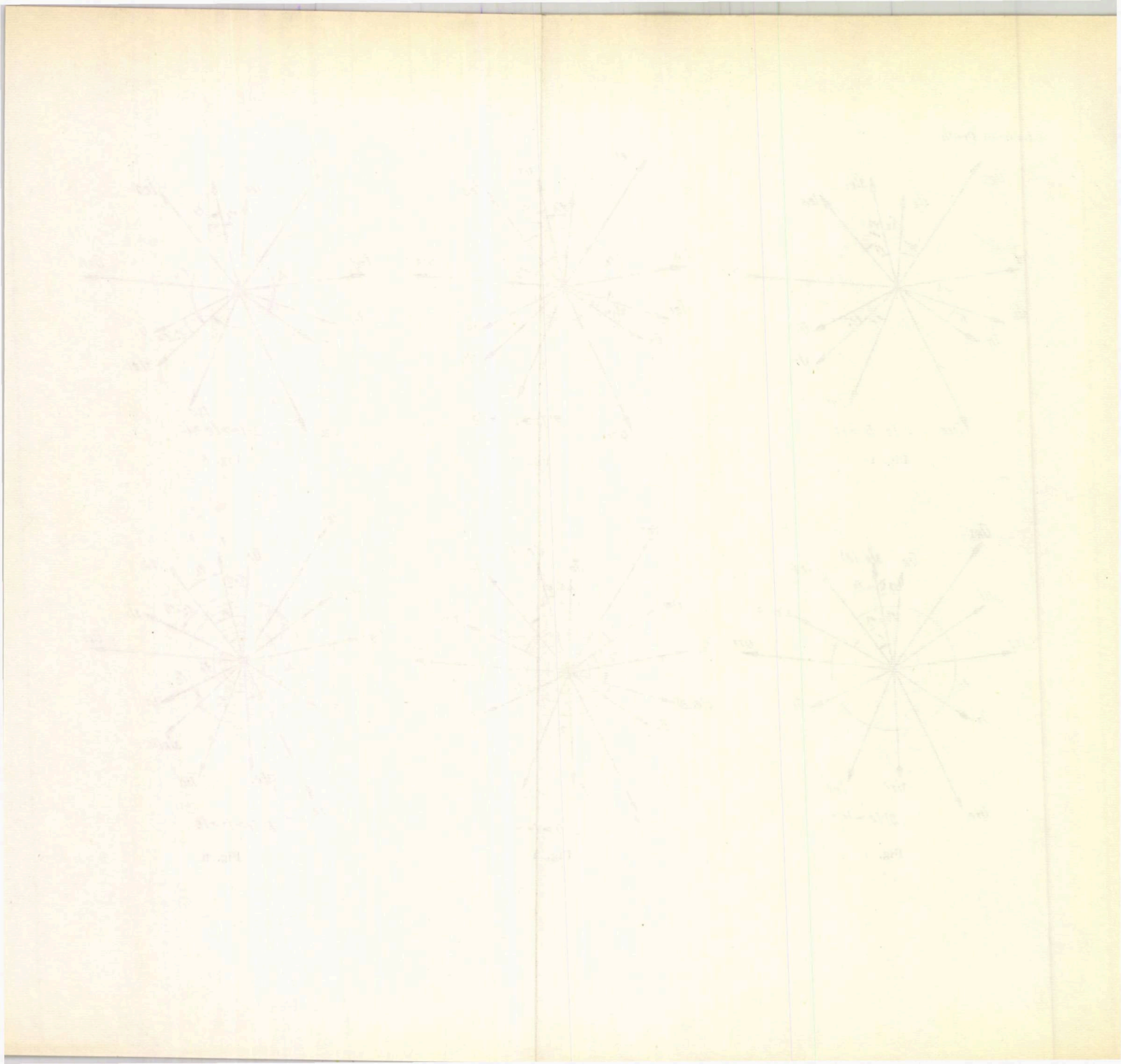


Fig. 6



Cu ajutorul diagramelor fazoriale (fig. 1...6) și a relațiilor (1) se constată că p și q depind de repartiția celor trei curenți dezechilibrați pe faze, fiind diferiți în cele șase cazuri:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&p_A = p_1, && q_A = q_1,\\
&p_B = -\frac{p_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} q_1, && q_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} p_1 - \frac{q_1}{2},\\
&p_C = -\frac{p_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} q_1, && q_C = +\frac{\sqrt{3}}{2} p_1 - \frac{q_1}{2},\\
&p_D = p_2 = p_1 \frac{P^2 - Q^2}{P^2 + Q^2} + 2q_1 \frac{PQ}{P^2 + Q^2},\\
&q_D = q_2 = 2p_1 \frac{PQ}{P^2 + Q^2} - q_1 \frac{P^2 - Q^2}{P^2 + Q^2},\\
&p_E = -\frac{p_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} q_2 = -\frac{p_1}{2} \cdot \frac{P^2 - Q^2 - 2\sqrt{3}PQ}{P^2 + Q^2} -\\
&\qquad - \frac{q_1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3P^2 - 3Q^2 + 2\sqrt{3}PQ}{P^2 + Q^2},\\
&q_E = -\frac{\sqrt{3}}{2} p_2 - \frac{q_2}{2} = -\frac{p_1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}P^2 - \sqrt{3}Q^2 + 2PQ}{P^2 + Q^2} +\\
&\qquad + \frac{q_1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}P^2 - \sqrt{3}Q^2 - 6PQ}{P^2 + Q^2},\\
&p_F = -\frac{p_2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} q_2 = -\frac{p_1}{2} \cdot \frac{P^2 - Q^2 + 2\sqrt{3}PQ}{P^2 + Q^2} +\\
&\qquad + \frac{q_1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}P^2 - 3Q^2 - 2\sqrt{3}PQ}{P^2 + Q^2},\\
&q_F = +\frac{\sqrt{3}}{2} p_2 - \frac{q_2}{2} = +\frac{p_1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}P^2 - \sqrt{3}Q^2 - 2PQ}{P^2 + Q^2} +\\
&\qquad + \frac{q_1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}P^2 - \sqrt{3}Q^2 + 6PQ}{P^2 + Q^2},
\end{aligned}
\right. \tag{3}
$$

unde $p_A = p_1 = 3UI_i \cos \varphi_1''$ și $q_A = q_1 = 3UI_i \sin \varphi_1''$ sînt puterile activă și reactivă de nesimetrie în cazul (A) (fig. 1) iar p_2 și q_2 aceleași puteri în cazul (D) (fig. 4).

Din relațiile (2), (3) și diagramele fazoriale (fig. 1 ... 6) se pot obține expresiile analitice ale indicațiilor wattmetrului monofazat, care arată că deviația (cuplul) este funcție și de repartiția celor trei curenți dezechilibrați pe faze (fiind diferită în cele șase cazuri (A) ... (F)[1]) :

$$
(4\,A)\quad
\begin{cases}
a'_A = +\dfrac{P}{3} + \dfrac{p_1}{3}, & b'_A = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}},\\[2ex]
c'_A = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}, & d'_A = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}},\\[2ex]
e'_A = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p_1}{6} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}, & f'_A = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{3},\\[2ex]
g'_A = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}, & h'_A = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{3},\\[2ex]
i'_A = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p_1}{6} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}; &
\end{cases}
$$

$$
(4\,B)\quad
\begin{cases}
a'_B = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p_1}{6} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}, & b'_B = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}},\\[2ex]
c'_B = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{3}, & d'_B = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}},\\[2ex]
e'_B = +\dfrac{P}{3} + \dfrac{p_1}{3}, & f'_B = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}},\\[2ex]
g'_B = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{3}, & h'_B = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}},\\[2ex]
i'_B = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p_1}{6} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}; &
\end{cases}
$$

[1]) În literatură [1]...[3] se menționează numai faptul că expresia analitică este funcție doar de modul de montare al instrumentului de măsurare.

$$(4\,C)\quad \begin{cases} a'_C = +\frac{P}{3} - \frac{p_1}{6} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \quad b'_C = -\frac{P}{6} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_1}{3}, \\ b'_C = -\frac{P}{6} + \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{6} + \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \quad d'_C = -\frac{P}{6} + \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_1}{3}, \\ e'_C = +\frac{P}{3} - \frac{p_1}{6} + \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \quad f'_C = -\frac{P}{6} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{6} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \\ g'_C = -\frac{P}{6} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{6} + \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \quad h'_C = -\frac{P}{6} + \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{6} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \\ i''_C = +\frac{P}{3} + \frac{p_1}{3}; \end{cases}$$

$$(4\,D)\quad \begin{cases} a'_D = +\frac{P}{3} + \frac{p_1}{3}\cdot\frac{P^2-Q^2}{P^2+Q^2} + \frac{2}{3}\,q_1\,\frac{PQ}{P^2+Q^2}, \\ b'_D = -\frac{P}{6} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{6}\cdot\frac{P^2-Q^2-2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} + \frac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{Q^2-P^2-\frac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\ c'_D = -\frac{P}{6} + \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{6}\cdot\frac{P^2-Q^2+2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{Q^2-P^2+\frac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\ d'_D = -\frac{P}{6} + \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{6}\cdot\frac{P^2-Q^2-2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} + \frac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{Q^2-P^2-\frac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\ e'_D = +\frac{P}{3} - \frac{p_1}{6}\cdot\frac{P^2-Q^2+2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{Q^2-P^2+\frac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\ f'_D = -\frac{P}{6} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_1}{3}\cdot\frac{P^2-Q^2}{P^2+Q^2} + \frac{2}{3}q_1\frac{PQ}{P^2+Q^2}, \\ g'_D = -\frac{P}{6} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{6}\cdot\frac{P^2-Q^2+2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{Q^2-P^2+\frac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \end{cases}$$

$$(4\,D)\quad \begin{cases} h'_D = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{3}\cdot\dfrac{P^2-Q^2}{P^2+Q^2} + \dfrac{2}{3}q_1\dfrac{PQ}{P^2+Q^2}, \\ i''_D = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2-2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}; \end{cases}$$

$$(4\,E)\quad \begin{cases} a'_E = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2-2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\ b'_E = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2+2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\ c'_E = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{3}\cdot\dfrac{P^2-Q^2}{P^2+Q^2} + \dfrac{2}{3}q_1\dfrac{PQ}{P^2+Q^2}, \\ d'_E = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2+2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\ e'_E = +\dfrac{P}{3} + \dfrac{p_1}{3}\cdot\dfrac{P^2-Q^2}{P^2+Q^2} + \dfrac{2}{3}q_1\dfrac{PQ}{P^2+Q^2}, \\ f'_E = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2-2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\ g'_E = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{3}\cdot\dfrac{P^2-Q^2}{P^2+Q^2} + \dfrac{2}{3}q_1\dfrac{PQ}{P^2+Q^2}, \\ h'_E = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2-2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\ i''_E = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2+2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}; \end{cases}$$

$$
(4\,\mathrm{F})\quad
\begin{cases}
a'_F = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2+2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\
b'_F = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{3}\cdot\dfrac{P^2-Q^2}{P^2+Q^2} + \dfrac{2}{3}q_1\dfrac{PQ}{P^2+Q^2}, \\
c'_F = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2-2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\
d'_F = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{3}\cdot\dfrac{P^2-Q^2}{P^2+Q^2} + \dfrac{2}{3}q_1\dfrac{PQ}{P^2+Q^2}, \\
e'_F = +\dfrac{P}{3} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2-2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\
f'_F = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2+2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\
g'_F = -\dfrac{P}{6} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2-2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} + \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\
h'_F = -\dfrac{P}{6} + \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{6}\cdot\dfrac{P^2-Q^2+2\sqrt{3}PQ}{P^2+Q^2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Q^2-P^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}PQ}{P^2+Q^2}, \\
i'_F = +\dfrac{P}{3} + \dfrac{p_1}{3}\cdot\dfrac{P^2-Q^2}{P^2+Q^2} + \dfrac{2}{3}q_1\dfrac{PQ}{P^2+Q^2}.
\end{cases}
$$

Din aceste expresii analitice rezultă că între indicații au loc relațiile:

$$
(5)\quad
\begin{cases}
a'+b'+c'=0, & a'+d'+g'=0, \\
d'+e'+f'=0, & b'+e'+h'=0, \\
g'+h'+i'=0, & c'+f'+i'=0;
\end{cases}
$$

$$
(6)\quad \begin{cases}
a'_A = e'_B = i'_C, & b'_A = f'_B = g'_C, & c'_A = d'_B = h'_C, \\
d'_A = h'_B = c'_C, & e'_A = i'_B = a'_C, & f'_A = g'_B = b'_C, \\
g'_A = b'_B = f'_C, & h'_A = c'_B = d'_C, & i'_A = a'_B = e'_C, \\
a'_D = e'_E = i'_F, & b'_D = f'_E = g'_F, & c'_D = d'_E = h'_F, \\
d'_D = h'_E = c'_F, & e'_D = i'_E = a'_F, & f'_D = g'_F = b'_F, \\
g'_D = b'_E = f'_E, & h'_D = c'_E = d'_F, & i'_D = a'_E = e'_F.
\end{cases}
$$

Analiza celor șase cazuri posibile (A), (B), ..., (F) pune în evidență faptul că expresia analitică a indicației instrumentului poate lua forma

$$(7)\qquad (a', b', ..., i') = K'_1 P + K'_2 Q + K'_3 p_1 + K'_4 q_1 + K'_5 p_2 + K'_6 q_2.$$

Valorile coeficienților $K_1, ..., K_6$, pentru fiecare caz în parte, sînt date în tabelul 2.

Verificarea experimentală a confirmat toate datele obținute pe cale teoretică.

3. Concluzii

1. Într-un sistem trifazat cu trei conductoare, cu tensiuni simetrice și curenți nesimetrici, un wattmetru monofazat cu nul artificial montat într-un mod oarecare, are o deviație $(a', b', ..., i')$ ce depinde de repartiția celor trei curenți dezechilibrați pe faze, de modul de montare a instrumentului și de puterile activă, reactivă, activă și reactivă de nesimetrie din circuit [6].

2. Indicațiile instrumentului pot fi exprimate analitic în funcție de maximum patru variabile (4) sau de șase variabile (7). În ultimul caz relațiile (7) sînt mai simple și facilitează utilizări ulterioare. De asemenea ele arată că totdeauna indicația (cuplul) este proporțional cu puterile activă, reactivă, activă și reactivă de nesimetrie.

3. Expresiile analitice permit să se determine doar cu patru măsurători puterea activă, reactivă și de nesimetrie ($S_{nes} = \sqrt{p^2 + q^2}$), prin rezolvarea a patru ecuații cu patru necunoscute.

4. Expresiile analitice (4), (7) permit găsirea montajelor cu nul artificial, de măsurare a puterilor (energiilor) active, reactive și de nesimetrie, determinînd P, Q, p și q în funcție de $(a', b', ..., i')$.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de utilizări electrice
și automatizări

Tabelul 2

	I_R						I_S						I_T					
	K'_1	K'_2	K'_3	K'_4	K'_5	K'_6	K'_1	K'_2	K'_3	K'_4	K'_5	K'_6	K'_1	K'_2	K'_3	K'_4	K'_5	K'_6
U_R																		
A	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
B	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0
C	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
D	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
E	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	$+\frac{1}{3}$	0
F	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$
U_S																		
C	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
D	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0
E	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0
F	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
U_T																		
A	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
B	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
C	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	0	0	0
D	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{3}$	0
E	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{3}$	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
F	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	0

(*A*) $I_R > I_S > I_T$, (B) $I_S > I_T > I_R$, (C) $I_T > I_R > I_S$; (D) $I_R > I_T > I_S$, (E) $I_S > I_R > I_T$, (F) $I_T > I_S > I_R$.

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1948

BIBLIOGRAFIE

1. Barbagelata A., *Considerationi fondamentali sulle misure nei sistemi trifazi.* L'Elettrotecnica, 1930, *3*, pp. 57—61.
2. Fränkel D., *Folosirea metodei componentelor simetrice la măsurarea puterii respectiv energiei active și reactive în sistemele trifazate cu trei conductori.* Electrotehnica, 1955, **III**, *2—3*, pp. 51—60.
3. Preda M., Ambrozie C., *Posibilități de măsurare a puterii reactive și a energiei reactive în rețele trifazate nesimetrice.* Electrotehnica, 1957, **V**, *1*, pp. 19—27.
4. Fränkel D., *Măsurarea puterii de nesimetrie și a componentei inverse a curentului cu wattmetru.* Bul. șt. și tehn. I.P. Timișoara, 1960, **5** (**19**), *1—2*, pp. 139—142.
5. Preda L., *Asupra determinării componentelor simetrice pe cale analitică într-o rețea trifazată cu trei conductoare.* Bul. Inst. polit. Iași, 1968, **XIV** (**XVIII**), *3—4*.
6. — *Analiza indicațiilor unui wattmetru monofazat, montat într-o rețea trifazată cu trei conductoare în regim dezechilibrat (simplu simetric), la modificarea nesimetriei rețelei.* Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII** (**XVI**), *3—4*.
7. — *Măsurarea puterii (energiei) de nesimetrie fără neutru artificial.* Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII** (**XVII**), *3—4*.

ANALYSE DES INDICATIONS D'UN WATTMÈTRE (COMPTEUR) MONOPHASÉ BRANCHÉ AVEC NEUTRE ARTIFICIEL DANS UN RÉSEAU TRIPHASÉ À TROIS CONDUCTEURS, EN RÉGIME DÉSÉQUILIBRÉ DE COURANTS

(Résumé)

En branchant d'une manière quelconque un wattmètre monophasé avec neutre artificiel dans un système triphasé à trois conducteurs ayant des tensions équilibrées et des courants déséquilibrés, on peut déduire, à partir des diagrammes vectoriels, les expressions analytiques des indications, qui sont fonctions de la manière dont on a branché l'appareil de mesure et de la répartition des courants déséquilibrés sur les phases.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D. C. 621.317.76

POSSIBILITIES OF FREQUENCY MEASURE BY MEANS OF THE QUADRATURE CURRENTS TECHNIQUE

BY

M. CREŢU and V. PETRESCU

1. Introduction

If the elements of circuit from Fig. 1 are chosen such as to fulfil the condition $L = CR_c R_L$, the currents I_L and I_c differ permanently in phase by 90°, no matter what is the frequency of the feeding source [1] ($R_L = R + r_L$ is the whole resistance of the branch with inductance and R_c is a varying resistance in series with the capacity unlosses C.).

The measurement circuit used permanently keeps the above-quoted quadrature condition and the equilibrium is considered obtained when the efective values of the currents I_L and I_C are equal, or when are equal two tensions proportional to this currents. For the revereals of the equilibrium we utilize a null indicator with thermocouples, a quadrant electrometer either a cathodic oscilloscope.

2. Frequency Measure by Means of a Null Indicator with Thermocouples

The identical measuring thermocouples T_1 and T_2 discharge in opposition on the low inner resistance of the magnetoelectric galvanometer G (Fig. 2). The occasional unsymmetries of the thermocouples can be got rid of by suitably shunting the heaters. To make it easier the shunts of the heaters have not plotted [4] any more. The equilibrium will be obtained by regulating the resistances R_L and R_c with $R_L R_c = \text{const.}$, in order to continually fulfil the quadrature condition.

The electromotive tensions generated by the thermocouples are in case of perfect symmetry $e_1 = KI_L^2$, $e_2 = KI_c^2$, while the current through the galvanometer is:

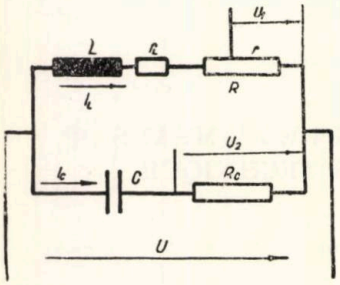
$$(1) \qquad i_g = \frac{e_1 - e_2}{R_t} = \frac{K}{R_t}(I_L^2 - I_c^2) = \frac{K}{R_t} \cdot \frac{U^2}{R_L^2} \cdot \frac{1 - R_L^2 \omega^2 C^2}{1 + R_c^2 \omega^2 C^2},$$

where R_t is the resistance of the galvanometer circuit.

If $i_g = 0$, $I_L = I_c$ whence the relation for rekoning the frequency is obtained $R_L \omega C = 1$, $f = 1/(2\pi R_L C)$ or

$$(2) \qquad f = \frac{1}{2\pi L} R_c = \text{const. } R_c.$$

It is worth noticing the case in which the fixed inductance L is chose so that $2\pi L$ factor equals 1 or a decimal submultiple of 1, when the significant figures of the resistance R_c in equilibrium reprezent in Hz, or in decimal multiples of Hz, the frequency to be measured. The high measuring frequency depends on the quality of the thermocouples and of the circuit elements.



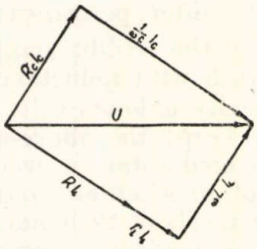


Fig. 1. — Circuit for bringing two currents in quadrature and the phasor diagram.

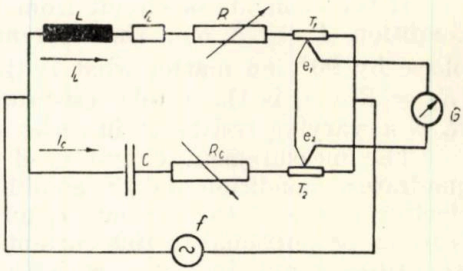


Fig. 2. — Circuit for frequency measure by means of an indicator with thermocouples.

Experimentally, frequencies in the supersond field have been measured, with thermocouples of type, Philips Th 2 the null instrument having 10^6 div/volt, tension sensitivity testing — a standard Tesla electronic generator type BM344.

3. Frequency Measure by Using a Quadrant Electrometer as Null Indicator

In this case the quadrant electrometer works as a differential voltmeter indicating at the equilibrium point the equality of absolute values of the tensions $\underline{U}_1$ and $\underline{U}_2$ proportional to the currents $\underline{I}_L$ and $\underline{I}_c$, in quadrature (Fig. 3).

Let v_1, v_2 and v_n be the potentials of the fixed armatures and the electrometer blade respectively [5]. The average value of the couple in a period is

$$M = \frac{K}{T}\int_0^T [(v_n - v_1)^2 - (v_n - v_2)^2]\, dt. \tag{3}$$

While i_L and i_c are currents having a 90° phase difference independently of the source frequency, it may be written also

$$v_n - v_1 = ri_L = \sqrt{2}rI_L \sin \omega t \quad \text{and} \quad v_n - v_2 = ri_c = rI_c\sqrt{2} \cos \omega t; \tag{4}$$

using (3) we get

$$M = K\,(r^2 I_L^2 - R_c^2\, I_c^2)\,. \tag{5}$$

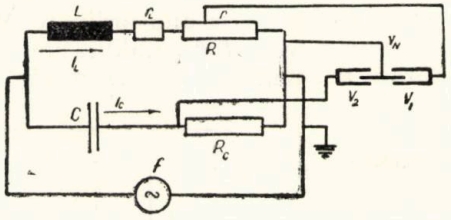


Fig. 3. — Circuit for frequency measure with electrostatic null indicator.

The electrometer blade will remain in a neutral position, indicating the equality of the tensions applied to the quadrants, when $rI_L = R_c I_c$, from which we finally obtaine:

$$f = \frac{1}{2\pi L} r, \tag{6}$$

a relation with which the frequency can be calculated.

Now, if the fixed inductance is chosen so that the constant factor $2\pi L$ is equals 1 or a decimal submultiple, the significant figures of the resistance r in equilibrium represent the frequency to be measured in Hz or in decimal multiples of Hz. In contrast with the above null indicator with thermocouples, the indicator with quadrant electrometer offers a supplementary possibility of varying the measure range by dividing the resistance R_c .

To have a sensitive measure the absolute values of the tensions applied to the quadrants must be over ten volts. The high limit frequency measurable whitin the limits of an acceptable accuracy is about 15 kHz, because of errors brought in by the branch currents through the specific capacities of the electrometer.

Some frequencies in the sound field have been experimentally measured with a Georg-Bartels Göttingen type electrometer as null indicator. We tested in this way a Orion generator of type 1113 EMG.

4. Frequency Measure by Using a Cathodic Oscilloscope as Null Instrument

The tensions applied to the deflexion plates having generally the expressions $u_x = U_{2\max} \cos \omega t$ ad $u_y = U_{1\max} \sin \omega t$, the image on the screen will be an ellipse. It will become a circle when $U_{1\max} = U_{2\max}$, that is $rL_L = R_c I_c$, leading to the previous relation (6).

But in practice the oscilloscope have different amplifications for the horizontal and vertical deflexions. This short coming can be eliminated by a correction before the real measuring for which the following technique is suggested. The same signal U_2 is separately applied to the xx and yy plates and one adjuste the potentiometer of the amplifiers of horizontal and vertical deviations on the abscissa and ordinate. When the measuring take place (Fig. 4), the resistance r for equilibration in the connection is adjusted until the obtained image is a perfect circle.

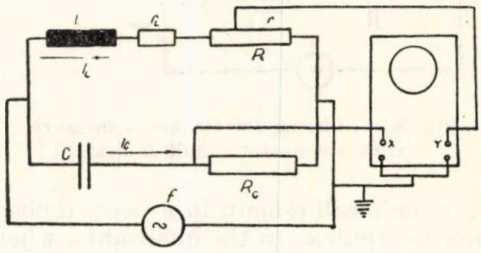


Fig. 4. — Frequency measure with a cathodic null indicator.

The accuracy of indication of the equilibrium with cathode ray tube, grows by means of an electronic switching when the tensions identical amplified appear simultaneous on the screen, or with a double beam oscilloscope, when by switch-up the time bases, the tensions U_1 and U_2 compare itself of small weight.

The use of cathodic oscilloscope as null instrument is remarcable because the high limit of measurable frequency greatly surpasse the usage limit of the quadrant electrometer.

5. Conclusions

The paper presents an original zero technique for frequency measure. Using a cathode oscilloscope, an indicator with thermocouples or a quadrant electrometer, the equilibration is obtained when are equal the amplitudes of two tensions or of two currents with a 90° phase difference.

The established formula for frequency calculus is a simple one and, in the same cases, the significant figures of the adjustable resistance represent the frequency to be measured in Hz, or in its decimal multiples. Few circuits fullfiling this condition are known in the literature so far, [2], [3].

When using as null indicator the cathodic oscilloscope, the technique has the advantage of a common connection to the mass between the source and the oscilloscope, avoiding the need of a screen separating transformers at high frequencies.

Appendix

For frequency measure by means of the quadrature currents or tensions technique both series and parallel circuits RC may be used, but the relation for frequency determination is [6] not linear. If in the parallel circuit, represented in fig. 6, the resistance r_t of the thermocouple heater T_2 may be neglected compar with the reactance of the condenser, at the equilibrium point obtained by varying the resistance R (fig. 5 *a*), the absolute values of the currents I_R and I_c are equal, and we can write $R = 1/(C\omega)$, whence the non-linear relation for frequency calculus results $f = 1/(2\pi\ RC)$.

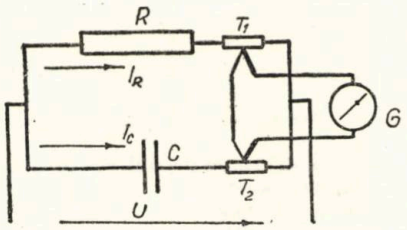


Fig. 5 *a*. — Parallel RC circuit with a thermic null indicator.

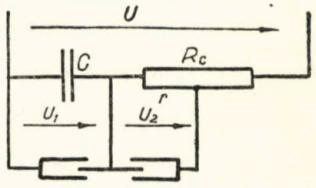


Fig. 5 *b*. — Series RC circuit with an electrostatic null indicator.

The series circuit $R\,C$ offers the same possibility if the null indicator has a very low consumption (fig. 5 *b*). If the tensions $\underline{U}_1$ and $\underline{U}_2$, applied to the quadrant electrometer, have equal absolute values, the movable blade will remains in the equilibrium position and then we shall be able to write the relation $\omega C = 1/r$, whence the measured frequency results $f = 1/(2\pi rC)$.

Received the 4 II 1969

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Electrotechnics
and Electrical Measurements

REFERENCES

1. Savin Gh., Petrescu V., *Metodă de măsurare în punte a cărei echilibrare se realizează prin aducerea a doi curenți în cuadratură.* Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X** (**XIV**), *1—2*, pp. 194.
2. Savin Gh., *Considerații asupra măsurării frecvenței prin aducerea a doi curenți în cuadratură.* Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X** (**XIV**), *3—4*, p. 207.

3. Krönert J., *Messbrücken und Kompensatoren*. Bd. **1**, R. Oldenburg Verlag, Berlin, 1935, S. 185.
4. Bigorne E., *Mesures électriques*. T. **II**, Eyrolles, Paris, 1948, p. 195.
5. Choudhury J. K., *Electrostatic Wattmeter as Comparator a.c./d.c.* Proceeding of the Inst. of Electr. Engineers, 1967, *8*, p. 1171.
6. Stanek J., *Technik elektrischer Messgeräte*. Verlag Technik, Berlin, S. 485—486.

POSIBILITĂȚI DE MĂSURARE A FRECVENȚEI PRIN METODA CURENȚILOR ÎN CUADRATURĂ

(Rezumat)

Lucrarea relevă unele aspecte privind măsurarea frecvenței, prin folosirea circuitului de aducere în cuadratură a doi curenți. Se analizează posibilitățile de măsurare în cazurile cînd indicatorul de nul este un instrument magnetoelectric cu termocupluri, un electrometru cu cadrane sau un oscilograf catodic. În primul caz echilibrarea circuitului de măsurare se obține prin variația parametrilor a două elemente din schemă, produsul lor rămînînd constant, iar în celelalte două cazuri pentru echilibrare se reglează parametrul unui singur element. În toate cazurile analizate, frecvența se obține cu ușurință dintr-o relație liniară, funcție de valoarea unei rezistențe.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Circuit *RLC* pentru aducerea în cuadratură a doi curenți și diagrama fazorială.
Fig. 2. — Circuit pentru măsurarea frecvenței folosind un indicator de nul cu termocupluri.
Fig. 3. — Circuit pentru măsurarea frecvenței cu indicator de nul electrostatic.
Fig. 4. — Măsurarea frecvenței cu indicator de nul catodic.
Fig. 5 *a*. — Circuit paralel *RC* cu indicator de nul termic.
Fig. 5 *b*. — Circuit serie *RC* cu indicator de nul electrostatic.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 681.3 ; 621.3.04

LEGĂTURA DINTRE APROXIMANTELE TRECE-TOT PADÉ PENTRU ÎNTÎRZIERE CONSTANTĂ ȘI CELE DETERMINATE CU POLINOAME BESSEL

DE

NINA POEATĂ

1. Introducere

Se știe [1], [2] că funcția de transfer a cuadripolului ideal de întîrziere constantă T este de forma

$$F(s) = e^{-sT}. \tag{1}$$

Pentru $s = j\omega$, (1) devine

$$F(j\omega) = e^{-j\omega T} = A(\omega)e^{-j\psi(\omega)}, \tag{2}$$

din care se deduce că pentru circuitul ideal de întîrziere caracteristicile de frecvență ale amplitudinii, fazei și întîrzierii sînt:

$$A(\omega) = 1, \tag{3}$$

$$\psi(\omega) = \omega T, \tag{4}$$

$$T(\omega) = T. \tag{5}$$

Dintre circuitele electrice întîlnite în practică, doar linia lungă conectată pe impedanța sa caracteristică are funcția de transfer (1). Pentru simularea cuadripolilor de întîrziere constantă, mai ales dacă întîrzierea este mare, se folosesc circuite cu constante concentrate. Acestea au funcția de transfer de tipul unei fracții raționale în s de forma:

$$F_{m,n}(s) = \frac{P_m(s)}{P_n(s)}, \tag{6}$$

în care $P_m(s)$ și $P_n(s)$ sînt polinoame de grad m, respectiv n, cu coeficienți reali. Pentru ca (6) să fie realizabil se mai impune ca $P_n(s)$ să fie polinom Hurwitz.

Dacă $m < n$ se obține o aproximantă de tipul trece-jos. Pentru aproximanta de tipul trece-tot $m = n$ și în plus $P_m(s) = P_n(-s)$, astfel că (6) devine

$$F_{n,n}(s) = \frac{P_n(-s)}{P_n(s)}. \tag{7}$$

În literatură se indică numeroase aproximante pentru (1), care diferă după criteriul folosit la stabilirea lor. De exemplu se poate cere ca una din condițiile (3), (4) sau (5) să fie optim îndeplinită în dauna celorlalte, sau se poate stabili un compromis. Se mai poate cere o aproximare optimă în vecinătatea lui zero, sau ondulatorie [3], în limitele unei benzi de frecvențe date. Chiar dacă se păstrează același criteriu, de exemplu aproximarea optimă în vecinătatea lui zero, și deci se folosește în acest scop dezvoltarea exponențialei de variabilă complexă în serie Mac Laurin, (ceea ce e posibil deoarece ea îndeplinește condițiile Riemann-Cauchy) se pot utiliza pentru (1) mai multe forme [4]:

$$e^{-sT} = 1 - sT + \frac{(sT)^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{(sT)^k}{k!} + \cdots, \tag{8}$$

$$\frac{1}{e^{sT}} = \frac{1}{1 + sT + \frac{(sT)^2}{2!} + \cdots + \frac{(sT)^k}{k!} + \cdots}, \tag{9}$$

sau

$$\frac{e^{-\frac{sT}{2}}}{e^{\frac{sT}{2}}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{sT}{2}\right)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{sT}{2}\right)^k}, \tag{10}$$

fiecare din ele ducînd la o altă aproximantă. De exemplu, folosind (9) și împunînd condiția celei mai bune aproximări a întîrzierii (5), se obține la numitor polinomul Bessel [1]; atunci (9) devine

$$F_{0,n,(B)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} b_k (sT)^k}, \tag{11}$$

în care

$$b_k = \frac{(2n - k)!}{2^{n-k} k! (n - k)!}. \tag{12}$$

În tabelul 1 se dau polinoamele Bessel [5] de ordinele 1...5.

Tabelul 1

Coeficienții polinoamelor Bessel

$$P(s) = \sum_{k=0}^{n} b_k s^k$$

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1	1	1			
2	3	3	1		
3	15	15	6	1	
4	105	105	45	10	1
5	945	945	420	105	15

Tabelul 2

Coeficienții polinoamelor de la numitorul funcției trece-tot Padé $Q(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	2	1			
2	12	6	1		
3	120	60	12	1	
4	1 680	840	180	20	1
5	30 240	15 120	3 360	420	30

2. Folosirea polinoamelor Bessel în aproximantele de tipul trece-tot

Dacă se utilizează (11) pentru aproximarea expresiei (1) se obține cea mai bună aproximare a caracteristicii de frecvență a întîrzierii (5) în dauna celei de amplitudine (3). Există alte aproximante de tipul trece-jos (de exemplu Butterworth, Cebîșev), care la frecvențe coborîte dau o aproximare mai bună a caracteristicii de amplitudine (3) în dauna celei de fază (4). Pentru ameliorarea caracteristicii de amplitudine se folosește aici ca punct de plecare (10), în care se păstrează la numitor polinomul Bessel. Rezultă expresia

$$F_{n,n,(B)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} b_k \left(-\frac{sT}{2}\right)^k}{\sum_{k=0}^{n} b_k \left(\frac{sT}{2}\right)^k}. \tag{13}$$

Din (12) se obține

$$\frac{b_k}{2^k} = \frac{(2n-k)!}{2^n k!(n-k)!}. \tag{14}$$

Pe de altă parte aproximanta Padé de tipul trece-tot pentru întîrziere constantă este [2]

$$F_{n,n,(P)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k (-sT)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (sT)^k}, \tag{15}$$

în care

$$a_k = \frac{n!(2n-k)!}{(2n)!\, k!(n-k)!}. \tag{16}$$

În tabelul 2 se dau coeficienții polinoamelor de gradele 1...5 de la numitorul aproximantei trece-tot Padé (15).

Introducînd acum (16) în (14) se obține

$$\frac{b_k}{2^k} = a_k \frac{(2n)!}{n!\,2^n}, \tag{17}$$

care folosită în (13) conduce la

$$F_{n,n,(B)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k(-sT)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k(sT)^k}. \tag{18}$$

Comparînd (18) cu (15) rezultă că funcțiile trece-tot obținute pornind de la folosirea polinoamelor Bessel coincid cu cele Padé. În baza acestei constatări se pot face următoarele observații:

1. Deoarece aproximanta cu polinomul Bessel la numitor se obține din condiția aproximării optime a caracteristicii de frecvență a întîrzierii (5), rezultă că și caracteristica trece-tot Padé aproximează optim întîrzierea la frecvențe coborîte.

2. Din confruntarea relațiilor (13) și (18), ținînd cont și de (17), rezultă că polii aproximantei trece-tot Padé sînt rădăcinile duble ale polinoamelor Bessel. Deoarece se știe [5] că ultimele se găsesc în semiplanul stîng al variabilei complexe s, rezultă că funcțiile trece-tot Padé îndeplinesc condițiile de stabilitate. Acest rezultat este important deoarece din procedeul folosit la deducerea funcțiilor Padé nu se garantează stabilitatea lor; mai mult decît atît se știe chiar că unele dintre ele, de tipul trece-jos, sînt nestabile.

3. Legătura dintre caracteristicile de frecvență ale fazei și întîrzierii aproximantelor $F_{n,n,(P)}$ și $F_{0,n,(B)}$

Pentru a stabili care este îmbunătățirea aproximantei $F_{n,n,(P)}$ față de $F_{0,n,(B)}$, trebuie puse în evidență zerourile și polii în expresiile (11) și (15). Dacă p_k sînt rădăcinile polinomului Bessel, se obține pentru (11)

$$F_{0,n,(B)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (sT - p_k)}. \tag{19}$$

Punînd în evidență părțile reale și imaginare ale rădăcinilor, $p_k = -c_k \pm \pm j d_k$, (19) devine

$$F_{0,n,(B)} = \frac{1}{(sT + p_0)\prod_{k=1}^{N}[sT - (-c_k \pm jd_k)]}, \tag{20}$$

unde p_0 este rădăcina reală în cazul n impar, iar $N = (n-1)/2$. Pentru n par $N = n/2$.

Folosind aceleași notații se obține pentru (15):

$$F_{n,n,(P)} = \frac{(sT - 2p_0)\prod_{k=1}^{N}[sT - 2(c_k \pm jd_k)]}{(sT + 2p_0)\prod_{k=1}^{N}[sT - 2(-c_k \pm jd_k]}. \tag{21}$$

Pentru determinarea caracteristicilor de frecvență ale fazei și întîrzierii se introduce $s = j\omega$ în (20) și (21). Aceste relații devin:

$$F_{0,n,(B)} = \frac{1}{(p_0 + j\omega T)\prod_{k=1}^{N}[c_k + j(\omega T \mp d_k)]}, \tag{22}$$

$$F_{n,n,(P)} = \frac{(-2p_0 + j\omega T)\prod_{k=1}^{N}[-2c_k + j(\omega T \mp 2d_k)]}{(2p_0 + j\omega T)\prod_{k=1}^{N}[2c_k + j(\omega T \mp 2d_k)]}. \tag{23}$$

Caracteristica de frecvență a fazei expresiei (22) este

$$\psi_{0,n,(B)} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega T}{p_0} - \sum_{k=1}^{N}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega T + d_k}{c_k} - \sum_{k=1}^{N}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega T - d_k}{c_k}, \tag{24}$$

iar cea a expresiei (23)

$$\psi_{n,n,(P)} = -2\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega T}{2p_0} - 2\sum_{k=1}^{N}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega T + 2d_k}{2c_k} - 2\sum_{k=1}^{N}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega T - 2d_k}{2c_k}. \tag{25}$$

Comparînd (24) cu (25) rezultă

$$\psi_{n,n,(P)}(\omega) = 2\psi_{0,n,(B)}\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{26}$$

Caracteristicile de frecvenţă ale întîrzierilor sînt respectiv:

$$T_{0,n,(B)} = -\frac{d\psi_{0,n,(B)}}{d\omega} = \frac{T}{p_0\left[1+\left(\frac{\omega T}{p_0}\right)^2\right]} + \sum_{k=1}^{N}\frac{T}{c_k}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega T+d_k}{c_k}\right)^2} + \tag{27}$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{T}{c_k}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega T-d_k}{c_k}\right)^2},$$

$$T_{n,n,(P)} = -\frac{d\psi_{n,n,(P)}}{d\omega} = \frac{T}{p_0\left[1+\left(\frac{\omega T}{2p_0}\right)^2\right]} + \sum_{k=1}^{N}\frac{T}{c_k}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega T+2d_k}{2c_k}\right)^2} + \tag{28}$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{T}{c_k}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega T-2d_k}{2c_k}\right)^2}.$$

Comparînd expresiile (27) şi (28) se constată că

$$T_{n,n,(P)}(\omega) = T_{0,n,(B)}\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{29}$$

Din (29) rezultă că dacă se utilizează funcţia de transfer Padé de ordin n, n, banda de frecvenţă în care se menţine întîrzierea constantă se dublează faţă de cazul cînd se foloseşte doar polinomul Bessel de ordin n la numitor.

4. Concluzii

1. Se constată că aproximanta de tipul trece-tot determinată cu polinomul Bessel la numitor coincide cu funcţia trece-tot Padé.
2. Se deduce că aproximanta trece-tot Padé de orice ordin este funcţie stabilă şi polii ei sînt dubli faţă de rădăcinile polinomului Bessel de acelaşi ordin.
3. Funcţia de transfer trece-tot Padé asigură o aproximare optimă a întîrzierii constante într-o gamă dublă de frecvenţe faţă de aproximanta trece-jos cu polinom Bessel la numitor.

Primită la 7 VIII 1969

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică
şi măsuri electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Бандман О. Л., *Синтез электронных R-C схем.* Изд. „Наука", М., 1966.
2. Коган Б. Я., Чёрнышев М. К., *Моделнрование запаздывания при помощи решающих усилителей.* Абт. и телемех., 1966, *3*, стр. 162—177.
3. Mc. Avoy T. J., *Least Square Dead-Time Approximations.* Trans. on Comp., Febr. 1968, pp. 174—177.
4. Truxal J. C., *Automatic Feedbak Control System Synthesis.* McGraw-Hill Book Comp., 1956.
5. Weinberg L., *Network Analysis and Synthesis.* Mc Graw-Hill Book Comp., N, Y., 1962

LA LIAISON ENTRE LES FONCTIONS APPROXIMANTES PASSE-TOUT DE PADÉ POUR RETARD CONSTANT ET CELLES DÉTERMINÉES À L'AIDE DES POLYNÔMES BESSEL

(Résumé)

On démontre que les expressions des fonctions de transfert passe-tout de Padé pour retard constant coïncident avec celles déterminées à l'aide des polynômes Bessel. Par cette voie on peut déduire quelques propriétés importantes pour les premières.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. D. 681.14

UTILISATION DES FONCTIONS COMPLÉMENTAIRES DANS LA SYNTHÈSE SIMULTANÉE DES FONCTIONS LOGIQUES QUADRATIQUES

PAR

AL. VALACHI

1. Introduction

Dans la synthèse d'un groupe de fonctions logiques quadratiques est intéressant de considérer quelquefois les fonctions complémentaires [1].

On trouvera la solution optimale (solution qui nécessite minimum de diodes) parmi les groupes $\overline{F}^{kj}$, $(j = 1, 2, ..., r)$, F^{kj}, $(j = r + 1, ..., N)$.

Au lieu de la synthèse des fonctions F^k, $(k = 1, 2, ..., N)$ on considérera la synthèse simultanée des fonctions F_1^k, $(k = 1, 2, ..., N)$ telles que :

$$(1) \qquad \begin{cases} \overline{F_1^{kj}} = \overline{F^{kj}} & \text{pour } j = 1, 2, ..., r; \\ F_1^{kj} = F^{kj} & \text{pour } j = r + 1, ..., N. \end{cases}$$

Au groupe de fonctions (1) on attachera un vecteur $T = [t_1 ... t_N]$ où

$$(2) \qquad t_i = \begin{cases} 1 & \text{si } F_1^i = F^i, \\ 0 & \text{si } F_1^i = F^i. \end{cases}$$

A chaque matrice $B^{k_1 \cdots k_p}$, [2], on attache aussi un vecteur $L_{k_1 \cdots k_p} = [a_1 ... a_N]$ tel que :

$$(3) \qquad a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in (k_1 ... k_p), \\ 0 & \text{si } i \notin (k_1 ... k_p). \end{cases}$$

La détermination d'une solution qui permet à réaliser une économie de diodes est équivalente à la détermination du vecteur T.

En utilisant l'expression de la fonction commune aux fonctions logiques données [2], on énonce le suivant

Théorème 1. *Chaque matrice* $B^{k_1 \cdots k_p}$ *sera égale à une matrice* $B_1^{l_1 \cdots l_q}$, $(q, p \neq r)$.

On a indiqué par $B^{k_1 \cdots k_p}$, $B^{l_1 \cdots l_q}$ les matrices correspondantes à la fonction commune aux fonctions logiques $F^{k_1}, \ldots, F^{k_p}$, et réspectivement aux fonctions $F_1^{l_1 \cdots l_q}$.

Corollaire 2. La relation:

$$B^{k_1 \cdots k_p} = B_1^{l_1 \cdots l_q}, \tag{4}$$

impose

$$B^{l_1 \cdots l_q} = B_1^{k_1 \cdots k_p}, \quad (q, p \neq r). \tag{4'}$$

Dans le cas $q = p = r$:

$$B_1^{k_1 \cdots k_r} = \prod_1^r Q_1^{k_j} \prod_{r+1}^N \bar{Q}_1^{k_j} = \prod_1^N \bar{Q}^j \neq B^{k_1 \cdots k_r}. \tag{5}$$

Théorème 2. *Entre les vecteurs correspondants aux matrices* $B^{k_1 \cdots k_p} = B_1^{l_1 \cdots l_q}$, $L_{k_1 \cdots k_p}$, $L'_{l_1 \cdots l_q}$ *et le vecteur* T *du groupe* (1) *il y a les relations* (6):

$$\begin{cases} L'_{l_1 \cdots l_q} = L_{k_1 \cdots k_p} \oplus T & \text{pour } L \neq T, \\ L_{k_1 \cdots k_p} = L'_{l_1 \cdots l_q} \oplus T & \text{pour } L' \neq T, \\ L_{k_1 \cdots k_p} = L'_{l_1 \cdots l_q} & \text{pour } L = T, \\ T = L'_{l_1 \cdots l_q} \oplus L_{k_1 \cdots k_p} & \text{pour } L \neq L', \\ T = L'_{l_1 \cdots l_q} = L_{k_1 \cdots k_p} & \text{pour } L = L'. \end{cases} \tag{6}$$

On a désigné par $\oplus$ l'operation *ou-exclusif*. En étant donnés deux vecteurs $V_1 = [\ldots v_{i_1} \ldots]$ et $V_2 = [\ldots v_{i_2} \ldots]$ on écrira $V_1 \oplus V_2 = [\ldots v_{i_1} \oplus v_{i_2} \ldots]$.

2. Considérations concernant le nombre de diodes nécessaires pour la matérialisation du groupe (1)

Dans l'article [2] les auteurs ont déduit une relation qui permet l'évaluation du nombre de diodes nécessaires pour la matérialisation d'un groupe de fonctions logiques quadratiques. On a désigné par $P(Q) = \sum_i \sum_j f_{ij}$ le poids de la matrice $Q = (f_{ij})$.

Le nombre de diodes nécessaires [2] est :

$$N_D = 3\sum_{j=1}^{N}\sum_{E} P_{k_1 \dots k_j} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{E} (j x_{k_1 \dots k_j} - y_{k_1 \dots k_j}), \tag{7}$$

où $E = \{1, 2, \dots, N\}$, $P_{k_1 \dots k_j}$ étant le poids de la matrice $B^{k_1 \dots k_j}$ et

$$\begin{aligned} x_{k_1 \dots k_j} &= 1 \quad \text{si} \quad P_{k_1 \dots k_j} \neq 0, \\ x_{k_1 \dots k_j} &= 0 \quad \text{si} \quad P_{k_1 \dots k_j} = 0, \\ y_{k_1 \dots k_j} &= 1 \quad \text{si} \quad P_{k_1 \dots k_j} = 1, \\ y_{k_1 \dots k_j} &= 0 \quad \text{si} \quad P_{k_1 \dots k_j} \neq 1, \\ x_{k_i} &= y_{k_i} = 0 \text{ pour tous } k_i \in E. \end{aligned}$$

L'économie de diodes sera appréciée par la différence $\Delta N = N_D - N'_D$ (N_D—le nombre de diodes dans le cas de la synthèse directe des fonctions logiques quadratiques, N'_D — dans la synthèse du groupe (1)).

On peut écrire $P_{k_1 \dots k_p} = P'_{l_1 \dots l_q}$ (théoreme 2) mais en général $P_{k_1 \dots k_r} \neq P'_{k_1 \dots k_r}$, où $P_{k_1 \dots k_p} = P(B^{k_1 \dots k_p})$, $P'_{l_1 \dots l_q} = P(B^{l_1 \dots l_q}_1)$.

En utilisant les dernières rélations on déduit l'expression de ΔN :

$$\begin{cases} \Delta N = 3[P_{k_1 \dots k_r} - P'_{k_1 \dots k_r}] + \sum_{j=1}^{N}\sum_{E} j\,(x_{k_1 \dots k_j} - x'_{k_1 \dots k_j}) - \\ \qquad - \sum_{j=1}^{N}\sum_{E} (y_{k_1 \dots k_j} - y'_{k_1 \dots k_j}), \\ P'_{k_1 \dots k_r} = P[\prod_{1}^{N} \bar{Q}^j]. \end{cases} \tag{8}$$

Le premier et le deuxième terme de la rélation (8) sont prépondérants par rapport au dernier. Donc on obtiendra une bonne solution si $\Delta N > 0$, ou si

$$P_{k_1 \dots k_r} - P'_{k_1 \dots k_r} \geqslant 0, \quad x_{k_1 \dots k_p} - x'_{k_1 \dots k_p} \geqslant 0. \tag{9}$$

3. Exemple

Soit à synthétiser le groupe de fonctions F^1, F^2, F^3 qui ont les matrices correspondantes :

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,0 \end{bmatrix}, \quad Q^2 = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,0\,1 \end{bmatrix}, \quad Q^3 = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,1\,1 \end{bmatrix}.$$

En calculant les matrices correspondantes aux fonctions communes selon l'algorithme établi en [2] on obtient :

$$B^{123} = [0],\quad B^{12} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&0 \end{bmatrix},\quad B^{13} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix},\quad B^{23} = \begin{bmatrix} 0&1&1&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$B^{1} = [0],\quad B^{2} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix},\quad B^{3} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Les poids respectifs sont: $P_{123} = 0$, $P_{12} = 4$, $P_{13} = 2$, $P_{23} = 4$, $P_1 = 0$, $P_2 = P_3 = 1$, $P[\bar{Q}_1 \cdot \bar{Q}_2 \cdot \bar{Q}_3] = 0$.

Conformément aux relations (7): $x_{123} = y_{123} = 0$, $x_{12} = 1$, $y_{12} = 0$, $x_{13} = 1$, $y_{13} = 0$, $x_{23} = 1$, $y_{23} = 0$ $x_i = y_i = 0$.

Le nombre de diodes nécessaires dans ce cas est $N_D = 42$.

Pour faciliter l'application de la méthode on utilisera une représentation graphique du groupe donné telle que sur une ordonnée on représente les matrices des fonctions communes aux fonctions F_k par des points numérotés dans la même façon, en indiquant aussi la valeur du poids respectif.

Sur une ordonnée parallèle avec la première on indique de la même manière les matrices correspondantes au groupe 1. En vertu des rélations (6) on représente la correspondance des matrices par flèches entre les points respectifs. La flèche interrompue indique la correspondance qui impose le vecteur T.

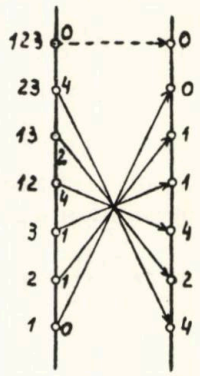


Fig. 1. — Répresentation graphique du cas 1.

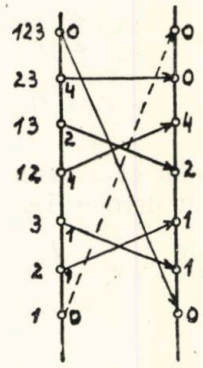


Fig. 2. — Répresentation graphique du cas 2.

Cas 1 (fig. 1). $L_{123} = L'_{123} = [1\,1\,1]$, donc $T = [1\,1\,1]$, $L_1 \oplus T = [1\,0\,0] \oplus [1\,1\,1] = [0\,1\,1] = L'_{23}$, $L_{23} \oplus T = L'_1$.

On déduit: $L_2 \oplus T = L'_{13}$, $L_3 \oplus T = L'_{12}$, $x'_{123} = y'_{123} = 0$, $x'_{23} = y'_{23} = 0$, $x'_{12} = x'_{13} = y'_{12} = y'_{13} = 1$.

On calcule le nombre de diodes nécessaires

$$N_1' = N_D - \Delta N = 38.$$

Cas 2 (fig. 2). Puisque $P[\prod \bar{Q}^i] = 0$, il y a la possibilité de multiplier le nombre de matrices avec le poids nul. Dans cette situation on peut avoir normalement P'_{13} ou P'_{23} nuls, mais aussi P'_{123} nul :

$$L_1 = [1\,0\,0],\ L'_{123} = [1\,1\,1],\ T = L_1 \oplus L'_{123} = [0\,1\,1];$$

$$x'_{23} = 0,\ x'_{123} = 0,\quad y'_{123} = y'_{23} = y'_1 = y'_2 = y'_3 = 0,\quad x'_{13} = x'_{12} = 1.$$

Donc $\Delta N = 14$, $N_2' = N_D - \Delta N = 28$.

Tous les autres groupes de fonctions (1), sauf ceux qui correspondent aux cas 1 et 2, imposent $P'_{123} \neq 0$. Dans cet exemple la solution optimum est obtenue dans le cas 2 (il faut synthétiser les fonctions F^1, $\bar{F}^2$, $\bar{F}^3$). Les matrices correspondantes seront :

$$Q^{1,1} = Q^1 = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,0 \end{bmatrix},\ Q^{1,2} = \bar{Q}^2 = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \end{bmatrix},\ Q^{1,3} = \bar{Q}^3 = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \end{bmatrix}.$$

4. Conclusions

1° On présente une méthode qui, en utilisant les fonctions complémentaires, permet à réaliser une économie de diodes.

2° Les théorèmes 1 et 2 permettent à obtenir des conclusions intéressantes concernant le gain de diodes.

3° L'algorithme exposé peut être programmé sur une machine à calcul.

Reçue le 15 IX 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Électrotechnique
et Mesures Électriques

BIBLIOGRAPHIE

1. Valachi A., Lecocq H., *Considérations sur la synthèse des fonctions logiques quadratiques.* Revue A, 1969, **XI**, *2*.
2. — *Synthèse simultanée des fonctions logiques quadratiques.* Revue A, 1969, **XI**, *4*.
3. Lecocq H., Valachi A., *Synthèse simultanée d'un ensemble de fonction logiques quadratiques.* Colloque International, Systèmes Logiques, Bruxelles, septembre 1969.
4. Valachi A., *Méthode pratique de synthèse simultanée des fonctions logiques quadratiques.* Bul. Inst. polit. Iași, 1969, **XV (XIX)**, *1–2*, s. III, pp. 155–159.

UTILIZAREA FUNCŢIILOR COMPLEMENTARE ÎN SINTEZA SIMULTANĂ A FUNCŢIILOR LOGICE PĂTRATICE

(Rezumat)

Se prezintă o metodă originală ce permite utilizarea funcţiilor complementare în sinteza funcţiilor logice pătratice.

Se poate obţine, printr-un algoritm simplu, o soluţie mai bună decît în cazul sintezei directe a funcţiilor date (soluţia mai bună este cea cu consum redus de material).

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Reprezentarea grafică a cazului 1.
Fig. 2. — Reprezentarea grafică a cazului 2.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C . D. 621.374.

NOUVEAU PRINCIPE DE CONSTRUCTION D'UN GÉNÉRATEUR D'IMPULSIONS A SÉQUENCE PROGRAMMABLE POUR L'ÉTUDE DES FERRITES CHR

PAR

D. D. SANDU et D. SIMOVICI

1. Introduction

Les installations automatiques et les calculateurs électroniques utilisent sur une largeéchelle les ferrites à cycle d'hystérésis rectangulaire (CHR). Pour l'élaboration et le calcul des schémas à ferrites CHR sont nécessaires certaines valeurs des paramètres des impulsions [1], [2], [5]...[7] à savoir : temps de commutation τ_c, constante de commutation S_w, signal de réponse utile non perturbé uV_1, signal de réponse utile perturbé dV_1, signal de réponse parasite non perturbé uV_0, signal de réponse parasite perturbé dV_0, etc.

Dans ce travail on présente un générateur de séquences d'impulsions qui sert pour la mesure précise des paramètres ci-dessus, ainsi que pour la sélection des ferrites à paramètres homogènes.

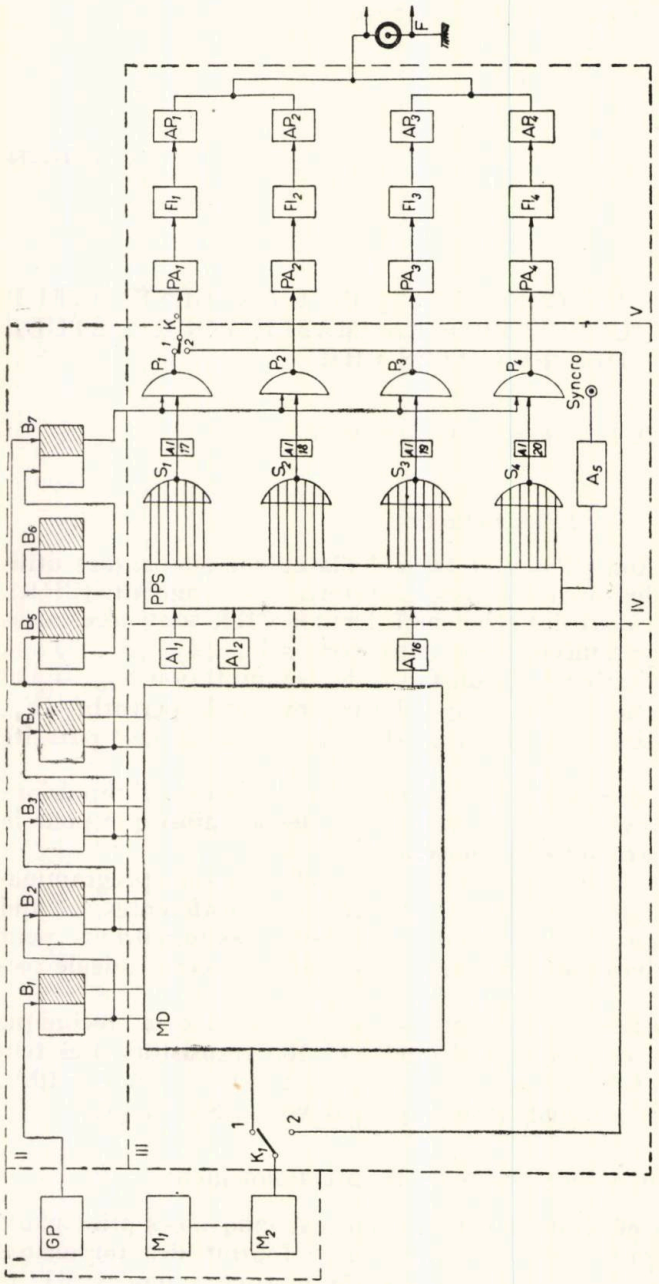
Les séquences d'impulsions, contenant 16 impulsions, sont programmables, en existant la possibilité de former 4^{16} séquences différentes, ce qui satisfait toutes les nécessités pratiques. L'intensité des impulsions peut atteindre 4 A tout en gardant une forme très proche de celle „idéale rectangulaire".

L'appareil est entièrement transistorisé et réalisé par la technique des „circuits imprimés", contenant 146 diodes et 103 transistors. Les tensions d'allimentations ont les valeurs : -35 V, -10 V, -6 V, $+6$ V, $+10$ V, $+35$ V ; toutes les tensions sont stabilisées par voie électronique.

2. Le schéma bloc. Principe de fonctionnement

Le schéma-bloc du générateur (fig. 1) contient cinq blocs principaux.

1. *Générateur d'impulsions periodiques GIP*, fournit des impulsions pour commander le compteur binaire CB et la matrice à diodes MD et



I. GIP - générateur d'impulsions
II. GB - compteur binaire
III. MD - matrice à diodes
IV. BPS - bloc de programmation des séquences
V. BFAI - bloc formateur et amplificateur d'impulsions

1. GP - générateur pilote
2. M_1 - monostable retardateur
3. M_2 - monostable formateur
4. CB - compteur binaire
5. B_1 ... B_7 - bistables
6. MD - matrice à diodes
7. AI_1 ... AI_{20} - amplificateur inverseur
8. S_1 ... S_4 - circuit logique OU
9. P_1 ... P_4 - circuit logique ET
10. A_5 - amplificateur synchronisation
11. PA_1 ... PA_4 - préamplificateur
12. FI_1 ... FI_4 - formateur d'impulsion
13. AP_1 ... AP_4 - amplificateur de puissnce
14. F - ferrite

Fig. 1

contient: le générateur pilote GP, constitué par un multivibrateur à 50 kHz et deux étages à collecteur commun; le monostable M_1, qui retarde les impulsions avec 2 μs; le monostable M_2 qui forme des impulsions de 3 μs pour commander la matrice MD.

2. *Compteur binaire CB*, formé par 7 bistables, dont les premiers six fonctionnent en régime de comptage, le septième étant commandé par des impulsions séparées. Les bistables B_1 ... B_4 fournissent les tensions pour la „commande de niveau" de la matrice MD, tandis qu'à l'aide des bistables B_5 ... B_7 on obtient la tension pour la commande de niveau des circuits logiques ET, P_1 ... P_4.

3. *Matrice à diodes MD*, représente des circuits logiques „et" à trois niveaux et délivre à ses 16 sorties des impulsions de tensions avec la durée de 3 μs, retardées l'une par rapport à la précédente, avec 20 μs. Par conséquent la matrice à diodes MD est un distributeur d'impulsions; les dernières s'appliquent à l'entrée du bloc de programmation des séquences BPS par l'intermède des étages amplificateurs-inverseurs AI_1 ... AI_{16}.

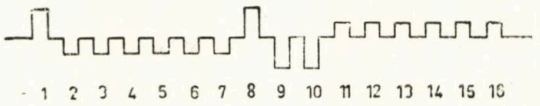


Fig. 2

4. *Bloc de programmation des séquences BPS*, contient le panneau de programmation des séquences PPS, les circuits logiques „ou" S_1 ... S_4 et les circuits logiques „et" P_1 ... P_4, séparés par les étages amplificateurs inverseurs AI_{17} ... AI_{20}. À l'aide du BPS et du bistable B_7 on réalise différentes séquences qui peuvent-être solicitées (au total 4^{16} séquences différentes).

Un exemple de séquence est indiqué dans la fig. 2. Une ferrite soumise à cette séquence fournit les principaux signals, importants pour l'étude et la sélection des ferrites: la 1-ère impulsion donne dV_1, la 8-ème impulsion donne dV_0, la 9-ème impulsion donne uV_1, la 10-ème impulsion donne uV_0.

En plaçant les commutateurs K_1 et K_2 dans les positions 2, l'appareil fournit à la sortie des impulsions périodiques ayant la fréquence de 50 kHz.

5. *Bloc formateur et amplificateur d'impulsions BFAI*, contient 4 chaînes séparées. Chacune est formée par un étage préamplificateur PA, un étage formateur d'impulsions FI et un amplificateur de courant de puissance AP qui peut fournir des impulsions ayant l'intensité de 2 A. Les premières deux chaînes amplifient les impulsions positives de la séquence tandis que les dernières deux amplifient les impulsions négatives.

Toutes les impulsions de la séquence défilent sur un seul fil traversant la ferrite.

Le bloc contient encore un amplificateur pour les impulsions de synchronisation.

3. Description de quelques schémas importants

Dans ce paragraphe on présente les schémas de principe de quelques unités principaux.

1. *Générateur pilote GP.* Il est constitué par un multivibrateur à démarage sûr suivi d'un étage collecteur commun (fig. 3). Bien que la forme des impulsions fournies par le multivibrateur est inférieure à celle des impulsions d'un multivibrateur classique, le démarage sûr constitue une qualité fondamentale de l'appareil décrit. Les signaux obtenus à la sortie de l'étage à collecteur commun — point T — sont appliqués à l'entrée du compteur binaire.

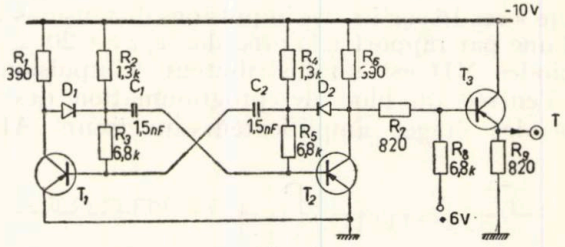


Fig. 3

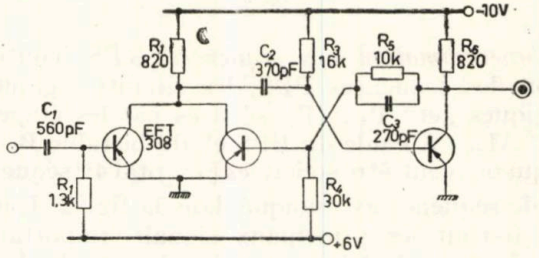


Fig. 4

2. *Monostable* M_1. Le schéma est représenté dans la fig. 4 et contient un transistor supplémentaire T_1 par rapport au schéma clasique ; ce transistor sert pour le déclanchement sûr du monostable [2], [4]. Les impulsions de déclanchement de polarité négative sont obtenues par la différentiation des impulsions fournies par le multivibrateur.

3. *Bistable* B_1. Étant donné que le bistable foctionne en régime de comptage, les impulsions de déclanchement sont appliquées à l'aide de deux circuits de différentiation $C_1R_1D_1$, $C_2R_2D_2$ (fig. 5), les diodes faisant passer les sauts positifs seulement, qui bloquent la transistors en état de conduction. Les impulsions de sortie du bistable s'appliquent à l'entrée de la matrice à diodes MD par l'intermède des étages à collecteur commun, similaires à celui représenté dans la fig. 3.

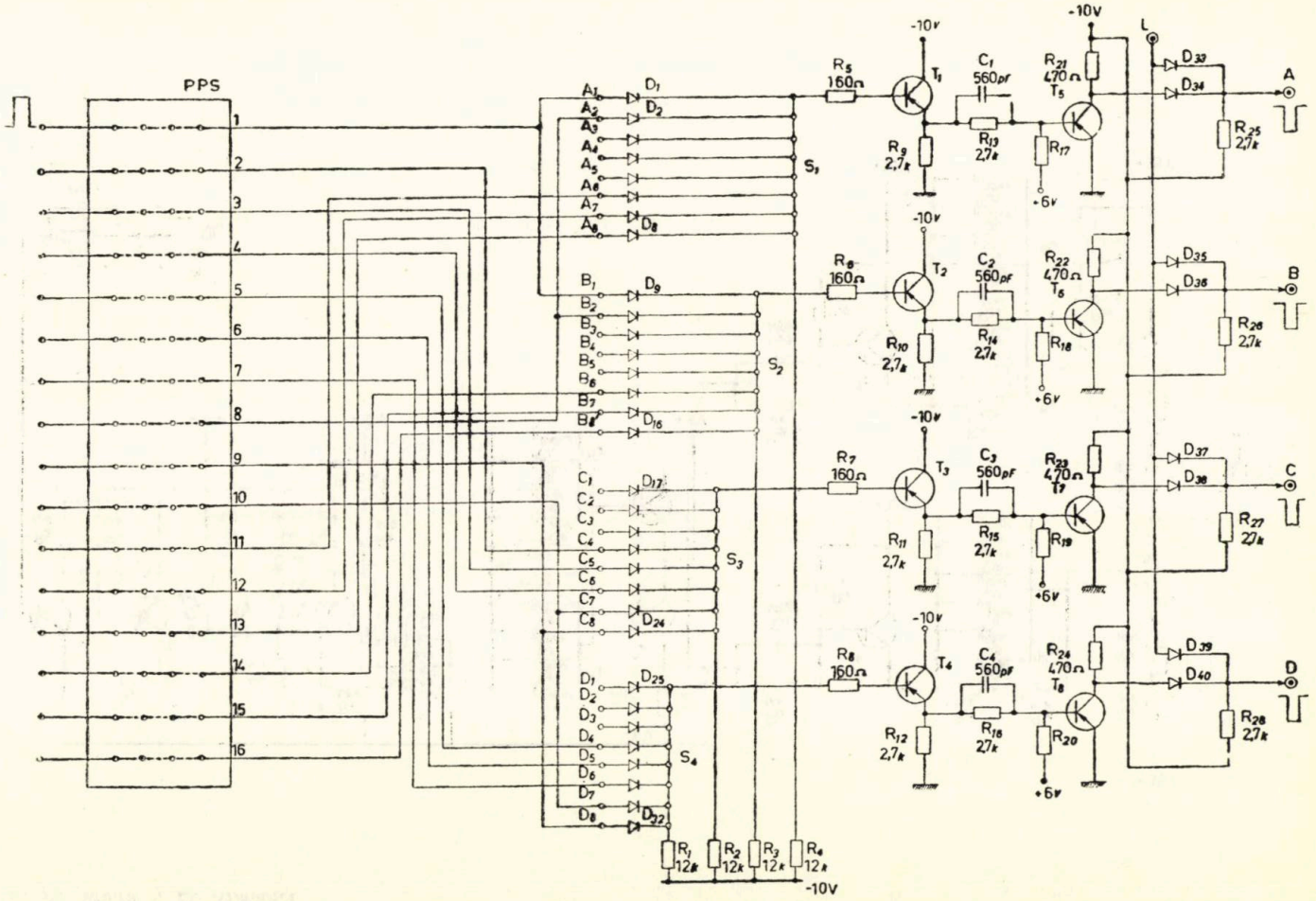

PPS
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8
D1 D2 D8
S1
B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8
D9 D16
S2
C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8
D17 D24
S3
D1 D2 D3 D4 D5 D6 D7 D8
D25 D32
S4
R1 12k
R2 12k
R3 12k
R4 12k
-10V
R5 160Ω
R6 160Ω
R7 160Ω
R8 160Ω
T1
T2
T3
T4
C1 560pF
C2 560pF
C3 560pF
C4 560pF
R9 2,7k
R10 2,7k
R11 2,7k
R12 2,7k
R13 2,7k
R14 2,7k
R15 2,7k
R16 2,7k
R17
R18
R19
R20
R21 470Ω
R22 470Ω
R23 470Ω
R24 470Ω
T5
T6
T7
T8
+6V
L
D33 D34
D35 D36
D37 D38
D39 D40
A
B
C
D
R25 2,7k
R26 2,7k
R27 2,7k
R28 2,7k

Fig. 6

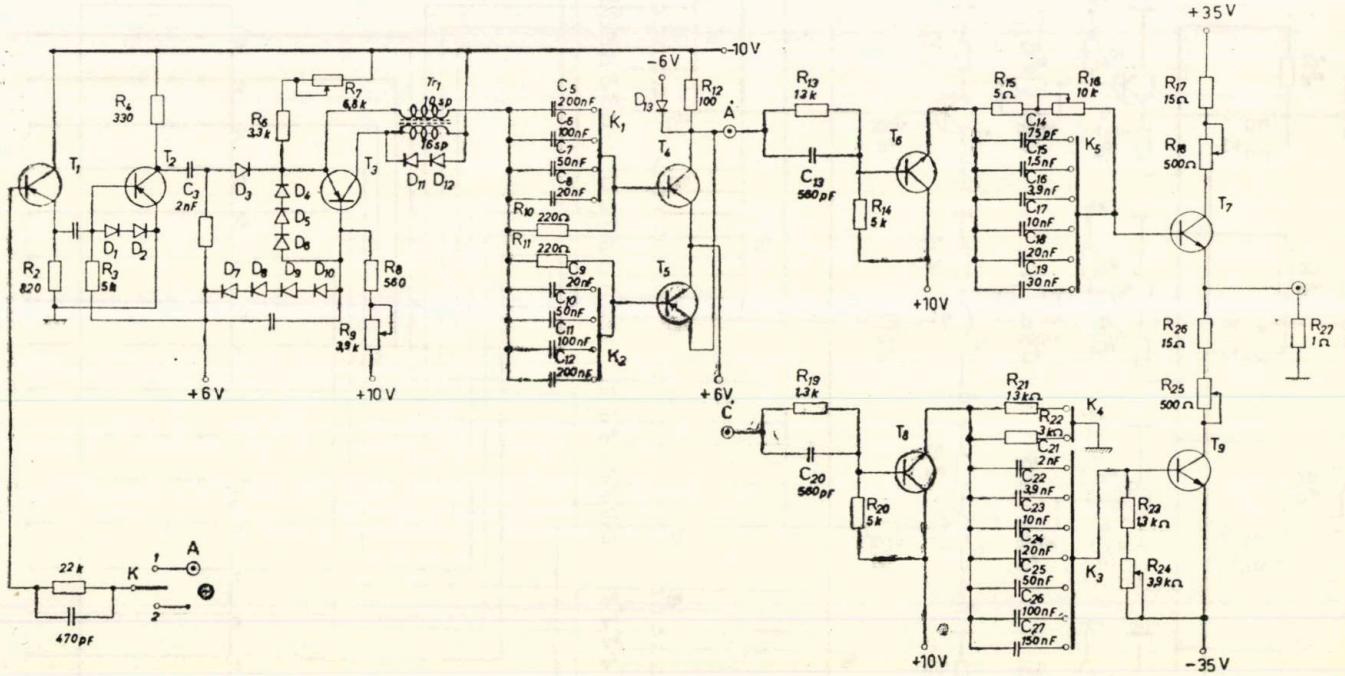

+35 V
-10 V
-6 V
+6 V
+10 V
-35 V
A
K
22 k
470 pF
T1
T2
T3
T4
T5
T6
T7
T8
T9
R2 820
R3 5k
R4 330
R6 3,3 k
R7 6,8 k
R8 560
R9 3,9 k
R10 220Ω
R11 220Ω
R12 100
R13 1,3 k
R14 5 k
R15 5Ω
R16 10 k
R17 15Ω
R18 500Ω
R19 1,3 k
R20 5 k
R21 1,3 kΩ
R22 3 kΩ
R23 1,3 kΩ
R24 3,9 kΩ
R25 500 Ω
R26 15Ω
R27 1Ω
C3 2nF
C5 200nF
C6 100nF
C7 50nF
C8 20nF
C9 20nF
C10 50nF
C11 100nF
C12 200nF
C13 560pF
C14 75pF
C15 1,5nF
C16 3,9nF
C17 10nF
C18 20nF
C19 30nF
C20 560pF
C21 2nF
C22 3,9nF
C23 10nF
C24 20nF
C25 50nF
C26 100nF
C27 150nF
D1 D2 D3 D4 D5 D6 D7 D8 D9 D10 D11 D12 D13
Tr1 10 sp 16 sp
K1 K2 K3 K4 K5

Fig. 7

4. *Bloc de programmation des séquences BPS.* Ce bloc est représenté en détail dans la fig. 6, étant formé par le panneau de programmation des séquences BPS et quatre chaînes identiques, chacune contenant un circuit logique ,,ou" à 8 entrées, un étage à collecteur commun, un étage inverseur et un circuit logique ,,et" à deux entrées.

La séquence est formée par l'interconnection adéquate des câbles mobiles entre les circuits logiques ,,ou" et PPS ; les connections de la fig. 6 correspondent à la séquence représentée dans la fig. 2 ; la première impulsions est obtenue par la superposition des impulsions amplifiées par les chaînes *A* et *B*, etc.

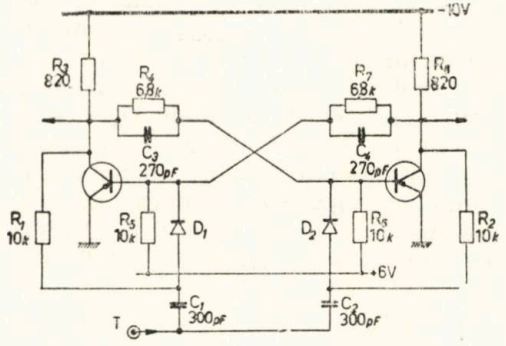


Fig. 5

Dans le point *L* actionnent les signaux fournis par le bistable B_7, qui est commandé séparément à deux entrées par la 16-ème et la 64-ème impulsion. Donc, le circuit ,,et" fait passer les premières 16 impulsions puis se verouille jusqu'à la 64-ème impulsion, de telle façon que la durée de la séquence représente 1/4 de sa période de récurrence. À l'intérieur de la séquence, les impulsions ont la période de récurrence de 20 μs, la durée totale de la séquence est de 320 μs, tandis que sa période est de 1 280 μs. Il est évident que les circuits ,,et" laissent passer les impulsions si au point *L* il y a un potentiel négatif.

Les nombreuses possibilités de changer la séquence, offertes par le bloc, par la simple interconnection des câbles mobiles — étant donné que les impulsions peuvent être positives ou négatives, entières ou à moitié ; on peut former 4^{16} séquences différentes — représente un avantage essentiel du générateur réalisé. Les transistors utilisées dans les schémas indiqués dans les fig. 3...6 sont du type EFT-308 (SFT-308).

5. *Bloc formateur et amplificateur d'impulsions BFAI.* Ce bloc est formé par 4 chaînes, deux à deux identiques (*A* et *B*, *C* et *D*). Dans la fig. 7 on montre la chaîne *A* et la partie de la chaîne *C* qui diffère de *A*. Nous allons donner une déscription plus détaillée de la chaîne *A*, qui contient trois éléments distincts : le préamplificateur (T_1, T_2), le formateur d'impulsions (T_3, T_4, T_5) et l'amplificateur de courant (T_6, T_7).

Le préamplificateur, formé par un étage à collecteur commun et un étage inverseur, fournit des impulsions de puissance suffisante pour déclancher le transistor T_3 en montage à base commune.

Pour former des impulsions à flancs, antérieur et postérieur, très courts, on utilise le montage spécial [8], [9], constitué par un générateur autobloqué en montage à base commune (T_3), suivi par un étage inverseur à deux transistors T_4, T_5. C'est l'évacuation rapide de la charge emmagasinée dans les bases de T_4, T_5 qui représente la particularité de ce montage de sorte que le flanc postérieur devient très court.

La durée des impulsions est comprise entre 1,5 et 8 μs et peut être variée à l'aide des condensateurs introduits dans les bases de T_4, T_5.

Au repos, le transistor T_3 est bloqué étant donné que sa base a un potentiel positif, plus haut que celui de son émetteur. Les impulsions positives de déclanchement sont appliquées sur l'émetteur par l'intermède du circuit de différentiation C_3R_5 et de la diode D_3. Les impulsions positives obtenues au point A' ont les flancs antérieurs trsè courts, moins de 15 ns, ce qui représente un avantage par rapport au monostable équipé avec les mêmes transistors, dont les impulsions ont les durées des flancs de 120... ...150 ns. Les transistors T_1, T_2 sont du type EFT-308 (SFT-308), les transistors T_3, T_4, T_5 sont du type EFT-317 (SFT-317).

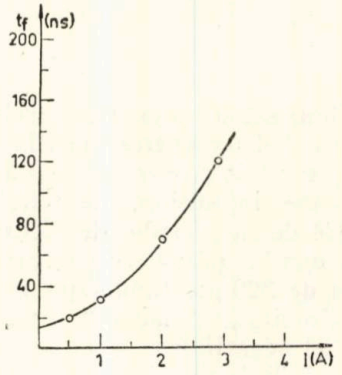


Fig. 8

L'amplificateur de courant, de puissance, est réalisé à l'aide d'un montage spécial à collecteur commun [2], [4], [10], équipé avec les transistors BSY-58 et PT-601.

La saturation du transistor final T_7 (PT-601) est assurée en actionnant sur la résistance variable R_{16}.

L'amplitude de l'impulsion entière peut atteindre 4 A, tandis que l'intensité minimum de l'impulsion est de 0,05 A. La durée du front (flanc) antérieur varie avec l'intensité de l'impulsion, étant comprise entre 15 et 200 ns comme on peut le voir sur la fig. 8. À l'aide des condensateurs

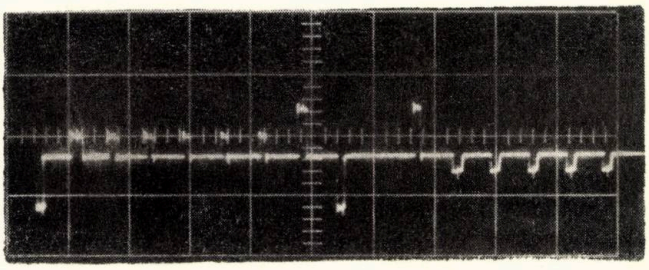


Fig. 9 *a*

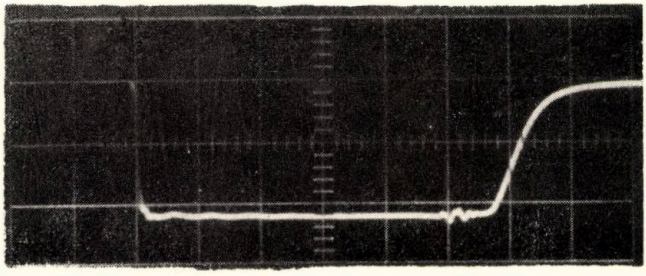


Fig. 9 *b*

introduits dans les bases des transistors finaux on peut corriger, dans certaines limites, les flancs antérieurs.

L'intensité des impulsions de sortie peut être variée de façon continue dans les limites indiquées, tandis que dans la majorité des générateurs d'impulsions de puissance l'intensité est variée de façon discontinue.

Dans les circuits finaux on a evité l'utilisation du transformateur d'impulsions qui, pour des grandes intensités, produit des distorsions importantes de la forme du signal.

La fig. 9 indique l'oscillogramme d'une séquence d'impulsions — en haut — et la forme détaillée d'une impulsion de sortie — en bas (horizontal — 0,5 μs/div, vertical — 500 mA/div).

À l'aide des différentes séque ces, fournies par le générateur, on peut déterminer avec une grande précision tous les paramètres en impulsions des ferrites qui sont nécessaires pour le calcul des mémoires et des différents circuits à ferrites CHR [1]...[7].

4. Conclusions

1. On présente un générateur de séquences d'impulsions pour l'étude et la sélection des férrites CHR. La séquence, contenant 16 impulsions, a la durée de 230 μs et la période de réccurence de 1 280 μs. La fréquence des impulsions de la séquence est de 50 kHz.

2. On propose un nouveau principe pour l'élaboration des séquences d'impulsions dans les générateurs de sélection des ferrites, basé sur l'utilisation des techniques binaires.

3. Les séquences d'impulsions sont programmables, en existant la possibilité de former 4^{16} séquences différentes, qui, en principe, satisfont toutes les nécessités imposées par la pratique.

Reçue le 13 VI 1969

Université „Al. I. Cuza", Jassy

BIBLIOGRAPHIE

1. Meyerhoff A. J., *Digital Applications of Magnetic Devices.* John Wiley a. Sons, N. Y.—London, 1960.
2. Sandu D., *Mémoire rapide à ferrites avec sélection par mot à deux noyaux par bit.* Thèses, Toulouse, 1963.
3. — *Mémoire rapide avec sélection par mot à deux noyaux par bit.* C.r. du troisième Congrès AFCALTI, Toulouse, 1963 pp. 363—371.
4. — *Generator de impulsuri cu transistori pentru studiul feritelor de comutare.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, Secţ. I*b*, Fizică, 1965, **XI**, pp. 151—154.
5. — *Comportarea în impulsuri a inelelor de ferită cu ciclul histerezis „rectangular".* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, Secţ. I*b*, Fizică, 1964, **X**, pp. 57—66.
6 — *Metodă de calcul a memoriei cu ferite bazată pe circuitul echivalent în timpul comutării.* Automatica şi Electronica, 1964, *5*, pp. 205—211.
7 — *O metodă grafico-analitică de studiu a circuitelor cu ferite.* St. şi cerc. de Fizică, Acad. R.P.R., Bucureşti, 1965, **17**, *4*, pp. 331—357.

8. Sandu D., *Contribution à l'étude expérimentale des circuits impulsionnels à transistors complémentaires*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3—4*, pp. 351—359.
9. Hamilton D. J., *A Transistor Pulse Generator for Digital Systems*. IRE Tr. Ec., sept. 1958, **EC—7**.
10. Hunter L., *Handbook of Semiconductor Electronics*. Mc Graw-Hill Book Comp., Inc., N.Y., 1962.

PRINCIPIU NOU DE CONSTRUCŢIE A UNUI GENERATOR DE IMPULSURI CU SECVENŢĂ PROGRAMABILĂ PENTRU STUDIUL FERITELOR CHD

(Rezumat)

Se descrie un generator de secvenţe de impulsuri pentru studiul şi selectarea feritelor cu ciclul histerezis dreptunghiular (CHD). Fiecare secvenţă conţine 16 impulsuri, are durata de 320 μs şi perioada de recurenţă de 1 280 μs. În cadrul unei secvenţe impulsurile au perioada de 20 μs.

Pentru formarea secvenţelor se propune un nou principiu care se bazează pe folosirea tehnicilor cifrice.

Secvenţele de impulsuri sînt programabile, existînd posibilitatea de a se forma 4^{16} secvenţe diferite care, în principiu, satisfac toate cerinţele impuse de practică.

În schemele de formare şi amplificare a impulsurilor finale de curent au fost propuse unele modificări care au permis obţinerea unor impulsuri de intensităţi foarte mari (50 mA ... ...4 A) cu fronturi anterioare mici (15...200 ns).

Generatorul realizat permite măsurarea precisă a tuturor parametrilor în impulsuri ai feritelor CHD, precum şi selectarea manuală a acestor ferite după criterii date.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. D. 681.3 ; 621.318.4

SUR LE FONCTIONNEMENT DU PARAMÉTRON SUR LE III-ème SOUS-HARMONIQUE

PAR

GH. CÎRŢINĂ

1. Les oscillations paramétriques sous-harmoniques représentent un domaine relativement nouveau d'investigation. Le nombre des travaux concernant cette question est assez réduit [5] ... [8]. Ce sont des ouvrages récents et, sans doute, à cause de l'importance et des possibilités d'application, ce chapitre concentrera de plus en plus l'attention des chercheurs. On apprécie [6] qu'à l'heure actuelle le paramétron inductif est moins étudié que celui capacitif. Il n'y a même pas une théorie unitaire adéquate concernant le paramétron inductif fonctionnant sur les III-ème et IV-ème sous-harmoniques ; il reste donc encore à faire beaucoup d'observations à ce propos.

On emploie pour l'étude du générateur paramétrique le schéma inductif à un seul circuit. En approximant la courbe d'aimantation par un polynôme de la forme

$$wi = a_1\varphi + a_3\varphi^3 + a_7\varphi^7,$$

on déduit l'équation de circuit, on indique théoriquement et on vérifie par voie expérimentale les limites d'instabilité de la solution. On cherche la solution par la méthode K r y l o f f-B o g o l i o u b o f f [9] à l'aide de la quelle on montre la possibilité de paraître six oscillations déphasées à $2\pi/6$ — fait confirmé par les résultats expérimentaux.

Cette dernière conclusion n'est pas mentionnée par aucun ouvrage qui s'occupe de l'étude des oscillations paramétriques sous-harmoniques.

Compte tenu des avantages présentées par le paramétron fonctionnant sur le III-ème sous-harmonique, on va étudier ci-dessus quelques aspects concernant son comportement.

2. Considérons le circuit de la fig. 1. En approximant la caractéristique d'aimantation du noyau par :

$$\sum wi = a_1\Phi + a_3\Phi^3 + a_7\Phi^7 \tag{1}$$

et en posant $i = I_n u$, $\varphi = \Phi_n v$, où I_n et Φ_n sont considérées comme grandeurs de base pour le courant et le flux, (1) devient :

$$(2) \qquad u = \frac{1}{wI_n}(a_1\Phi_n v + a_3\Phi_n^3 v^3 + a_7\Phi_n^7 v^7) = K_1 v + K_3 v^3 + K_7 v^7.$$

Pour des raisons de commodité, on peut prendre [1] $w\Phi_n\omega^2 C = I_n$, $K_1 + K_3 + K_7 = 1$. Dans notre cas, avec deux noyaux identiques en permalloy ayant $S = 1$ cm^2, $w_1 = 300$ spires et $w_2 = 1000$ spires, on a trouvé $K_1 = 5{,}2$, $K_3 = -12{,}15$, $K_7 = 7{,}9$.

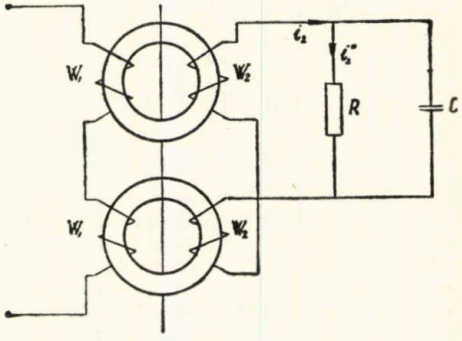


Fig. 1

On peut écrire pour le circuit de la fig. 1 :

$$(3) \qquad \begin{cases} w_1\left(\dfrac{d\Phi_1}{dt} + \dfrac{d\Phi_2}{dt}\right) = U_m \cos 3\omega t, \\ w_2\left(\dfrac{d\Phi_1}{dt} - \dfrac{d\Phi_2}{dt}\right) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int (i_2 - i_2'')\, dt = 0, \\ w_2\left(\dfrac{d\Phi_1}{dt} - \dfrac{d\Phi_2}{dt}\right) + Ri_2'' = 0, \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} w_0 i_0 + w_1 i_1 + w_2 i_2 = K_1\Phi_1 + K_3\Phi_1^3 + K_7\Phi_1^7, \\ w_0 i_0 + w_1 i_1 - w_2 i_2 = K_1\Phi_2 + K_3\Phi_2^3 + K_7\Phi_2^7, \end{cases}$$

respectivement pour le premier et le second noyau.

À partir du système (3) et des relations (4) on peut arriver à :

$$(5)\quad \begin{cases} (\Phi_1 + \Phi_2) = \Phi_{10} + \Phi_{20} + \dfrac{U_m}{3w_1\omega}\sin 3\omega t = 2\Phi_0 + \Phi_m \sin 3\omega t, \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(\Phi_1 - \Phi_2) + \dfrac{1}{RC}\cdot\dfrac{d}{dt}(\Phi_1 - \Phi_2) + \dfrac{1}{2Cw_2^2}[K_1(\Phi_1 - \Phi_2) + \\ + K_3(\Phi_1^3 - \Phi_2^3) + K_7(\Phi_1^7 - \Phi_2^7)] = 0, \end{cases}$$

où Φ_{10}, Φ_{20} sont des composantes constantes. On peut montrer [5] que Φ_{10}, $\Phi_{20} \neq 0$ quand $i_0 w_0 = 0$. Le cas $i_0 w_0 = 0$ présentant un intérêt particulier [7], [8], nous l'étudierons par la suite.

La grandeur de la composante continue du flux dépend des composantes variables $(3\omega, \omega)$. Après quelques transformations successives et à l'aide des notations $y = \Phi_1 - \Phi_2$, $\beta = 2\Phi_0 + \Phi_m \sin 3\omega t$, (5_2) devient :

$$(6)\quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{RC}\cdot\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2Cw_2^2}\left[\left(K_1 + \frac{3K_3}{4}\beta^2 + \frac{7K_7}{64}\beta^6\right)y + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{K_3}{4} + \frac{35K_7}{64}\beta^4\right)y^3 + \frac{21K_7}{64}\beta^2 y^5 + \frac{K_7}{64}y^7\right].$$

Par la substitution $z = \omega t$ et pour R suffisamment grand, l'équation (6) peut prendre la forme :

$$(7)\quad \frac{d^2y}{dz^2} + (m - 2q\cos 2z)y = f(z),$$

où

$$(8)\quad m = \frac{K_1 + K_3\Phi_0^2 + K_7\Phi_0^6}{2Cw_2^2\omega^2},\ 2q = \frac{3K_3\Phi_m^2}{16Cw_2^2\omega^2},\ \Phi_m = \frac{U_m}{3w_1\omega}.$$

En première approximation on peut considérer comme solution de (7) celle de l'équation de Mathieu correspondante [2]. La solution complète reste, même dans ce cas, assez compliquée [2] :

$$(9)\quad y = \cos z + qC_1(z) + q^2C_2(z) + q^3C_3(z) + \dots,$$

où $C_1(z)$, $C_2(z)$, ... sont fonctions qu'on peut déterminer par la méthode de la substitution. En supposant q suffisamment petit on peut considérer avec une approximation suffisante $y = y_0 = \cos z$.

Pour déterminer les limites d'instabilité on note $y = y + \zeta$, ζ étant une petite déviation par rapport à la valeur correspondante au régime stable. En substituant dans (7) on a

$$(10)\quad \frac{d^2\zeta}{dz^2} + (m - 2q\cos 2z)\zeta = 0.$$

66 BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI Secția III

Les limites d'instabilité sont [3]:

$$(11)\quad \begin{cases} a_1 \equiv \varepsilon\varepsilon_1(z;\ q) \equiv 1 - q = \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{64}q^3 = \frac{1}{1\,536}q^4 = \frac{11}{36\,864}q^5 + \ldots; \\ b_1 \equiv s\varepsilon_1(z;\ q) \equiv 1 + q = \frac{1}{8}q^2 = \frac{1}{64}q^3 = \frac{1}{1\,536}q^4 + \frac{11}{36\,864}q^5 + \ldots \end{cases}$$

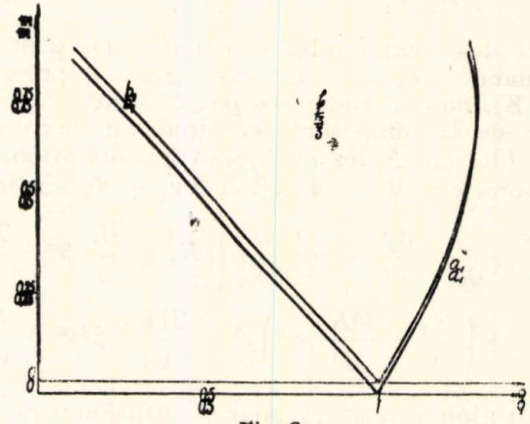


Fig. 2

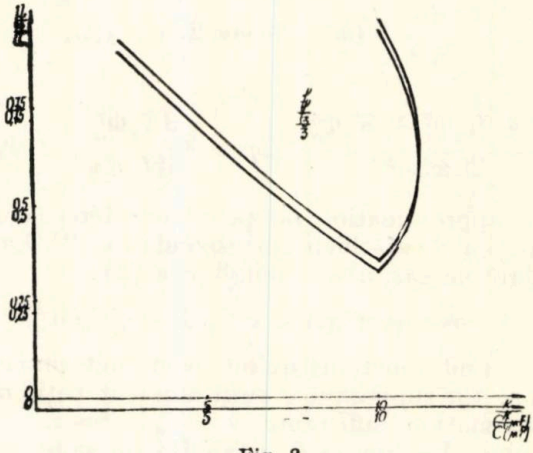


Fig. 3

Dans la fig. 2 on a tracé les limites d'instabilité dans le plan $(m,\ q)$ [2]. Dans la fig. 3 on a tracé par voie expérimentale les mêmes limites dans le plan $(K/C;\ U)$; K étant une constante d'échelle. On re-

marque la grande ressemblance des deux courbes. La différence en est due tout d'abord aux approximations indiquées ci-dessus. Chaque fois que le point de fonctionnement se trouve entre les limites indiquées, dans le circuit existe une oscillation sous-harmonique dont la fréquence est égale à un tiers de la fréquence de variation de l'inductance. L'amplitude de cette oscillation est limitée par les pertes et la non-linéarité du circuit.

3. Si dans l'équation (6) on fait les substitutions:

$$(12)\qquad x=\frac{y}{\Phi_m},\quad \tau=\Omega t,\quad \Omega^2=\frac{K_1+3K_3\Phi_0^2+7K_7\Phi_0^6}{2C\omega_2^2},\quad \Delta=\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2-1,$$

elle peut s'écrire sous la forme [9]:

$$(13)\qquad \frac{d^2x}{d\tau^2}+\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 x=\varepsilon\left[f\left(\frac{\omega\tau}{\Omega},\ x,\ \frac{dx}{d\tau}\right)+\Delta x\right].$$

Selon la méthode Kryloff-Bogoliouboff [9] on peut supposer la solution de cette équation de la forme:

$$(14)\qquad x=a\cos\left(\frac{\omega\tau}{\Omega}+\theta\right)=a\cos\psi,$$

où

$$(15)\qquad \begin{cases}\dfrac{da}{d\tau}=\varepsilon A_1(a,\theta)+\dots,\\[2ex] \dfrac{d\theta}{d\tau}=\varepsilon B_1(a,\theta)+\dots.\end{cases}$$

En tenant compte des relations (14) et (15) on obtient de (13) la relation suivante, qui résulte en égalant les coefficients de ε:

$$(16)\qquad \begin{aligned}&-2\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)\varepsilon A_1\sin\psi-2a\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)\varepsilon B_1\cos\psi=\\ &=2\delta a\frac{\omega}{\Omega}\sin\psi-\varkappa a\cos\psi-\gamma a^3\cos\psi-\mu a^5\cos\psi+\\ &+\varrho a^5\cos(\psi-6\theta)-\nu a^7\cos\psi,\end{aligned}$$

où $\varkappa, \gamma, \mu, \varrho, \nu$ sont fonctions des grandeur $K_1, K_3, K_7, \Phi_0^2, \Phi_m^2$, à savoir:

$$
(17)\quad \begin{cases} \alpha = \Delta + \dfrac{3K_3}{8}\Phi_0^2 + \dfrac{7K_7}{64}(120\,\Phi_0^4\Phi_m^2 + 22{,}5\,\Phi_0^2\Phi_m^4 + 0{,}3\,\Phi_m^6), \\ \gamma = \dfrac{3}{4}\left[\dfrac{K_3}{4} + \dfrac{35}{64}K_7\Phi_0^2(16\Phi_0^4 + 12\Phi_0^2\Phi_m^2 + 0{,}375\Phi_m^4)\right], \\ \mu = \dfrac{105}{512}K_7\Phi_0^4(4\Phi_0^2 + 0{,}5\Phi_m^2), \quad \rho = \dfrac{21}{64^2}K_7\Phi_0^4\Phi_m^2, \\ \nu = \dfrac{35}{64^2}K_7\Phi_0^6, \quad \delta = \dfrac{1}{2RC\Omega}. \end{cases}
$$

Par l'identification des coefficients de sin ψ et cos ψ, (16) conduit à :

$$
(18)\quad \begin{cases} -2\varepsilon A_1 = 2\delta a + \rho a^5 \sin 6\theta, \\ -2a\varepsilon B_1 = -\alpha a - \gamma a^3 - \mu a^5 + \rho a^5 \cos 6\theta - \nu a^7. \end{cases}
$$

On sait que pour que le régime soit stable il faut satisfaire les égalités :

$$
(19)\quad \frac{da}{d\tau} = \varepsilon A_1 = 0, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon B_1 = 0.
$$

Dans cette situation (18) devient :

$$
(20)\quad \begin{cases} 2\delta a + \rho a^5 \sin 6\theta = 0, \\ \alpha a + \gamma a^3 + (\mu - \rho \cos 6\theta)\, a^5 + \nu a^7 = 0. \end{cases}
$$

Le sytème (20) fournit une solution nulle ($a = 0$). Si l'on suppose la résistance du circuit R suffisamment grande, $2\delta = 0$, et de la première équation (20) il résulte que $6\theta = k\pi$, ce qui correspond à l'angle mesuré sur l'oscillogramme.

Dans la deuxième équation (20)

$$
(21)\quad \alpha + \gamma a^2 + (\mu - \rho \cos 6\theta)a^4 + \gamma a^6 = 0,
$$

$\mu - \rho \cos 6\theta > 0$, $\nu > 0$ et $\alpha < 0$, $\gamma < 0$ parce que $K_3 < 0$, $K_7 > 0$ et Φ_0, Φ_m sont petits. Conformément au théorème de Descartes et Harriot [4] l'équation

$$
(22)\quad \alpha + \gamma v + (\mu - \rho \cos 6\theta)v^2 + \nu v^3 = 0
$$

a une seule racine positive, compte tenu que ses coefficients ont une seule variation de signe. Par conséquent l'équation (21) a deux racines égales ayant des signes contraire. La solution de l'équation initiale est donc :

$$x = \pm a \cos\left(\frac{\omega\tau}{\Omega} + \theta + k\frac{2\pi}{3}\right), \quad (k = 0,\ 1,\ 2). \tag{23}$$

Le III-ème sous-harmonique a donc 6 phases d'oscillation déphasées de 60° l'une par rapport à l'autre. Ces 6 phases d'oscillation ont été obtenues expérimentalement, en fonction de la phase du signal de commande.

Cette conclusion est très importante, compte tenant de la tendance actuelle de réaliser des dispositifs à plusieurs états stables. L'absence du courant continu simplifie aussi en quelque sorte le dispositif.

Reçue le 6 IX 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Électrotechnique
et Mesures Électriques

BIBLIOGRAPHIE

1. Hayashi C., *Nonlinear Oscillations in Physical Systems.* Mc Graw-Hill Book Company, N.Y.—San Francisco—Toronto—London, 1964, pp. 131—137.
2. Мак Лахлан Н. В., *Теория и приложения функции Матьё.* ИИЛ, М. 1953, стр. 18—26, 49—52 и 154—170, (traduit de l'anglais).
3. Savin Gh., Zitron N., Cîrţină G., *Über die Frequenzteilung auf der Grundlage nichtlinearer magnetischer Kreise.* XIII. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, Heft *1*, Nichtlineare Elektrotechnik, Technische Hochschule, Ilmenau, 1968.
4. Pic G., *Algebră superioară.* EDP, Buc., 1966, pp. 399—400.
5. * * * *Магнитные элементы автоматики, телемеханики, измерительный и вычислительный технике.* Изд. Думка, Киев, 1964, стр. 599—602 и 431—442.
6. Тафт В. А., *Электрические щепи с переменными параметрами.* Изд. Энергия, М., 1968, стр. 30—44.
7. Ефимов И. Н., *К исследование индуктивного параметрона.* Авт. и телемех., 1963, *4*, стр. 563.
8. — *Параметроны с пятую устоичивыми состоянии.* Изв. ВУЗ, Приборостроение, 1964, *1*, стр. 3—10.
9. Боголюбов Н. К., Митропольский И. А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебании.* ГИТЛ, М., 1955.

ASUPRA PARAMETRONULUI FUNCŢIONÎND PE SUBARMONICA a III-a

(Rezumat)

Pentru studiul generatorului parametric pe subarmonica a III-a se foloseşte schema inductivă cu un singur circuit. Aproximînd curba de magnetizare printr-un polinom incomplet de gradul şapte se deduce ecuaţia circuitului, se indică pe cale teoretică şi se verifică experimental limitele de instabilitate ale soluţiei. De asemenea se demonstrează şi se verifică faptul că oscilaţia ce apare poate avea una din şase faze posibile.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Sectia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Sectia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D.K. 681.3:621.318.4

D.K. 681.3:621.318.4

ZUR RÜCKWIRKUNG IN MAGNETISCHEN FREQUENZTEILERN BEI SINUSFÖRMIGER SPANNUNGSSPEISUNG

VON

NORBERT ZITRON

1. Vorwort

Die Rückwirkung in den magnetischen Frequenzteilern ist für die Erläuterung der Fragen, die mit der Arbeitsweise des Parametrons und mit den Eigenmodulationserscheinungen verbunden sind, sowie auch wegen der Anwendungsmöglichkeiten des Modulationskreises als kontaktloses magnetisches Relais, wichtig.

Die Schwierigkeiten die bei der Untersuchung der Rückwirkung in den Frequenzteilern erscheinen, wurden in [1] angegeben.

In der Arbeit [2] ist die Rückwirkung in den magnetischen Frequenzteilern bei sinusförmiger Stromsspeisung mit Hilfe der elementaren Theorie der parametrischen Systeme analysiert [3].

In vorliegender Arbeit wird die Rückwirkung in den magnetischen Frequenzteilern bei sinusförmiger Spannungsspeisung mit der selben Methode untersucht. Es wird, sowie auch in [2], nur die Rückwirkung auf der zweiten Unterschwingung betrachtet.

2. Das induktive Parametron bei sinusförmiger Spannungsspeisung

Die grundsätzliche Schaltung des induktiven Parametrons bei sinusförmiger Spannungsspeisung ist in Abb. 1, mit allen Parameter die man weiterhin benützt, gezeigt.

Bei der Analyse des Parametrons werden die Kernhysteresis und die Verlustwiderstände der Wicklungen vernachlässigt.

Die Magnetisierungskennlinie des Kernes wird durch den Ansatz:

$$\sum_{m=0}^{2} w_m i_m \equiv K_1 \Phi + K_3 \Phi^3, \tag{1}$$

wobei K_1 und K_3 Aproximierungskoeffizienten und w_m die Windungszahlen der Wicklungen sind, angenähert.

Die Spannungen u_1 und u_2 werden als sinusförmig mit den folgenden Ausdrücke:

$$(2) \qquad u_1 = U_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1), \qquad u_2 = U_{2m}\cos\left(\frac{\omega}{2}t + \varphi_2\right)$$

betrachtet, wobei U_{1m} und U_{2m} die Amplituden und φ_1, φ_2 die Anfangsphasen der zwei Spannungen sind.

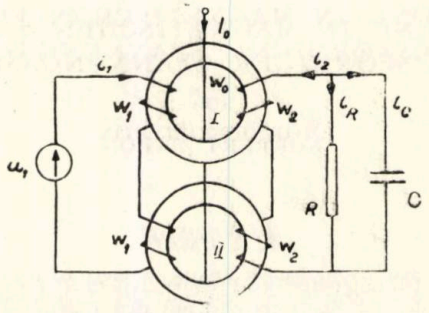


Abb. 1 — Die Schaltung des Parametrons.

In diesen Fall erhält man für die Flüsse folgende Ausdrücke:

$$(3) \qquad \Phi_1 = \frac{U_{1m}}{2\omega w_1}\sin(\omega t + \varphi_1), \quad \Phi_2 = \frac{U_{2m}}{\omega w_2}\sin\left(\frac{\omega}{2}t + \varphi_2\right).$$

Falls die Ströme wie in Abb. 1 flüssen, dann kann man schreiben:

$$(4) \qquad \Phi_I = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2\,, \qquad \Phi_{II} = \Phi_0 + \Phi_1 - \Phi_2,$$

wobei Φ_I und Φ_{II} die gänzliche Flüsse für den ersten und zweiten Kern und Φ_0 der Gleichfluss, der den Gleichstrom I_0 entschpricht ($w_0 I_0 = K_1\Phi_0 + K_3\Phi_0^3$), sind.

Wenn man (4) in (1) einsetzt, ergibt sich:

$$(5) \qquad \begin{cases} w_0 i_0 + w_1 i_1 + w_2 i_2 = K_1\Phi_I + K_3\Phi_I^3\,, \\ w_0 i_0 + w_1 i_1 - w_2 i_2 = K_1\Phi_{II} + K_3\Phi_{II}^3\,. \end{cases}$$

Setzt man jetzt (3) in (4) und die erzeugte Gleichung in (5) ein, dann erhält man für die Ströme i_1 und i_2 folgende Gleichungen:

$$i_1 = \frac{1}{2\omega w_1^2}\left[K_1 + K_3\left(3\Phi_0^2 + \frac{3}{16}\cdot\frac{U_{1m}^2}{\omega^2 w_1^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{U_{2m}^2}{\omega^2 w_2^2}\right)\right] U_{1m}\sin(\omega t + \varphi_1) -$$

$$-\frac{3}{2}K_3\Phi_0\frac{U_{2m}^2}{\omega^2 w_2^2}\cos(\omega t + 2\varphi_2), \tag{6}$$

$$i_2 = \frac{1}{\omega w_2^2}\left[K_1 + K_3\left(3\Phi_0^2 + \frac{3}{8}\cdot\frac{U_{1m}^2}{\omega^2 w_1^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{U_{2m}^2}{\omega^2 w_2^2}\right)\right] U_{2m}\sin\left(\frac{\omega}{2}t + \varphi_2\right) -$$

$$-\frac{3}{2}K_3\,\Phi_0\frac{U_{1m}}{\omega w_1}\cdot\frac{U_{2m}}{\omega w_2}\cos\left(\frac{\omega}{2}t + \varphi_1 - \varphi_2\right). \tag{7}$$

In den Gleichungen (6) und (7) sind die höheren Harmonischen der Ströme vernachlässigt worden.

Der erste Kirchhoffsche Satz für den Resonanzkreis (Sekundärkreis) ergibt:

$$i_2 + i_R + i_C = 0 \tag{8}$$

wobei:

$$i_R = \frac{u_2}{R} = \frac{U_{2m}}{R}\cos\left(\frac{\omega}{2}t + \varphi_2\right),$$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = -CU_{2m}\frac{\omega}{2}\sin\left(\frac{\omega}{2}t + \varphi_2\right). \tag{9}$$

Geht man mit (7) und (9) in (8) ein, dann erhält man nach Identifizierung:

$$\frac{B_1}{w_2} - \frac{B_2}{w_2}\sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) - \frac{CU_{2m}\omega}{2} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{B_2}{w_2}\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + \frac{U_{2m}}{R} = 0, \tag{11}$$

wobei

$$\begin{cases} B_1 = \left[K_1 + K_3\left(3\Phi_0^2 + \dfrac{3}{16}\cdot\dfrac{U_{1m}^2}{\omega^2 w_1^2} + \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{U_{2m}^2}{\omega^2 w_2^2}\right)\right]\dfrac{U_{1m}}{2\omega w_1}, \\ B_2 = \dfrac{3}{2}K_3\Phi_0\dfrac{U_{2m}^2}{\omega^2 w_2^2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (10) und (11) ermittelt man die Werte von φ_2 und U_{2m}:

74 BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI Sectia III

(12) $$\varphi_{\frac{2}{2}} \equiv \frac{\varphi_1}{2} \mp \arccos\left(-\frac{2\omega^2 w_1 w_2^2}{3K_3 \Phi_0 K U_{1m}}\right);$$

(13) $$U_{\frac{2m}{2m}} \equiv \frac{2\omega w_2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\mathcal{E}\omega^2 w_2^2}{2K_3} - \frac{K_1}{K_3} - 3\Phi_0^2 = \frac{3}{8}\cdot\frac{U_{1m}^2}{\omega^2 w_1^2} \mp \right.$$
$$\left. \mp \frac{3}{2}\Phi_0 \frac{U_{1m}}{\omega^2 w_1^2}\sqrt{1 - \left(\frac{2\omega^2 w_1 w_2^2}{3K_3 \Phi_0 K U_{1m}}\right)^2}\right]^{1/2}.$$

Die Gleichung (12) gibt die Schwingungsphase und die Gleichung (13) die Schwingungsamplitude. Es ist zu bemerken, dass es zu zwei unterschiedliche Schwingungsphasen für jeder Polarität des Gleichflusses möglich sind. Die erregte Schwingung kann also, wie auch beim Parametron mit sinusförmiger Stromsspeisung, vier unterschiedliche Schwingungsphasen, die sich um 90° unterscheiden, haben.

Die Gleichung (13) zeigt, dass die Schwingungsamplitude von der Modulationsspannung (U_{1m}), dem Gleichfluss Φ_0, der Kreisfrequenz ω, von den Kreisparametern $K, \mathcal{E}$, den Windungszahlen w_1, w_2 und vom Kernwerkstoff K_1, K_3, abhängig ist.

Aus der Gleichung (13) folgt, dass U_{2m} beschränkt ist. Es kann die Änderung von U_{2m} in Abhängigkeit von jeder Grösse aus Gleichung (13) dargestellt werden.

Für die weiteren Betrachtungen brauch man die Grenzwerte des Existenzbereiches ($U_{2m}(U_{1m})$, wenn $\Phi_0, \mathcal{E}, K$ konstant sind, können. Diese Grenz werte ermittelt man aus (13) wenn man $U_{2m} \equiv 0$ setzt:

(14) $$U_{\frac{1m}{1m}I} \equiv \frac{2\omega w_1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\mathcal{E}\omega^2 w_2^2}{K_3} - \frac{2K_1}{K_3} - \right.$$
$$\left. - 2\sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}\omega^2 w_2^2}{2K_3} - \frac{K_1}{K_3}\right)^2 - \left(\frac{\mathcal{E}\omega^2 w_2^2}{2K_3} - \frac{K_1}{K_3} - 3\Phi_0^2\right)^2 - \frac{\omega^2 w_2^4}{K_3^2 K^2}}\right]^{1/2};$$

(15) $$U_{\frac{1m}{1m}II} \equiv \frac{2\omega w_1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\mathcal{E}\omega^2 w_2^2}{K_3} - \frac{2K_1}{K_3} \mp \right.$$
$$\left. \mp 2\sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}\omega^2 w_2^2}{2K_3} - \frac{K_1}{K_3}\right)^2 - \left(\frac{\mathcal{E}\omega^2 w_2^2}{2K_3} - \frac{K_1}{K_3} - 3\Phi_0^2\right)^2 - \frac{\omega^2 w_2^4}{K_3^2 K^2}}\right]^{1/2}.$$

Diese Grenzwerte ermöglichen die Bestimmung der Schwingungsexistenzbereiche.

3. Die Rückwirkung beim Parametron mit sinusförmiger Spannungsspeisung

Weil das Parametron mit sinusförmiger Spannung gespeist wird, ist die vorkommende Rückwirkung auf den Modulationskreis eine Stromsrückwirkung.

Um diese Rückwirkung zu untersuchen, umformt man die Gleichung (6) folgendermassen:

$$i_1 = \left[K_1 + \frac{3K_3\Phi_0^2}{2\omega_2^2 w_1^2} U_{1m}^2 + \frac{3K_3}{32\omega_1^3 w_1^4} U_{1m}^3 + \frac{3K_3}{4\omega_1^3 \omega_2^2 w_1^2 w_2^2} U_{1m}^2 U_{2m}^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{3K_3\Phi_0}{2\omega_2^2 w_2^2} U_{2m} \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) \right] \sin(\omega t + \varphi_1) -$$

$$- \frac{3K_3\Phi_0}{2\omega_1^2 \omega_2^2 w_1^2 w_2^2} U_{2m}^2 \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) \cos(\omega t + \varphi_1). \tag{16}$$

Die Gleichung (16) kann man abgekürzt schreiben:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{i_1}), \tag{17}$$

wobei I_{1m} die Amplitude und φ_{i_1} die Anfangsphase des Modulationsstroms sind. Sie haben die folgende Werte:

$$I_{1m} = \left\{ \left[K_1 + \frac{3K_3\Phi_0^2}{2\omega_2^2 w_1^2} U_{1m}^2 + \frac{3K_3}{32\omega_1^3 w_1^4} U_{1m}^3 + \frac{3K_3}{4\omega_1^3 \omega_2^2 w_1^2 w_2^2} U_{1m}^2 U_{2m}^2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{3K_3\Phi_0}{2\omega_2^2 w_2^2} U_{2m} \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) \right]^2 + \frac{9K_3^2\Phi_0^2}{4\omega_1^2 \omega_2^4 w_1^2 w_2^4} U_{2m}^4 \cos^2(\varphi_1 - 2\varphi_2) \right\}^{1/2}, \tag{18}$$

$$\varphi_{i_1} = \varphi_1 -$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{\Phi_0 U_{2m}^2 \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2)}{\left(K_1 + \frac{3K_3\Phi_0^2}{2\omega_2^2 w_1^2} U_{1m}^2 + \frac{3K_3}{32\omega_1^3 w_1^4} U_{1m}^3 + \frac{3K_3}{4\omega_1^3 \omega_2^2 w_1^2 w_2^2} U_{1m}^2 U_{2m}^2 - \frac{3K_3\Phi_0}{2\omega_2^2 w_2^2} U_{2m} \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) \right) \frac{2\omega_1 w_1}{3K_3\Phi_0^2} + \frac{w_2^2 w_1^3}{16\omega_1^3 w_1^3} U_{1m} + \frac{1}{2\omega_1 w_1} U_{1m}^2 U_{2m}^2 \Phi_0 U_{2m} \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2)}. \tag{19}$$

Aus den Gleichungen (18) und (19) stellt man fest, dass die Amplitude und die Anfangsphase der Unterschwingung $\omega/2$, (U_{2m}, φ_2), die Werte der Amplitude und Anfangsphase des Modulationsstroms i_1 mit der Kreisfrequenz ω, beeinflussen.

Die Untersuchung der Gleichungen (18) und (19) ist sehr schwierig, darum betrachtet man einen besonderen Fall, der in der Praxis sehr oft vorkommt (weil die Unterschwingung sich bei sehr grosse R erregt): $R = \infty$. Für diesen Fall ist:

$$\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) = 0, \quad \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) = 1. \tag{20}$$

Geht man mit (20) in (17) und (19) ein, dann ergibt sich:

$$I_{1m} = \frac{K_1 + 3K_3\Phi_0^2}{2\omega w_1^2} U_{1m} + \frac{3}{32} \cdot \frac{K_3}{\omega^3 w_1^4} U_{1m}^3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{K_3}{\omega^3 w_1^2 w_2^2} U_{1m} U_{2m}^2 - \tag{21}$$

$$- \frac{3}{2} \cdot \frac{K_3 \Phi_0}{\omega^2 w_1 w_2^2} U_{2m}^2,$$

$$\varphi_{i_1} = \varphi_1. \tag{22}$$

Wenn man (20) in (13)...(15) einsetzt, erhält man:

$$U_{2m}^2 = \frac{4}{3} \omega^2 w_2^2 \left(\frac{C\omega^2 w_2^2}{2K_3} - \frac{K_1}{K_3} - 3\Phi_0^2 + \frac{3}{2} \Phi_0 \frac{U_{1m}}{\omega w_1} - \frac{3}{8} \cdot \frac{U_{1m}^2}{\omega^2 w_1^2} \right), \tag{23}$$

$$U_{m_{I,II}} = \frac{2\omega w_1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{C\omega^2 w_2^2}{K_3} - \frac{2K_1}{K_3} \mp 2\sqrt{3}\Phi_0 \sqrt{\frac{C\omega^2 w_2^2}{K_3} - \frac{2K_1}{K_3} - 3\Phi_0^2}}. \tag{24}$$

Ferner analysiert man die Amplitude I_{1m} und dafür teilt man die Gleichung (21) folgendermassen:

$$I_{1m} = f_1(U_{1m}) + f_2(U_{1m}), \tag{25}$$

wobei man bezeichnete:

$$f_1(U_{1m}) = \frac{K_1 + 3K_3\Phi_0^2}{2\omega w_1} U_{1m} + \frac{3}{32} \cdot \frac{K_3}{\omega^3 w_1^4} U_{1m}^3, \tag{26}$$

$$f_2(U_{1m}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{K_3}{\omega^3 w_1^2 w_2^2} U_{1m} U_{2m}^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{K_3 \Phi_0}{\omega^2 w_1 w_2^2} U_{2m}^2. \tag{27}$$

Geht man mit (23) in (27) ein, dann ergibt sich:

$$f_2(U_{1m}) = \frac{K_3}{w_1} \left(\frac{U_{1m}}{\omega w_1} - 2\Phi_0 \right) \left(\frac{C\omega^2 w_2^2}{2K_3} - \frac{K_1}{K_3} - 3\Phi_0^2 + \right. \tag{28}$$

$$\left. + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Phi_0}{\omega w_1} U_{1m} - \frac{3}{8\omega^2 w_1^2} U_{1m}^2 \right).$$

Die Funktion $f_2(U_{1m})$ hat ein Höchstwert für:

$$U_{1m_M} = 2\omega w_1 \left(\Phi_0 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C\omega^2 w_2^2}{3K_3} - \frac{2K_1}{K_3} - \Phi_0^2} \right). \tag{29}$$

Die Darstellungen für die Funktionen $f_1(U_{1m})$ und $f_2(U_{1m})$, wenn Φ_0, C, ω konstant bleiben, sind in Abb. 2 gezeigt.

In Abb. 3 ist die Kennlinie $I_{1m}(U_{1m})$ dargestellt, die man durch graphische Addierung der Funktionen f_1 und f_2 erhält.

Aus Abb. 3 folgt, dass die Stromrückwirkung des erregten Kreises auf den Modulationskreis, zur Vergrösserung des Modulationsstroms führt. Es erscheint als Folge der Rückwirkung eine Vergrösserung des Stroms, die sowie beim Parametron mit sinusförmiger Stromsspeisung, als Verkleinerung der Kreisimpedanz angesehen werden kann.

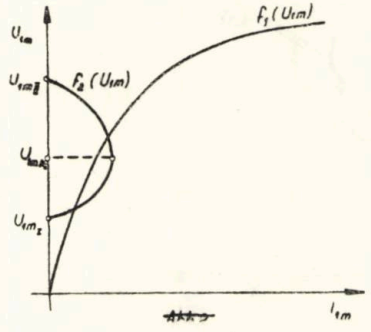


Abb. 2. — Die graphischen Darstellungen für die Funktionen $f_1(U_{1m})$ und $f_2(U_{1m})$.

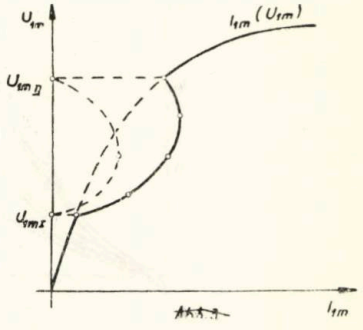


Abb. 3. — Die theoretische Kennlinie I_{1m} (U_{1m}).

Die Gleichungen (26) und (28) zeigen, dass die Stromrückwirkung von dem Gleichfluss Φ_0, der Kapazität C, der Frequenz ω, den Windungszahlen w_1, w_2 und von dem Kernwerkstoff K_1, K_3, abhängig ist. Man kann den Einfluss der jede aus diesen Grössen auf I_{1m} ausübt, analysieren.

Bis jetzt hat man nur den Einfluss der Rückwirkung auf der Amplitude des Modulationsstroms untersucht. Ferner soll man den Einfluss der Rückwirkung auf der Anfangsphase φ_{i_1} untersuchen.

Eine nähere Untersuchung der Gleichung (19) zeigt, dass der Einfluss auf der Phase φ_{i_1} wesentlich von R abhängig ist. Falls $R \neq \infty$ ist, erscheint als Folge der Rückwirkung eine Verkleinerung der Anfangsphase φ_{i_1} (die aber gering ist, denn der Nenner der Gleichung viel grösser als der Zähler ist).

Betrachtet man $R = \infty$, dann bleibt φ_{i_1} konstant $(\varphi_{i_1} = \varphi_1)$ und die Rückwirkung beeinflusst nicht die Anfangsphase des Modulationsstroms.

4. Erfahrungsmässige Ergebnisse

Die Versuche führte man anhand von einer nichtlinearer vormagnetisierter Spule mit zwei gleiche Kerne aus Permalloy. Die Windungszahlen der Wicklungen waren $w_1 = 300$, $w_2 = 600$, $w_0 = 200$. Die Schaltung wurde mit einer Frequenz von 50 Hz gespeist.

In Abb. 4 sind die Kennlinien $I_{1m}\,(U_{1m})$ für verschiedene Werte des Gleichstroms dargestellt ($C \equiv 1{,}5\,\mu F$). Die Kennlinien $I_{1m}\,(U_{1m})$ für verschiedene Werte der Kapazität C sind in Abb. 5 gezeigt ($I_0 \equiv 5\,mA$). Man stellt fest, dass im Bereich der Kennlinien $I_{1m}(U_{1m})$ können zwischen U_{1m_I} und $U_{1m_{II}}$ Eigenmodulationen erscheinen.

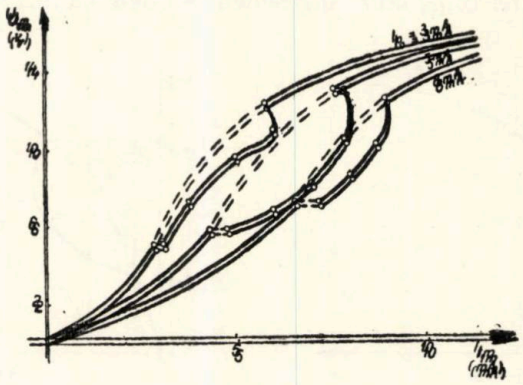


Abb. 4. — Die erfahrungsmässigen Kennlinien $I_{1m}(U_{1m})$ für verschiedene Werte des Gleichstroms.

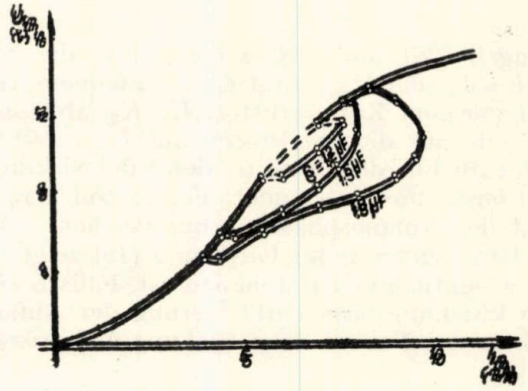


Abb. 5. — Die erfahrungsmässigen Kennlinien $I_{1m}(U_{1m})$ für verschiedene Werte der Kapazität.

Ebenfalls, ist zu bemerken bei einige Kennlinien, dass der Modulationsstrom in den Grenzpunkten des Existenzbereiches sich sprunghaft ändert. Die Stromsprüngen machen den Modulationskreis für bestimmte magnetische kontaktlose Relais verwendbar.

5. Schlussfolgerungen

Das Parametron mit sinusförmiger Spannungsspeisung wird mit der elementaren Theorie der parametrischen Systeme analysiert.

Es werden die Ausdrücke für die Amplitude und die Anfangsphase des Modulationsstroms berechnet und untersucht. Die Funktion wird für den besonderen Fall $K \equiv \infty$ dargestellt.

Durch erfahrungsmässige Versuche wird gezeigt, dass man eine gute Übereinstimmung zwischen den erfahrungsmässigen und theoretischen Ergebnissen erhält.

Eingegangen am 25. X 1969

Technische Hochschule, Iassy, Lehrstuhl für Elektrotechnik und Elektrische Messungen

LITERATURVERZEICHNIS

1: Бессонов Л. А.: *Автоколебания в электрических цепях со сталью*: М.-Л.: 1958.
2: Zitron N.: *Zur Rückwirkung in magnetischen Frequenzteilern bei sinusförmiger Stromsspeisung* (unter Druck).
3: Steiner K. H.; Pungs L.: *Parametrische Systeme*: S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1965.

ASUPRA REACȚIEI ÎN DIVIZOARELE MAGNETICE DE FRECVENȚĂ CU ALIMENTARE LA TENSIUNE SINUSOIDALĂ

(Rezumat)

Se analizează cu ajutorul teoriei elementare a sistemelor parametrice, reacția exercitată de circuitul excitat asupra celui modulator la divizoarele magnetice de frecvență. Analiza se efectuează numai în cazul excitării subarmonicii a doua.

Explicația figurilor

Fig. 1: = Schema parametronului.
Fig. 2: = Reprezentările grafice ale funcțiilor $f_1(U_{1m})$ și $f_2(U_{1m})$.
Fig. 3: = Caracteristica teoretică $I_{1m}(U_{1m})$.
Fig. 4: = Caracteristicile experimentale $I_{1m}(U_{1m})$ pentru diferite valori ale curentului continuu.
Fig. 5: = Caracteristicile experimentale $I_{1m}(U_{1m})$ pentru diferite valori ale capacității.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

D. C. 621.313.3

ON SOME POSIBILITIES OF USING THE AUTODYNE FOR ELECTRIC DRIVES

BY

N. V. BOŢAN and C. HUŢANU

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute, Jassy, 28—30 September 1967

1. Introduction

The advantages of the commutating electrical machine as to the motor—generator set are very well known: reduction of volume of approximately 50...60%, reduction of weight of 30...40%, and efficiency coefficient very well near unity.

It is of course evident that its main drawback is the impposibility of controlling its voltage within extended value limits, but after its invention, the superiority of the controlled commutating machine (autodyne) over the motor-generator set is unquestionable. The request in industry for d.c. generators with supply voltage controllable in both directions has imposed the Ward-Leonard set. The autodyne possesses all these particularities and besides: can be driven by a considerably less input power as it is at the same time an amplifier machine, consequently being capable of replacing at one time 2...3 electrical machines; can supply reactive power into the main lines, the dimensions of the machine remaining quite the same; its efficiency coefficient is very well near unity.

The autodyne can also successfully replace most of the modern static control systems available for industrial purposes which, as for instance when thyristors are used, are still rather expensive, complicated and very sensitive to overload conditions.

The domains in which the autodyne may find applicability are: the speed and torque control in d.c. motors, the providing of various mechanical characteristics.

2. The Use of Autodyne for Electric Drives

2.1. We shall consider the independent d.c. motor, whose mechanical characteristic is described by the equation:

$$n = \frac{U}{c_e} - \frac{MR}{c_e c_m}. \tag{1}$$

For an invariable load, Eq. (1) means that the speed is a linear function in which the variable is the drive voltage.

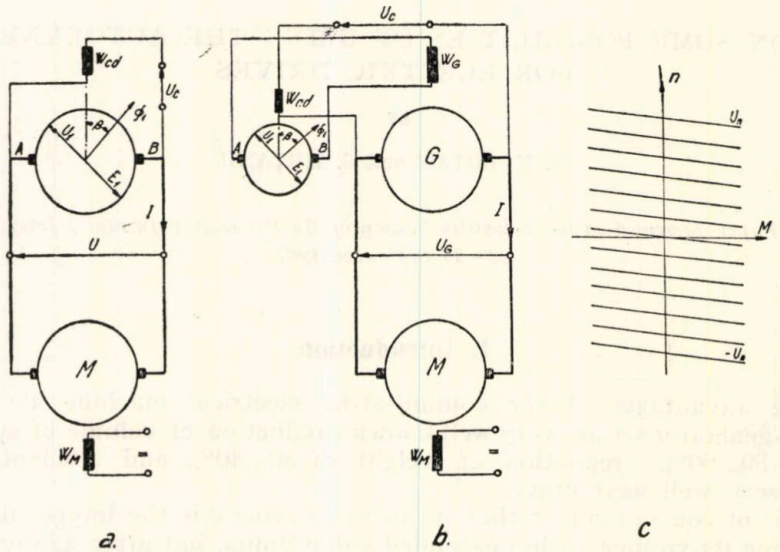


Fig. 1

a) In case of the speed control the motor is usually directly supplied by the autodyne, or, for powerful motors, is controlled by a generator supplying the motor (Fig. 1 *a* and 1 *b*). In the second case the difference voltage $U_c - U_G$ is applied on the drive winding, so that the voltage with which the excitation winding is supplied may be varied according to necessity.

Consequently the autodyne will control the output voltage according to

$$U = U_c \quad \text{or} \quad U_G = U_c. \tag{2}$$

The mechanical characteristic are straight lines exhibiting a speed drop corresponding to the voltage drop in the armature circuit of the motor (Fig. 1 *c*). If superrigid mechanical characteristic are necessary, to the drive winding must be applied the difference between U_c and the e.m.f. induced by rotation in the armature of the motor.

b) Speed control may also be achieved by using the voltage booster method, where the booster maintains the constant level of the voltage of

the system, which implies the speed control of the main motor and the voltage control of the system. If the autodyne is used as voltage booster and the voltage control is automatical, neither the drive motor for the boost-machine nor the separate control system are necessary (Fig. 2).

c) The paper and textile industries, rolling mills and steel ribbon and wire winding machines requirer torque control, which usually is achieved with complicated and expensive installations.

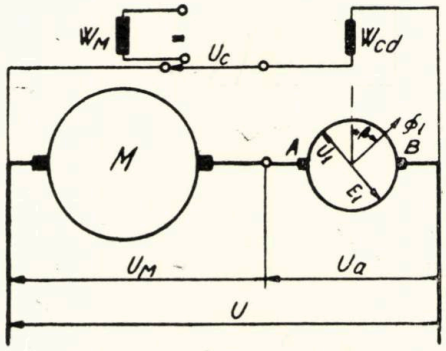
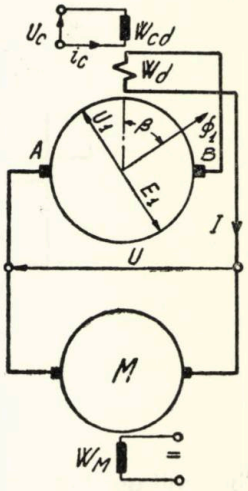


Fig. 2



Flg. 3

The mechanical torque to be developed by a d.c. motor, supplied by the autodyne, can be achieved by using the scheme represented in Fig. 3. A supplementary winding w_d is used, through which flows the load current. Its effect is opposed to that of the winding w_{cd} and the autodyne is driven according to equation:

$$i_c w_{cd} = I w_d ; \tag{3}$$

the torque developed by the motor is:

$$M = c_m I = c_m \frac{w_{cd}}{w_d} i_c = k U_c . \tag{4}$$

2.2. As the autodyne allows the possibility of obtaining various external characteristics, it can be adapted to any drive machine so that the system regains its stability, under working conditions. For this purpose the control windings are supplied from two pairs of brushes disposed along the two principal axes of the machine and the control is achieved along both axes or along an intermediary one.

a) The hoisting machinery and the electrically driven devices working under overload conditions demand the using of the so-called excavator characteristics. In Fig. 4 a d.c. motor supplied from an autodyne exhibits this property.

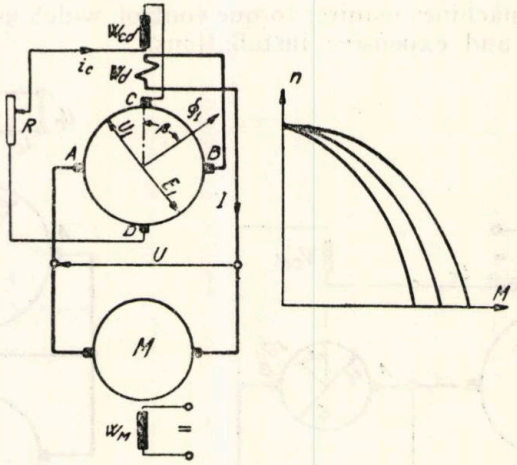


Fig. 4

The voltage between brushes AB and CD are respectively:

$$U \cong c_1 U_1 \cos \beta, \quad U_d \cong c_1 U_1 \sin \beta, \tag{5}$$

where U_1 is the phase-voltage, c_1 — a constant coefficient, β — the angle characterizing the spatial position of the flux.

At the same time the current in the drive winding w_{cd} is directly proportional to U_d, the load current being

$$I = i_c \frac{w_{cd}}{w_d} = kU_d. \tag{6}$$

The torque developed by the drive motor with independent excitation is

$$M = c_m I = c_m k U_d . \tag{7}$$

From (1) we have

$$U = c_e n + IR. \tag{8}$$

From (7) and (8) and not taking into account the voltage drop in the armature circuit of the motor, (5) can also be written as

$$\left(\frac{n}{A}\right)^2 + \left(\frac{M}{B}\right)^2 \cong 1, \tag{9}$$

which is the equation of a family of ellipses and where $A = c_1 U_1 / c_e$, $B = c_1 c_m k U_1$.

In the case of individual drives, for instance to obtain an excavator characteristic, the supply must be furnished by a 3-excitation winding generator. The adavantages of the autodyne are thus obvious.

b) For electrical traction machines working under considerable overload and slow-speed conditions the soft mechanical characteristic is also necessary. For this purpose may be used some of the supplementary stator windings, as windings working along the transversal axis — w_q (Fig. 5). As the friction-compensation winding develops a constant torque, it can also develop a constant generating power by changing the sense of the flux in this winding. If we connect the series w_q winding so that the compensation current $c_2 I w_q$ obtained in the armature has an active component, then it will furnish a motor power $m U_1 c_2 I w_q \cos \beta$, where m is the number of phases of the machine and c_2 is a constant coefficient.

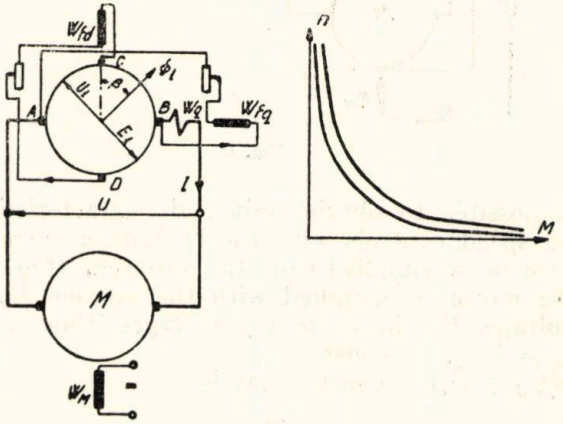


Fig. 5

If this is just a part K of the power in the friction-compensation winding

$$m U_1 c_2 I w_q \cos \beta = K \tag{10}$$

and as $U \cong c_1 U_1 \cos \beta$, we have

$$\frac{m c_2 w_q}{c_1} UI = K. \tag{11}$$

For a motor with independent excitation, (11) may thus be written

$$Mn = \frac{K}{m w_q} \cdot \frac{c_m}{c_e} \cdot \frac{c_1}{c_2}, \tag{12}$$

which represents a family of hyperboles.

c) By adjusting the ratio of the numbers of loops of the windings driving along the d- and q-axes respectively it is possible to obtain any mechanical characteristic.

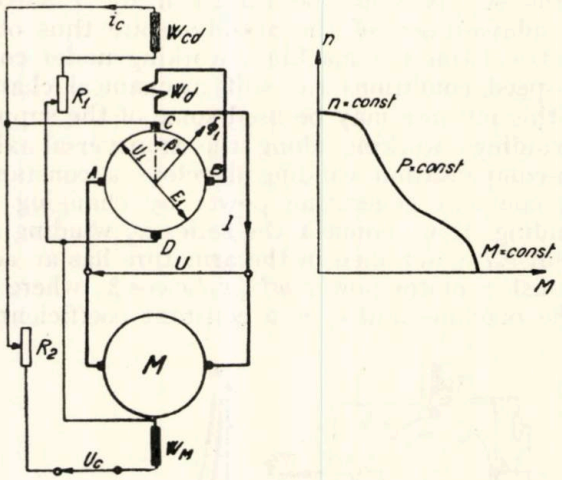


Fig. 6

It is also possible to obtain universal characteristics by combining the torque and speed controls with the excitation current control of the motor, the motor being supplied from the autodyne (Fig. 6). The excitation winding of the motor is supplied with the voltage $U_d + U_c$, where U_c is a sample voltage. For lower supply voltages, thus for lower speeds of the motor, $U_d \cong U_{d\max} = \text{const.}$

As $i_c = k(U_d + U_c) = \text{const.}$, that is

$$I = i_c \frac{w_{cd}}{w_d} = \text{const.}, \tag{13}$$

it is evident that for lower speeds the mechanical characteristic is $M = \text{const.}$ By increasing the voltage U, U_d decreases, the current in the excitation winding of the motor decreases so that M decreases and n increases. The mechanical characteristic is very near hyperbolical. When the voltage U nears the maximum value, it remain practically constant, and U_d is almost zero, as the excitation flux of the motor is determined by U_c. In this case the mechanical characteristic is determined by the equation $n = \text{const.}$

3. Conclusions

The autodyne is an ideal machine for electrical drives. Although it is an amplifier machine and its available power is suitable under practically any working conditions. Its main drawback is the commutator, but the

commutation is satisfactory even under sharp overload conditions. The autodyne — d.c. motor set is twofold advantageous, economically and by allowing a great variety of mechanical characteristics.

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Electrical Drives
and Automation

REFERENCES

1. Benedikt O., *Die neue elektrische Maschine „Autodyne".* Akademie-Verlag, Berlin, Verlag der Ungarischen Akad. der Wiss. Budapest, 1957.
2. — *The Autodyne, a new Electromechanical Amplifier.* Automatic and Remote Control, 1960.
3. Boțan N. V., Bejan I., Balaban E., *Curs de acționări electromecanice și automatizări.* EDP, Buc., 1962.
4. Sand M., *Mașini electrice speciale.* Vol. 1, EDP, Buc., 1963.

ASUPRA POSIBILITĂȚILOR DE UTILIZARE A AUTODINEI ÎN ACȚIONĂRILE ELECTRICE

(Rezumat)

Avantajele economice ale comutatricei față de grupul generator—motor sînt binecunoscute. Odată cu descoperirea comutatricei reglabile, denumită de inventator — prof. Otto Benedikt — autodină, grupul autodină—motor de c. c. poate suplini cu succes și proprietățile funcționale ale sistemului Ward-Leonard.

Fiind și o mașină amplificatoare, autodina mai prezintă avantajul deosebit că permite obținerea oricărei forme de caracteristică externă, cu modificări constructive simple. Pentru acționările electrice aceasta înseamnă obținerea de la un grup autodină-motor de c.c. a oricărui tip de caracteristică mecanică (n, M sau P = const.), fără instalații suplimentare de reglaj.

Această flexibilitate funcțională caracterizează autodina ca o mașină ideală pentru acționările electrice, permițînd adaptarea motorului de curent continuu cu excitație separată la acționarea oricărui tip de mașină de lucru.

În lucrare se analizează unele posibilități de folosire a autodinei în acționările electrice, legate de reglarea vitezei și cuplului motoarelor de c.c. și de modul de obținere a unor tipuri fundamentale de caracteristici mecanice de la un grup autodină-motor de curent continuu cu excitație separată.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

C. Z. 621.314.2

CONSIDERAŢII ASUPRA DETERMINĂRII PUTERII TRANSFORMATOARELOR DIN POSTURILE DE TRANSFORMARE ALE ÎNTREPRINDERILOR INDUSTRIALE

DE

V. PRISĂCARU, C. HUŢANU şi D. IOACHIM

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Problema alegerii puterii transformatoarelor şi a numărului acestora prezintă atît aspecte tehnice cît şi economice. Un studiu asupra acestei probleme rezolvă în mare măsură ambele aspecte, realizîndu-se o securitate a deservirii precum şi investiţii şi cheltuieli de exploatare minime.

Ţinînd seama de aceste considerente, în cele ce urmează se cercetează modul de determinare a puterii transformatoarelor din posturile de transformare ale întreprinderilor industriale. Prezentul studiu nu se referă la probleme ca stabilirea numărului transformatoarelor, rezerva de putere, cheltuielile de exploatare etc., care depind de gradul de siguranţă necesar şi de categoria consumatorilor, fiecare putînd constitui subiectul unui studiu aparte.

Determinarea corectă a puterii postului de transformare este direct legată de investiţii, deci de latura economică a problemei şi de modul său de rezolvare depinde eficienţa economică a investiţiilor.

2. Pentru calculul indicat este necesar să se cunoască curbele zilnice de sarcină pentru ziua de lucru în perioada cea mai încărcată, curba anuală de sarcină şi puterea totală solicitată de întreprindere (stabilită prin una din metodele cunoscute: a) formula binomă, b) coeficientul de cerere sau c) folosirea duratei de utilizare), care reprezintă puterea maximă cerută de întreprindere în zilele lunilor de iarnă (decembrie, ianuarie), la un factor de putere constant. În fig. 1 şi 2 sînt reprezentate, spre exemplificare astfel de curbe de sarcină, care sînt specifice profilului industrial al între-

prinderii şi se pot stabili prin măsurători. Curba de sarcină zilnică reprezintă consumul de putere activă, reactivă sau aparentă în perioadele caracteristice de iarnă şi de vară. Folosind curbele de sarcină zilnică se poate determina curba de sarcină anuală, ce se obţine efectuînd media aritmetică a sarcinilor zilnice maxime în interval de o lună.

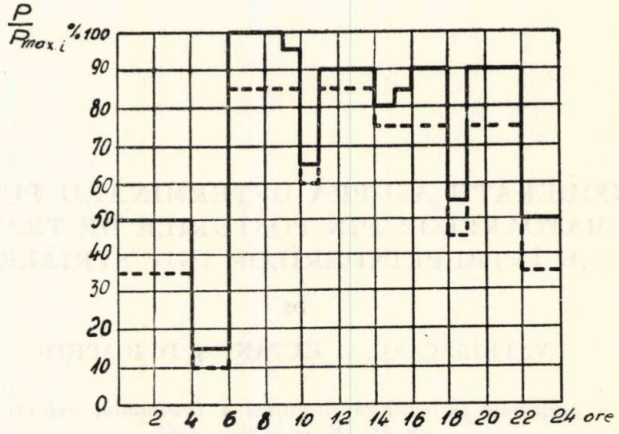


Fig. 1. — Curba zilnică de sarcină pentru o zi de lucru: —— zi de iarnă, --- zi de vară.

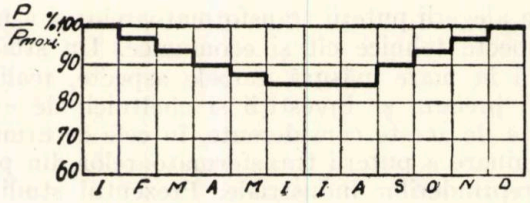


Fig. 2. — Curba anuală de sarcină.

În calcule se consideră un sistem echilibrat de consumatori, transformatoarele fiind construite pentru a funcţiona în regim de durată cu o sarcină constantă egală cu cea nominală, la un regim termic bine stabilit (în aer liber pentru o temperatură maximă de +35 °C şi minimă de −25 °C, deci la o valoare medie anuală de +5 °C). Constructorii garantează funcţionarea pe un termen de aproximativ 20 ani, impus atît de uzura tehnică cît şi de cea morală.

Un transformator ales după puterea maximă solicitată de întreprindere în timpul unei zile de lucru va fi, evident, subîncărcat în perioadele mai puţin încărcate (fig. 1), ducînd la o subutilizare a sa. De asemenea, funcţionarea în condiţii termice diferite de cele pentru care a fost construit, va duce la o supra- sau o subsolicitare a izolaţiei transformatorului, după cum regimul termic este mai greu sau mai uşor decît cel nominal.

În timpul unei zile de lucru puterea cerută de consumator nu este constantă (fig. 1). Ținînd seama de faptul că în anumite perioade transformatoarele sînt subsolicitate și datorită acestui fapt în perioadele de vîrf vor putea fi supraîncărcate, se poate stabili puterea transformatoarelor astfel încît ele să fie utilizate la maximum. Folosind rațional capacitatea de supraîncărcare a transformatoarelor se poate reduce puterea instalată, deci se pot realiza economii importante.

3. Pentru curba de sarcină zilnică se poate defini *coeficientul de utilizare* (umplere) a curbei, k_u, ca raportul dintre valorile medie și maximă a sarcinii pentru o perioadă de timp dată, adică:

$$k_u = \frac{P_{med}}{P_{max}} = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T P\,dt}{P_{max}} = \frac{A}{TP_{max}},$$

unde P_{med} este valoarea medie a sarcinii solicitată de întreprindere pentru perioada de timp T; P_{max} — valoarea maximă a sarcinii cerută de întreprindere în intervalul considerat, A — aria suprafeței cuprinsă între curba zilnică și axele de coordonate, deci energia electrică efectiv consumată în intervalul considerat; T — perioada de timp, care în cazul curbei zilnice de sarcină este de 24 ore.

Deci $k_u = A/(24\,P_{max})$ și evident $k_u \leqslant 1$.

Ținînd seama de cele de mai sus, supraîncărcările admisibile ale transformatoarelor peste puterea lor nominală, pe baza variațiilor zilnice de sarcină — în condiții termice normale — se stabilesc cu ajutorul regulii celor trei procente: pentru fiecare 10 procente de reducere a coeficientului de utilizare k_u față de 100%, se admite o suprasarcină de 3% peste puterea nominală a transformatorului pe durata supraîncărcării. Se obține

$$\alpha_3 = 3\frac{100 - k_u}{10}\,[\%] = 3\frac{1 - k_u}{10},$$

unde α_3 reprezintă capacitatea de suprasarcină datorită neuniformității curbei de sarcină zilnică, stabilită conform regulii celor trei procente.

Dacă întreprinderea ar lucra tot timpul anului cu același grafic de sarcină zilnic și în condiții termice normale, puterea transformatoarelor s-ar alege în așa fel încît ținînd cont de posibilitatea de suprasarcină admisă, să se asigure puterea maximă cerută de întreprindere în timpul unei zile de lucru, $P_{max\,i} \leqslant P_n + \alpha_3 P_n$, sau

$$(1) \qquad P_n \geqslant \frac{P_{max\,i}}{1 + \frac{3}{10}(1 - k_u)}.$$

În general, în timpul anului puterea cerută de o întreprindere este diferită — fiind maximă în lunile de iarnă (noiembrie, decembrie, ianuarie, februarie) și minimă vara (iunie, iulie, august), datorită, în special reducerii consumului pentru iluminat (fig. 2). Pentru a stabili corect puterea transformatoarelor, este necesar să se țină cont de subutilizarea lor în lunile de vară, ceea ce permite încă o reducere a puterii nominale instalate considerînd posibilitatea de supraîncărcare în timpul iernii.

Suprasarcina admisă, datorită neuniformității curbei anuale de sarcină, se poate stabili cu regula celor p procente: pentru fiecare p procente de subîncărcare vara — raportate la puterea nominală a transformatoarelor — se poate admite iarna o suprasarcină de p procente, dar care să nu depășească 15%. Deci

$$\alpha_p = 100\frac{P_n - P_{max\,v}}{P_n}\,[\%] \leqslant 15\%,$$

în care $P_{max\,v}$ este puterea maximă cerută de întreprindere, conform graficului anual, în lunile de vară (fig. 2).

Capacitatea de suprasarcină datorită neuniformităților curbei zilnice și curbei anuale, în condiții termice normale, este $\alpha = \alpha_3 + \alpha_p$.

Experimental s-a stabilit că valoarea suprasarcinii totale nu trebuie să depășească 30% pentru transformatoarele instalate în exterior și 20% pentru cele instalate în încăperi.

Repetînd raționamentul de mai sus, transformatoarele cu posibilitatea de suprasarcină trebuie să asigure puterea maximă cerută de întreprindere în lunile de vîrf; deci $P_{max\,i} \leqslant P_n + (\alpha_3 + \alpha_p)P_n$ sau

$$(2)\qquad P_n \geqslant \frac{P_{max\,i}}{1 + \alpha_3 + \alpha_p} = \frac{P_{max\,i}}{1 + \frac{3}{10}(1 - k_u) + \frac{P_n - P_{max\,v}}{P_n}},$$

sau $P_n\left[2 + \frac{3}{10}(1 - k_u)\right] - P_{max\,v} \geqslant P_{max\,i}$, de unde rezultă

$$(3)\qquad P_n \geqslant \frac{P_{max\,i} + P_{max\,v}}{2 + \frac{3}{10}(1 - k_u)}.$$

4. În cele de mai sus s-a considerat că transformatoarele ar funcționa în condiții termice nominală. În cazul unui mediu refrigerent cu temperatura θ_{med} diferită de cea normală, puterea ce poate fi furnizată de transformatoare diferă de cea nominală, fiind mai mică pentru temperaturi mai mari și invers. Se poate deci scrie

$$(4)\qquad P'_n = P_n \pm \Delta P_n = P_n + |\Delta P_n|,$$

P'_n fiind puterea ce o poate furniza transformatorul cu putere nominală P_n, în cazul cînd $\theta_{med} \neq +5\,°C$.

Pentru transformatoarele instalate în clădiri se cere ca în camera transformatoarelor diferenţa dintre temperatura aerului la ieşire (θ_2) şi la intrare (θ_1) să fie de circa $+15\,°C$, de unde rezultă că temperatura medie anuală a aerului de răcire va fi

$$\theta_{med} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \theta_{med\,ext}\,.$$

Dacă la temperatura medie normală de $+5\,°C$ puterea furnizată este P_n, deci 100%, în cazul unei temperaturi diferite de $+5\,°C$, adică $5 - \theta_{med}$, puterea transformatoarelor se modifică cu

$$\Delta P = P_n \frac{5 - \theta_{med}}{100},$$

temperatura medie a aerului exterior $\theta_{med\,ext}$ poate diferi în acest caz de cea normală ($+5\,°C$).

Utilizînd (4) şi ţinînd seama de relaţiile (2), se obţine

$$P'_n = P_n + P_n \frac{5 - \theta_{med}}{100} = P_n\left(1 + \frac{5 - \theta_{med}}{100}\right) \geqslant \frac{P_{max\,i}}{1 + \frac{3}{10}(1 - k_u) + \frac{P'_n - P_{max\,v}}{P'_n}};$$

notînd cu $\alpha_\theta = 1 + (5 - \theta_{med})/100$ rezultă în final

$$P_n \geqslant \frac{P_{max\,i} + P_{max\,v}}{\left[2 + \frac{3}{10}(1 - k_u)\right]\alpha_\theta}\,. \tag{5}$$

Relaţia (5) permite un calcul exact al puterii transformatoarelor cînd se ţine seama de neuniformitatea curbelor zilnică şi anuală de sarcină şi de temperatura mediului ambiant (temperatura medie anuală).

Se poate stabili şi capacitatea de suprasarcină a transformatoarelor, în cazul cel mai general cînd se ia în consideraţie temperatura mediului ambiant şi suprasarcinile admise de curbele de sarcină zilnică şi anuală. Puterea nominală a transformatoarelor, la limită, se scrie:

$$P_n = \frac{P_{max\,i}}{1 + \alpha_{ss}}\,, \tag{6}$$

dar pe de altă parte

$$P_n = \frac{P_{max\,i}}{(1 + \alpha_3 + \alpha_p)\alpha_\theta}\,. \tag{7}$$

Din (6) și (7) rezultă capacitatea de suprasarcină:

$$\alpha_{ss} = (1 + \alpha_3 + \alpha_p)\alpha_\theta - 1. \tag{8}$$

În cazul cînd $\alpha_\theta = 1, (\theta_{med} = +5\,°C)$, capacitatea de suprasarcină este

$$\alpha_{ss} = \alpha_3 + \alpha_p. \tag{8'}$$

5. Notînd cu a raportul dintre $P_{max\,v}$ și $P_{max\,i}$, relația (5) poate fi scrisă la limită sub forma

$$\frac{P_{max\,i}}{P_n} = \frac{\left[2 + \frac{3}{10}(1 - k_u)\right]\alpha_\theta}{1 + a}. \tag{9}$$

Pentru anumite valori a lui a și α_θ se constată că raportul $P_{max\,i}/P_n$ variază liniar, fapt care a permis trasarea a două familii de drepte pentru diferite valori ale lui a și α_θ (fig. 3), cu ajutorul cărora se poate determina valoarea raportului $P_{max\,i}/P_n$, atît în cazul unui regim termic normal ($\alpha_\theta = 1$) cît și în cazul cînd $\alpha_\theta \neq 1$. Cunoscînd deci valoarea raportului $P_{max\,i}/P_n$ rezultă imediat valoarea puterii P_n. Notînd cu C raportul $P_{max\,i}/P_n$ este evident că $C = 1 + \alpha_{ss}$, respectiv

$$\alpha_{ss} = C - 1. \tag{10}$$

6. Fie o întreprindere cu graficele de sarcină zilnică și anuală din fig. 1 și 2, cu o putere maximă solicitată $P_c = P_{max\,i} = 4\,000$ kW, la un factor de putere ameliorat de 0,9. Postul de transformare 6/0,4 kV este amplasat în interior, la o temperatură medie $\theta_{med} = 12\,°C$, care a rezultat considerînd că diferența dintre temperatura aerului de răcire la ieșirea și intrarea din camera transformatoarelor este de $+14\,°C$, deci media $+7\,°C$, la care s-a dăugat temperatura medie a aerului din exterior $+5\,°C$ (mediu refrigerent exterior normal).

Din curba de sarcină zilnică, iarna, rezultă

$$A_i = (2 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}55 + 1 \cdot 0{,}65 + 1 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}85 + 8 \cdot 0{,}9 + 1 \cdot 0{,}95 + 3 \cdot 1{,}0) P_{max\,i} =$$

$$= 17,3 P_{max\,i}$$

iar pentru coeficientul de utilizare a curbei se găsește $k_u = A_i/24P_{max\,i} = 72{,}1\%$.

Din curba de sarcină anuală se obține $P_{max\,v} = 0{,}85\ P_{max\,i} = 0{,}85 \cdot 4\,000 = 3\,400$ kW. Puterea nominală a transformatoarelor, dată de (5), este:

$$P_n = \frac{P_{max\,i} + P_{max\,v}}{\left[2 + \frac{3}{10}(1 - k_u)\right]\alpha_\theta} = 3818{,}7 \text{ kW}.$$

Pentru cazul considerat $\alpha_3 = 0{,}3(1 - k_u) = 0{,}0837$, $\alpha_\theta = 1 + 0{,}01(5 - \theta_{med}) = 0{,}93$,

$$\alpha_p = \frac{P'_n - P_{max\,v}}{P'_n} = \frac{\alpha_\theta P_n - P_{max\,v}}{\alpha_\theta P_n} = 0{,}0425.$$

Aplicînd relația (8) se poate determina capacitatea de suprasarcină a transformatoarelor

$$\alpha_{ss} = (1 + \alpha_3 + \alpha_p)\alpha_\theta - 1 = 4{,}74\%.$$

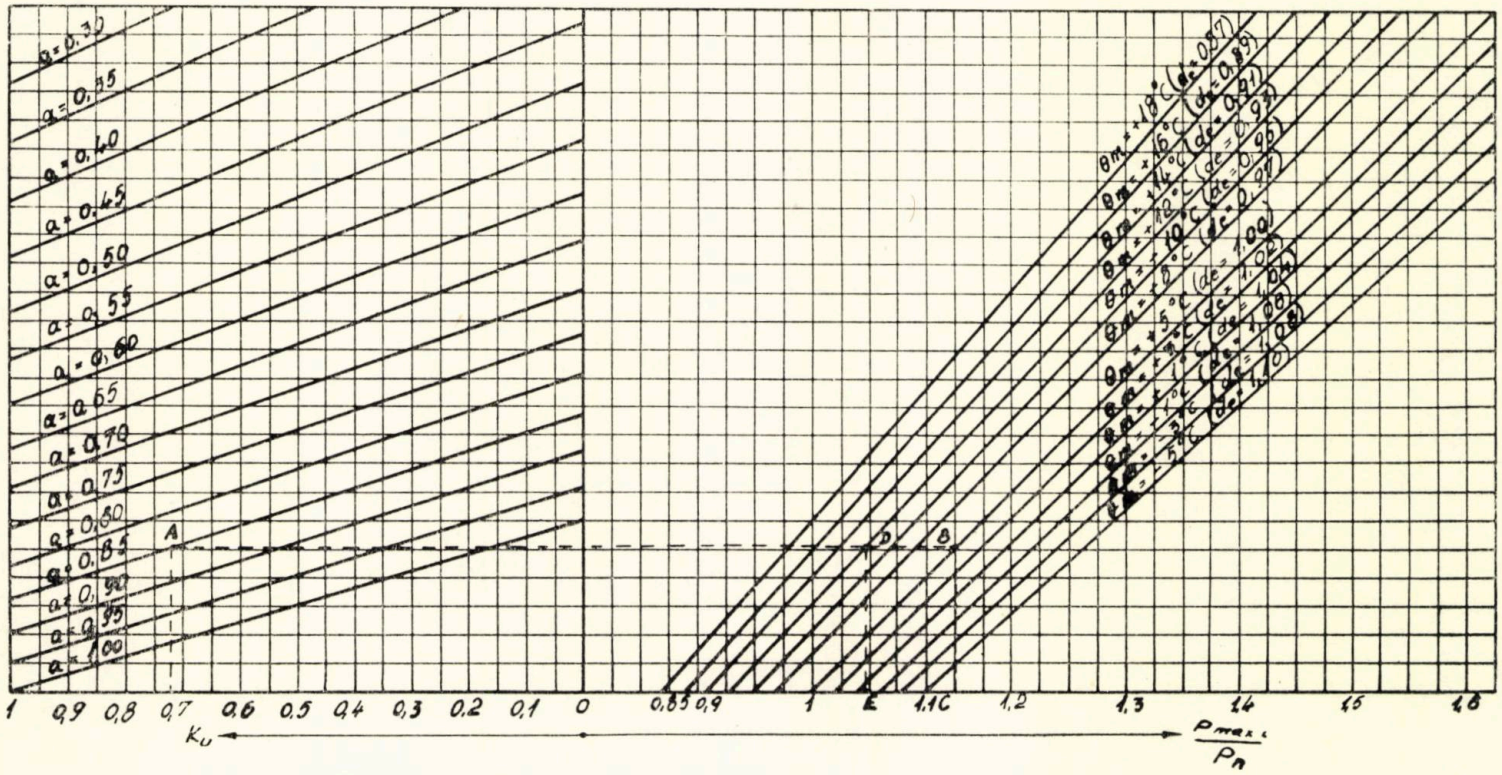
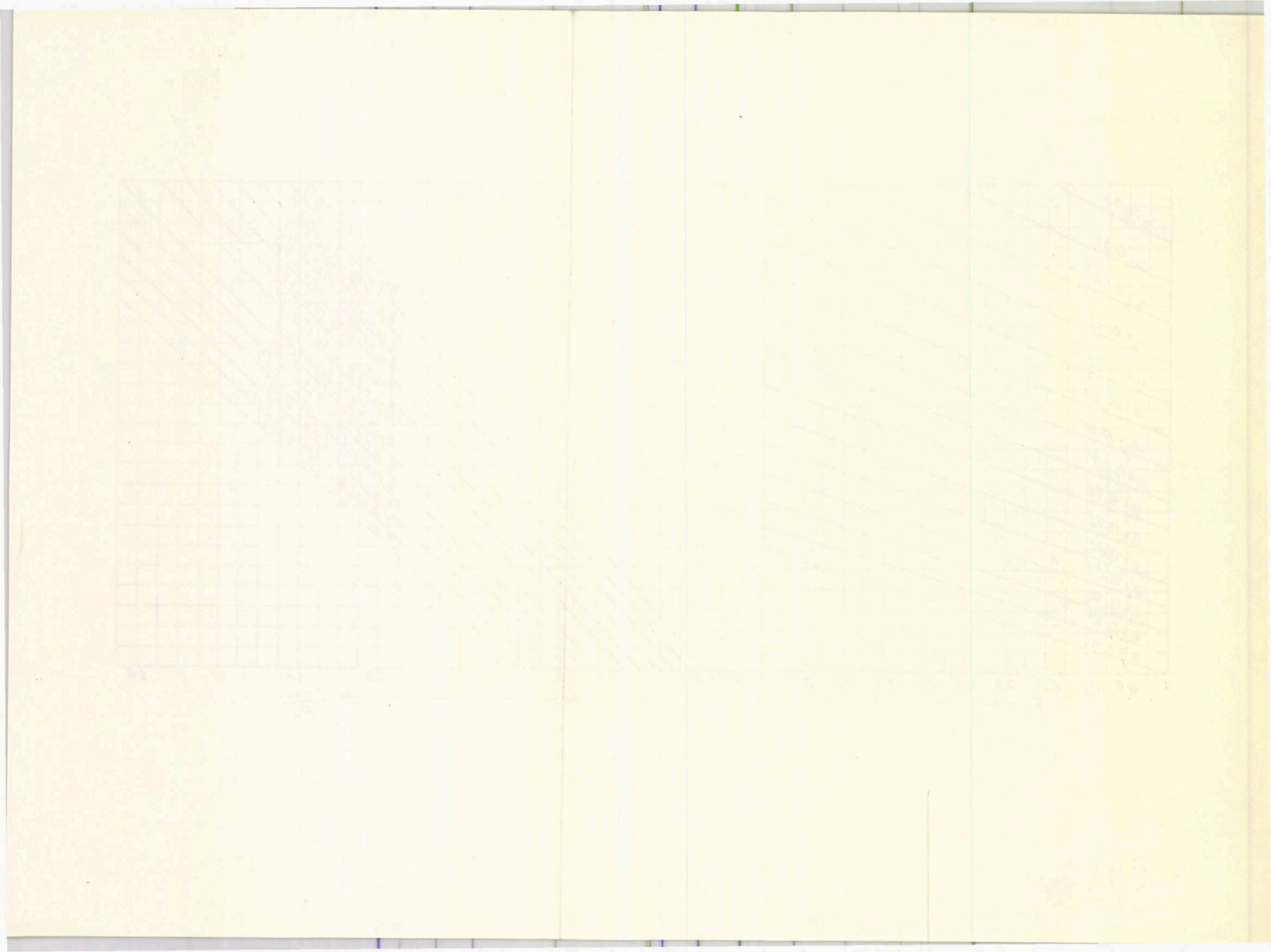


Fig. 3. — Graficele raportului $P_{max.}/P_n$ și ale coeficientului k_U.



Dacă postul de transformare ar fi montat în exterior ($\alpha_\theta = 1$), aplicînd relația (5) și refăcînd calculele rezultă $P_n = 3551$ kW, $S_n = 3945{,}5$ kVA (pentru același factor de putere 0,9) și

$$\alpha_{ss} = \left(1 + \alpha_3 + \frac{\alpha_\theta P_n - P_{\max v}}{\alpha_\theta P_n}\right)\alpha_\theta - 1 = 12{,}62\%.$$

Cu aceleași date de mai sus, utilizînd graficele din fig. 3 se obține $P_{\max i}/P_n = 1{,}126$ și considerînd $P_{\max i} = 4\,000$ kW rezultă $P_n = 3\,550$ kW, pentru $\alpha_\theta = 1{,}00$ (a se urmări traseul $PABC$ din fig. 3).

În cazul unui regim termic diferit de cel normal, de exemplu $\alpha_\theta = 0{,}93$, pentru aceleași valori ale lui k_u, a și $P_{\max i}$, se obține $P_{\max i}/P_n = 1{,}0474$ și $P_n = 3\,820$ kW (a se urmări traseul $PADE$). În fine din (10) rezultă că $\alpha_{ss} = 12{,}6\%$ pentru $\alpha_\theta = 1{,}00$ și $\alpha_{ss} = 4{,}74\%$, pentru $\alpha_\theta = 0{,}93$.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de utilizări electrice
și automatizări

BIBLIOGRAFIE

1. Baptidanov L. N., Tarasov V. I., *Echipamentul electric al centralelor și stațiilor electrice*. Vol. **I**, EES, Buc., 1956, (trad. din l. rusă).
2. * * * *Manualul inginerului electrician*. Vol. **VII**, Ed. tehn., Buc., 1958.
3. Баптиданов Л. Н., Тарасов В. И., *Электрические сети и станции*. М., 1963.
4. * * * *Alimentarea cu energie electrică a întreprinderilor industriale*. Ed. tehn., Buc., 1965.

SUR LA DÉTERMINATION DE LA PUISSANCE DES TRANSFORMATEURS DES STATIONS DE TRANSFORMATION DES ENTREPRISES INDUSTRIELLES

(Résumé)

On présente une étude concernant la détermination de la puissance des transformateurs des stations de transformation des entreprises industrielles qui tient compte de la puissance demandée par l'entreprise, des courbes de charge quotidienne et annuelle et de la température moyenne du milieu ambiant. En utilisant la relation générale établie pour le calcul de la puissance des transformateurs on a construit un graphique à l'aide duquel on peut simplifier d'une manière notable la détermination de la puissance nominale des transformateurs.

Explication des figures

Fig. 1. — La courbe quotidienne de charge pour une journée de travail : —— journée d'hiver, - - - journée d'été.
Fig. 2. — La courbe annuelle de charge.
Fig. 3. — Les graphiques du rapport $P_{\max i}/P_n$ et du coefficient k_u .

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 3—4, 1969

SECŢIA IV

MECANICĂ TEHNICĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 3—4, 1969

СЕКЦИЯ IV

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 3—4, 1969

SECTION IV

MECHANICAL ENGINEERING

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 513 7 ; 621—18

ALGORITMUL DE FORMARE A CURBELOR DE INFĂŞURARE CIRCULARĂ LA MECANISME PLANE FORMATE DIN LANŢURI CINEMATICE COMPLEXE CU APLICAŢII LA COMANDA CIFRICĂ A MAŞINILOR UNELTE

DE

D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI şi N. ORLANDEA

Acad. MAURO PICONE
cu ocazia conferirii titlului
de doctor h. c.
al Universităţii din Bucureşti

1. Într-un şir de lucrări anterioare, iniţiate de primul dintre autori [1], dezvoltate apoi în colaborare cu unii dintre elevii săi [2] şi continuate în parte de alţi cercetători [3] ... [5], s-au rezolvat probleme de analiza şi sinteza mecanismelor, folosind drept elemente generatoare în vederea trasării de curbe sau suprafeţe, date dinainte sau căutate, varietăţi liniare, în particular drepte sau plane, cercuri sau sfere, conice sau cuadrice etc. Astfel, aparatul matematic de investigaţie ştiinţifică, în parte clasic, cunoscut sub numele de geometrie proiectivă-tangenţială (P o n c e l e t), geometrie cerclată (M a s c h e r o n i) etc. a căpătat o largă utilizare într-un nou domeniu de vădită importanţă tehnico-industrială, numit teoria mecanismelor şi a maşinilor, adăugîndu-se la alte iniţiative anterioare de a se folosi în studiul mecanicii aplicate numerele complexe şi alte algebre pe corpul real [6], [7] (printre care cuaternionii şi cuaternionii duali), calculul matriceal şi tensorial [8], [9], acceleraţiile de ordin superior [10], [11] ş.a. Uzul sistematic în teoria mecanismelor şi a maşinilor al acestor aparate matematice a condus la elaborări de metode noi, numite respectiv *metoda tangenţială, metoda corpurilor numerice hipercomplexe, metoda matriceală-tensorială* şi *metoda acceleraţiilor reduse de ordin şi specie oarecare*, utilizate de diferiţi autori din ţară şi de peste hotare [12] ... [16].

În cele ce urmează se expune, cu mai multe detalii, ţinînd seama de conţinutul unei note a autorilor aflată sub tipar în altă parte, algortimul de formare a curbelor de înfăşurare circulară la mecanismele plane formate din lanţuri cinematice complexe, cu unele aplicaţii la comanda cifrică a maşinilor unelte.

2. Se consideră un mecanism desmodrom cu k grade de libertate (fig. 1). Fie $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_k(t)$ parametrii lagrangieni cunoscuţi, funcţii de timp, care determină poziţia mecanismului la un moment dat. Fie (C) un cerc de rază r, de ecuaţie în sistemul fix XOY

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = r^2, \tag{1}$$

legat invariabil de elementul n al mecanismului considerat. Coordonatele X_0, Y_0 ale centrului M al lui (C) se pot scrie sub forma

$$X_0 = \sum_{i=1}^{n} l_i \cos \varphi_i, \quad Y_0 = \sum_{i=1}^{n} l_i \sin \varphi_i, \tag{2}$$

unde prin $l_i = l_i [q_1(t), \ldots, q_k(t)]$ şi $\varphi_i = \varphi_i [q_1(t), \ldots, q_k(t)]$ s-au notat respectiv lungimile elementelor mecanismului şi unghiurile orientate pe care le închid elementele mecanismului cu versorul corespunzător **i** relativ la elementul i.

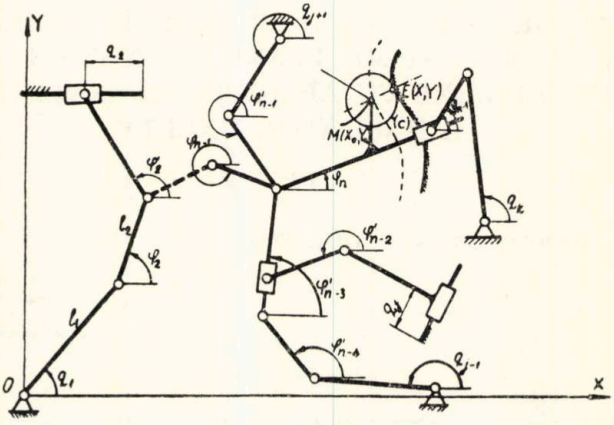


Fig. 1

Derivînd relaţia (1) în raport cu timpul, se obţine

$$(X - X_0) \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial X_0}{\partial q_j} \dot{q}_j + (Y - Y_0) \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial Y_0}{\partial q_j} \dot{q}_j = 0. \tag{13}$$

Explicitînd cu ajutorul relaţiilor (1) şi (3) pe X şi Y, rezultă ecuaţiile parametrice ale infăşurătorii cercului (C)

$$\begin{cases} X = X_0 \pm r \sqrt{\dfrac{\left(\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\partial Y_0}{\partial q_j} \dot{q}_j\right)^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\partial X_0}{\partial q_j} \dot{q}_j\right)^2 + \left(\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\partial Y_0}{\partial q_j} \dot{q}_j\right)^2}}, \\ Y = Y_0 \pm r \sqrt{\dfrac{\left(\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\partial X_0}{\partial q_j} \dot{q}_j\right)^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\partial X_0}{\partial q_j} \dot{q}_j\right)^2 + \left(\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\partial Y_0}{\partial q_j} \dot{q}_j\right)^2}}, \end{cases} \tag{3}$$

unde derivatele şi sumele de sub radical au următoarea semnificaţie:

$$(4)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial X_0}{\partial q_j}\dot{q}_j = V_{X_0} = \sum_{i=1}^{n}\left[\cos\varphi_i \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial l_i}{\partial q_j}\dot{q}_j - l_i \sin\varphi_i \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right], \\ \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial Y_0}{\partial q_j}\dot{q}_j = V_{Y_0} = \sum_{i=1}^{n}\left[l_i \cos\varphi_i \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sin\varphi_i \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial l_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right], \end{cases}$$

V_{X_0} și V_{Y_0} fiind proiecțiile vitezei centrului M al cercului (C) pe cele două axe ale sistemului cartezian considerat.

Introducînd relațiile (2) și (4) în (3), rezultă ecuația înfășurătorii în cazul cel mai general al mecanismelor plane.

3. Din punct de vedere practic, problema prezintă interes dacă este formulată în felul următor: fiind dată o curbă

$$(5)\qquad X = X(p), \quad Y = Y(p),$$

continuă pe intervalul $[p_1, p_2]$, avînd cel puțin derivate de ordinul 1 și 2 pe intervalul considerat, să se înfășoare această curbă cu ajutorul unui cerc a cărui rază $r \leqslant \rho_{min}$, ρ_{min} fiind raza de curbură minimă în sens pozitiv pe același interval.

Ținînd seama de faptul ca normalele la curba înfășurată trec prin centrul cercului înfășurător, ecuațiile curbei echidistante de curba (5) se pot scrie sub forma

$$(6)\qquad X_0(p) = X(p) \mp r\frac{Y_p}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}}, \qquad Y_0(p) = Y(p) \pm r\frac{X_p}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}},$$

unde prin X_p și Y_p s-au notat derivatele în raport cu parametrul p ale funcțiilor din sistemul de ecuații parametrice (5).

Pentru ca curba dată (5) să poată fi înfășurată de cercul (C), este necesar și suficient ca traiectoria (2) să coincidă cu curba echidistantă (6), cu alte cuvinte să se poată scrie

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{n} l_i \cos\varphi_i = X(p) \mp r\frac{Y_p}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}}, \quad \sum_{i=1}^{n} l_i \sin\varphi_i = Y(p) \pm r\frac{X_p}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}}.$$

Ținînd seama de expresiile lui l_i și φ_i, precum și de ecuațiile (5), ecuațiile (7) se pot scrie sub forma

$$(8)\qquad F_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, p) = 0, \quad F_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, p) = 0.$$

Sistemul (8) permite determinarea, pentru un p dat, numai a două coordonate generalizate, restul de $k - 2$ putîndu-se adopta arbitrar din condiții de optimizare sau alte condiții în așa fel ca să fie satisfăcută condiția ce rezultă din teorema de existență a funcțiilor implicite. Astfel, dacă se vor calcula coordonatele q_j și q_{j+1}, se vor putea adopta celelalte $k - 2$ coordonate generalizate în așa fel încît

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_j}\frac{\partial F_2}{\partial q_{j+1}} - \frac{\partial F_1}{\partial q_{j+1}}\frac{\partial F_2}{\partial q_j} \neq 0. \tag{9}$$

Interpretarea ce se poate da inegalității (9) în teoria mecanismelor constă în faptul că pentru înfășurarea unei curbe plane sînt suficiente mecanismele cu două grade de libertate, mișcarea lor fiind determinată, să zicem, de q_1 și q_2. Cele mai raționale lanțuri cinematice cu ajutorul cărora se pot forma mecanisme cu două grade de mobilitate sînt grupele de clasa a II-a și ordinul doi, denumirile adoptîndu-se din clasificarea lui Assur. În acest caz relațiile (8) devin

$$F_1(q_1, q_2, p) = 0, \quad F_2(q_1, q_2, p) = 0, \tag{10}$$

iar (9) se transcrie acum sub forma

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1}\frac{\partial F_2}{\partial q_2} - \frac{\partial F_1}{\partial q_2}\frac{\partial F_2}{\partial q_1} \neq 0, \tag{11}$$

permițîndu-se astfel calculul coordonatelor generalizate

$$q_1 = q_1(p), \; q_2 = q_2(p).$$

Este evident că, dacă inegalitatea (11) nu este îndeplinită, mecanismul nu a fost bine dimensionat.

4. În cele ce urmează se propune o sinteză de mecanisme cu două grade de libertate care răspunde la problematica de mai sus.

Se consideră o curbă echidistantă Γ și un pol P de coordonate $(-a, -b)$ (fig. 2). Modulul razei vectoare a unui punct oarecare de pe curba Γ față de polul P este dat prin

$$R = \sqrt{(X_0 + a)^2 + (Y_0 + b)^2}. \tag{12}$$

Orice vector variabil poate fi considerat în plan ca fiind suma a doi vectori **A** și **B**, dacă aceștia sînt bine dimensionați. Pentru dimensionarea modulilor A și B se vor pune condițiile $A + B \geqslant R_{max}$ și $A - B \leqslant R_{min}$, din care rezultă

$$B \geqslant \frac{1}{2}(R_{max} - R_{min}), \quad R_{max} - B \leqslant A \leqslant B + R_{min}. \tag{13}$$

Determinarea mărimilor R_{max} și R_{min} de care avem nevoie se face ținînd seama de derivata relației (12) în raport cu p:

$$[(X_0 + a)^2 + (Y_0 + b)^2]^{-\frac{1}{2}}\left[(X_0 + a)\frac{dX_0}{dp} + (Y_0 + b)\frac{dY_0}{dp}\right] = 0. \tag{14}$$

Rezolvînd ecuația (14) în raport cu p, se pot ivi două situații referitoare la determinarea lui R_{max} și R_{min}, în ipoteza că se înfășoară doar o porțiune din curba considerată:

a) Dacă valorile rădăcinilor ecuației (14) se încadrează între valorile limită p_1 și p_2 corespunzătoare punctelor extreme $E_1'(p_1)$ și $E_1'(p_2)$ (fig. 2), se calculează valorile lui R pentru aceste rădăcini, care vor da astfel R_{max} și R_{min}, rezultate din comparația prealabilă cu valorile lui R corespunzătoare lui p_1 și p_2.

b) Dacă între valorile p_1 și p_2 nu există nici o rădăcină a ecuației (14), rezultă că R_{max} și R_{min} se găsesc date nemijlocit de p_1 și p_2.

În cazul cînd curba considerată este continuă și închisă, valorile lui R_{max} și R_{min} pot fi determinate numai cu ajutorul rădăcinilor ecuației (14).

Menționăm că adeseori este suficient a se determina valorile R_{max} și R_{min} pe cale grafică, fără a fi influențată prin aceasta precizia de funcționare a mecanismului.

Deoarece mișcarea vectorului **B** determină și mișcarea unui plan al bielei, se poate alege un alt vector **C** solidar legat cu **B**, la extremitatea căruia se introduce o cuplă rotoidă. În așa fel vectorii **A** și **C** determină o diadă (fig. 3). Atașînd acesteia însă o diadă identică în așa fel ca cele două diade să formeze un paralelogram (fig. 3), se obține un mecanism cu două grade de mobilitate, avînd coordonatele generalizate $q_1 = \varphi_1(p)$ și $q_2 = \varphi_2(p)$. Pentru un atare mecanism, dacă se ține seama și de fig. 3, relațiile (7) devin

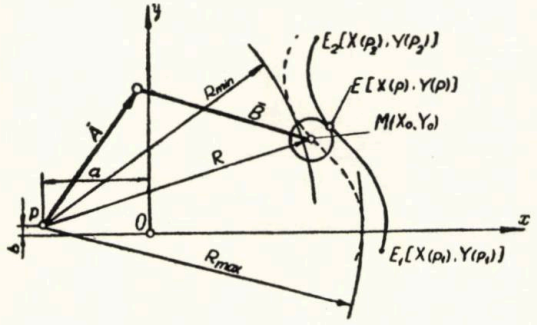


Fig. 2

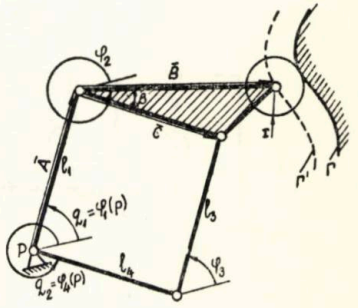


Fig. 3

$$(15)\quad \begin{cases} l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 = X(p) \pm r \dfrac{Y_p}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}}, \\ l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 = Y(p) \mp r \dfrac{X_p}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}}. \end{cases}$$

Acestui sistem i se mai poate atașa relația

$$(16)\qquad \varphi_4 = \varphi_2 - \beta,$$

deoarece, datorită paralelogramului format în figură, are loc $\varphi_4 = \varphi_2 - \beta$ și $\varphi_1 = \varphi_3$.

Dacă cercul din fig. 3 se materializează printr-o piatră de rectificat, mecanismul astfel dimensionat poate constitui o unitate de execuţie a unei maşini de rectificat profile. Ţinînd seama de faptul că în aceste situaţii rezultă pentru elementele motoare legi de mişcare oricît de complicate, se pune problema acţionării elementelor motoare. Acest lucru este posibil cu ajutorul motoarelor pas cu pas. Atare motoare pot fi comandate de către impulsuri a căror frecvenţă trebuie să fie proporţională cu datele ce se obţin din calculul corespunzător legilor de mişcare date prin sistemul (15).

5. Cele menţionate mai sus, l-au condus pe ultimul dintre autori ca în urma studiilor în cadrul specializării la catedra condusă de primul dintre autori la Institutul politehnic din Iaşi, să imagineze o maşină de rectificat profile, ca în fig. 4.

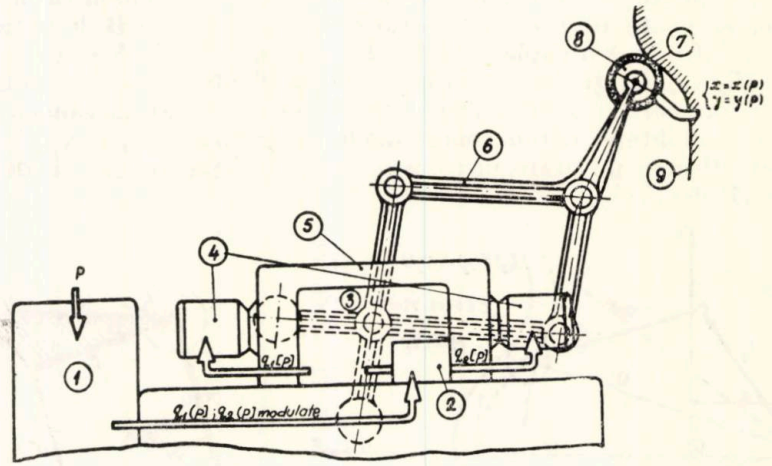


Fig. 4

Funcţionarea acestei maşini decurge astfel. Relaţiile (15), transcrise într-un limbaj codificat, să zicem într-una din cele mai recente variante de ALGOL sau FORTRAN, se introduc într-o maşină electronică cifrică de calcul (*1*) (fig. 4), care calculează pentru seria de valori date lui p valorile lui $q_1(p)$ şi $q_2(p)$, pe care apoi le transformă în impulsuri de frecvenţă corespunzătoare. Aceste impulsuri fie că se înscriu pe o bandă perforată sau magnetică şi apoi se introduc în dispozitivul (*2*), fie că se introduc direct în calculatorul (*1*), ajungînd la dispozitivul de amplificare (*3*). Semnalele de intrare astfel obţinute se distribuie apoi la cele două motoare pas cu pas care le transformă în viteze unghiulare de rotaţie corespunzătoare. Motoarele pas cu pas acţionează cîte un angrenaj melcat duplex destinat evitării jocurilor. Montarea este făcută în reductorul (*5*). Roţile melcate au menirea de a acţiona elementele motoare ale mecanismului (*6*), iar piatra (*8*), acţionată de turbina (*7*), înfăşoară profilul (*9*).

Datorită dispozitivului de reducție (5) eroarea de rugozitate care apare ca urmare a acționării discrete a motoarelor electrice pas cu pas este sub 10^{-5} mm pentru rapoartele de transmisie uzuale ale angrenajelor melcate.

6. În cele ce urmează se expune rezolvarea sistemului (15), care reclamă, datorită necesității de a se lua un număr mare de valori pentru p, folosirea mașinilor electronice digitale de calcul, transcriindu-se etapele de rezolvare în limbajul ALGOL.

Pentru o valoare dată lui p, relațiile (15) se pot scrie

$$l_1 \cos\varphi_1 = a - l_2 \cos\varphi_2, \quad l_1 \sin\varphi_1 = b - l_2 \sin\varphi_2 \tag{16}$$

și, în consecință, după ridicare la pătrat și adunare membru cu membru se obține $a \sin\varphi_2 + b \cos\varphi_2 = t$, sau

$$a \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi_2} + b \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi_2} = t,$$

unde $t = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + l_2^2 - l_1^2)/l_2$.

După o serie de transformări rezultă

$$(t - b) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi_2 - 2a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_2 + t - b = 0, \tag{17}$$

de unde $q \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi_2 - 2a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_2 + q = 0$, q fiind dat prin $q = t - b$ și, în definitiv,

$$\varphi_2 = 2 \operatorname{arctg} (a \pm \sqrt{a^2 - q^2}) \tag{18}$$

și, în mod analog și φ_1.

Programarea ALGOL [17] se prezintă astfel:

Procedure REZ. SIST. (n, p, l_1, l_2, r_1, x, y) rezultat: (φ_1, φ_2)
Value p, l_1, l_2, r, n; **integer** n; **real** l_1, l_2, r;
real procedure x, y ; **array** φ_1, φ_2, p;
begin real NUMIT, a, b, c, q, t, u; **integer** i, j,;
for $j := 1$ **stop** 1 **until** n **da**;

begin $t := p[j]$

NUMIT := $s\ q\ r\ t\ (y^2(t) + x^2(t))$;

for i: 1, 2 **da**;

begin $a: x(t) + (-1)^i \times r \times y(t)$ /NUMIT;
$b: y(t) + (-1)^{i-1} \times r \times x(t)$ /NUMIT;
$q: (a^2 + b^2 + l_2^2 - l_1^2)/(2 \times l_2) - b$;
$u: a^2 - q^2$;
if $u \geqslant 0$ **then** $u: sqrt(u)$ **else gata** E;
$\varphi_2[p, i]; = 2 \times \arctan(a - u)$;
$c: (a - l_2 \times \sin(\varphi_2[t, i])) / l_1$;
$u: 1 - c^2$;
if $u \geqslant 0$ **then** $u: sqrt(u)$ **else gata** E;
$\varphi[t, i]: 2 \times \arctan(1 - u)$;
E: **end**
end
end.

Primită la 1 XI 1969

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de matematici II
(în prezent la Universitatea din Alberta, Edmonton, Canada)
şi
Institutul politehnic, Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Mangeron D., *Study of Mechanisms by means of Projective Coordinates.* Lucrările Sesiunii ştiinţifice jubiliare a Institutului de Mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.S.R., Buc., 4–7 iulie 1960, pp. 371–372.
2. Mangeron D., Topentcharov V. V., *Problèmes de la permanence des champs vectoriels intéressant la théorie des mécanismes et des machines.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1–2*, pp. 299–304.
3. Munteanu Gh., Orlandea N. ş.a., *Linear Enveloping Curves belonging to Plane Mechanisms with more Motive Elements Equations. Formation Algorithm using the Tangential Method and Applications* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, 3–4, pp. 319–322.
4. Orlandea N., *Contribuţii la sinteza mecanismelor pe baza algoritmului de formare a curbelor de înfăşurare liniară.* St. şi cerc. de mec. apl., 1969, **28**, *3*, pp. 731–745.
5. Беграр Э. Г., *К теории механизмов для огибания кривых и воспроизведения их подер.* Теория механизмов и машин, Изд. харьковского ун-та, 1969, *6*, стр. 116—120.
6. Mangeron D., Braier A., *Reprezentarea cîmpurilor de acceleraţii de ordin oarecare prin numere complexe.* Gaz. Mat. şi Fiz., Buc., s. A, 1955, *8*, pp. 535–540.
7. Braier A., *Utilizarea algebrelor pe corpul real în Mecanica vibraţiilor.* Teză de doctorat, Inst. polit. Iaşi, 1968.
8. Mangeron D., Drăgan C., *Asupra unei noi metode tensoriale de studiu a mecanismelor.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, **III (VII)**, *1–2*, pp. 150–164.
9. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., Drăgan C., *Allgemeine Theorie der sukzessiven Näherungen beim Getriebe- und Maschinenstudium auf Grund der Neuen*

Matrix-Tensor-Methode, im Hinblick auf die Anwendung von Rechenautomaten (II). Romanian J. Appl. Mech., 1968, **13**, pp. 981—996.
10. Манжерон Д., *К графо-аналитическим методам кинематики материальных систем.* ДАН СССР, 1955, **5**, стр. 798—799.
11. Mangeron D., Kozhevnikov S. N., *On the Dynamic Effects caused by Accelerations of Higher Order.* Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X** (**XIV**), *1—2*, pp. 243—254.
12. Manolescu N. I., ș.a., *Cinematica și cinetostatica mecanismelor.* Ed. tehn., Buc., 1958.
13. Лебедев П. А., *Аналитические методы исследования пространственных механизмов.* Гостехиздат, Л.—М., 1966.
14. Uicker J., Jr., *Velocity and Acceleration Analysis of Spatial Mechanisms Using* 4 × 4 *Matrices.* Northwestern University, Evanston, Ill., 1963.
15. Litvin F. L., *New Methods in Gear-Wheel Theory.* Conférence de Mécanique Appl., Acad. R.S.R., Résumés des travaux, Buc., 1965, pp. 95—99.
16. Mangeron D., Gamrékéli S., *Problèmes de l'élaboration des dispositifs mécano-électriques concernant la théorie des mécanismes et des machines.* Bul. Inst. polit. Iași, 1963, **IX** (**XIII**), *1—2*, pp. 303—312.
17. Legras J., L'ALGOL, *notation de l'informatique.* Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X** (**XIV**), *1—2*, pp. 47—52.

ALGORITHME DE GÉNÉRATION DES COURBES ENVELOPPÉES CIRCULAIREMENT PAR DES MÉCANISMES PLANS CONSTITUÉS DE CHAÎNES CINÉMATIQUES COMPLEXES ET APPLICATIONS AU CONTROLE DIGITAL DES MACHINES-OUTILS

(Résumé)

Les auteurs, tout en soulignant leur contribution au développement de la théorie des mécanismes cristallisée jusqu'aujourd'hui dans l'élaboration des dispositifs mécano-électriques assez différents [16], des méthodes des accélérations réduites d'ordre et d'espèce quelconque, matricielle-tensorielle et tangentielle, exposent dans cette Note un algorithme de génération des courbes enveloppées circulairement par des mécanismes plans constitués de chaînes cinématiques complexes. L'article se conclut par le dessin conçue par le dernier des auteurs à la suite de son stage de spécialisation auprès du premier, d'une machine-outil pour l'usinage des bordures des cames planes, considérées comme des courbes enveloppées circulairement, et on schématise par voie de l'ALGOL la programmation des calculs correspondants.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 513.7; 681.14

SINTEZA UNUI MECANISM CU FUNCŢIUNI MULTIPLE

DE

D. TUTUNARU şi N. IONIŢĂ

1. Consideraţii generale

Se expune o metodă pentru sinteza unui mecanism format astfel încît să permită rezolvarea, pe cale mecanică, a mai multor operaţii matematice folosite în probleme teoretice şi practice.

Metoda constă în alegerea unui mecanism de bază şi amplificarea acestuia prin grupe cinematice corespunzătoare. Mecanismul format astfel are gradul de mobilitate egal cu gradul de mobilitate al mecanismului de bază, deoarece grupele cinematice legate la acest mecanism au gradul de mobilitate egal cu zero.

Dacă se amplifică acest mecanism de bază cu grupe cinematice legate convenabil, el devine apt a executa cele mai diverse operaţii matematice.

2. Mecanismul de bază

Mecanismul de bază este un mecanism bielă manivelă (fig. 1) la care manivela de formă triunghiulară OAB este egală cu biela BCD. La acest mecanism s-a adăugat diada APC, obţinîndu-se rombul articulat $ABCP$.

Mecanismul astfel format realizează două condiţii geometrice fundamentale: egalitatea segmentelor OP şi PD variabile în timpul funcţionării mecanismului de bază şi egalitatea segmentelor OB şi BD constante în timpul mişcării.

În felul acesta, punctul P determină, în orice poziţie a mecanismului, mijlocul segmentului variabil DG, astfel că $OP = PD = PG$, iar punctul B este mijlocul segmentului constant DE, deci $OB = BD = BE$. S-a realizat astfel, diada „lamda" $GDOP$ cu dimensiuni variabile în timpul mişcării şi diada „lamda" $DEOB$ cu dimensiuni constante.

Ținînd seama de aspectul din figură, se pot stabili cîteva relații între dimensiunile elementelor.

În cazul cînd lungimile $OA = AB = BC = CD = AP = CP = a$, se poate scrie

(1) $$l^2 = 2a^2 (1 - \cos \gamma).$$

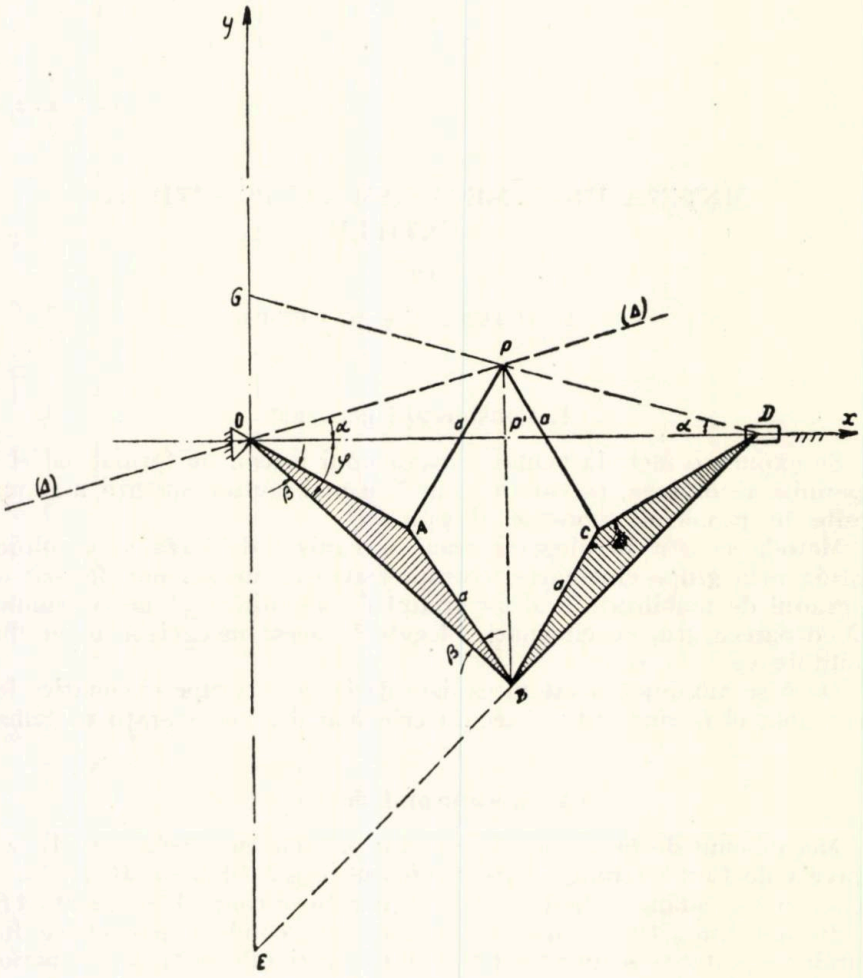


Fig. 1

O relație importantă din care rezultă că punctul P descrie o linie dreaptă (Δ) se stabilește scriind:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PP'}{OP'} = \frac{PB - P'B}{2a \cos \beta \cos \varphi} = \frac{2a \sin (\varphi + \beta) - 2a \cos \alpha \sin \varphi}{2a \cos \beta \cos \varphi} = \operatorname{tg} \beta.$$

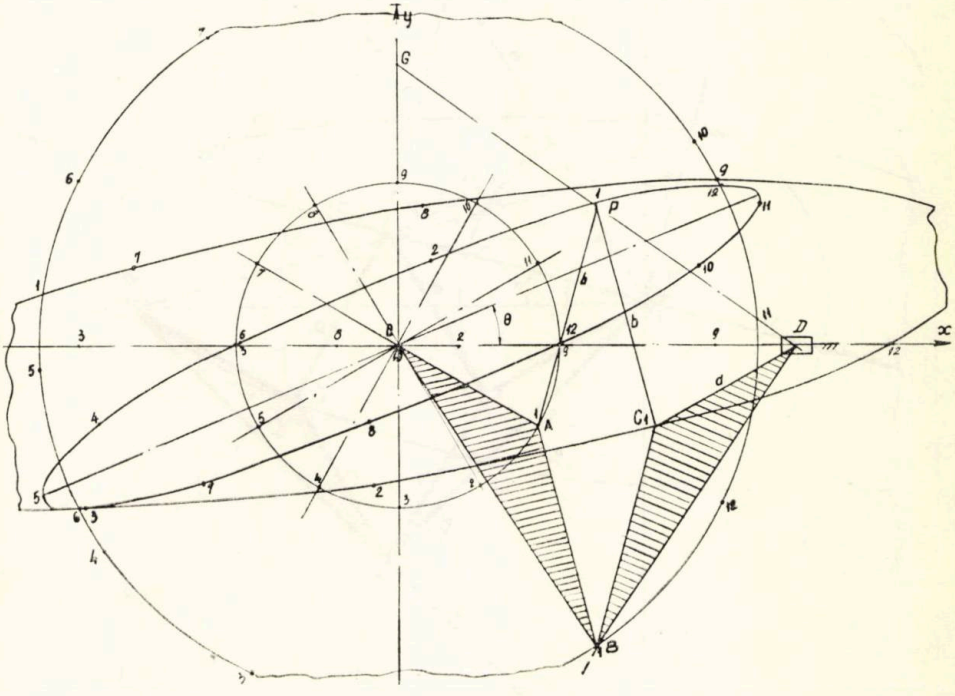


Fig. 2

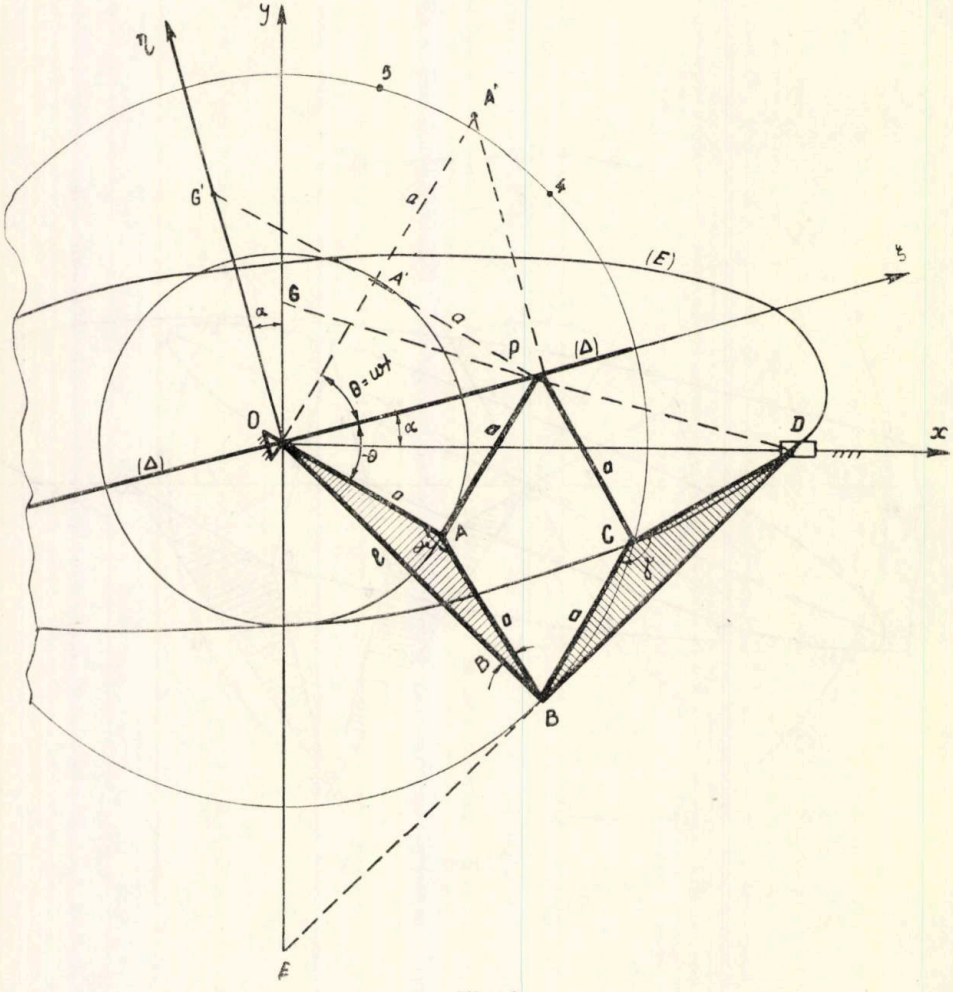


Fig. 3

În aceste condiții, mecanismul este un *mecanism rectiliniar*, punctul P descrie dreapta (Δ) care face unghiul α cu axa Ox, iar punctul C al bielei BCD descrie o elipsă, mecanismul fiind și *elipsograf*.

În cazul cînd dimensiunile diadelor adăugate sînt diferite, adică $a \neq b$ (fig. 2), mecanismul devine de asemenea un elipsograf.

3. Operații matematice

Dacă se adaugă diada $OA'P$ egală cu OAP (fig. 3) vectorul $\overrightarrow{OP}$ reprezintă suma geometrică a vectorilor $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OA'}$ care se rotesc în sens invers în jurul lui O, cu unghiul $\theta = \omega t$ față de axa $O\xi$.

De asemenea vectorul $\overrightarrow{PD}$ reprezintă suma geometrică a vectorilor $\overrightarrow{PC}$ și $\overrightarrow{CD}$ iar $\overrightarrow{OD}$ este rezultanta vectorilor $\overrightarrow{OP}$ și $\overrightarrow{PD}$. În acest fel se pot scrie următoarele relații vectoriale:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}, \quad \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PD}, \quad \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OD}. \tag{2}$$

Dacă în continuare se adaugă elementul $A'A'' = a$, se observă că punctul P este proiecția pe axa $O\xi$ a punctului A'' care se rotește în jurul lui O, astfel încît $OP = OA'' \cos\theta = 2a\cos\omega t$ și deci mecanismul a devenit un mecanism de sinus. Se pot scrie ecuațiile:

$$\begin{cases} \xi = 2a\cos\omega t, \\ \eta = 2a\sin\omega t \end{cases} \tag{3}$$

și

$$\begin{cases} x = 2a\cos(\omega t \pm \alpha), \\ y = 2a\sin(\omega t \pm \alpha). \end{cases} \tag{4}$$

Se observă că acestea sînt expresiile care caracterizează ecuațiile în funcție de frecvența unui sistem fizic (oscilații armonice).

După cum s-a arătat, mecanismul realizează condiția fundamentală $OP = PG = PD$, pe baza căreia se obține o transformare conformă prin funcția lui Jukowski:

$$z = \xi + \frac{q^2}{\xi}. \tag{5}$$

Prin amplificarea în continuare a mecanismului de bază cu grupe cinematice cu grad de mobilitate egal cu zero se poate ajunge la obţinerea altor curbe importante ca lemniscata, concoida, cardioida etc.

Primită la 15 V 1969

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
şi
Academia de Studii Economice, Bucureşti

LA SINTESI DI UN MECCANISMO CON FUNZIONI MULTIPLE

(Sunto)

Gli autori, prendendo le mosse dalla serie di risultati concernenti la sintesi di vari meccanisme che ne eseguiscono diverse operazioni matematiche, espongono un metodo di sintesi di un tale meccanismo (vedasi le fig. 1—3).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. K. 621.25

INDIREKTE METHODEN ZUR BESTIMMUNG DER ZIRKULATION BEI LAUFRÄDERN VON RADIALMASCHINEN

VON

AL. TODICESCU

1. Eines der Rechnungsverfahren für die Förderhöhe H_T bei Radialmaschinen mit einer endlichen Schaufelzahl, benützt die Formel der Zirkulation Γ_p rund um das Profil einer Schaufel, wo die Grundformel:

$$H_T = \frac{\omega}{2g} \frac{Z}{\pi} \Gamma_p \tag{1}$$

ist.

Die praktische Verwendung dieser Formel gibt aber Schwierigkeiten durch die Ermittlung der Zirkulation rund um die Schaufel, also die Verteilung der relativen Geschwindigkeiten an dem Profil.

2. Die Grundformel der Zirkulation

$$\Gamma_p = \oint \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{s} \tag{2}$$

für eine Schaufel kann zu einem einfachen Integral gebraucht werden:

$$\Gamma_p = \int_0^l (w_s - w_d)\,\mathrm{d}l\,, \tag{3}$$

wo w_s und w_d die Geschwindigkeiten auf den Saug- und Druckseiten der Schaufel, die Integration ist auf der Länge l durchgeführt (Abb. 1).

Für die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung w_s und w_d zeigt die Fachliteratur einige Berechnungsverfahren. Die praktische Anwendung dieser Verfahren ist aber sehr schwierig wofür sir nur für bestimmte konstruktive Formen der Schaufeln verwendbar ist:

Also für Kreisbogenschaufeln mit einem Radius R (Abb. 2) ist die Geschwindigkeitsverteilung auf der Normalen zu dem Kanal zwischen zwei Schaufeln:

$$w = e^{-\int_0^n \frac{dn}{R}} \left(w_d + 2\omega \int_0^n e^{\int_0^n \frac{dn}{R}} dn \right), \tag{4}$$

wo — mit $A = e^{\int_0^n \frac{dn}{R}}$

$$w = \frac{1}{A}\left(w_d + 2\omega \int_0^n A\, dn \right) \tag{5}$$

bezeichnet wurden.

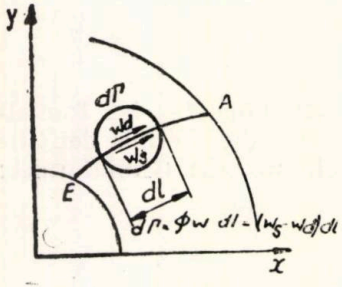


Abb. 1

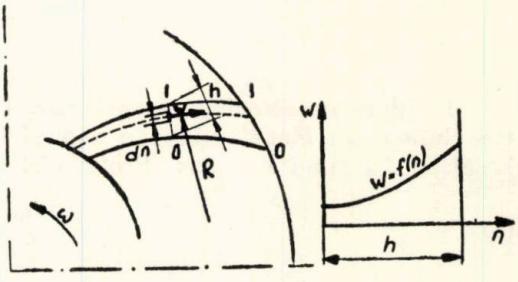


Abb. 2

Für die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung Längs der Scha u fel ist es notwendig die Breite des Kanals h, oder analytisch die Funktion $R = f(n)$ zu kennen.

Gewöhnlich ist diese Funktion:

$$\frac{1}{R} = a + bn, \tag{6}$$

wo $a = \frac{1}{R_0}$ und $b = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}\right) \Big/ h$, R_0 ist der Schaufelradius für $n = 0$ und R_1 für $n = h$.

Mir diesen Bemerkungen ergibt sich:

$$\int_0^n \frac{dn}{R} = an + \frac{b}{2} n^2, \tag{7}$$

oder

(8) $$A = e^{an + \frac{b}{2}n^2}.$$

Für $n \leqslant h \ll R$, als eine Reihe geschrieben wo die Glieder mit den n Potenzen grösser als 2 ausgeschlossen wurden ergibt sich:

(9) $$A \cong 1 + an^2 + \frac{n^2}{2}(a^2 + b).$$

Führt man in Formel (5) ein, nach Integrierung mit Benützung der Bezeichnungen:

(10) $$B = 1 + \frac{h}{2}\frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1},$$

(11) $$C = 1 + \frac{h}{6}\frac{R_0 + 2R_1}{R_0 R_1},$$

erhält man folgendes:

(12) $$w_s = \frac{1}{B}(w_d + 2\omega Ch).$$

Wenn man annimt dass die Verteilung der Geschwindigkeiten auf der Länge des Kanals h linear ist, folgt

(13) $$\bar{w} = \frac{w_s + w_d}{2}$$

und auch

(14) $$w_0 \cong 2\frac{B\bar{w} - C\omega h}{1 + B}.$$

Der Mittelwert der Geschwindigkeit $\bar{w}$ kann aus der Stetigkeitsgleichung berechnet werden:

(15) $$\bar{w} = \frac{Q}{Zbh}.$$

Mit diesen Bedingungen, ermöglicht sich die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung w_s und w_d durch folgende Punkte wird als Endresultat ein Diagramm (Abb. 3) erhalten mit den Achsen: Geschwindigkeit w und Schaufellänge l.

Die Zirkulation Γ_p kann jetzt durch Planimetrierung der Fläche zwischen den 2 Kurven erhalten werden.

3. Anlässlich dieser Situation, werden in der gegenwärtigen Arbeit einige einfachere Verfahren für die Bestimmung der Zirkulation vorgeschlagen.

Diese Verfahren benötigen nicht so viele Rechnungen und haben eine grosse Genauigkeit. Die Haupthypothese ist der radiale Eingang in den Läufer ($\alpha_1 = 90°$).

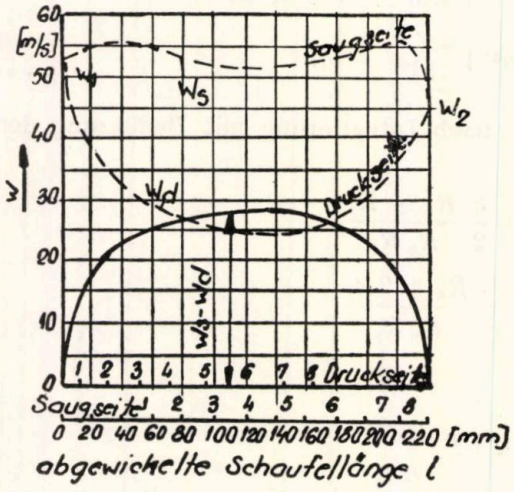


Abb. 3

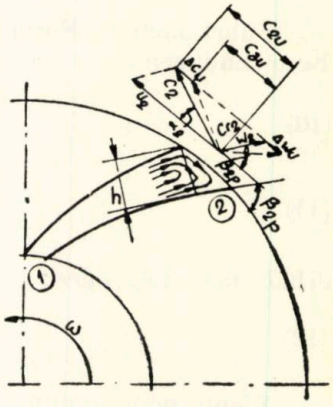


Abb. 4

Eine erste Rechnungsmethode besteht aus der Gleichung der Föderhöhe H_T welche mit der Euler-schen Gleichung bestimmt wurde, und der Formel (1)

$$H_T = \varepsilon \frac{1}{g} u_2 C_{2n} = \frac{\omega}{2g} \frac{Z}{\pi} \Gamma_p , \tag{16}$$

wo $\varepsilon = C_{3u}/C_{2u}$ der Betätigungskoeffizient (nach Eck) ist.

Aus dem Geschwindigkeitsdreieck für den Ausgang (Abb. 4) folgt:

$$\begin{aligned} C_{2u} &= u_2 - w_2 \cos \beta_{2p} = u_2 - \frac{Q}{Z b_2 h_2} \cos \beta_{2p} = \\ &= u_2 - \frac{Q}{b_2(\pi d_2 - Z S_2)} \operatorname{ctg} \beta_{2p} . \end{aligned} \tag{17}$$

Also

$$\begin{aligned} \Gamma_p &= \varepsilon \frac{2\pi}{\omega Z} u_2 C_{2u} = \varepsilon \frac{2\pi}{\omega Z} u_2 \left(u_2 - \frac{Q}{Z b_2 h_2} \cos \beta_{2p} \right) = \\ &= \varepsilon \frac{2\pi}{\omega Z} u_2 \left[u_2 - \frac{Q}{b_2(\pi d_2 - Z S_2)} \operatorname{ctg} \beta_{2p} \right] \end{aligned} \tag{18}$$

und mit $u_2 = \omega d_2/2$,

$$(19)\quad \Gamma_p = \varepsilon \frac{\pi d_2}{Z}\left(u_2 - \frac{Q}{Z b_2 h_2}\cos\beta_{2p}\right) = \varepsilon \frac{\pi d_2}{Z}\left[u_2 - \frac{Q}{b_2(\pi d_2 - Z S_2)}\operatorname{ctg}\beta_{2p}\right].$$

4. Wenn man annimt dass die allgemeine Formel der Zirkulation

$$(20)\quad \Gamma_p = k_1 n + k_2 Q$$

ist, wo das erste Glied die kreisende Bewegung ohne Durchfluss gibt und das zweite Glied die Durchflussströmung durch den ruhenden Läufer [2], folgt das die Formel (19) die allgemeine Situation zeigt. Die zwei Konstanten sind also:

$$(21)\quad k_1 = \varepsilon \frac{(\pi d_2)^2}{60Z},$$

$$(22)\quad k_2 = -\varepsilon \frac{\pi d_2 \cos\beta_{2p}}{Z^2 b_2 h_2} = -\varepsilon \frac{\pi d_2 \operatorname{ctg}\beta_{2p}}{Z b_2(\pi d_2 - Z S_2)}.$$

5. Das zweite Rechnungsverfahren besteht auf der Hypothese von Stodola über die Strömungsbewegung durch den Läufer einer Radialmaschine.

Wenn man den Druckunterschied zwischen den zwei Seiten des Kanals der durch die Schaufeln und den Läufer erhalten wurde, mit Δp bezeichnet, dann kann die Föderhöhe H_T

$$(23)\quad H_T = \frac{Z\omega}{\gamma Q}\int_{r_1}^{r_2} \Delta p\, b r\, \mathrm{d}r$$

sein, wo r — der konstruktive Radius des Läufers ist. Wenn man diese Formel mit (1) gleichsetzt folgt

$$(24)\quad \Gamma_p = \frac{2\pi}{\rho Q}\int_{r_1}^{r_2} \Delta p\, b r\, \mathrm{d}r.$$

Macht man die Aproximation, dass die Druckverteilung konstant auf der ganzen Länge des Kanals [1] bleibt, und bezeichnet das $\int_{r_1}^{r_2} b r \mathrm{d}r = S_0$, folgt

$$(25)\quad \Gamma_p = \frac{2\pi}{\rho Q}\Delta p S_0.$$

Aus der Momentegleichung der Druckkräfte mit der Bezeichnung $\Delta p_t = \gamma H_T$ für den totalen theoretischen Druck der vom Läufer erhalten ist bekommt man:

$$M_d = \frac{H_T \gamma Q}{\omega} = \frac{\Delta p_t Q}{\omega} = Z \Delta p S_0, \tag{26}$$

also

$$\Delta p = \frac{Q}{\omega Z S_0} \Delta p_t. \tag{27}$$

Aber

$$\Delta p_t = \rho u_2 C_{3u} = \rho u_2 (C_{2u} - \Delta C_u), \tag{28}$$

wo ΔC_u — die Abweichung der absoluten Geschwindigkeit ist, weil die Schaufelzahl endlich ist (Abb. 4). Nach Stodola:

$$\Delta C_u = \frac{\pi r_2}{Z} \sin \beta_{2p} \omega = u_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2p}. \tag{29}$$

Nach Einsetzung und analytischer Ausführung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Gamma_p &= \frac{\pi d_2}{Z} \left[u_2 \left(1 - \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2p} \right) - \frac{Q \cos \beta_{2p}}{Z b_2 h_2} \right] = \\ &= \frac{\pi d_2}{Z} \left[u_2 \left(1 - \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2p} \right) - \frac{Q \operatorname{ctg} \beta_{2p}}{b_2 (\pi d_2 - Z S_2)} \right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Auch diese Formel hat eine äquivalente Form wie der allgemeine Ausdruck (20) da die zwei Koeffizienten

$$k_1' = \frac{(\pi d_2)^2}{60 Z} \left(1 - \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2p} \right) \tag{31}$$

und

$$k_2' = - \frac{\pi d_2 \cos \beta_{2p}}{Z^2 b_2 h_2} = - \frac{\pi d_2 \operatorname{ctg} \beta_{2p}}{Z b_2 (\pi d_2 - Z S_2)} \tag{30'}$$

sind.

6. Eine Kontrolle der analytischen Struktur die für die Zirkulation erhalten wurde ist durch die Gleichsetzung der Formeln (19) und (30) möglich, welches den Koeffizient ε nach der Stodola-Formel als Ergebniss hatt

$$\varepsilon = 1 - \frac{u_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2p}}{u_2 - \frac{Q}{Z b_2 h_2} \cos \beta_{2p}} = 1 - \frac{u_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2p}}{u_2 - \frac{Q \operatorname{ctg} \beta_{2p}}{b_2 (\pi d_2 - Z S_2)}}. \tag{32}$$

7. In der Formel (19) der Zirkulation befindet sich ausser den konstruktiven Grössen des Läufers auch der Antriebskoeffizient ε. Für diesen Koeffizienten werden in der Fachliteratur verschiedene Ausdrücke gegeben die mit einfacheren oder allgemeinen Hypothesen erhalten worden sind. Es ergibt sich also dass die Zirkulation von der Formel des Antriebskoeffizienten abhängig ist.

Für diesen Koeffizienten werden in Tabelle 1 die verschiedenen Relationen gezeigt.

8. Für die Nachprüfung des Genauigkeitsgrades der vorgeschlagenen Verfahren wird weiter eine komparative Rechnung für einen Kreiselkompressor gezeigt, mit folgenden Betriebsbedingungen: Durchflussmenge $Q = 1{,}6$ m³/sec, $n = 3000$ U/min und $Z = 18$ Schaufeln.

Die konstruktiven Grössen und die Geschwindigkeitsverteilung werden in Abb. 3 und Abb. 5 gezeigt.

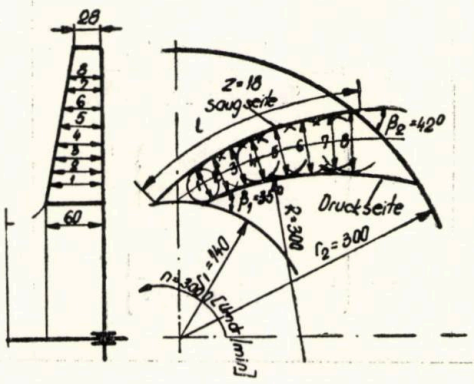


Abb. 5

Die Zirkulation die mit der Geschwindigkeitsverteilung (3) berechnet wurde, hat den Wert 5,5 m²/s.

In Tabelle 1 werden die Werte gezeigt die mit der Formel (19) berechnet wurden mit verschiedenen Berechnungen des Antriebskoeffizienten ε (see auch die Tabelle 2).

Tabelle 1

Γ_p [m²/s] Formel (3)	Γ_p Formel (19)			
	Stodola I	Stodola II	Eck	Pfleiderer
5,5	5,72	5,18	5,52	5,55
Abweichung in % von Formel (3)	+4	−5,6	+ 0,3	+1

Die Ergebnisse zeigen eine Veränderung der Zirkulationsgrösse die durch die gezeigten Formeln berechnet wurden, zwischen $-5{,}6\%$ und $+4\%$; annehmbar durch die Wahl des Antriebskoeffizienten. Die kleinste Abweichung erfolgt mit der Benützung der Formeln nach B. Eck und C. Pfleiderer ($+0{,}3\ldots1\%$).

Tabelle 2

Meistgebrauchter Beziehungen fur die Berechnung des Antriebskoeffizienten ε

Verfasser	Beziehung	Bemerkungen
A. Stodola [5], [1]	$\varepsilon=\left(\frac{1+\pi d_2^2 b_2}{8ZS_0}\sin\beta_{2p}\right)^{-1}$	Allgemeine Beziehung für den Koeffizienten ε
A. Stodola [5]	$\varepsilon=1-\frac{(u_2\pi/Z)\sin\beta_{2p}}{u_2-[Q/(Zb_2h_2)]\cos\beta_{2p}}$	
B. Eck [4]	$\varepsilon=\left\{1+\frac{\pi\sin\beta_{2p}}{Z[1-(r_1/r_2)^2]}\right\}^{-1}$	
C. Pfleiderer [6]	$\varepsilon=\left\{1+\frac{2\psi}{Z[1-(r_1/r_2)^2]}\right\}^{-1}$	$\psi\cong 0{,}6(1+\sin\beta_{2p})$

9. Als Schlussfolgerung, kann man sagen dass die vorgeschlagenen Formeln welche in der gegenwärtigen Arbeit gezeigt wurden, eine rapide und genaue Bestimmung der Zirkulation bei Radialmaschinen ermöglichen, ohne die Geschwindigkeitsverteilung kennen zu müssen.

Durch diesen Weg wird die direkte Bestimmung der Förderhöhe H_T, ermöglicht ohne die Geschwindigkeitsdreiecke zu verwenden.

Die gezeigten Verfahren sind allgemein, also für eine beliebige Schaufelform verwendbar. Die einzige Hypothese ist der radiale Eingang zum Läufer (Bedingung für eine maximale Föderhöhe), welche für einen wirtschaftlichen Entwurf bei Pumpen und Kompressoren, eine Grundbedingung ist.

Eingegangen am 29. VIII. 1969

Technische Hochschulle, Brashov

LITERATURVERZEICHNIS

1. Eckert B., Schnell E., *Axial- und Radialkompressoren.* Springer Verlag, 1961.
2. Pavel D., *Maşini hidraulice.* Vol. **II**, Ed. Energ., Buc., 1955.
3. Stamatescu C., *Teoria maşinilor compresoare.* Partea **I**, Lit. Inst. polit. Buc., 1956.

4. Eck B., *Ventilatoren*. 4 Auflage, Springer Verlag, 1961.
5. Stodola A., *Dampf- und Gasturbinen*. Springer Verlag, 1925.
6. Pfleiderer C., *Die Kreiselpumpen*. 4 Auflage, Springer Verlag, 1955.

METODE INDIRECTE DE DETERMINARE A CIRCULAŢIEI Γ_p LA ROTOARELE MAŞINILOR CENTRIFUGE

(Rezumat)

Se propun unele relaţii de calcul ale circulaţiei în jurul palelor maşinilor radiale, care nu presupun cunoaşterea repartiţiei vitezelor pe suprafeţele acestora. Utilizarea acestor relaţii nu necesită trasarea triunghiurilor de viteze iar rezultatele sînt foarte apropiate de cele obţinute prin metoda de calcul bazată pe repartiţia vitezelor (abateri sub 1%).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 621.833; 678.675

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DE LA CAPACITÉ PORTANTE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES EN POLYAMIDE SUR ACIER [1)]

II. CONSIDÉRATIONS SUR L'INFLUENCE DE L'INCLINAISON DE LA DENTURE SUR LE TAUX DE CHARGE DE FLEXION DES ENGRENAGES AUX ROUES DENTÉES EN POLYAMIDE SUR ACIER

PAR

M. GAFIŢANU

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique „Gh. Gheorghiu-Dej" de Bucarest, le 1—3 novembre 1968

1. Introduction

Paramètre constructif fondamental dans le calcul des engrenages, l'inclinaison de la denture a des influences appréciables sur la capacité portante, en modifiant les conditions de chargement des dents, de répartition de la charge.

Dans le cas des engrenages métalliques, l'influence de l'inclinaison de la denture a été étudiée dans quelques ouvrages récents [9] [10]. Pour les engrenages aux roues dentées en polyamide ou en autres matériaux plastiques avec des propriétés distinctes par rapport aux métaux, l'absence d'un support expérimental et théorique met en discussion le calcul rationnel de ces engrenages.

Ainsi, en contradiction avec certaines récommandations plus anciennes de calcul, les seules indications récentes dans la bibliographie sont celles de H a c h m a n n [7]. Sans citer des essais comparatifs, Hachmann apprécie que la portance des roues en polyamide à denture inclinée est plus petite que celle des roues à denture droite et par conséquent, leur utilisation n'est pas avantageuse, de plus que leur bruit n'est pas moindre.

Il est évident que pour établir des données sures dans ce domaine il est nécessaire de considérer les éléments spécifiques au fonctionnement de ces engrenages, la grande déformabilité du matériau qui peut provoquer des accroissements importants du rapport de conduite, des modifications de la répartition de la charge sur les dents ou des conditions de chargement des dents par rapport aux engrenages métalliques [4].

[1)] Sujet de la thèse de doctorat élaborée sous la direction du Mr. Gh. M a n e a, professeur à l'Institut Polytechnique de Bucarest, membre correspondant de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie.

L'ouvrage ci-contre se propose, en s'appuyant sur des essais expérimentaux comparatifs, de mettre en évidence l'influence de l'inclinaison de la denture sur la capacité portante des engrenages étudiées et d'offrir des explications théoriques à cette influence, avec des conclusions concrètes en ce qui concerne les méthodes de calcul.

2. Recherches expérimentales

2.1. Stand d'essai à circuit fermé de force avec arbre déplaçable

Les essais ont été éfectués sur une machine d'essai spécialement conçue, dont la vue d'ensemble et le schéma constructif sont représentés dans les fig. 1 et 2.

Le chargement, à un moment de torsion donné, peut être réalisé en déplaçant en direction axiale, l'arbre *1* d'un dispositif avec mise en mouvement manuelle (fig. 2) après un étallonage préalable du systeme.

2.2. Roues dentées éprouvettes

Pour l'exécution des roues dentées éprouvettes on a utilisé la polyamide 6 — type Relon P — dont les caractéristiques mécaniques principales sont specifiées dans la fig. 3, le module d'élasticite à la flexion étant de 8660 Kgf/cm².

Les roues éprouvettes ont été exécutées par le fraisage d'un demi-produit obtenu par injection. Avant les essais, les éprouvettes ont été soumises à un traitement thermique de stabilisation à 120 °C, pendant 8 heures.

Les dimensions finies des roues éprouvettes (crémalière de référence $\alpha_{0n} = 20°$, $f_{0n} = 1$, $w_{0n} = 0{,}25$) sont indiquées dans la tableau 1.

Tableau 1

Dents z	Module (mm) réel m_n	Module (mm) apparent m_f	Angle d'inclinaison β_d	Largeur de la denture b (mm)
50	2	2	0°	18
49	2	2,0408	11°28′30″	18
48	2	2,0833	16°15′40″	18
47	2	2,1277	19°56′48″	18
45	2	2,2222	25°50′30″	18
43	2	2,3256	30°41′	18

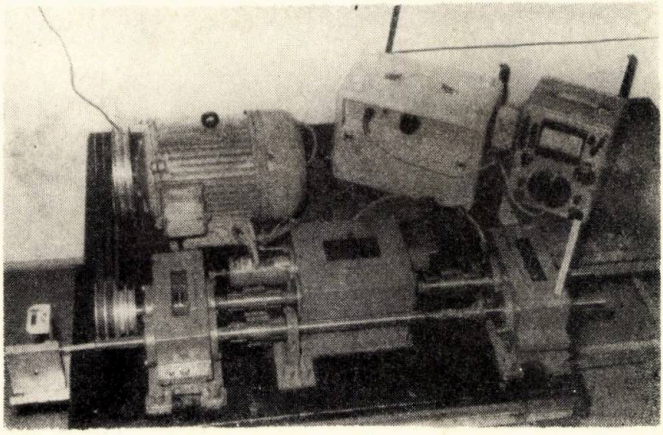


Fig. 1

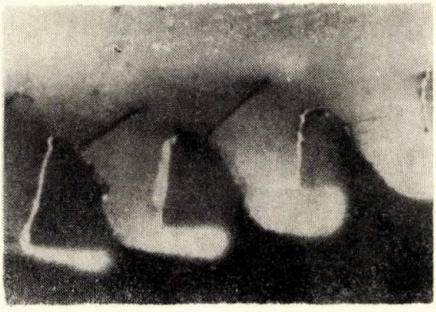


Fig. 4

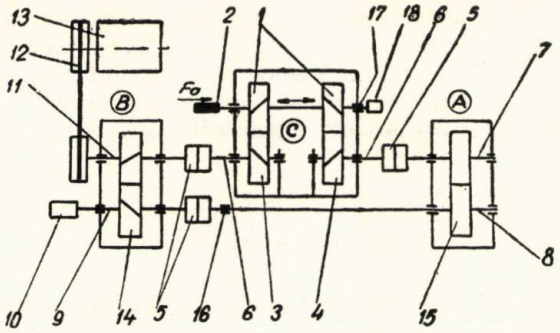


Fig. 2 — Le schéma constructif du stand. *1* — arbre déplaçable, avec roues de chargement; *2* — dispositif de chargement; *3, 4, 14* — roues dentées en fermant le circuit; *5* — couples; *6, 7, 8, 9, 11* — arbres; *10* — compteur de rotations; *12* — courroie; *13* — moteur électrique; *16, 17* — roulements; *18* — dispositif d'arrêt automatique.

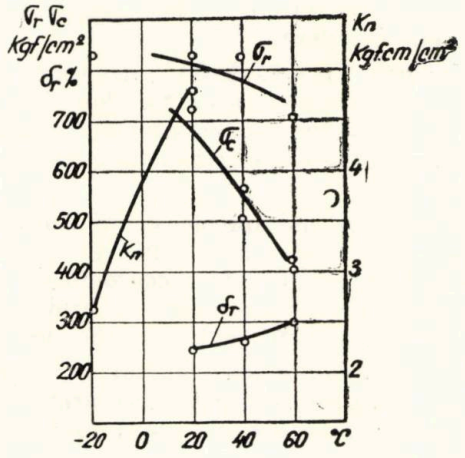


Fig. 3 — La variation avec la témperature de quelques caractéristiques mécaniques pour la polyamide 6[2]), σ_r — limite de rupture, σ_r — limite d'écoulement, δ_r — allongement, K_r — résilience.

Du point du vue de la précision cinématique, la majorité des roues mesurées (77%) peuvent être encadrées dans les 9-ème et 10-ème classes de précision; du point de vue de la continuité de l'engrènement, 95% des roues mesurées ont éte encadrées dans les 8-ème et 9-ème classes de précision (STAS 6273—60).

[2]) D'après les essais ICECHIM.

Les roues dentées métalliques ont été aussi exécutées par fraisage d'un acier OLC45 (C : 0,42...0,49%, Si : 0,17...0,37%, Mn : 0,5%) avec des dimensions et caractéristiques géometriques correspondantes au rapport de l'engrenage $i = 1$. La précision de ces roues correspond à la 8-ème classe de précision (STAS 6273—60) et la rugosité des flancs actifs ne dépasse pas $R_a = 1{,}6\,\mu m$.

2.3. Résultats des essais

Les essais effectués ont été en exclusivité des essais sous charge constante et les conditions des essais les suivantes : nombre de tours/min, 1 540 ; vitesse périphérique, 8,07 m/s ; graissage par barbotage avec de l'huile 305 (5 °E à 50 °C) ; température au dessus de la cuve de l'huile, $45° \pm 5$ °C.

Puisque la rupture de fatigue est incontestablement le phénomène de détérioration avec les plus sérieuses conséquences et parce que dans la littérature de spécialité il y a das contradictions en ce qui concerne la fréquence et donc l'importance de ce phénomène dans l'exploitation, les essais ont été orientés vers l'étude de la capacité portante de résistance à la rupture par fatigue des dents.

Ainsi, le remplacement de près de 85% des roues essayées a été déterminé par la rupture par fatigue des dents. Pour les autres roues (15%) le remplacement a été effectué immédiatement après les premières 10^7 rotations, à l'exception de la roue *18*, laquelle a atteint plus de 16.10^6 rotations sans être remplacée.

En ce qui concerne le mécanisme de la rupture, quelques minutes avant celle-ci, on a pu constater à la base d'une ou de quelques dents, des fissures en partant de la zone de raccordement (fig. 4). L'apparition de ces fissures menait à un changement du bruit de l'engrenage, à des chocs puissants et par conséquent, à la rupture des dents fissurées.

L'évolution des fissures, et en général la rupture par fatigue des dents, explicables par des processus mécano-thermo-chimiques de destruction, sont en concordance avec des observations antérieures sur les roues dentées en polyamide [1], [7].

La développement à un moment donné, dans le domaine des durabilités étudiées, des autres phénomènes de détérioration, n'a pas influencé sensiblement la rupture par fatigue des dents : le point d'apparition de la fissure est resté le même, le bruit aussi.

Pour exprimer la capacité portante C_p des engrenges étudiés on a utilisé le rapport entre la force tangentielle périphérique F_t (Kgf), le module réel m_n (mm) et la largeur de la denture b (mm) :

$$C_p = \frac{F_t}{m_n b} \cdot \tag{1}$$

Par l'intermède de cette capacité, on a étudié, a dans ce qui suit, l'influence de l'angle d'inclinaison en conservant constantes les conditions de fonctionnement et les autres caractéristiques géométriques (v. tableau 1). Le rapport F_t/mb trouvé par les essais, en corrélation avec les durabilités respectives, est donné dans le tableau 2 et la fig. 5.

Tableau 2

Les résultats des essais des roues dentées éprouvettes à denture inclinée ($m_n = 2$ mm, $b = 18$ mm)

No. ctr.	No. roue	z	β_d	$\frac{F_t}{mb}$	N, 10^6 rotations	No. crt.	No. roue	z	β_d	$\frac{F_t}{mb}$	N, 10^6 rotations
1	*2/1*			291	0,291	20	*39*	48	16°15′40″	260	1,532
2	*3/1*			259	0,576	21	*40*			232	5,591
3	*5/1*	50	0°	243	1,164						
4	*7/1*			243	1,353	22	*1*			320	0,347
5	*6/1*			227	9	23	*2*			290	0,449
6	*4/1*			210	10	24	*3*			277	0,900
						25	*4*			258	1,117
7	*17*			158	10	26	*6*	47	19°56′48″	244	1,106
8	*18*			246	1,285	27	*7*			201	10
9	*19*			192	10,06	28	*8*			224	6,215
10	*20*			227	3,657						
11	*21*	49	11°28′30″	258	2,002	29	*25*			320	0,291
12	*22*			274	2,236	30	*26*			288	0,417
13	*23*			322	0,767	31	*27*	45	25°50′30″	262	0,933
14	*24*			320	0,428	32	*28*			227	4,262
						33	*29*			197	10,766
15	*33*			206	3,790						
16	*34*			312	1,175	34	*9*			326	0,060
17	*35*	48	16°15′40″	353	0,175	35	*10*			205	4,039
18	*36*			192	16,074	36	*11*	43	30°41′	177	6,942
19	*38*			288	1,311	37	*12*			246	0,383
						38	*13*			278	0,361
						39	*14*			161	10,233

L'analyse des résultats expérimentaux perment les conclusions suivantes :

a) aux charges réduites, donc aux durabilités élevées (aux environs de 10^7 rotations) les roues à denture droite ont une capacité plus grande que les roues à denture inclinée ; ces dernières ne présentent pas des avantages substantiels de ce point de vue, tout en confirmant d'ailleurs es affirmations de Hachmann [7] ;

1 b) aux charges importantes, correspondantes aux durabilités réduites (10^5 rotations), situations d'ailleurs rarement rencontrées, les roues essayées à denture inclinée ont une capacité portante plus grande d'environ 30% par rapport à celle des roues à denture droite ;

c) les angles d'inclinaison relativement grands ($\beta_d > 25°$) impriment une réduction de la capacité ;

d) la dispersion des résultats est semblable à celle des autres recherches dans ce domaine. Elle peut être expliquée, en dehors des erreurs méthodiques ou de la machine d'essai, par la nonuniformité structurale des polyamides et par les imprécisions d'exécutions des roues essayées;

e) dans la domaine étudié on n'a pas constaté des tendances d'horizontalisation des lignes qui représentent la dépendance de la capacité C_p du nombre de rotations effectuées.

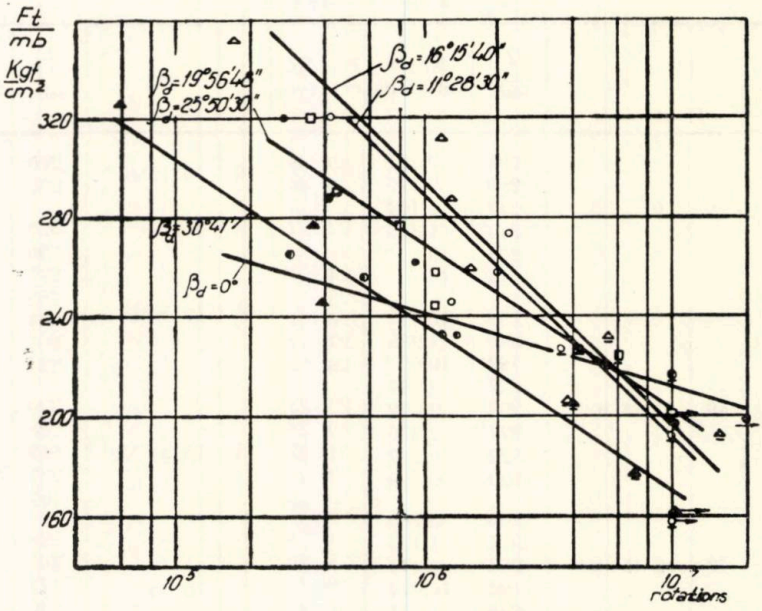


Fig. 5 — Les résultats des essais sur des roues éprouvettes à denture inclinée.

◐ — $\beta_d = 0°$; ○ — $\beta_d = 11°28'30''$, □ — $\beta_d = 19°56'48''$,
△ — $\beta_d = 16°15'40''$, ● — $\beta_d = 25°50'30''$, ▲ — $\beta_d = 30°41'$.

Les points marqués par ◐, ○, □, △, ●, ▲ correspondent aux roues éprouvettes, chez les- quelles on a pu trouver sur les flancs actifs des dents des traces d'usure de type pitting [5].

3. Considérations théoriques en corrélation avec les résultats expérimentaux

En partant des résultats expérimentaux déjà cités on cherchera d'expliquer l'influence de l'inclinaison de la denture sur la capacité portante, en proposant en même temps une relation de calcul simplifiée.

Il est tout du même utile de regarder les résultats des quelques ouvrages antérieurs, concernant le comportement des engrenages métalliques à denture inclinée.

La comparaison des quelques recommandations de calcul permet de souligner ce qui suit (fig. 6 pour $d_d/m_n = 50$, $b/m_n = 9$. D'après certains auteurs [2], [3], [11], [12], la capacité portante de résistance à la rupture par fatigue est plus grande pour les engrenages à denture inclinée ; avec l'accroissement de l'inclinaison β_d (sur le cylindre primitif) le rapport $C_{p\beta}/C_{p0}$ ($C_{p\beta} = F_t/m_n b$ pour une inclinaison β_d, et $C_{p0} = F_t/m_n b_b$ pour $\beta_d = 0°$) s'accroit jusqu'aux certaines valeurs de l'inclinaison à partir desquelles il diminue. Selon d'autres [9], le rapport $C_{p\beta}/C_{p0}$ diminue avec l'accroissement de l'inclinaison de la denture. La précision insuffisante est due au caractère complexe de l'engrènement de la denture inclinée, avec des difficultés inhérentes d'interprétation théorique.

Dans les recommandations de calcul citées plus haut, la capacité portante apparaît comme sensiblement influencée par quelques paramètres importants parmi lesquels : le rapport de conduite [9], [11], [12] ; la nonuniformité de distribution de la charge sur la longueur des lignes de contact [12] ; la longueur totale des lignes de contact.

On peut aussi observer que la réduction du rapport de conduite en plan apparent, de la longueur des lignes de contact et l'accroissement de la nonuniformité de distribution de la charge ont des effets défavorables sur la capacité et que l'évolution d'ensemble de ces facteurs avec l'accroissement de l'inclinaison, peut donc influencer la capacité portante.

Pour les engrenages aux roues dentées en plastique, la considération de ces influences doit tenir compte des particularités de ces engrenages, résultat des propriétés specifiques des plastiques, de leur grande déformabilité.

Par analogie avec la denture droite on fera l'hypothèse que le rapport de conduite réel en plan normal sur la dent, respectivement frontal, est

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{0n} + \Delta\varepsilon_n , \qquad \varepsilon_f = \varepsilon_n \cos^2 \beta_b ,$$

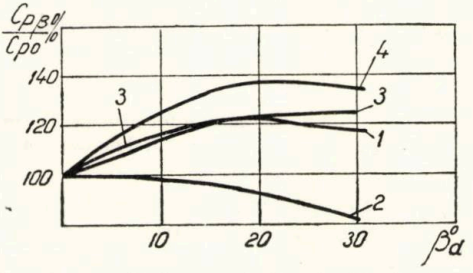


Fig. 6 — L'influence de l'angle d'inclinaison de la denture sur la capacité portante de résistance à la fatigue de flexion. *1* — Niemann [12] ; *2* — Henriot [9] ; *3* — Kudriavtsev [11] ; *4* — Dudley [3].

avec $\varepsilon_{0n} = k_0 \varepsilon_{tn}$, le rapport de conduite initial en plan normal [4] ; k_0 — coefficient ayant la valeur 0,8 ; ε_{tn} — le rapport de conduite théorique en plan normal, correspondant au nombre équivalent de dents $z_n = z/(\cos^2 \beta_b \cos \beta_d)$ (β_b—l'inclinaison sur le cylindre de base) et au rapport de l'engrenage i ; $\Delta\varepsilon_n$ — l'accroissement du rapport de conduite en plan normal, calculé suivant la méthode exposée dans l'ouvrage [6] pour z_n dents.

Nous ferons aussi l'hypothèse que la rigidité des dents, en plan normal, n'est pas influencée par l'inclinaison des dents. D'ailleurs, même en consi-

dérant une rigidité variable selon H a y a s h i K u n i k a z u [28] les conclusions suivantes ne vont pas être modifiées sensiblement.

Les roues essayées ont eu le rapport $b/m_n = 9$ et le rapport $d_d/m_n = 50$ (d_d—diamètre du cerc primitif).

3.1. Le rapport de conduite réel en plan frontal ε_f

Dans les hypothèses citées, pour des roues ayant les mêmes rapports b/m_n, d_d/m_n et i que les roues essayées, pour un domaine usuel de déformations $\delta/m_n = 0{,}04$; $0{,}08$; $0{,}12$ [4], on a étudié la variation du rapport de conduite réel en plan frontal ε_f en corrélation avec l'inclinaison de la denture β_d (fig. 7) par le rapport $\varepsilon_{f\beta}/\varepsilon_{f\beta=0}\%$ où $\varepsilon_{f\beta=0}$ est le rapport de conduite réel pour $\beta_d = 0$.

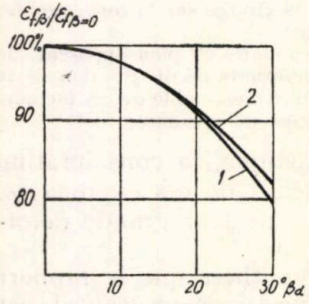


Fig. 7. — L'influence de l'inclinaison de la denture sur le rapport de conduite réel en plan frontal $\varepsilon_{f\beta}/\varepsilon_{f\beta=0}$ % . *1* — engrenages métalliques, avec des déformations négligeables et engrenages plastique-acier avec rigidité constante des dents ; *2* — les mêmes avec rigidité variable d'après [8].

On peut constater l'amoindrissement continu du rapport de conduite réel en plan frontal avec l'accroissement de l'inclinaison β_d. De plus, entre l'influence remarquée dans le cas des engrenages métalliques et celle des engrenages plastique-acier il a n'y pas de différences. Des différences réduites (max. 6%) apparaissent seulement pour les engrenages plastique-acier en admettant l'hypothèse de la variabilité de la rigidité des dents avec leur inclinaison.

3.2. La nonuniformité de la répartition de la charge sur la longueur de contact

Pour les engrenages métalliques, on admet, parmi d'autres hypothèses souvent contradictoires, que la répartition de la charge sur la ligne de contact suit aproximativement la loi de variation de la rigidité des dents dans les points de contact respectifs.

On peut admettre la valabilité de cette hypothèse dans le cas des engrenages polyamide-acier. On peut admettre, tenant compte de la variation de la rigidité des dents en plastique [6], que la répartition de la charge sur la ligne de contact suit un diagramme construit avec des segments de droite (fig. 8). Au long de l'arc d'engrènement S_1S_2, le coefficient de nonuniformité peut être défini comme :

$$C_n = \frac{p_{\max}(\varepsilon_s p_f^0,\ x)\,\varepsilon_s p_f^0}{\int_x^{\varepsilon_s p_f + x} p(x)\,dx} = \frac{p_{\max}}{p_{\text{med}}}, \tag{2}$$

où

$$p_{\text{med}} = \frac{F_t}{L_k \cos \beta_b}, \tag{3}$$

avec L_k la longueur des lignes de contact.

Le coefficient de nonuniformité, $p = p(x)$ donné, est modifié en même temps que le déplacement de la ligne de contact dans la champ de l'engrènement. L'accroissement de ε_s influence aussi le coefficient de nonuniformité. Dans le domaine étudié l'accroissement de l'inclinaison mèn à un accroissement du coeficient de nonuniformité.

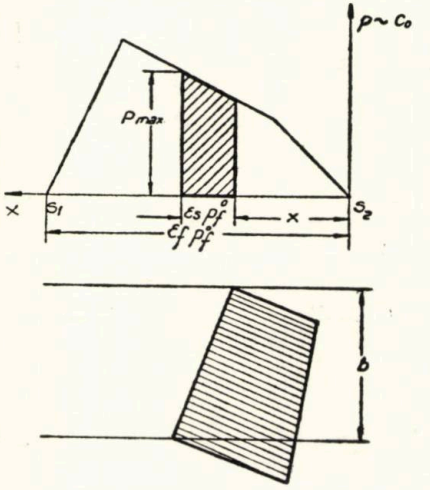


Fig. 8 — La répartition de la charge sur la longueur de la ligne de contact; p_f^0 — le pas apparent.

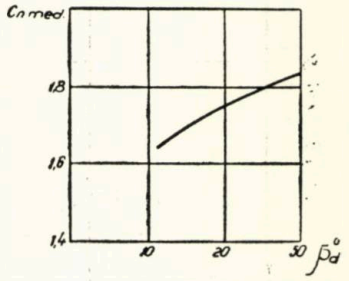


Fig. 9 — L'influence orientative de l'inclinaison β_d sur le coefficient de nonuniformité C_n.

3.3. La longueur des lignes de contact

En généralisant le méthode de calcul de la longueur minime des lignes de contact proposée par K u d r i a v t s e v [11] on a établi des relations de calcul pour des valeurs $\varepsilon_f > 2$, cas assez courrant pour les engrenages en plastique (tableau 3). L'application de ces équations offre la posibilité de déterminer l'influence de l'inclinaison sur la longueur minime des lignes de contact (fig. 10).

L'analyse de cette dépendance met en évidence les conclusions suivantes :

a) la longueur minime des lignes de contact se modifie avec l'accroissement de l'inclinaison ;

b) pour des déformations appréciables ($\delta/m_n = 0{,}12$) qui correspondent à des charges importantes, la longueur minime des lignes de contact

Tableau 3

Relations pour le calcul de la longueur minime de lignes de contact

ε_f	$b < \dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$		$b = (\mu + \chi)\dfrac{\pi m_n}{\sin\beta_d}$; μ — nombre entier, $\chi < 1$	
	b	$L_{k\beta_{min}}$	χ	$L_{k\beta_{min}}$
$1 < \varepsilon_f < 2$	$b \leqslant (2 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{b}{\cos \beta_d}$	$\chi \leqslant (2 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{(\mu\varepsilon_f + \chi)\, b}{(\mu + \chi)\cos \beta_b}$
	$b \geqslant (2 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{\left[\varepsilon_f - 2\left(1 - \dfrac{b \sin \beta_d}{\pi m_n}\right)\right]}{\sin \beta_d \cos \beta_b/(\pi m_n)}$	$\chi \geqslant (2 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{[(\mu + 1)\, \varepsilon_f + 2\,(\chi - 1)]\, b}{(\mu + \chi)\cos \beta_b}$
$2 < \varepsilon_f < 3$	$b \leqslant (3 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{2b}{\cos \beta_b}$	$\chi \leqslant (3 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{(\mu\varepsilon_f + 2\chi)\, b}{(\mu + \chi)\cos \beta_b}$
	$b \geqslant (3 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{\left[\varepsilon_f - 3\left(1 - \dfrac{b \sin \beta_d}{\pi m_n}\right)\right]}{\sin \beta_d \cos \beta_b/(\pi m_n)}$	$\chi \geqslant (3 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{[(\mu + 1)\, \varepsilon_f + 3\,(\chi - 1)]\, b}{(\mu + \chi)\cos \beta_b}$
$3 < \varepsilon_f < 4$	$b \leqslant (4 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{3b}{\cos \beta_b}$	$\chi \leqslant (4 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_b}$	$\dfrac{(\mu\varepsilon_f + 3\chi)b}{(\mu + \chi)\cos \beta_b}$
	$b \geqslant (4 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{\left[\varepsilon_f - 4\left(1 - \dfrac{b \sin \beta_d}{\pi m_n}\right)\right]}{\sin \beta_d \cos \beta_b/(\pi m_n)}$	$\chi \geqslant (4 - \varepsilon_f)\dfrac{\pi m_n}{\sin \beta_d}$	$\dfrac{[(\mu + 1)\, \varepsilon_f + 4\,(\chi - 1)]b}{(\mu + \chi)\cos \beta_b}$

s'accroit avec l'inclinaison β_d, avec un maximum vers $\beta_d = 20°$. L'abaissement des déformations diminue ce maximum (ligne *2* pour $\delta/m_n = 0{,}08$ et *3* pour $\delta/m_n = 0{,}04$), tout en se deplaçant vers 0°. Aux charges réduites ($\delta/m_n = 0{,}04$), la longueur minime des lignes de contact diminue continuellement avec l'accroissement de l'inclinaison ;

c) la considération de la rigidité variable des dents conduit à des modifications des données représentées dans la fig. 10 de max. 7%, sans modifier l'allure générale des graphiques.

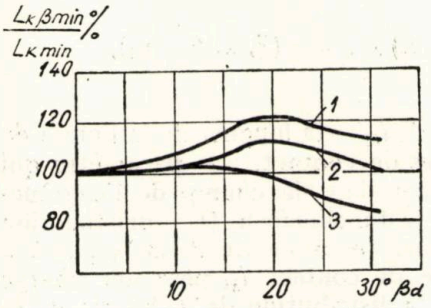


Fig. 10 — L'influence de l'inclinaison des dents β_d sur le rapport $L_{k\beta min}/L_{k min}$ %. *1* — $\delta/m_n = 0{,}12$; *2* — $\delta/m_n = 0{,}08$; *3* — $\delta/m_n = 0{,}04$.

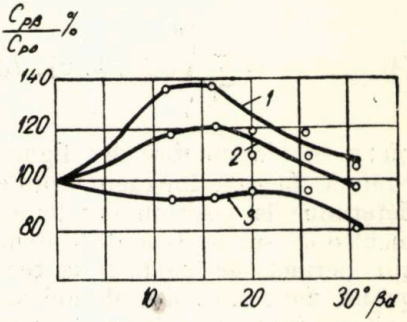


Fig. 11 — L'influence de l'inclinaison des dents β_d sur le rapport $C_{p\beta}/C_{p0}$ %. *1* — charge correspondante à 2.10^5 rotations ; *2* — idem à 10^6 rotations ; *3* — idem à 10^7 rotations.

Il est intéresant de présenter ici la dépendance $C_{p\beta}/C_{p0}$ déduite des résultats expérimentaux déjà mentionnés (fig. 11). On peut suivre donc les ressemblances évidentes entre $C_{p\beta}/C_{p0}$ et $L_{k\beta min}/L_{k min}$ % $= f(\beta_d)$:

a) pour des déformations, donc des charges importantes qui correspondent aux durabilités réduites (courbe *1*, $N = 2.10^5$ rotations), la capacité portante des roues à denture inclinée est plus grande que celle des roues à denture droite, tout en présentant un maximum vers $\beta_d = 15°$;

b) en diminuant les déformations, donc les charges, ce maximum diminue aussi ; de plus, pour des charges qui correspondent aux durabilités de 10^7 rotations, le rapport $C_{p\beta}/C_{p0}$%, toujours plus petit que 100%, diminue, en suivant de près l'allure de la variation de la longueur minime des lignes de contact (courbe *3*, fig. 10).

Il est évident donc que la longueur minime des lignes de contact est un paramètre important qui peut expliquer, dans un rapport appréciable, l'influence du l'angle d'inclinaison sur la capacité portante. La diminution de la capacité portante en même temps avec l'agrandissement de l'angle d'inclinaison en plus de certaines valeurs peut apparaître comme un résultat de la superposition des influences du l'angle d'inclinaison sur la longueur minime des lignes de contact, sur le rapport de conduite réel et sur le coefficient de nonuniformité.

4. Conclusions

L'explication par moyens purement théoriques de la dépendance $C_{p\beta} = f(\beta_d)$ comporte beaucoup de difficultés.

Il est nécessaire d'avoir en préalable la posibilité de calculer la tension normale équivalente, dans un point quelconque sur la longueur de la dent, situé dans la zone de raccordement, pour le schéma de charge représente dans la fig. 12. Il faut donc résoudre l'équation suivante de principe, pour un engrenage avec b/m_n , d_d/m_n et i donnés :

$$(4) \qquad \sigma_\xi = \sum_1^n \int_0^{l_{ki}} Q_i(\xi, x, \beta_d, l_k)\, p_i(x, \beta_d, l_k)\, \mathrm{d}l_k = \sigma(\xi, x, \beta_d, L_k),$$

où : n est le nombre des lignes de contact, l_{ki} — la longuer de la ligne i de contact, L_k — la longueur totale des lignes de contact, x — paramètre qui détermine la position des lignes de contact dans la champ de l'engrènement donc sur le flanc de la dent, β_d — angle d'inclinaison, Q_i — une fonction qui permet de calculer la tension normale équivalente dans le point ξ quand dans un point donné sur la ligne de contact l_{ki} pèse une charge unitaire (=1), p_i — la fonction qui montre la distribution de la charges sur la ligne de contact l_{ki} .

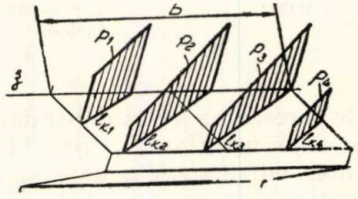


Fig. 12 — Schéma de la charge.

Pour les engrenages métalliques, après quelques hypothèses simplificatrices, l'équation de principe (4), qui a un caractère éxtrêmement complexe, a été remplacée par K u g y i m i j a H a j i m e [10] avec l'équation beaucoup plus simple, vérifiéé par les recherches expérimentales,

$$(5) \qquad \sigma_\beta = \frac{6F_t e}{L_{k\beta\min} S_{fn}^2 \cos\beta_b},$$

où σ_β est la tension normale maximum de flexion pour la section dangereuse dans la zone de raccordement ; e — la distance de cette section jusqu'au

[3]) On considère seulement les tensions de flexion de la zone de raccordement sans tenir compte de l'état de tension spatiale réele ; on admet une distribution uniforme de la charge au long des lignes de contact ; les essais ont été effectués seulement pour $\beta_d = 20°$; on admet des erreurs d'environ 5% ; la rigidité des dents ne dépend pas de l'inclinaison.

point d'intersection de la droite normale au flanc, qui passe par le point E_2 de l'engrènement unipaire et l'axe de simétrie de la dent, S_{fn} — l'épaisseur de la dent, en plan normal, dans la section dangeruese.

Dans ces conditions, ou peut constater que

$$\sigma_\beta = \frac{F_t}{m_n L_{k\beta\min}} \frac{1}{\cos \beta_b} \frac{6 m_n e}{S_{fn}^2}, \tag{6}$$

où $F_t/\cos \beta_b \cong F_{tn}$ et l'expression $6 m_n e/S_{fn}^2$ est semblable à un coefficient de forme q en plan normal, valable seulement pour les tensions de flexion. Pour la roue équivalente, à denture droite avec $z_n = z/(\cos^2 \beta_b \cos \beta_d)$ dents, par analogie avec la denture droite et pour prendre en considération les changements de la longueur minime des lignes de contact, on peut poser:

$$b_\beta = \frac{L_{k\beta\min}}{L_{k\min}} b = \psi_\beta b. \tag{7}$$

La répartition de la charge sur les dents, pour une denture déformable peut être introduite [6] par le coefficient $q_{\varepsilon n}$ et alors:

$$\sigma_\beta = q_{kn} q_{\varepsilon n} \frac{F_{tn}}{m_n b_\beta} = q_{kn} A_n \left(\frac{F_{tn}}{m_n b_\beta E} \right)^{-0,125} \frac{F_{tn}}{m_n b_\beta}, \tag{8}$$

où les coéfficients q_{kn}, $q_{\varepsilon n}$, A_n correspondent au nombre de dents z_n [13].

Pour un angle β_d donné et $F_t \simeq F_{tn} \cos \beta_b$:

$$\sigma_\beta = q_{kn} A_n \frac{1}{E^{-0,125}} \left(\frac{F_t}{m_n \psi_\beta b \cos \beta_b} \right)^{0,875}; \tag{9}$$

pour $\beta_d = 0°$:

$$\sigma_0 = q_k A \frac{1}{E^{-0,125}} \left(\frac{F}{m_n b} \right)^{0,875}. \tag{10}$$

En égalisant les tensions $\sigma_\beta = \sigma_0$ qui peuvent provoquer la détérioration par rupture de flexion, on déduit

$$\left(\frac{C_{p\beta}}{C_{p0}} \frac{1}{\psi_\beta \cos \beta_b} \right)^{0,875} = \frac{q_k A}{q_{kn} A_n}; \tag{11}$$

si

$$q_\beta = \left(\frac{1}{\psi_\beta \cos \beta_b} \right)^{0,875} = \frac{q_k A}{q_{kn} A_n} \left(\frac{C_{p0}}{C_{p\beta}} \right)^{0,875}, \tag{12}$$

avec des valeurs pour q_β en concordance avec les recherches expérimentales (fig. 13), on peut écrire:

$$\sigma_\beta = q_{kn} q_\beta \frac{A_n}{E^{-0,125}} \left(\frac{F_t}{m_n b} \right)^{0,875}. \tag{13}$$

L'utilisation de cette équation pour autres engrenages, avec d'autres valeurs m_n , b, etc, est pour le moment conditionée des recherches sur les valeurs du rapport $C_{p\beta}/C_{po}$.

L'équation (13) offre donc la posibilité du calcul des engrenages en polyamide-acier avec $b/m_n = 9$, $d_d/m_n = 50$ et avec de différents angles d'inclinaison et nombres de dents. Elle représente donc un essai de généralisation de la méthode de calcul proposée pour la denture droite [6] dans le cas des engrenages hélicoidaux pour les mêmes tensions limites (fig. 14) [6].

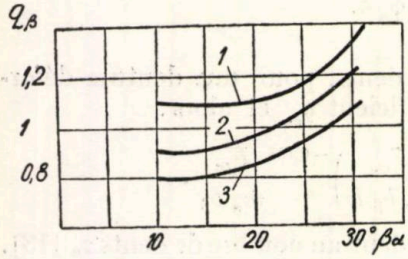


Fig. 13 — Les valeurs de coéfficient q_β par rapport à l'angle d'inclinaison β_d et la durabi lité. *1* — 10^7 rotations; *2* — 10^6 rotations; *3* — $2 \cdot 10^5$ rotations.

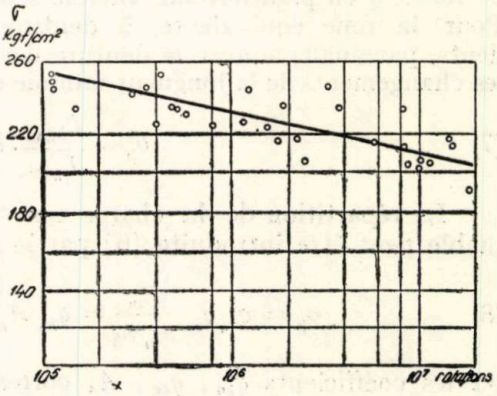


Fig. 14 — Tensions limite pour le calcul des engrenages en polyamide-acier.

En ce qui concerne une orientation pour le comportement des engrenages avec d'autres b/m_n , d_d/m_n il faut suivre l'analyse de la longueur minime des lignes de contact pour des différents déformations (v. § **3.3**).

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Méchanismes et
de Détails des Machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Белый В и.с., *Зубчатые передачи из пластмас.* Изд. „Наука и Техника", Минск, 1965.
2 Dudley D., Winter H., *Zahnräder.* Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961.
3. Dudley D., *Gear Handbook.* Mc. Graw Hill Book Comp., New York—Toronto—London, 1962.
4. Gafiţanu M., *Contributions à l'étude de la capacité portante des engrenages cylindriques en polymide sur acier.* (I) *Contributions à l'étude de l'engrènement des roues dentées cylindriques polyamide-acier avec denture droite.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1969, **XV (XIX)**, *1—2*, s. IV, pp. 107—112.

5. Gafiţanu M., *Contributions à l'étude de la capacité portante des engrenages cylindeiques en polyamide sur acier.* (III) *Considérations sur quelques phénomènes de déterioration des engrenages en polyamide-acier,* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1970, **XVI (XX)**, *1—2*, s. IV (sous presse).
6. — *Contributions à l'étude de t'influence du nombre dss dents sur la capacité portante des angrenages à roues dentées en polyamide.* Communication présentée lors de session scientifique de l'Institut Polytehnique de Bucarest, le 1—3 novembre 1968.
7. Hachmann H., Strickle E., Polyamide als Zahnradwerkstoffe Konstruktion, 1966, *3*.
8. Hayashi K., *Load Distribution of the Contact Line of Helical Gear Teeth.* Bull. of the JSME, 1963, *22*.
9. Henriot G., *Traité théorique et pratique des engrenages.* Dunod, Paris, 1960.
10. Kugimiya H., *Stresses in Helical Gear Teeth.* Bull. of the JSME, 1966, nr. 36.
11. Кудриавцев В. Н., *Зубчатые передачи.* Машгиз, М., 1958.
12. Niemann G., *Maschinenelemente.* Bd. **II**, Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
13. Gafiţanu M., *Contributions à l'étude de l'influence du nombre de dents sur la capacité portante des engrenages aux roues dentées cylindriques en polyamide sur roues dentées en acier.* Rend. Cl. Sc. (A), Inst. Lombardo — Accad. di Scienze e Lettere, 1969, **103**, pp. 1052—1065.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL CAPACITĂŢII PORTANTE A ANGRENAJELOR CILINDRICE ÎN POLIAMIDĂ PE OŢEL

Nota II

Consideraţii asupra influenţei inclinării dinţilor asupra capacităţii portante de rezistenţă la oboseala de încovoiere a angrenajelor cu roţi dinţate din poliamidă pe oţel

(Rezumat)

În studiu se prezintă aspecte ale influenţei unghiului de înclinare a dinţilor asupra capacităţii portante prin intermediul gradului de acoperire real, a neuniformităţii repartiţiei sarcinii pe lungimea dinţilor şi a lungimii minime a liniilor de contact. Se generalizează şi pentru roţile cu dinţi înclinaţi, metodica de calcul propusă anterior pentru roţile cu dinţi drepţi, cu aceleaşi tensiuni limită [6].

Explicaţia figurilor

Fig. 1 — Standul de încercări.

Fig. 2 — Schema constructivă a standului. *1* — arbore deplasabil; *2* — dispozitiv de încărcare; *3, 4, 14* — roţi dinţate de închidere; *5* — cuplaje; *6, 7, 8, 9, 11* — arbori; *10* — numărător de rotaţii; *12* — curea; *13* — motor electric; *16, 17* — rulmenţi; 18 — dispozitiv de oprire automată.

Fig. 3 — Variaţia cu temperatura a unor caracteristici mecanice pentru poliamida 6.

Fig. 4 — Fisură de rupere prin oboseală.

Fig. 5 — Rezultatele încercărilor pentru roţile cu dinţi înclinaţi.

Fig. 6 — Influenţa unghiului de înclinare a dinţilor asupra capacităţii portante de rezistenţă la oboseală de încovoiere.

Fig. 7 — Influenţa înclinării dinţilor asupra gradului de acoperire în plan frontal. *1* — angrenaje metalice cu deformaţii neglijabile şi angrenaje poliamidă/oţel cu rigiditatea dinţilor considerată constantă; *2* — idem, cu rigiditate variabilă după [8].

Fig. 8 — Repartiţia sarcinii pe lungimea liniei de contact.

Fig. 9 — Influenţa orientativă a înclinării β_d asupra coeficientului de neuniformitate C_n.

Fig. 10. — Influenţa înclinării β_d asupra raportului $L_{k\beta min}/L_{kmin}$.

Fig. 11 — Influenţa înclinării β_d asupra raportului $C_{p\beta}/C_{p0}$.

Fig. 12 — Schema încărcării.

Fig. 13 — Valorile coeficientului q_β în funcţie de înclinarea β_d şi durabilitate.

Fig. 14 — Tensiunile limită pentru calculul angrenajelor în poliamidă/oţel.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.833; 534.3

COMMENT DOIT-ON APPRÉCIER L'INFLUENCE DES DIFFÉRENTS PARAMÈTRES SUR LE BRUIT DES ENGRENAGES

PAR

V. MERTICARU

1. Les recherches scientifiques concernant le bruit des engrenages sont de plus en plus nombreux. Les influences des certains paramètres (vitesse, charge, ...) sont bien précisées ; d'autres paramètres (module, correction, rapport de recouvrement, ...) sont encore dans l'attention des chercheurs.

Dans l'appréciation du bruit des engrenages et aussi des différentes influences qu'il subisse ont été utilisées des méthodes subjectives aussi bien que des méthodes objectives. Actuellement, toutes les recherches que la littérature de spécialité présente, utilisent exclusivement les méthodes objectives d'appréciation. Ainsi, on mesure, en général, le niveau L, en décibels (dB), de la pression acoustique. Celui ci peut être défini par la relation

$$L = 20 \lg \frac{p}{p_0}, \tag{1}$$

ou L est le niveau en décibels (dB) de la pression acoustique, $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ N/m² — la pression acoustique de référence et p — la pression acoustique effective en N/m².

L'action nocive du bruit sur l'organisme humain, dépend en dernière instance de la pression acoustique.

Dans la fig. 1 sont tracées les courbes d'égal niveau de force[1]), courbes qui montrent la sensibilité de l'organe auditif de l'homme en fonction de la fréquence.

La fig. 1 montre que le même niveau de la pression acoustique (par exemple $L = L_I = 70$ dB) est perçû différemment à différentes fréquences

[1]) $L_T = 20 \lg (p/p_0)_{f=1000\,\text{Hz}}$ où L_T est le niveau de force en phon.

(tableau 1), mais pour toutes les fréquences, l'organisme humain est plus impressioné au fur et à mesure que le niveau de la pression acoustique augmente.

Tableau 1

Niveau de la pression acoustique $L = L_I = 70$ dB

Fréquence f (Hz)	20	40	80	400	1000	4000	6000	10000	15000
Niveau de force (phon)	0	40	60	75	70	80	70	65	70

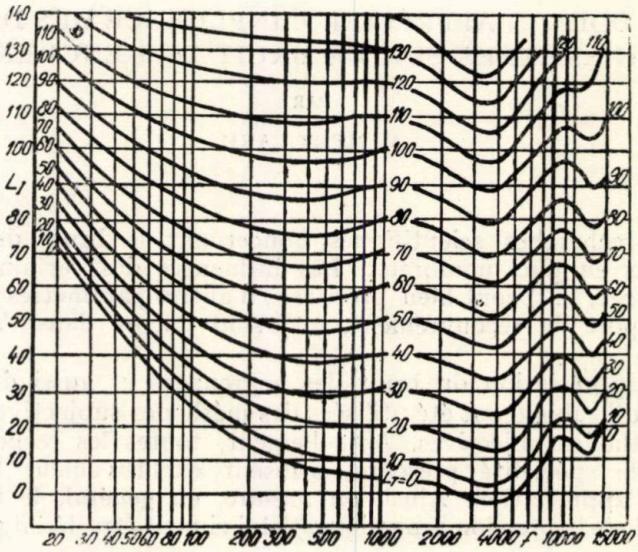


Fig. 1 — Courbes d'égal niveau de force (en phons). L_I — niveau de l'intensité acoustique [2]) en décibels (dB); L_T — niveau de la force en phons; f — fréquence en Hz.

Si on considère deux valeurs L_1 et L_2 $(L_2 > L_1)$ du niveau de la pression acoustique, définies par les relations $L_1 = 20 \lg (p_1/p_0)$, $L_2 = 20 \lg (p_2/p_0)$ on obtient par différence $L_2 - L_1 = \Delta L = 20 \lg (p_2/p_1)$, d'où

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{p_2}{p_1} = 10^{\Delta L/20}, & \text{si} \quad L_2 > L_1 \ (p_2 > p_1), \\ \dfrac{p_2}{p_1} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{\Delta L/20}, & \text{si} \quad L_2 < L_1 \ (p_2 < p_1). \end{cases}$$

[2]) Le niveau de l'intensité acoustique L est, pratiquement, égal au niveau de la pression acoustique L [1].

Il résulte que nous pouvons calculer facilement le rapport p_2/p_1 au cas que nous connaissons la différence ΔL.

2. Le rapport p_2/p_1 nous permet de déterminer la croissance ou la baisse Δp, en pour-cent, de la pression acoustique si nous connaissons la différence ΔL en décibels (dB) entre les deux niveaux de la pression acoustique :

$$(3) \quad \begin{cases} \text{croissance } \Delta p\% = \left(\dfrac{p_2}{p_1} - 1\right) 100 \quad \text{si} \quad p_2 > p_1 , \\ \text{baisse} \qquad \Delta p\% = \left(1 - \dfrac{p_2}{p_1}\right) 100 \quad \text{si} \quad p_2 < p_1 . \end{cases}$$

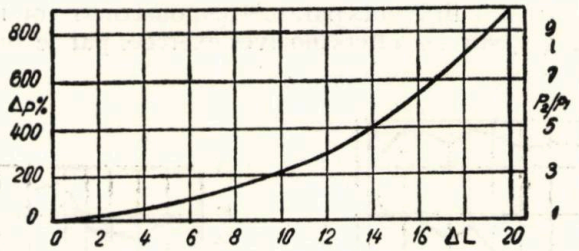


Fig. 2 — La croissance Δp, en pour-cent, de la valeur p_2 de la pression acoustique, par rapport à la valeur p_1 de la pression acoustique, en fonction de la différence ΔL en décibels (dB) entre le niveau L_2 (dB) de la pression acoustique et le niveau L_1 (dB) ($p_2 > p_1$).

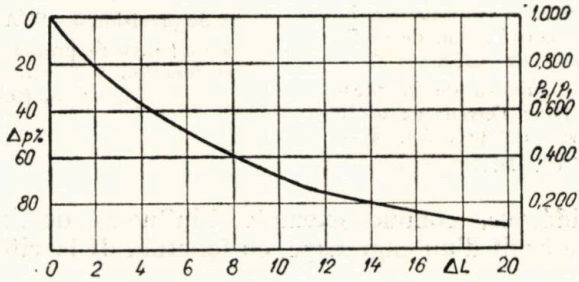


Fig. 3 — La réduction Δp, en pour-cent, de la valeur p_2 de la pression acoustique, par rapport à la valeur p_1 de la pression acoustique, en fonction de la différence ΔL (dB) entre le niveau L_1 (dB) de la pression acoustique et le niveau L_2 (dB) ($p_2 < p_1$).

Ces relations ont été représentées graphiquement dans les fig. 2 et 3, à l'aide desquelles on peut déterminer la croissance ou la baisse en pour-cent de la pression acoustique.

La pression acoustique croît à 400%, le rapport p_2/p_1 devenant égal à 5, pour une croissance du niveau de la pression acoustique $\Delta L = 14$ dB (fig. 2). La réduction du niveau de la pression acoustique à 14 dB suppose une baisse de la pression acoustique $\Delta p\% = 80\%$, le rapport p_2/p_1 devenant égal à 0,2 (fig. 3).

Nous remarquons le fait que la croissance ou la baisse $\Delta L = 14$ dB du niveau de la pression acoustique représente une croissance $\Delta p = 400\%$, respectivement une baisse $\Delta p = 80\%$ de la pression acoustique, indifférente du niveau de cette pression.

3. La différence ΔL (dB) des niveaux de la pression acoustique nous permet ainsi de connaître, à l'aide des fig. 2 et 3, la croissance ou la baisse correspondante de la pression acoustique et par conséquent nous pouvons apprécier l'influence des différents paramètres constructifs ou bien d'exploitation des engrenages, sur les effets nocives exercées par le bruit sur l'organisme humain.

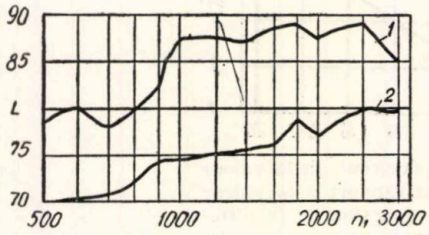


Fig. 4 — L'influence de l'erreur de profil sur le bruit d'un engrenage en fonction de la vitesse de rotation n_1 (tours/min). L — niveau global de la pression acoustique (dB); *1* — niveau de la pression acoustique pour l'erreur de profil $E_{fp} = 20$ μm (classe de précision 7 — STAS, DIN); *2* — niveau de la pression acoustique pour l'erreur de profil $E_{fp} = 5$ μm (classe de précision 4 — STAS, DIN)

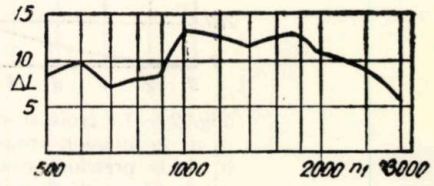


Fig. 5 — La réduction ΔL (dB) du niveau de la pression acoustique d'un engrenage, par suite de l'amoindrissement de l'erreur de profil de $E_{fp}=20$ μm (classe de précision 7 — STAS, DIN), à $E_{pf}=5$ μm (classe de précision 4 — STAS, DIN) en fonction de la vitesse de rotation du pignon n_1 (tours/min).

Nous considérons, comme exemple, l'influence de l'erreur de profil de la dent sur le bruit d'un engrenage, en fonction de la vitesse de rotation (fig. 4) [2].

La différence entre les niveau des pressions acoustiques correspondantes aux courbes *1* et *2*, fig. 4, est représentée dans le fig. 5.

En présentant l'influence sur le bruit de ce paramètre (l'erreur de profil de la dent) comme différence entre les deux niveaux de la pression acoustique, on voit immédiatement l'efficacité de la réduction de l'erreur. On s'apperçoit qu'entre 1 000 et 2000 rot/min cette réduction de l'erreur détermine une baisse du niveau de la pression acoustique à plus de 10 dB c'est-à-dire une réduction de la pression acoustique de plus de 75% (fig. 3).

4. De l'analyse ci-dessus il en résulte :

1. Quoi qu'ils soient les valeurs numériques des deux niveaux L_2 (dB) et L_1 (dB) de la pression acoustique, des différences ΔL (dB) égales représentent des variations égales, calculées en pour-cent, de la pression acoustique (relations (3) et fig. 2 et 3).

2. L'appréciation de l'influence des différents paramètres sur le bruit des engrenages sous forme de différence ΔL (dB) (fig. 5), présente le grand avantage qu'elle permet de comparer plus facile ces influences et, en conséquence, de prendre les mesures pratiques, adéquates pour réduire le bruit.

Reçue le 13 IX 1968

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanismes et
de Détails des Machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Bădărău E., Grumăzescu M., *Bazele acusticii moderne.* Ed. Acad. RPR 1961.
2. Bosch M., Feltkamp K., Rademacher J., Breidenbach G., *Lebensdauer und Geräuschuntersuchungen an Zahnrädern aus Gusswerkstoffen.* Industrie Anzeiger, 1967, **89**, *86*, S. 2153—2156; *95*, S. 2153—2156.

CUM TREBUIE APRECIATĂ INFLUENȚA DIFERIȚILOR PARAMETRI ASUPRA ZGOMOTULUI ANGRENAJELOR

(Rezumat)

În lucrare se demonstrează că influența diferiților parametri asupra zgomotului angrenajelor se poate aprecia cel mai bine prin diferența ΔL (dB) dintre două nivele ale presiunii acustice. Aceasta permite compararea rezultatelor obținute în condiții variate de măsurare și aprecierea variației nocivității prin zgomot la modificarea diferiților parametri ai unui angrenaj.

Explicația figurilor

Fig. 1 — Curbe de egal nivel de tărie (în foni). L_I — nivelul intensității acustice în decibeli (dB); L_T — nivelul de tărie (în foni); f — frecvența (în Hz).

Fig. 2 — Creșterea Δp în procente, a valorii presiunii acustice p_2 față de valoarea presiunii acustice p_1, în funcție de diferența ΔL în decibeli dintre nivelul L_2 (dB) al presiunii acustice și nivelul L_1 (dB) ($p_2 > p_1$).

Fig. 3 — Reducerea Δp în procente, a valorii presiunii acustice p_2 față de valoarea presiunii acustice p_1 în funcție de diferența ΔL în decibeli dintre nivelul L_1 (dB) al presiunii acustice și nivelul L_2 (dB) ($p_2 < p_1$).

Fig. 4 — Influența erorii de profil asupra zgomotului produs de angrenaj la diferite viteze de rotație. L — nivelul global al presiunii acustice în decibeli (dB); n_1 — viteza de rotație a pinionului în rot/min; *1* — nivelul presiunii acustice la eroarea de profil $E_{fp} = 20$ μm (clasa de precizie 7 — STAS, DIN); *2* — nivelul presiunii acustice la eroarea de profil $E_{fp} = 5$ μm (clasa de precizie 4 — STAS, DIN).

Fig. 5 — Reducerea ΔL în decibeli (dB) a nivelului global al presiunii acustice la un angrenaj, datorită micșorării erorii de profil de la 20 μm (clasa de precizie 7 — STAS, DIN) la 5 μm (clasa de precizie 4 — STAS, DIN), în funcție de viteza de rotație a pinionului n_1 în rot/min.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 66.046.4; 669.018.4

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA ÎMBĂTRÎNIRII UNUI ALIAJ DE ALUMINIU ÎN STRAT FLUIDIZAT

DE

I. CURIEVICI, DAVID PERETZ şi BOGDAN GHEORGHIU

1. Scopul lucrării

În ultimii ani s-a iniţiat [1] ... [3] utilizarea stratului fluidizat în tratamentele termice şi termochimice, deoarece el asigură o mare uniformitate a temperaturii în tot spaţiul de lucru, permite menţinerea sau variaţia temperaturii cu mare precizie şi în fine, conduce la scurtarea duratei de tratament datorită creşterii importante a coeficientului de trecere a căldurii între agentul de încălzire sau răcire şi suprafaţa materialului supus tratamentului termic.

În lucrarea de faţă s-a urmărit aplicarea acestei metode de tratament termic la îmbătrînirea unui aliaj de aluminiu. Se ştie că aceste aliaje sînt foarte sensibile la variaţiile regimului de tratament termic. Această sensibilitate impune de exemplu în cazul călirii, realizarea regimului de temperatură prescris la încălzire cu o precizie de $\pm$ 5 °C, ceea ce este destul de greu de realizat pe căile obişnuite (tratamente termice în cuptoare electrice sau în cuptoare de combustie). La îmbătrînirea acestor aliaje variaţiile admisibile de temperatură sînt şi mai mici — cca $\pm$ 2 °C. Proprietăţile menţionate ale stratului fluidizat par astfel de la bun început să recomande utilizarea sa la tratamentul termic al aliajelor de aluminiu. În prezenta lucrare se pun în evidenţă şi se precizează avantajele îmbătrînirii aliajelor complexe de aluminiu în strat fluidizat.

2. Condiţiile de lucru

Experienţele au fost efectuate într-o instalaţie de laborator, aliajul de aluminiu întrebuinţat fiind de tipul Y cu compoziţia 4% Cu, 1,5% Mn, 0,5% Si, 2% Ni.

Din aliajul menţionat s-au executat prin turnare probe sferice şi cilindrice. Probele sferice au avut diametrul de 30 mm şi greutatea 40 g, iar cele cilindrice, diametrul 32 mm, lungimea 130 mm şi greutatea 280 g. Dimensiunile probelor au fost dictate de dimensiunile coloanei de fluidizare descrise mai jos. Sferele au fost executate în două variante: unele turnate în mod obişnuit iar altele cu includerea unui perete separator median din tablă de aluminiu pentru a permite măsurarea durităţii în centrul sferei pe o suprafaţă plană lipsită de asperităţi şi fără ecruisare.

Evoluţia procesului de îmbătrînire a fost apreciată prin stabilirea durităţii probei la suprafaţă sau în centrul ei, deoarece duritatea poate fi considerată ca determinînd univoc gradul de îmbătrînire. Măsurarea durităţii s-a făcut prin metoda Rockwell scala B.

Experienţele au fost conduse în paralel cu pat fluidizat şi în etuvă (convecţie liberă) sau în curent de aer (convecţie forţată) la aceeaşi temperatură, urmărindu-se variaţia durităţii în timp în cele trei situaţii, fie la suprafaţa probei, fie la suprafaţa şi în centrul ei.

Datorită dimensiunilor reduse ale probelor, la alegerea temperaturii de lucru au apărut dificultăţi. Într-o serie de încercări s-a lucrat la 140 °C, temperatură plasată în intervalul recomandat pentru îmbătrînirea aliajului de aluminiu folosit. La această temperatură viteza de variaţie a durităţii este mare — respectiv durata procesului de îmbătrînire este mică şi curbele duritate-timp pentru stratul fluidizat şi convecţie liberă sînt apropiate. Deoarece dimensiunile coloanei nu permiteau introducerea unor probe mai mari s-a redus temperatura de lucru la 100 °C; procesul de îmbătrînire a fost astfel încetinit şi au putut fi puse în evidenţă diferenţele de viteză de variaţie a durităţii în cele trei cazuri menţionate — pat fluidizat, convecţie forţată şi convecţie liberă.

3. Instalaţia experimentală

Schema instalaţiei experimentale este reprezentată în fig. 1. Coloana de fluidizare (*1*) are diametrul interior de 70 mm şi înălţimea de 500 mm. La baza coloanei este fixată placa poroasă (*2*) din material ceramic avînd caracteristica 180. Aerul necesar fluidizării este încălzit în prealabil cu încălzitorul electric (*3*) prevăzut cu un regulator automat de temperatură (*4*) care permite menţinerea temperaturii alese cu o precizie de $\pm$ 1 °C. Debitul de aer se măsoară cu rotametrul (*5*) şi se reglează cu regulatorul de presiune (*6*), montate după vasul tampon (*8*). Ca material fluidizabil s-a utilizat nisip cuarţos cu dimensiunea caracteristică 0,1 ... 0,2 mm. Înălţimea stratului fix a fost de 130 mm. Viteza de fluidizare aleasă de 0,35 m/s a asigurat o fluidizare intensă fără fenomene de pistonare. Coloana de fluidizare a fost adiabatizată suficient, astfel ca să se poată elimina gradienţii de temperatură atît pe verticală cît şi pe orizontală. Verificarea uniformităţii temperaturii în strat după atingerea regimului termic staţio-

nar s-a efectuat cu o sondă termometrică (*9*). Piesele supuse tratamentului termic de îmbătrînire se fixează pe suporturi rigide termoizolante (*7*), iar căderea de presiune în strat se măsoară cu manometrul diferenţial (*10*).

Încercările în curent de aer (convecţie forţată) s-au făcut plasînd probele tot în coloana de fluidizare, în zona ei superioară liberă de particule.

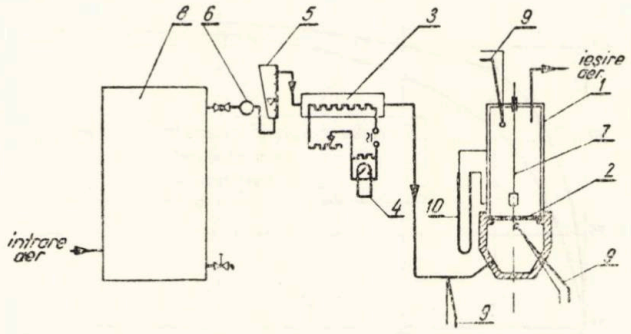


Fig. 1

4. Rezultate experimentale

În prima serie de experienţe s-a lucrat la temperatura de 140 °C cu sfere din aliaj complex de aluminiu avînd diametrul de 30 mm. Rezultatele experienţelor sînt reprezentate grafic în fig. 2. La această temperatură şi la dimensiunile menţionate ale materialului, curbele de îmbătrînire ($H_{RB} = f(\tau)$) în pat fluidizat şi în etuvă sînt apropiate. Cele două curbe se apropie mult una de alta după cca 25 min, cînd în ambele cazuri se realizează practic un regim staţionar. Pentru atingerea durităţii de 62 H_{RB}, durata procesului este însă dublă faţă de cea în stratul fluidizat datorită constantei de timp mult mai mică a curbei procesului tranzitoriu în stratul fluidizat faţă de îmbătrînirea în etuvă.

Deosebirea între vitezele de îmbătrînire în cele două situaţii menţionate apare mult mai evidentă la temperatura de lucru de 100 °C. Rezultatele experimentale sînt reprezentate grafic în diagrama din fig. 3. Din examinarea acesteia rezultă că la 100 °C, relaţiile dintre duritate-timp se menţin aproximativ aceleaşi la exteriorul probelor, deşi cum era de aşteptat, ambele curbe au constante de timp mai mici, iar durata apropierii de regimul staţionar este mai mare. În schimb, în acest caz apar deosebiri mari ale vitezei de îmbătrînire în centrul probelor. Îmbătrînirea în centru decurge considerabil mai lent la încălzirea în etuvă, diferenţa fiind mai pregnantă în primele 10 min ale procesului. Chiar după 25 min valorile durităţii în centru diferă de cele la exterior, pe cînd la patul fluidizat temperaturile în exterior şi în centru sînt practic egale în tot decursul procesului de îmbătrînire.

Această constatare e suficientă ea singură, fără a lua în considerare o anumită scurtare a procesului de îmbătrînire, spre a dovedi superioritatea îmbătrînirii în pat fluidizat faţă de îmbătrînirea în aer prin convecţie liberă. Uniformitatea în toată masa probei constatată la îmbătrînirea în strat

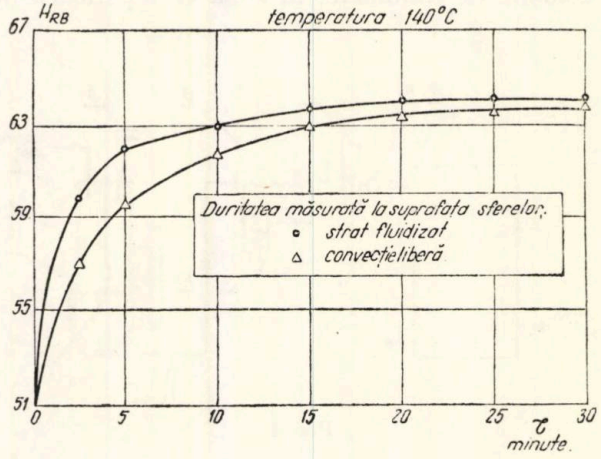


Fig. 2

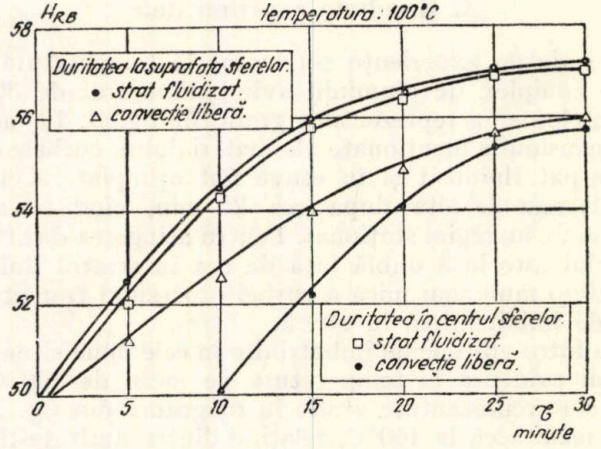


Fig. 3

fluidizat este evident o consecinţă a uniformităţii practice a cîmpului termic; acest fapt asigură eliminarea tensiunilor interne în decursul procesului de încălzire sau în orice caz reducerea lor apreciabilă la piesele cu dimensiuni mai mari. La rîndul ei absenţa sau reducerea tensiunilor interne la piesele de configuraţie complexă şi cu dimensiuni mari echivalează cu micşorarea deformărilor lor.

Realizarea rapidă a uniformității cîmpului termic în masa probei la îmbătrînire în pat fluidizat se explică desigur prin valorile mari și uniforme ale coeficientului de trecere a căldurii de la fluidul de încălzire la suprafața materialului imersat în strat.

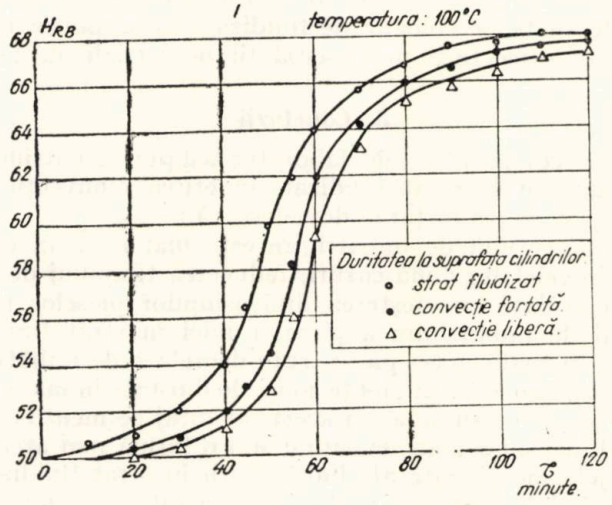


Fig. 4

În a treia serie de experiențe s-au utilizat cilindri cu masa de 7 ori mai mare ca a sferelor avînd dimensiunile menționate mai sus și s-a urmărit comparativ procesul de îmbătrînire la suprafață în pat fluidizat, în etuvă și în curent de aer cu viteza de 0,35 m/s. Temperatura de lucru a fost de 100 °C. Din examinarea rezultatelor experimentale prezentate în fig. 4 se poate constata în primul rînd că viteza procesului de îmbătrînire în strat e mai mare atît față de îmbătrînirea în etuvă cît și în curent de aer. Timpul necesar pentru a atinge o duritate anumită este mai mare însă decît în experiențele precedente, datorită măririi masei probelor.

Pe de altă parte, cu creșterea masei probei, diferența de durată necesară atingerii unei anumite durități la exterior, în stratul fluidizat și în etuvă, diferență relativ mică la piese cu mase mici, se accentuează în favoarea tratamentului termic în strat fluidizat. Astfel, timpul necesar pentru atingerea durității de 58 H_{RB} este de 60 min la îmbătrînirea în etuvă, de 55 min la îmbătrînirea în curent de aer și de numai 50 min în strat fluidizat.

Trebuie remarcat că în comparația făcută între durata și eficacitatea procesului de îmbătrînire în strat fluidizat pe de o parte, în etuvă și în curent de aer pe de altă parte, experiențele efectuate în etuvă și în curent de aer s-au desfășurat la un regim de temperatură constant nerealizabil curent în instalațiile industriale, pe cînd menținerea constantă a temperaturii în instalațiile industriale cu strat fluidizat este asigurată de la sine prin

însăși natura acestei metode de tratament. Avantajele îmbătrînirii în strat fluidizat în instalațiile industriale sînt astfel cu siguranță mai mari decît cele puse în evidență în experiențele de laborator.

Considerăm că *experiențele de laborator efectuate dau indicații suficiente asupra avantajelor îmbătrînirii în strat fluidizat față de metodele clasice.* Experiențele efectuate pe coloana de fluidizare în laborator oferă și datele de bază necesare proiectării unei instalații industriale de acest gen.

5. Concluzii

Experiențele comparative de laborator asupra îmbătrînirii unui aliaj complex de aluminiu în strat fluidizat, în etuvă (convecție liberă) și în curent de aer (convecție forțată) dovedesc că:

1. Durata procesului de îmbătrînire este mai mică în cazul stratului fluidizat decît în celelalte două cazuri, reducerea timpului de tratare devenind mai mare o dată cu creșterea dimensiunilor pieselor tratate.

2. Procesul de îmbătrînire a pieselor mici în strat fluidizat decurge practic uniform în toată masa piesei, spre deosebire de îmbătrînirea în alte condiții la care se constată diferențe mari de duritate în masa piesei. Există toate motivele să se presupună că acest avantaj se menține și la tratarea unor piese de dimensiuni mari, eventual sub o formă mai atenuată.

3. Avantajele menționate ale îmbătrînirii în strat fluidizat constatate în experiențele de laborator vor fi și mai pregnante în condițiile industriale datorită menținerii cu ușurință a temperaturii constante și a lipsei gradienților de temperatură în stratul fluidizat.

Primită la 4 X 1969

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de termotehnică
și
Catedra de tehnologie mecanică

BIBLIOGRAFIE

1. Kobrin L. C., Iron Age, 1960, *13*, pp. 81–83.
2. — Metalworking Production, 1961, *1*, p. 56.
3. Brittain C. P. et collab., Trait. thermique, 1968, *36*, pp. 49–63.

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LE VIEILLISSEMENT EN LIT FLUIDISÉ DES ALLIAGES D'ALUMINIUM

(Résumé)

Une méthode de traitement thérmique en lit fluidisé, pour le vieillissement d'un alliage complexe d'aluminium a été expérimentée sur une installation de laboratoire (fig. 1). L'évolution du processus de vieillissement à la surface et au centre des éprouvettes est mis en évidence en mesurant la dureté aux cas de la convection libre, de la convection forcée et du lit fluidisé.

Les résultats obtenus (fig. 2, 3 et 4) démontrent que la durée du processus de vieillissement est moindre dans le dernier cas et la différence devient plus marquante à mesure que les dimensions des pièces traitées augmentent. On remarque en même temps que le vieillissement en lit fluidisé a lieu pratiquement uniformément dans toute la masse métallique.

À noter que ces avantages deviennent d'autant plus accentués dans une installation industrielle.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 542 46

CLASSROOM DEMONSTRATION EXPERIMENT IN CONVECTIVE HEAT TRANSPORT

BY

LEONARD FARBAR

1. Introduction

The transport of thermal energy (heat transfer) is a phenomena experienced by man since his appearance on earth and over the ages man has developed various means to provide for the physiology of comfort. These means appear as clothing and thermal devices that protect man from a thermal environment either too hot or too cold, assuming that the other psychrometrics of the environment are satisfactory. Without any calculations whatsoever man has learned to decrease or increase the heat transfer he experiences by insulating materials and by limited control of the sources of thermal energy.

After but a few experiences man instinctively estimates the correct amount and type of thermal protection that may be required by the meteorological conditions of his immediate environment. The qualitative estimate is made without any reference to correlations, mathematical relationships or any direct understanding of the physical phenomena that may control the mode of heat transfer of major importance.

Such is not the case in those areas of engineering requiring quantitative control of heat transport. To the engineer a physical understanding of the heat transport phenomena is as important, if not more so, as the numerous correlations that are available for the calculation of heat transport. The ergineering (and science) student normally hears of heat and its association with a particular thermal system for a number of years before he encounters the subject of heat transfer in an introductory course. Here the engineering student may learn about the modes of heat transfer without any immediate physical understanding of the many variables that may be influential on the heat transfer to or from a system. The subject matter normally lacks systems that respond rapidly and interestingly for classroom demonstrations which could generate student interest and imagination. The usual demonstration equipment involves complex measuring systems (which generally detract from the heat transfer phenomena being observed) and system response times of such length that student interest drops rapidly.

It is the purpose of this paper to suggest and report on a rather simple heat transfer arrangement that may be used most effectively in the classroom to demonstrate certain physical understanding associated with some of the variables influencing convective heat transfer during

the transient cooling of carefully selected geometric shapes. The cooling occurs in liquid nitrogen at atmospheric pressure and in a highly effective manner demonstrates both film and nucleate type boiling as well as the effect of surface area and geometry boundary conditions on the observed cooling time.

2. Demonstration Equipment

The basic equipment and material necessary for the demonstration experimental system is as follows:

a) One stopwatch of 30 minute range and 0.2 second least count.

b) One unsilvered evacuated „Pyrex Brand" wide open mouth Dewar flask of approximately one quart capacity or of the following size: outside diameter (inches), 3.375; inside diameter (inches), 2.75; overall height (inches), 13.5.

This type of evacuated flask may be purchased from any chemical glassware firm.

c) A wooden block to support the glass Dewar as shown in Fig. 1. The hole in the wooden block should be approximately 3 inches in depth with a hemispherical bottom and with an adequate center drain hole and opening to accommodate the end seal on the glass Dewar.

d) Three braided copper wire support slings with 0.625 inch diameter ring soldered to one end and a small hook soldered to other end of braided wire. Total overall length approximately 6.5 inches.

e) Two wooden dowels 0.5 inch diameter and approximately 5 inches long.

f) One glass (silvered) wide mouthed thermos container of approximately one gallon capacity for storage of liquid nitrogen. This glass thermos container can be one as used by campers. The cover for this thermos jug should have at least two 0.1875 inch diameter holes drilled clear through in order to allow for adequate venting of the container when filled (not over 80%) with liquid nitrogen.

g) One set of duplicate geometric bodies made of any metal (preferably copper) and carefully machined so that all shapes are of the same volume or mass as shown in Fig. 2. Small pad eyes (of equal size) may be soldered to each shape and of such size as to permit support by hook in item d).

h) One 2 inch inside diameter clear plastic tube approximately 14 inches in length and fitted to wooden support base as shown in Fig. 3. The four side openings in the base to allow venting of downward flow of cold air.

i) An adequate supply of liquid nitrogen (3 liters will be sufficient), small supply of petroleum jelly and small supply of clean waste.

The set of geometric shapes noted in item g) may be of any geometry, however, it is best to select a geometry that more readily demon-

strates the influence of heat transfer surface area and the hydrodynamic boundary conditions on the cooling time for each shape. Fig. 2 shows the copper shapes that have been successfully used in the classroom at Berkeley. These shapes are of the same bar stock and of the same weight thus eliminating any variations in the properties and total quantity of heat removed between any equal temperature interval. As will be indicated in the analysis section, size restrictions are imposed by the assumption of essentially no temperature gradient within the geometric shape during the cool down period.

Taking one of the shapes as a basis for comparison allows the overall convective heat transfer factor (or coefficient) to be evaluated in terms of ratios rather than getting involved with the time-temperature data necessary to the calculation of the coefficient for each shape and its variation with temperature. The sphere has been used as the basic shape and has proven to be an adequate standard of comparison.

3. Demonstration Experimental Procedure

The preparation of the equipment is best done as part of the demonstration as this setup time may be used to advantage in discussing the safety measures that must be observed in the handling of cryogenic liquids as well as the hazards that could result from careless handling. The glass dewar should be thoroughly cleaned and secured in its stand or base before attempting any cooldown with small quantities of liquid nitrogen. The cooldown period can be shortened appreciably by periodically pouring small quantities of liquid nitrogen into the dewar and as soon as the vigorous boiling subsides the dewar may be filled to about 75 percent of its capacity or to a depth that is sufficient to assure complete submergence of each geometric shape subjected to the transient cooling. Some quiescent boiling may be observed originating in locations that may not have been thoroughly cleaned and subject to radiant heat absorption. If the background boiling is other than minor and the flask has been thoroughly cleaned then the excessive boiling may be the result of a poorly evacuated jacket. The outer surface of the dewar may drop below the dewpoint of the air in the room within about 20 minutes and some provision should be made to wipe away the collected moisture or provide a dry air annulus about the outer surface of the dewar.

The various geometric shapes having been previously polished and at equilibrium with the known room temperature may now be immersed individually, and at which time the stopwatch is started. Oscillation of the geometric shape will be minimized if the shape is properly centered in the flask.

For the polished shapes in addition to close observation of vapor or gas formation about the shape one should also observe in qualitative

manner the vapor rate leaving the top of the dewar. Approximately 5 to 15 seconds prior to cooldown completion, the boiling suddenly increases in a vigorous manner as evidenced by a sudden and large increase in the vapor rate as well as by a „frying" sound. The stopwatch is stopped and read for the total cooldown time when bubbles of nitrogen are no longer formed or seen leaving the surface of the geometric shape (it may be assumed that temperature of the shape is at the liquid nitrogen temperature or at most a degree above). Considerable care should be observed at this point so as not to confuse any heat leak along the braided sling with continuing cooldown of the shape. The geometric shape is then removed and the procedure repeated for the remaining polished shapes; the total time to complete the experiment for any particular shape should be less than five minutes including any time that may be necessary to replenish the liquid nitrogen to a satisfactory level.

Some clouding of the liquid nitrogen may occur after several objects have been cooled — this is due to small particles of solid water and small quantities of carbon dioxide (if present) that may have been adsorbed on the surface of the various shapes. Rechecking the experiment will indicate that this does not influence the total cooling time for a given geometric shape.

The shape removed from the liquid nitrogen may be placed in an adequate warming bath or suspended in item h) where the convective thermal stack and frost formation may be observed as the shape is warmed by the natural convection of the humid room air.

A thin coating of petroleum jelly is then uniformly applied to each duplicate geometric shape and the entire procedure repeated for the condition in which the total cooldown time is substantially reduced. Care must be exercised in the application of the petroleum jelly since too thick a coating may yield intermediate and non-reproducible results. The coating is best applied by hand and carefully smoothed over with a piece of waste to as thin and uniform a coating as possible.

The necessary physical properties are given in Tables 1 and 2.

4. Analysis and Discussion of Results

The symbols used in Fig. 2 will be used as subscripts to designate the various shapes, hence h_{C-1} designates the heat transfer factor for the intermediate cylinder when the flat faces are in the horizontal position.

The various shapes are assumed to be at the same uniform temperature which would normally be the room temperature in which the shapes have been stored.

The lumped-heat-capacity method (no temperature gradients within the solid objects) will be used in the analysis. This assumption or condition is readily attained when the Biot number is reasonably small or

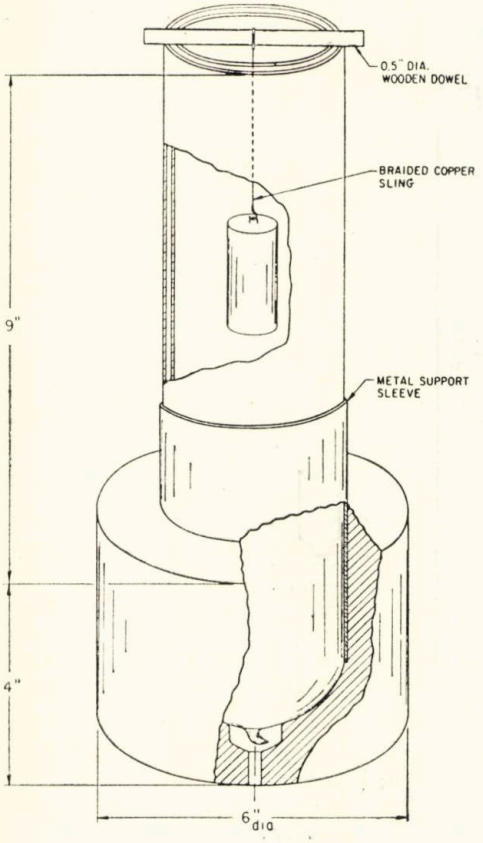


Fig. 1. — Schematic arrangement of dewar flask for cryogenic cooling of geometrial shapes.

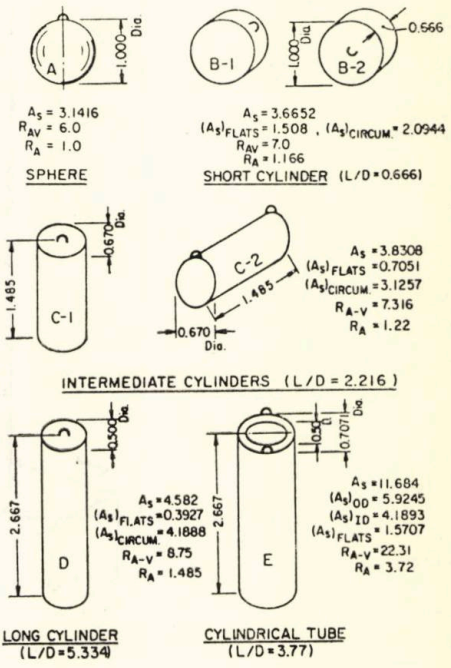


Fig. 2. — Dimensioal characteristics of heat transfer shapes. V — metal volume (cubic inches) = 0.5236, same for all shapes; A_s — total heat transfer area (in square inches); $(A_s)_{\text{circum}}$ — circumferential surface area; $(A_s)_{\text{flats}}$ — end flat surface area; R_{A-V} — ratio of surface area per unit volume; R_A — (surface area shape)/(surface area sphere). All dimensions in inches.

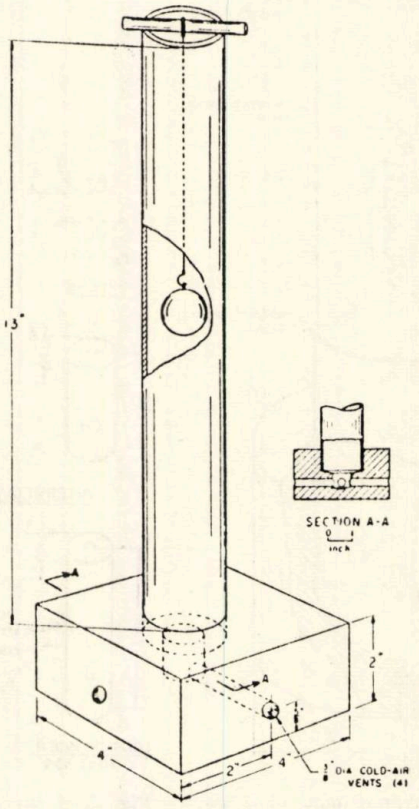


Fig. 3. — Arrangement for natural convection warming of geometrical shapes.

Table 1

*Physical Properties of Copper at Low Temperatures *. Copper Density at 530°R — 0.3182 lb_m/in^3, specific gravity — 8.81*

Temperature	°K	60	80	100	140	200	300
	°R	108	144	180	252	360	540
Thermal Conductivity $\left[\text{Btu/hr. ft}^2 \frac{°R}{ft}\right]$		433	324	260	248	242	242
Specific Heat [Btu/lb_m °R]		0.0322	0.0477	0.0597	0.0702	0.0822	0.0900
Shape ** Heat Capacity (Btu/°R) × 1000		5.36	7.947	9.946	11.69	13.69	14.99

* *A Compendium of the Properties of Materials at Low Temperatures (Phase I).* Part **II**, *Properties of Solids.* National Bureau of Standards Cryogenic Laboratory WADD Technical Report 60—56.

** Shape weight: 0.1666 lb_m .

Table 2

Atmospheric Properties of Liquid Nitrogen

Saturation Temperature	139.5°R
Heat of Vaporization	85.30 Btu/lb_m
Density	1.786 lb_m/liter— 6.76 lb_m/U.S. gallon

less than five-tenths in value. The Biot number, hL/k is a dimensionless number indicating the ratio of the surface heat transfer to the internal conduction heat transfer. Small values of the Biot number would indicate a high thermal resistance to heat transfer at the surface compared to the thermal resistance within the body. A unifom temperature within the body requires the thermal conductivity to be infinite. As the Biot number becomes larger a substantial thermal gradient will exist within the solid body. References [1], [2] and [3] show the effect of the Biot number on the functional relationship between the solid body temperature and the dimensionless time ratio (Fourier number). Merte and Clark (4) confirmed the lumped system model in their experimental work.

From Fig. 2 the largest significant dimension is that of the one inch diameter short cylinder and for the lower value of thermal conductivity (k = 242 Btu/hr°Fft), the corresponding Biot number is

$$\frac{hD}{k} = \frac{h\left(\frac{1}{12}\right)}{242} = 0.000344\,h,$$

hence values of the surface heat transfer factor in excess of 1000 Btu/hr. ft^2° R would be required for the establishment of any appreciable temperature gradient within the solid body.

The 400°R temperature change to which the shapes are subjected has no effect on the mass of the shape, but does have a negligible effect on the dimensions of the various shapes. This effect acts to produce negligible changes in heat transfer surface area and a negligible improvement in decreasing the Biot number. The thermal volume change for copper is given by

$$\frac{V_T}{V_{530°R}} = 1 - 0.0000162\,[530 - T],$$

where T is the absolute temperature in °R.

The corresponding dimensional change would be the cube root of the above value.

Since each solid shape has been made up to have the same volume (0.5236 in^3), the corresponding weight is 0.1666 pounds or 0.00517 slugs.

A thermal energy balance on the shape after immersion in the constant temperature bath (T_∞) yields

$$V\rho C_v\left(-\frac{dT}{d\theta}\right) = hA_s(T - T_\infty), \tag{1}$$

where $V\rho$ — weight of solid shape (lb_m), C_v — solid material specific heat (Btu/lb_m°R), $\left(-\frac{dT}{d\theta}\right)$ — time gradient of temperature (°R/hr); h — convective heat transfer coefficient or factor (Btu/hr°Rft^2), A_s — surface area (ft^2); T — temperature of solid body at any time θ (°R); T_∞ — constant temperature surroundings and for the case of liquid nitrogen $T_\infty = 139.3$ °R or $T_\infty = -320.7$ °F; θ — time (hrs).

Equation (1) merely equates the thermal decrease in heat capacity of the solid shape to the thermal energy convected to the constant temperature bath as defined by Newton's law of cooling. Eq. (1) may be rearranged

$$d\theta = -\frac{V\rho C_v dT}{hA_s(T - T_\infty)}; \tag{2}$$

for constant values of h, C_v and A_s Eq. (2) may be integrated

$$\theta = -\frac{V\rho C_v}{hA_s}\ln\frac{T_\theta - T_\infty}{T_{\theta=0} - T_\infty} = -\frac{V\rho C_v}{hA_s}\ln\frac{\Delta T_{\theta=0}}{\Delta T_\theta}. \tag{3}$$

Eq. (3) gives the time required for any of the shapes of equal heat capacity $V\rho C_v$ to be cooled to an equal temperature difference ΔT_θ from the initial and constant temperature difference $\Delta T_{\theta=0}$. This time is inversely proportional to the product of the convective heat transfer factor and the surface area of the geometric shape, and since for each of the geometric shapes the term $V\rho C_v \ln (\Delta T_{\theta=0}/\Delta T_\theta)$ is a constant, hence

$$\frac{\theta_A}{\theta_{\text{shape}}} = \frac{(hA_s)_{\text{shape}}}{(hA_s)_A}, \tag{4}$$

where $(hA_s)_A$ and θ_A refer to the spherical shape. As designated in Fig. 2,

$$\frac{(A_s)}{(A_s)_{\text{sphere}}} = R_A .$$

Values of R_A for each shape are given in Fig. 2. Eq. (4) becomes

$$\frac{\theta_A}{\theta_{\text{shape}}} = (R_A)_{\text{shape}} \frac{h_{\text{shape}}}{h_A}, \tag{5}$$

or

$$\frac{h_A}{h_{B\text{-}1}} = 1.166 \frac{\theta_{B\text{-}1}}{\theta_A}, \tag{6}$$

$$\frac{h_A}{h_{B\text{-}2}} = 1.166 \frac{\theta_{B\text{-}2}}{\theta_A}, \tag{7}$$

$$\frac{h_A}{h_{C\text{-}1}} = 1.22 \frac{\theta_{C\text{-}1}}{\theta_A}, \tag{8}$$

$$\frac{h_A}{h_{C\text{-}2}} = 1.22 \frac{\theta_{C\text{-}2}}{\theta_A}, \tag{9}$$

$$\frac{h_A}{h_D} = 1.458 \frac{\theta_D}{\theta_A}, \tag{10}$$

$$\frac{h_A}{h_E} = 3.72 \frac{\theta_E}{\theta_A} . \tag{11}$$

Eqs. (6) to (11) inclusive apply directly to all geometric shapes shown in Fig. 2, the observed times and results are shown in Table 3 and Table 4.

Referring to the observed results for the polished or uninsulated shapes in Table 3, the first and most obvious result is the rather wide variation in cooling times (from 188.6 seconds to 63 seconds). Now relative to the sphere, shape E indicates a 66.6 percent decrease in cooling time for a 272 percent increase in surface area ; yet the quantity of thermal energy removed is precisely the same for all the shapes. Overlooking the result for shape B-2, the results demonstrate a strong surface area efect as one would expect. Eq. 3 shows this relationship to be a near linear one with any curvature resulting from the variations in the heat transfer factor h. If one were to plot the times as a function of R_A the surface area ratio this relationship is substantiated for all but shapes B-2 and E. It is of considerable interest to note that shape E falls on this near linear relationship when the surface area of the tube ends and inside diameter

Table 3

Observed Data and Results for Polished Shapes

Geometric shape	Cooling time observed θ (sec)	Ratios: Time $\frac{\theta_{shape}}{\theta_{sphere}}$	Ratios: Area R_A	Ratios: Heat transfer $\frac{h_{sphere}}{h_{shape}}$	Percentage results: Surface area increase $(R_A-1)\,100$	Percentage results: Cooling time decrease $\left(1-\frac{\theta_S}{\theta_A}\right)100$	Percentage results: Heat transfer factor decrease $\left(1-\frac{h_S}{h_A}\right)100$
A	188.6	1.000	1.000	1.000	0	0	0
B-1	161	0.8536	1.166	0.9953	16.6	14.64	−0.47
B-2	193.6	1.0265	1.166	1.197	16.6	−2.64	16.46
C-1	173.4	0.9194	1.22	1.122	22.0	8.06	10.88
C-2	160.6	0.8515	1.22	1.039	22.0	14.85	3.76
D	130.8	0.6935	1.458	1.011	45.8	30.65	1.09
E	63	0.3340	3.72	1.242	272	66.6	19.48

Table 4

Observed Data and Results for Shapes Insulated with Petroleum Jelly

Geometric shape	Cooling time observed θ (sec)	Ratios: Insulated time $\frac{\theta_{shape}}{\theta_{sphere}}$	Ratios: Insulated heat transfer $\frac{h_{shape}}{h_{sphere}}$	Ratios: Shape time $\frac{\theta_{insulated}}{\theta_{polished}}$	Percentages: Decrease in cooling time $\left(1-\frac{\theta_{insulated}}{\theta_{polished}}\right)100$	Percentages: Decrease in insulated heat transfer $\left(1-\frac{h_S}{h_A}\right)100$
A	63.8	1.0	1.0	0.3382	66.18	0
B-1	65.0	1.018	0.8424	0.4038	59.62	15.76
B-2	69.4	1.087	0.7892	0.3585	64.15	12.08
C-1	82.2	1.288	0.6365	0.4739	52.61	36.35
C-2	70.6	1.106	0.7407	0.4397	56.03	25.93
D	71.4	1.119	0.6127	0,5458	45.42	38.73
E	38.2	0.5987	0.4490	0.6054	39.36	55.1

are subtracted from the total surface area of this shape. This would indicate that the thermal energy is being transferred primarily through the outside surface area and that the inner diameter surface area as well as the end areas are substantially ineffective in the transfer of heat due in all probability to the choking of any liquid flow into this region of the tube. Shapes *B*-1, *B*-2, *C*-1 and *C*-2 effectively illustrate the hydrodynamic or boundary layer effects upon heat transfer and cooling time.

Shapes *B*-2 and *C*-1 showing a much better gas flow situation by the surface than that of *B*-1 and *C*-2 both of which will permit a greater buildup of insulating gas film surrounding the shape. This same condition exists in the case of shape *E*. The overall heat transfer factor results readily show the sphere to be the best shape for the transfer of heat. Shape *B*-1 is the only shape showing a heat transfer factor slightly greater than that of the sphere which may be due to experimental error; all other shapes show a decrease in the heat transfer factor as compared to that of the sphere. Reference is now made to Table 4 giving the results for the same shapes insulated with a very thin film of petroleum jelly. The reduction in cooling time (66 percent for the sphere to 39 percent for the tube) is a striking result and can only result from a substantial increase in the value of the heat transfer coefficient. This effect has been reported by Cowley et al. [5] and results in a change in the type of boiling that occurs, e. g., namely film boiling for the polished shapes and nucleate boiling or the insulated shapes. It may be easily demonstrated that thoroughly roughening a finished or polished surface will not result in such an increase of the heat transfer nor will the application of surface active agents.

The very thin coating of petroleum jelly causes a high temperature gradient to be formed between the actual shape surface and the outer surface of the insulating material thus allowing the temperature difference to drop to within the range for nucleate boiling approximately 90°R. The thermal resistance of the thinly applied insulating coat is considerably less than that of the rather thick gaseous film surrouding the shape through wich the thermal energy must be transferred at the higher temperature differences. The typical boiling heat transfer regions are shown in Kreith [1]. Of considerable interest is the performance of the spherical shape which shows it to be the best shape for heat transfer in the nucleate region (as well as in the film region). Increasing insulating thickness to beyond a certain point results in increased cooling times for all shapes but always less than that for the polished shape unless of course sufficient mass of insulation has been added to seriously increase the thermal capacity of the shape and insulation combined. As shown by Cowley et al. [5] any low thermal conductivity material will have the same effect when applied as a coating for insulation; however, some coatings tend to shrink rapidly upon solidification and the resulting „flaking off" will result in variable and nonreproducible cooling times.

The cold shapes may be placed in item h) as shown in Fig. 3 for observation of the free convection stack when the shape is being warmed by the slightly humid room air. The formation of frost buildup and frost detachment about the various shapes may be readily observed. During this warming period the heat transfer factor is constant and at its usual value of approximately 2.0 Btu/hrft²°R. A number of other calculations, analyses or observations may be made with the data obtained from this simple and not too costly equipment. Heat leaks along termocouple wires

and heat flux distribution along finned or extended surfaces may be modeled and observed.

Installation of at least two thermocouples (center and surface) in each shape and use of a fast recording potentiometer will permit a more sophisticated determination of the boiling heat transfer coefficient over the entire range of temperature differences by using graphical techniques in conjunction with Eq. (1). Shapes of different material may be used to demonstrate the independence of the heat transfer coefficient with respect to material composition.

In conclusion, the writer strongly recommends this type of demonstration equipment for the classroom as an aid in stimulating and encouraging a greater interest in heat transfer on the part of the engineering student.

Received the 15 VIII 1969

University of California,
Berkeley, California, USA

REFERENCES

1. Kreith F., *Principles of Heat Transfer.* 2nd Ed., International Textbook Company, 1965, pp. 149—155 (transient heat transfer charts), p. 436 (two-phase [boiling] curve).
2. Heisler M. P., *Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating.* ASME Trans., 1947, **69**, pp. 227—236,.
3. Grober, Erk, Grigull, *Fundamentals of Heat Transfer.* McGraw-Hill Book Co. New York, 1961.
4. Merte H., Clark, J. A., *Boiling Heat Transfer Data for Liquid Nitrogen at Standard and Near-Zero Gravity.* „Advances in Cryogenic Engineering", **7**, Plenum Press Inc., New York, 1961.
5. Cowley C. W., Timson W. J., Sawdye J. A., *A Method for Improving Heat Transfer to a Boiling Fluid.* Industrial and Eng. Chemistry—Process Design and Development, April 1962, **1**, *2*, p. 81.

EXPERIENŢE RELATIVE LA TRANSFERUL CONVECTIV DE CĂLDURĂ

(Rezumat)

Se prezintă cîteva dispozitive experimentale simple care permit să se urmărească cu multă uşurinţă influenţa diverşilor factori fizici care influenţează transferul convectiv de căldură în decursul răcirii unor corpuri cu formă geometrică convenabil aleasă. Răcirea se produce în azot lichid şi evidenţiază, printre altele, efectul suprafeţei laterale a corpului precum şi al geometriei condiţiilor pe contur asupra timpului de răcire.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 536.68 ; 621.01

CONSIDÉRATIONS SUR L'ANOMALIE THERMIQUE JACQ ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

PAR

GÉRARD D'ALBON, EMIL JUGUREANU, VIRGIL CLOŢAN,
GH. LOZONSCHI et N. APETREI

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" de Bucarest, juin 1966

1. Expériences confirmant l'anomalie thermique Jacq et son fondement théorique

Les expériences effectuées par Jacq [1] ... [3] ont démontré l'existence d'une anomalie du champ thermique, connue aujourd'hui sous le nom d'*effet Jacq*. Avant les expériences de Jacq, selon la théorie classique, l'aspect du champ thermique d'une paroi métallique était conformément à la fig. 1.

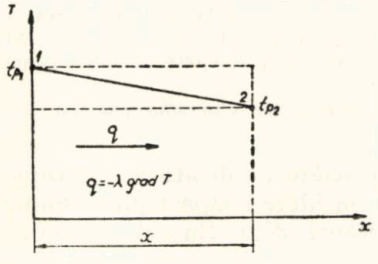


Fig. 1

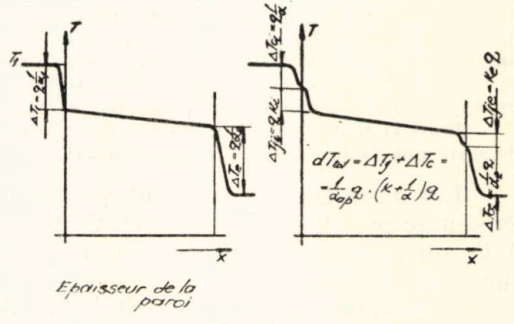


Fig. 2

Les expériences de Jacq ont démontré que le champ thermique présente une anomalie. Une couche sous-superficielle de 40 μ et qui se trouve à une profondeur de 100 μ a une résistance thermique beaucoup augmentée par rapport à la théorie classique. Dans le cas d'un flux thermique q, qui pénètre par la paroi métallique, cette couche provoque une chute de température qui constitue l'anomalie thermique Jacq à l'entrée (fig. 2) notée par Δt_{ji} (chute

thermique Jacq à l'entrée du flux) ; à la sortie du flux on trouve une nouvelle chute thermique anormale Δt_{je} (chute thermique Jacq à la sortie du flux), qui se place aussi dans une couche située de même qu'à l'entrée.

Les deux chutes thermiques sont proportionnelles à l'intensité du flux thermique

$$\Delta t_{ji} = k_1 q, \quad \Delta t_{je} = k_2 q, \tag{1}$$

où les constantes k_1 et k_2 sont différentes, $k_1 > k_2$.

Ce phénomène n'a pas été mis en évidence avant Jacq à cause des difficultés connues concernant la détermination exacte de la température d'une surface métallique et en conséquence ces chutes de température étaient mises sur le compte de la couche limite du fluide dans le cas de la transmission de la chaleur par convection, ce qui, évidemment contribue à dénaturer les résultats des expériences par une fausse interprétation.

Dans la fig. 2 on donne l'image classique du champ thermique dans le cas de la transmission de la chaleur d'un certain fluide vers l'autre, par une paroi métallique lorsque l'effet Jacq était inconnu (A), en comparaison à l'image du phénomène réel qui tient compte de cet effet (B).

Dans l'hypothèse classique, l'entière chute thermique à l'entrée ou à la sortie du flux thermique Δt_i et Δt_e était mise sur le compte de la convection $\Delta T_i = q/\alpha_1$, $\Delta T_e = q/\alpha_2$.

En réalité :

$$\Delta t_i = \Delta t_{c.i} + \Delta t_{j.i} = q\left(\frac{1}{\alpha_1} + k_1\right),$$

$$\Delta t_e = \Delta t_{c.e} + \Delta t_{j.e} = q\left(\frac{1}{\alpha_2} + k_2\right).$$

Pourtant c'est curieux que certaines conséquences pratiques de ce phénomène[1]) n'ont pas été observées et ce fait a contribué, en partie, au maintien d'une incertitude sur l'existence du phénomène et ont mis en discussion la technique expérimentale par laquelle il a été établi [11].

Une incertitude a existé en permanence sur les possibilités de mesurer la température des surfaces à l'aide des couples, exposés directement à l'influence du champ extérieur, sans introduire systématiquement des erreurs.

Pourtant la détermination du champ thermique par la mesure de la dureté réalisée dans le chauffage par frottement qui est présenté dans les ouvrages de Jacq, n'est pas susceptible d'avoir été systématiquement signalée.

Les chutes thermiques Jacq sont très importantes et les constantes k_1 et k_2 ont des valeurs peu dépendantes de la nature et de la conductibilité du matériel ; ainsi Δt_{ij} a pour le cuivre une valeur équivalente à la chute thermique dans une épaisseur de 0,299 m et pour Al, Ni et Fe cette épaisseur a des valeurs respectivement 0,106 m, 0,055 m et 0,031 m. Ces valeurs correspondent aux conditions : métal pur et surface polie.

Dans la pratique industrielle ces deux conditions le plus souvent ne sont pas remplies de sorte que l'effet Jacq peut être diminué.

Les ouvrages de Jacq ont suggéré une première explication théorique présentée par R. Lucas [4]. Cette théorie considère l'aspect phononique à la surface des matériaux démontrant l'existence d'un flux de rétrodiffusion thermique.

Une autre explication a été donnée par les auteurs de cet ouvrage, mais elle a été infirmée par les expériences mêmes effectuées pour sa vérification et qui ont au contraire confirmé la théorie établie par L. Kaiser [5].

---

[1]) Parmi celles-ci, l'apparition des points de fusion sur les surfaces métalliques chauffées dans des fours de rayonnement, a été signalée par Vernotte, comme une des conséquences pratiques de l'effet de Jacq qui n'ont pas été observés en pratique.

Puisque cette explication, pour être infirmée, a nécessité des expériences et pour ne plus les reprendre inutilement, on donne ci-dessous une courte présentation.

À la surface des métaux il y a une couche ayant des propriétés différentes par rapport à celle de l'intérieur du corps (une faible conductivité électrique et pour les métaux et les alliages ferromagnétiques une perméabilité magnétique diminuée — pour le fer la perméabilité magnétique devient zéro à une épaisseur de 35 mμ [6] ... [9]).

La conductivité diminuée intervient en particulier dans les résistances électriques de contact métal solide-métal fluide ou métal solide-alliage fluide et c'est elle la cause qui produit la chute du potentiel à ces contacts. Cette diminution de la conductivité est due aux gaz absorbés et dans leurs absence, la conductivité électrique de la couche superficielle prend des valeurs normales. Ainsi dans le fer coupé sous mercure les résistances électriques de contact s'annulent [6]. Si les couches superficielles à résistance électrique spécifique augmentée auraient aussi une résistance thermique augmentée, l'effet Jacq serait expliqué.

Les expériences effectuées qui ont infirmé cette explication, confirmant la théorie établie par L. Kaiser, seront présentées plus loin. D'après la théorie de L. Kaiser, l'effet Jacq apparaît comme une fluctuation stationnaire localisée à la surface du métal, dans le gaz électronique soumis à la statistique de Fermi-Dirac.

Dans le présent ouvrage seront exposés des méthodes expérimentales dans lesquelles les erreurs systématiques sont éliminées et qui permettent d'établir l'effet Jacq et de vérifier les théories de R. Lucas, L. Kaiser et des auteurs du présent travail. On établit des conclusions concernant les trois hypothèses et on fait des observations sur les conséquences de l'effet Jacq.

2. Méthodes expérimentales pour la recherche de l'effet Jacq

2.1. Méthode du maintien de la surface à la température de fusion en régime stationnaire

Pour la détermination de l'effet Jacq, on a effectué des mesures en régime stationnaire dans lesquelles la température de la surface a été maintenue à une valeur constante.

Un corps solide (fig. 3) a l'une des surfaces en contact avec un fluide de refroidissement, à une température constante, tandis que par l'autre surface pénètre un flux de chaleur reçue par convection et rayonnement d'une source stationnaire. En ce cas est valable l'équation grad $T = -$ $- q/\lambda = \text{const}$.

On établit la température de la source chaude à la valeur nécessaire pour obtenir la fusion de la surface réchauffée. À l'apparition des points de fusion, on a la certitude que la température sur la surface est celle de la fusion du métal exposé. On connaît ainsi la température de la surface non affectée par des erreurs systématiques.

Il faut pour cela que le métal remplisse la condition d'avoir un point de fusion précisément établi, c'est-à-dire qu'il soit à l'état pur ou qu'il soit un alliage avec une composition eutectique. Évidemment il faut aussi éliminer la phase liquide ou la réduire à une épaisseur négligeable.

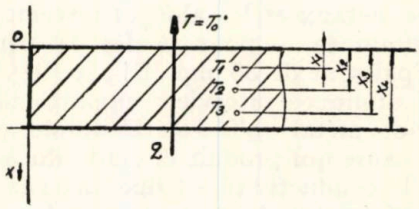


Fig. 3

La surface $x = 0$ est maintenue en contact avec un fluide de température constante T_0. Les couples thermoélectriques T_1, T_2 et T_3 mesurent les températures stationnaires correspondantes aux points x_1, x_2 et x_3. La température de la surface isotherme $x = x_1$ a une valeur T_2 constante et connue, comme on l'a déjà montré.

Le régime stationnaire une fois réalisé, $x_1 = \text{const.}$, la fusion s'arrête. Ainsi, on obtient une image du champ thermique stationnaire.

Il faut observer qu'il est facile d'obtenir le régime stationnaire dans les conditions indiquées. Si la température de la source chaude dépasse une certaine valeur, la fusion se poursuit jusqu'à l'établissement d'un régime stationnaire.

a) *Vérification de l'effet Jacq pour les métaux*

La fig. 4 représente la capsule utilisée dans les déterminations concernant l'alliage Wood et l'étain.

Dans l'espace *1* on trouve le corps étudié. Par l'espace *2* circule de l'eau débitée par un thermostate à une température et un débit constants. La plaque de nickel constitue la source chaude ; elle est chauffée à une température constante, réglable par un courant électrique de grande intensité fournie par un transformateur. La mesure des températures pour déterminer l'effet Jacq se fait seulement lorsqu'on obtient un régime stationnaire pendant lequel on maintient constants les points de fusion sur la surface libre du corps à étudier.

Deux couples thermoélectriques, cuivre-constantan, déterminent la température à l'intérieur du métal dans des points connus. Les fils du couple sont parallèles au diamètre et placés à une distance de 1 mm. Ils sont isolés sur toute leur longueur à l'exception d'une zone centrale d'une longueur de 2 mm. Le contact électrique entre les fils est assuré par le métal.

Dans les fig. 5 et 6 sont présentés les résultats obtenus dans ces expériences.

Ces recherches ont établi l'existence à coup sûr de l'effet Jacq pour ces corps : alliage Wood : $K_1 = 2{,}46 \cdot 10^{-4}$ grad m² h/Kcal, $e = 2{,}7$ mm ; étain technique : $K_1 = 3{,}06 \cdot 10^{-4}$ grad m²h/Kcal, $e = 15$ mm.

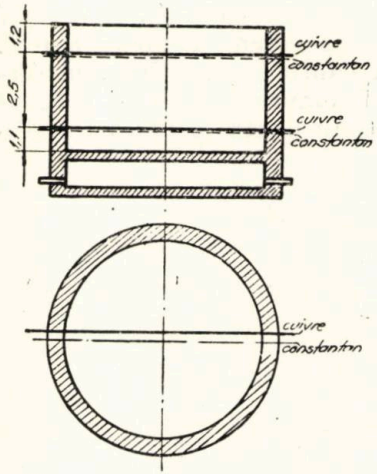


Fig. 4

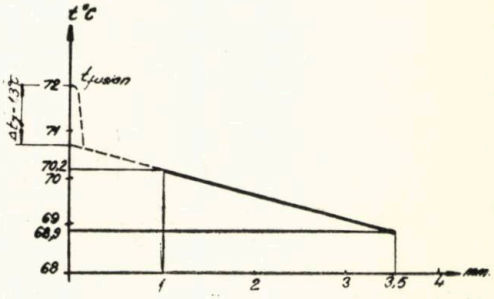


Fig. 5

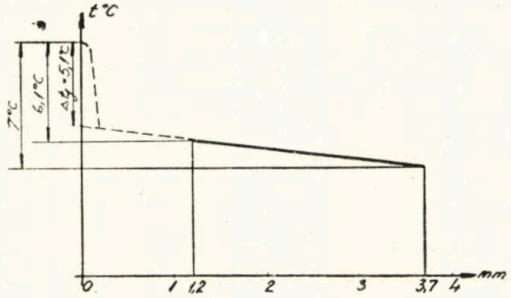


Fig. 6

b) *Vérification de l'effet Jacq sur la glace*

Si la théorie de L. Kaiser est valable, l'effet Jacq doit apparaître seulement dans les métaux et en générale pour les conducteurs thermiques dont la conductibilité est de nature électronique en majeure partie. Par contre, si la théorie phononique de R. Lucas est aussi valable, l'effet Jacq serait remarqué aussi pour les conducteurs thermiques qui sont des isolants électriques.

Évidemment, les deux théories peuvent être également valables et dans ce cas, l'effet Jacq serait produit par les causes cumulées, électroniques et phononiques. Il est donc utile de faire des expériences concernant aussi les isolants électriques. On a choisi la glace, pour faire une expérience par la même méthode, parce qu'elle s'y prête particulièrement bien. La fig. 7 représente la capsule contenant de la glace.

Le chauffage a été assuré par convection, le dispositif étant protégé par rapport au rayonnement thermique, par un écran maintenu à 0 °C. La source froide a varié d'une expérience à l'autre, ayant des températures constantes dans une même expérience comprises entre −10 °C et −40 °C. À l'intérieur de la capsule on a monté quatre couples thermoélectriques.

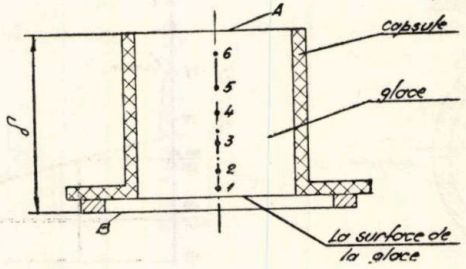


Fig. 7

On fixe la pièce *3* seulement après l'établissement du régime stationnaire pour déterminer la position exacte de la surface libre (et isotherme = 0 °C) de la glace. Les cotes des couples thermoélectriques *2* ont été mesurées aussi a partir de cette même surface. Toutes les mesures des températures ont été faites en utilisant une méthode d'opposition dans le montage extérieur du couple thermoélectrique, par rapport à un couple maintenu à une température constante de 0 °C.

Sur la fig. 8 est indiqué le montage de la capsule sur support *8*, par rapport à la source stationnaire froide. Dans l'espace qui entoure le serpentin *2* il y a de l'eau avec du sel (*1* — récipient, *3* — isolant, *4* — bouchon, *5* — thermomètre, *6* — récipient avec de la glace, *7* — couple thermoélectrique).

Le chauffage a été effectué par convection, un écran empêchant le rayonnement.

Les mesures ayant été effectuées, on a constaté que l'effet Jacq n'existe pas. Le champ thermique est rectiligne jusqu'à la surface de la glace en passant par un point situé exactement à 0 °C. Un exemple de champ thermique déterminé dans l'une de ces expériences est indiqué dans la fig. 9.

On fait la remarque que la très bonne précision avec laquelle la ligne qui représente le champ thermique passe par la valeur $t = 0$ °C à la surface de la glace en état de fusion, démontre les qualités de précision de cette méthode même et confirme ainsi les résultats obtenus pour les métaux.

Il s'en suit aussi que l'effet prévu par la théorie de R. Lucas, comme conséquence des phénomènes phononiques, est certainement négligeable. Cette théorie ne donne d'ailleurs pas de conclusions quantitatives.

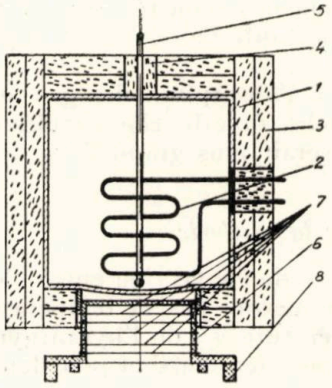


Fig. 8

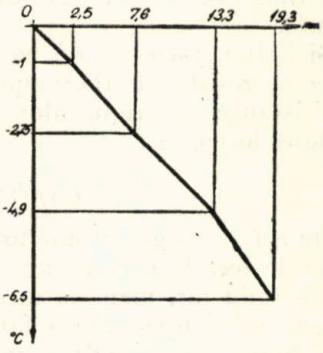


Fig. 9

2.2. La méthode de la convection avec des métaux ou des alliages métalliques fluides

Un corps solide cylindrique métallique, plan-parallèle, sépare l'espace *2*, où se trouve du l'hydrargyre ou un alliage liquide (K-Na) maintenu par chauffage électrique à une température stationnaire, d'un deuxième espace *3* dans lequel on trouve de l'eau et de la glace (fig. 10).

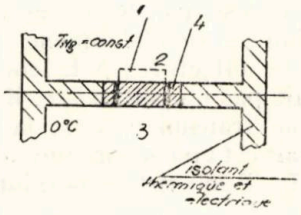


Fig. 10

Un anneau de garde *4*, du même métal que *1*, est soumis au même flux thermique, et par sa position a le rôle de diminuer les composants du gradient thermique compris dans le plan $A - A$ à l'intérieur du corps. Dans l'intérieur du corps *1* on trouve les couples thermoélectriques à des cotes connues comme dans la première méthode. La cote définitive du corps *1* peut être obtenue par le sectionnement dans l'hydrargyre de la portion pointillée. On détermine le champ thermique dans deux situations différentes : a) quand la surface qui sépare le corps *1* de l'hydrargyre

est obtenue par sectionnement sous hydrargyre ; b) quand la surface est obtenue par sectionnement dans l'air. Cette méthode a été conçue pour établir la vérité dans le cas des trois hypothèses.

Au cas où l'effet Jacq est expliquée par la théorie de L. Kaiser, dans ces expériences il serait nul. Si les phénomènes montrés par la théorie de R. Lucas ont une contribution plus importante ils devraient apparaître atténués.

Si l'effet Jacq est dû en partie aussi à l'absorption des gaz qui font croître la résistance thermique de la couche superficielle simultanément à la résistance électrique, alors l'effet Jacq serait plus grand dans le cas b) que dans le cas a).

Expérimentation de la méthode

On a fait un grand nombre d'expériences de convection entre l'hydrargyre et le fer. Dans ces expériences on ne mesure pas la température de la surface du fer, mais on mesure la température T_0 de l'hydrargyre.

Les expériences ont été faites dans les cas : fer coupé et poli dans l'aire et fer coupé sous l'hydrargyre.

Dans les deux cas on a obtenu entre l'hydrargyre et le fer des chutes thermiques plus petites que celles correspondant à l'effet Jacq pour le fer.

Les valeurs obtenues dans les deux cas sont égales.

3. Interprétation des résultats

1. Il résulte premièrement que l'effet Jacq existe aux métaux et alliages parce que ce phénomène a été établi dans toutes les expériences où on a éliminé les erreurs systématiques et on a travaillé avec une grande précision.

2. Le fait que l'effet Jacq n'apparaît pas à la glace montre que les anomalies phononiques indiquées par R. Lucas n'ont pas une contribution mesurable dans l'apparition de ce phénomène.

3. Dans les expériences effectuées à la convection fer-hydrargyre, le phénomène Jacq n'apparaît pas ou, s'il existe, il a une valeur réduite comparativement au cas d'une transmission de la chaleur par rayonnement ou convection en l'air. Ce fait est en concordance avec la theorie de L. Kaiser, parce qu'au contact Fe-Hg il n'existe pas d'interruption des gaz électroniques.

La discontinuité dans le processus phononique serait au contraire suffisamment grand pour déceler le phénomène Jacq atténué, si celui-ci était de nature phononique.

4. Dans la conductivité thermique, les couches superficielles qui ont une résistance électrique augmentée à cause de l'absorption des gaz, ne semblent pas modifier la conductivité thermique et en aucun cas ils ne peuvent constituer une explication de l'effet Jacq.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Thermotechnique
et de Machines Thermiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Jacq J., Chateau M., *Anomalie de la distribution de température dans les couches superficielles d'un solide.* C.r. Acad. Sci. Paris, 1961, **252**, *21*, pp. 3201—3203.
2. — *Anomalie de la distribution de température dans les couches superficielles d'un solide.* C.r. Acad. Sci. Paris, 1961, **252**, *20*, p. 3011—3013.
3. Jacq J., *Anomalie de la distribution de température dans les couches superficielles d'une paroi chauffée ou refroidie.* „Journées internationales de la Transmission de la Chaleur", Éd. de l'Inst. Français des Combustibles et de l'Énergie, Paris.
4. Lucas R., *Théorie du phénomène d'anomalie de température dans les couches superficielles des matériaux.* „Journées internationales de la Transmission de la Chaleur", Éd. de l'Inst. Français des Combustibles et de l'Énergie, Paris.
5. Kaiser L., *Essai d'une théorie électronique de l'effet Jacq.* Rev. gén. de Thermique, Paris, mai 1962, **1**, *5*, pp. 21—40.
6. Klaudy P., *Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten von Flüssigkeitskontakten.* ETZ 1955, (**A**), *15*, pp. 525—532.
7. d'Albon G., și colab., *Perfecționarea grupurilor turbogeneratoare cu generatoare unipolare.* Bul. Inst. polit. Iași, 1956, **II** (**VI**), 1—2.
8. Procopiu Șt., d'Albon G., *Perméabilité magnétique à haute fréquence des couches minces de fer déposées électrolytiquement.* C. r. Acad. Sci. Paris, déc. 1937, pp. 1373—1376.
9. d'Albon G., *La perméabilité magnétique des couches minces de fer en haute fréquence et dans les mesures statiques.* Ann. Sci. Univ. Jassy, 1939, **XXV**, *2*.
10. Missenard A., *Conductivité thermique des solides, liquides, gaz et de leurs mélanges.* Eyrolles, Paris, 1965, 554 p.
11. Bonnet C., Morin R., *Étude à propos de l'anomalie de la distribution des températures dans les couches superficielles d'une paroi chauffée ou refroidie, constatée par M. Jacq.* Bruxelles, Euratom, 1963, 79 p.
12. Harrington R. E., *Anomalous Surface Heating Rates.* J. Appl. Phys. (USA), 1966, *37*.

CONSIDERAȚIUNI ASUPRA ANOMALIEI TERMICE JACQ ȘI REZULTATE EXPERIMENTALE

(Rezumat)

Anomalia termică descoperită de J. Jacq în anul 1961 a dat naștere la numeroase discuții atît pe plan teoretic cît și experimental.

Efectul Jacq sau anomalia termică Jacq este o cădere de temperatură anormală, Δt_j, observată în conductorii metalici, în anumite condiții.

În lucrarea de față se prezintă experiențele efectuate în cadrul catedrei de termotehnică de la Institutul politehnic din Iași, referitoare la existența acestei anomalii. Aceste experiențe — care pot constitui metode de studiu ale efectului Jacq — au avut rolul atît de a pune în evidență existența fenomenului Jacq, cît și de a verifica valabilitatea teoriilor emise în legătură cu acest fenomen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. K. 621.43.019

DIE KORRELATION ZWISCHEN DEN KRITISCHEN THERMODYNAMISCHEN GRÖSSEN UND DER VORREAKTION IM LADUNGSREST BEI KLOPFENDER VERBRENNUNG IN OTTOMOTOREN

VON

DAVID PERETZ

1. Einleitung

In der Literatur der letzten drei Jahrzente findet man zahlreiche Versuche, die thermodynamischen Grössen, die den Zustand des Ladungsrestes bei Klopfeintritt kennzeichnen, zu berechnen.

Unter den ersten Versuchen dieser Art ist der von Rothrock und Bierman [1], [2] zu nennen, die von der Voraussetzung ausgehen, dass der Arbeitsstoff im Zylinder des Motors zuerst polytropisch verdichtet wird; es folgt dann eine isochore Zustandsänderung mit Wärmezufuhr (Verbrennung), so dass der Höchstdruck (kritischer Druck) erreicht wird, wenn der Kolben sich im o.T. befindet. Der kritische Zustand wird durch die Dichte und die Temperatur des Endgases bestimmt. Die von diesen Forschern vorgeschlagene Gleichung hat aber nur eine beschränkte Gültigkeit.

Erst nachdem die Ergebnisse einer grossen Reihe von Untersuchungen [3] ... [9], vollkommen bewiesen haben, dass das Klopfen in seinem Wesen ein chemisches Phänomen ist, durch welches die Selbstzündung des Ladungsrestes hervorgerufen wird, wurden neue Versuche gemacht, eine Beziehung zwischen den kritischen Zustandsgrössen und der Vorreaktion im Endgas zu finden. Einen verdienstvollen Fortschritt in diesem Sinn stellt die Arbeit Mac Phersons dar [10], in welcher der Verfasser annimmt, dass sich im Endgas, durch eine Kettenvorreaktion ein Zwischenprodukt bildet, das bei Klopfeintritt eine kritische Konzentration erreicht. Mac Pherson hat ebenfalls zum ersten Male den sogenannten „Zeitfaktor" eingeführt, der die Zeitdauer der Vorreaktion darstellen soll. An dieser Arbeit wäre die Tatsache zu beanstanden, dass der Verfasser von der Voraussetzung ausgeht, die Reaktionsgeschwindigkeit sei eine geradlinige Zeitfunktion, was eben den Misserfolg in der Anwendung dieser Gleichungen erklärt, wenn verschiedene Veränderliche auftreten (z.B. der Zündzeitpunkt, das Kompressionsverhältnis u.a.).

Bemerkenswert ist auch die Arbeit von Karim [11], in welcher angenommen wird, dass die Kettenvorreaktion, die im Endgas stattfindet, durch eine Gleichung vom Typ Arrhenius beschrieben werden kann. Durch die grosse Zahl der gemachten Hypothesen ist es möglich nur eine qualitative Annäherung des Klopfeintritts auszudrücken.

In dieser Arbeit, die sich auf ein Modell der klopfenden Verbrennung [12], sowie auf die kinetischen Gleichungen für Vorreaktionen im Ladungsrest [13] stützt, wird eine neue allgemeine Beziehung zwischen den kritischen Zustandsgrössen (Druck und Temperatur) des Endgases und den Vorreaktionen, die in denselben stattfinden, vorgeschlagen.

2. Die Ähnlichkeit zwischen den Reaktionsmechanismen, die zur Bildung von Oxydationszwischenprodukten in der Ladung von Ottomotoren und Schnellverdichtungsmaschinen führt

Livengood und Wu [14] haben bewiesen, dass die Art der Oxydationsreaktionen im Endgass von Ottomotoren dieselbe wie in der Verdichtungsapparatur ist, ohne aber die Unterschiede im Reaktionsverlauf in beiden Fällen genauer anzugeben.

So wird in der Verdichtungsapparatur das Gemisch sehr schnell in einen thermodynamischen Zustand, der durch gewisse Werte des Druckes und der Temperatur gekennzeichnet ist, gebracht, so dass

$$\Delta t_i \ll \tau. \tag{1}$$

Hierbei ist Δt_i — die Zeitdauer der Verdichtung, τ — der Zündverzug des Gemisches.

In dem Gemisch von Kraftstoff—Luft mit diesem Anfangszustand findet bei gleichbleibendem Druck und Temperatur eine Reaktion statt, die nach dem Zündverzug τ zur Selbstzündung führt.

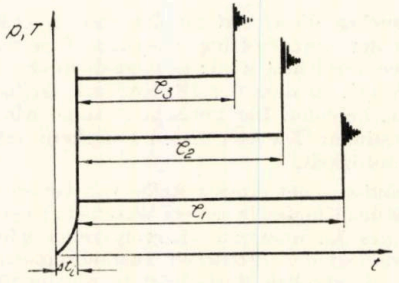


Abb. 1

Diese Reaktion in der Verdichtungsapparatur findet durch Verzweigungen der Reaktionsketten statt, ohne dass eine Wärmebeschleunigung hinzukommt und ist nur als Funktion der Zustandsgrössen p (Druck) und T (Temperatur) zu betrachten, die den Zustand des Gemisches nach der Verdichtung kennzeichnen, wenn man sich auf einen gegebenen Kraftstoff und eine gegebene Gemischstärke bezieht.

Folglich ist der Wert des Zünderzugs von der Zeit unabhängig, weil auch der Anfangszustand des Gemisches nicht eine Funktion derselben

ist. In diesem Fall wird eine eventuelle Reaktion, die während der Verdichtung stattfinden könnte, vernachlässigt.

Um eine Verbindung zwischen der Vorreaktion im Endgas bei klopfender Verbrennung und derjenigen, die zur Selbstzündung des Gemisches in der Verdichtungsmaschine führt, herzustellen, könnte folgende Überlegung gemacht werden:

In dem Gasgemisch, das sich in der Verdichtungsapparatur befindet, bildet sich während des Zündverzugs durch kettenartige Oxydationsreaktionen ein Zwischenprodukt, dessen Konzentration stettig bis zu einem kritischen Wert wächst, bei welchem die Selbstzündung eintritt und folglich bei

$$y = \bar{y}_{cr} \quad \text{ist} \quad t = \tau, \tag{2}$$

wobei y die bis zum Zeitpunkt t reagierte Kraftstoffmenge und $\bar{y}_{cr}$ die bis zum Zündverzugsende (τ) in der Verdichtungsapparatur kritische Kraftstoffmenge — jeweils auf die Ausgangsmenge bezogen sind. In diesem Fall einer isothermen Kettenreaktion ist $\bar{y}_{cr}$ eine Konstante, die nur von der Natur des Kraftstoffes und der Gemischstärke abhängig ist, weil auch die kritische Konzentration der Zwischenprodukte nur von diesen beiden Veränderlichen abhängig ist.

Um diese Art der Reaktionen zu kennzeichnen, kann man den Begriff einer mittleren Reaktionsgeschwindigkeit einführen [13]. So ist

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\bar{y}_{cr}}{\tau} \tag{3}$$

und folglich bleibt die mittlere Reaktionsgeschwindigkeit während des Zündverzugs unverändert.

Im Unterschied zur Schnellverdichtungsmaschine wird der Ladungsrest durch den Verbrennungsprozess im Motor schnell wechselnder Drucken und Temperaturen ausgesetzt. Die Verbrennung findet nicht augenblicklich statt, folglich kann sie nicht isochor sein und muss eine gewisse Zeit andauern. Der Verbrennungsprozess kann langsamer oder schneller sein, so dass der augenblickliche Druck, dem das Endgas ausgesetzt ist, sowie dessen Temperatur von der Verbrennungsgeschwindigkeit bzw. von der Geschwindigkeit der Flammenfrontausbreitung abhängig sind.

Um diese Denkweise fortzusetzen, wird weiter angenommen, dass eine Verdichtungsapparatur verwirklicht werden kann, mit deren Hilfe die Werte p und T wie im Motor selbst als Zeitfunktionen wiedergeben werden können. Aus der Abb. 2 ist ersichtlich, dass die Reaktion, die dem thermodynamischen Zustand entspricht der beispielweise dem Anfangszustand 1 folgt, nicht im selben Moment (nach Δt_i) beginnen kann, sondern für diesen Zustand, der durch die Grössen p_2 und T_2 gekennzeichnet ist, beginnt die Reaktion erst nach dem Zeitabstand Δt_{12}, für den Zustand

3 nach Δt_{13} usw. bezogen auf dem Anfangszustand. Die Menge der in diesen Zeitintervallen gebildeten Zwischenprodukte ist von der Reaktionsgeschwindigkeit und der Grösse des Zeitabstandes bestimmt u.z.:

$$y_{12} = \frac{y_{cr}}{\tau_{m\,1,2}} \Delta t_{12}, \tag{4}$$

$$y_{13} = \frac{y_{cr}}{\tau_{m\,1,3}} \Delta t_{13}, \tag{5}$$

usw., wobei z.B. $\tau_{m\,1,2}$ den mittleren Zündverzug für den Zeitintervall Δt_{12} ist.

Wenn der Zeitabstand genug klein ist, so dass der entsprechende Zündverzug unveränderlich vorausgesetzt werden kann, so ist es möglich,

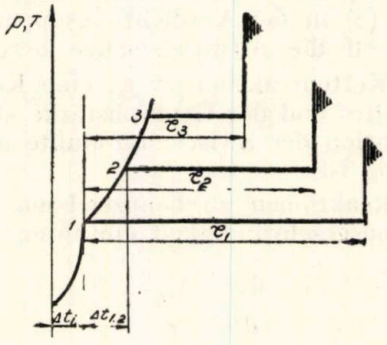


Abb. 2

die augenblickliche Reaktionsgeschwindigkeit, die als punktförmige Zeitfunktion gemeint wird, folgendermassen auszudrücken:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{cr}}{\tau}, \tag{6}$$

oder

$$dy = \frac{y_{cr}}{\tau}\, dt. \tag{7}$$

Die reagierte kritische Kraftstoffmenge erhält man durch die Integration der Gleichung (7)

$$\int_0^{y_{cr}} dy = \int_0^{\tau_{aa}} \frac{dy}{dt}\, dt = \int_0^{\tau_{aa}} \frac{y_{cr}}{\tau}\, dt = y_{cr} \int_0^{\tau_{aa}} \frac{dt}{\tau}, \tag{8}$$

wobei τ_{aa} die Dauer der Vorreaktion im Endgas ist.

Für eine beliebige Zeitdauer $t < \tau_{aa}$ ist

$$y = \int_0^y dy = y_{cr} \int_0^t \frac{dt}{\tau}. \tag{9}$$

Wie aus den Gleichungen (8) und (9) ersichtlich ist, verändert sich y_{cr} nicht mit der Zeit, weil im Modell der klopfenden Verbrennung [12], [13]

$$y_{cr} = 1 - e^{-\frac{m}{m+1}} \tag{10}$$

und der kinetische Exponent m der Reaktion unabhängig von der Zeit ist.

Die Gleichung (8) ist mit der von Livengood und Wu [14] ausgearbeiteten Beziehung identisch. Durch die Einführung des Begriffs der mittleren Reaktionsgeschwindigkeit für die Reaktion in der Verdichtungsapparatur und des Modells für die klopfende Verbrennung in Ottomotoren ist es möglich, den Beweis zu erbringen, dass das Integral von Livengood und Wu den Zeitverlauf der Vorreaktion bei klopfender Verbrennung richtig ausdrückt.

3. Die Beziehung zwischen der Dauer der Vorreaktion und den kritischen Zustandsgrössen bei Klopfeintritt

Der Zündverzug τ, bei konstantem Druck und konstanter Temperatur in der Verdichtungsapparatur kann mit folgender allgemeinen Formel berechnet werden:

$$\tau = A\, p^{-\overline{m}}\, e^{\frac{E}{RT}}, \tag{11}$$

wobei A, $\overline{m}$, E und R Konstanten sind, die von der Natur des Kraftstoffes und von der Gemischstärke abhängen und mit Hilfe der Schnellverdichtungsmaschinen bestimmt werden können.

Wenn wir den Wert aus Gleichung (11) in der Gleichung (9) einsetzen, so ist:

$$y = y_{cr} \int_0^t A_1 p^{\overline{m}}\, e^{-\frac{b}{T}}, \tag{12}$$

wobei

$$A_1 = \frac{1}{A} \tag{13}$$

und

$$b = \frac{E}{R}. \tag{14}$$

Die reduzierte augenblickliche Reaktionsgeschwindigkeit ist nach Gl. (12)

$$w_{yr} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{y_{cr}}\right)}{\mathrm{d}t} = A_1 p^{\bar{m}} e^{-\frac{b}{T}} . \tag{15}$$

Andererseits wurden in den Veröffentlichungen [12], [13] folgende Gleichungen aufgestellt:

$$y = 1 - e^{-\frac{m}{m+1}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m+1}} \tag{16}$$

und

$$w_{yr} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{y_{cr}}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{w_y}{y_{cr}} = \frac{m}{\tau_{aa} y_{cr}}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m} e^{-\frac{m}{m+1}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m+1}} . \tag{17}$$

Folglich können wir die neue Gl. (18) schreiben:

$$\frac{m}{\tau_{aa} y_{cr}}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m} e^{-\frac{m}{m+1}\left(\frac{t}{\tau_{aa}}\right)^{m+1}} = A_1 p^{\bar{m}} e^{-\frac{b}{T}} . \tag{18}$$

Bei Klopfeintritt, wenn $t = \tau_{aa}$, wird die Gl. (18)

$$\frac{m}{\tau_{aa} y_{cr}} e^{-\frac{m}{m+1}} = A_1 p_{cr}^{\bar{m}} e^{-\frac{b}{T_{cr}}} , \tag{19}$$

oder

$$\tau_{aa} = \frac{m e^{-\frac{m}{m+1}}}{y_{cr}} A p_{cr}^{-\bar{m}} e^{\frac{b}{T_{cr}}} . \tag{20}$$

Die Gleichung (20) kann, wenn wir die Gleichungen aus [13] in Betracht ziehen, auch folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\tau_{aa} = w_{rcr} A p_{cr}^{-\bar{m}} e^{\frac{b}{T_{cr}}} , \tag{21}$$

oder

$$\tau_{aa} = w_{rcr} \tau_{cr} . \tag{22}$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn auch eine andere Beweisführung gebraucht wird, die auf die Wahrscheinlichkeit der Kettenverlängerung in solchen Reaktionen beruht.

Die Gleichungen (21) oder (22) drücken mit Hilfe des Exponenten m die Beziehung zwischen der Dauer der Vorreaktion im Ladungsrest berechnet von einem gewissen willkürlich gewählten Null-Zeitpunkt und den Zustandsgrössen — kritischer Druck und kritische Temperatur — bei Klopfeintritt.

4. Prüfung der vorgeschlagenen Gleichungen durch Forschungsergebnisse

Die Prüfung der Gleichungen (21) oder (22) kann man mit Hilfe der Forschungsergebnisse aus [14] durchführen, wobei die Berechnung des Exponenten m wie in [12] durchgeführt wurde.

Aus den veröffentlichten Versuchsergebnissen wurden einige Beispiele für n-Heptan gewählt (Tabelle 1), wobei das Kraftstoff-Luftverhältnis 0,0665 ist.

Tabelle 1

Ordnungs-zahl	p_{cr} psia	T_{cr} °R	τ_{cr} ms	t_0 ms	Kin. Exp. m	$w_{r\,cr}$ [13]	τ_{aa} ms Gl.(21)	τ_{aa} ms [14]
1	150	1 900	2,62	5	5,5	4,13	10,82	11,1
2	280	1 390	0,82	27	60	25,85	29,40	29,60
3	380	1 630	0,75	20	50	30,50	22,87	22,8
4	243	1 425	0,78	9	23,3	14,49	11,30	11,4
5	302	1 410	0,70	13	30,5	18,66	13,06	15,6

Die Schwierigkeiten auf die man in der Prüfung der vorgeschlagenen Gleichungen stosst, bestehen insbesondere in der Tatsache, dass der kritische Zündverzug τ_{cr}, welcher den kritischen Zustandsgrössen entspricht, meistens Werte hat, die viel kleiner als 1 ms sind und diese Zündverzüge können praktisch nicht mit der Verdichtungsmaschine bestimmt werden.

Die Versuche wurden mit einem Ottomotor vom Typ CFR in den „Sloan Laboratory for Automotive and Aircraft Engines" durchgeführt. Die Arbeitsbedingungen sind aus derselben Arbeit [14] ersichtlich.

Unsere Beispiele beweisen dass eine gute Übereinstimmung zwischen den berechneten Werten der Vorreaktionsdauer τ_{aa} (Gl. (22), (23)) und den aus Versuchen gewonnenen Ergebnisse existiert und folglich können die vorgeschlagenen Gleichungen (22) und (23) auch zur quantitativen Schätzung der Dauer der Vorreaktion dienen.

5. Schlussfolgerungen

1. Die Vorreaktion im Endgas der Ottomotoren kann derjenigen, die in der Verdichtungsapparatur stattfindet, angepasst werden, wenn in der letzten die Werte des Drucks und der Temperatur als Zeitfunktion wie im Motor selbst getreulich wiedergegeben werden können.

2. Wenn man voraussetzt, dass die augenblickliche Geschwindigkeit der Vorreaktion bei klopfender Verbrennung mit der mittleren Reaktionsgeschwindigkeit bei konstant gehaltenen Zustandsgrössen (Druck und Temperatur) in der Verdichtungsapparatur gleich ist, dann drückt das Integral von Livengood und Wu richtig die Entwicklung der Vorreaktion als Zeitfunktion aus.

3. Die Dauer der Vorreaktion τ_{aa} kann mit Hilfe des kinetischen Exponenten und den kritischen Zustandsgrössen bei Klopfeintritt berechnet werden. Diese Gleichungen zeigen auch gleichzeitig die Beziehung zwischen m und τ_{aa} an.

So kann bewiesen werden, dass eine Beziehung zwischen den kritischen Zustandsgrössen und der Verlaufsweise der Vorreaktion besteht.

4. Die Gleichungen (21) oder (22) besitzen einen wichtigen Vorteil gegenüber den von Mac Pherson vorgeschlagenen, weil die kinetischen Grössen m und τ_{aa} es ermöglichen, den Verlauf der Vorreaktion zu beschreiben, wobei es nicht mehr nötig ist, die beandstandbare Voraussetzung Mac Phersons, derzufolge die Reaktionsgeschwindigkeit eine geradlinige Zeitfunktion ist, zu gebrauchen.

Eingegangen am 17.X.1969

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl fur Wärmetechnik
und Wärmekraftmaschinen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Rothrock A. M., Bierman A. E., N.A.C.A., 1939, nr. *655*.
2. Rothrock A. M., S.A.E., 1941, **48**, *2*.
3. Downs D., Walsh A. D., Wheeler R. W., Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1951, **A 234**, pp. 463–524.
4. Downs D., Street J. C., Wheeler R. W., Fuel, 1953, **32**, pp. 279–309.
5. — J. Inst. Petroleum, 1961, **47**, pp. 1–20.
6. Downs D., Griffiths S. T., Wheeler R. W., J. Inst. Petroleum, 1963, **49**, pp. 8–25.
7. Iost W., *Knock Reaction*. Ninth Symposium Inst. on Combustion, 1963, New York-London.
8. Соколик А. С., *Самовоспламенение, пламя и детонация в газах*. Изд. АН СССР, 1960.
9. Voinov A. N. u. A., Kin. Kat., 1964, **5**, *3*, pp. 388–398.
10. Mac Pherson J. H., Bert Y. A., Kipp K. L., Soc. Automat. Engnrs., Preprint, 1958.
11. Karim G. A., J. mech. Eng. sci., 1964, **6**, *4*, pp. 353–361.
12. Peretz D. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1–2*, pp. 493–508.
13. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1969, **XV (XIX)**, *1–2*, Sektion IV, S. 81–88.
14. Livengood Y. C., Wu P. C., *Correlation of Autoignition Phenomena in Internal Combustion Engines and Rapid Compression Machines*. Fifth Symposium Inst. on Combustion, 1955, New York, pp. 347–355.

CORELAŢIA REACŢIEI DE PREDETONAŢIE CU PARAMETRII TERMODINAMICI CRITICI AI AMESTECULUI FINAL DIN MOMENTUL DETONAŢIEI

(Rezumat)

În lucrare se prezintă o analiză privind similitudinea mecanismelor de reacţie în decursul cărora se formează compuşi intermediari de oxidare în amestecul combustibil-aer din motoarele cu aprindere prin scînteie şi maşinile de compresie rapidă, cu ajutorul căreia se stabileşte o relaţie între parametrii termodinamici critici ai amestecului final şi durata reacţiei de predetonaţie.

La baza acestor ecuaţii ((21) sau (22)) stă ipoteza că viteza instantanee a reacţiei de predetonaţie este egală cu o viteză medie de reacţie la parametri de stare constanţi în maşina de compresie rapidă.

Ecuaţiile obţinute precizează atît relaţia între parametrii termodinamici critici şi modul de evoluţie a reacţiei de predetonaţie, cît şi legătura între exponentul cinetic m şi durata reacţiei de predetonaţie τ_{aa}.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.43.019

INFLUENŢA VISCOZITĂŢII COMBUSTIBILULUI ASUPRA CALITĂŢII PULVERIZĂRII, ÎN CAZUL INJECŢIEI MECANICE

DE

EMIL GAIGINSCHI, MIRCEA ZUGRĂVEL, MARCEL GUTMAN şi AL. BÎRJOIANU

1. Introducere

Pulverizarea combustibilului lichid în cazul injecţiei mecanice este un fenomen complex, determinat şi influenţat de o serie de factori legaţi de sistemul de injecţie şi de condiţiile din camera de ardere a motorului, denumiţi factori externi, şi de o serie de factori legaţi de proprietăţile fizice ale combustibilului, denumiţi factori interni. Viscozitatea este unul dintre factorii interni care influenţează pulverizarea combustibilului.

Lucrarea de faţă are drept scop determinarea, pe cale experimentală, a influenţei viscozităţii asupra calităţii pulverizării, pentru combustibilii uşori şi grei utilizaţi în motoarele cu ardere internă. Pentru a ilustra această influenţă, s-au trasat caracteristicile de pulverizare pentru combustibili de viscozităţi diferite, celelalte condiţii rămînînd neschimbate.

Viscozităţile combustibililor utilizaţi au fost: 1,34; 1,56; 1,74; 1,88; 2,0 în °E, la 20 °C.

Pulverizarea s-a făcut cu ajutorul sistemului de injecţie al motorului D—35, în următoarele condiţii: presiunea de ridicare a acului pulverizatorului, $p_i = 125$ kgf/cm²; contrapresiunea mediului în care s-a făcut injecţia, egală cu presiunea atmosferică; temperatura mediului în care s-a făcut injecţia, egală cu temperatura camerei; turaţia axului pompei de injecţie, $n_p = 700$ rot/min.

Pentru stabilirea caracteristicilor de pulverizare s-a utilizat o metodă directă, perfecţionată în cadrul unor cercetări anterioare [3],[1] instalaţia experimentală fiind construită în Laboratorul de motoare cu ardere internă al Institutului politehnic din Iaşi.

2. Rezultatele cercetării

Imaginile picăturilor obţinute în urma pulverizării combustibililor de viscozităţi diferite, sînt date în fig. 1 ... 5.

Din figuri se vede clar că o dată cu creşterea viscozităţii cresc şi diametrele picăturilor, lărgindu-se totodată şi intervalul de dimensiuni în care sînt cuprinse. Cînd se examinează însă aceste imagini, trebuie avut în vedere faptul că pe fotografii apare diametrul picăturilor deformate în urma aşezării lor pe suprafaţa mediului de captare; de aceea este necesară utilizarea unor curbe de corespondenţă pentru determinarea diametrului real [3, p. 333].

Pentru fiecare determinare s-au prelucrat un număr de 3 ... 6 imagini ale cîmpului microscopului, din diferite regiuni ale mediului de captare, totalizînd, în medie, o suprafaţă de 4 ... 5 mm². Rezultatele măsurătorilor, după ce s-au făcut corecţiile de diametru, s-au înscris în tabelul 1.

Tabelul 1

Numărul de picături, pe grupe de dimensiuni, pentru combustibili cu viscozităţi diferite

Diametrul picăturilor μ	Viscozitatea combustibilului, °E la 20 °C				
	1,34	1,56	1,74	1,88	2,0
0 ... 5	603	301	215	214	233
5 ... 10	320	417	349	211	262
10 ... 15	70	95	124	68	124
15 ... 20	21	19	33	22	35
20 ... 25	1	6	3	10	8
25 ... 30	1	2	1	2	4
30 ... 35	—	—	1	3	2
35 ... 40	—	—	4	1	1
40 ... 45	—	—	—	1	1
45 ... 50	—	—	—	—	2
	1 016	840	730	532	672

Pentru comparaţii între diferite pulverizări, este necesar de raportat numărul de picături cuprinse în diferite intervale la numărul total al picăturilor. În acest fel s-a întocmit tabelul 2.

Analizînd datele din tabelul 2 rezultă că pentru combustibilul cu cea mai mică viscozitate (1,34 °E, la 20 °C), un număr mare de picături (59,35% din total) au diametrele cuprinse în intervalul 0 ... 5 μ; pentru celelalte grupe de dimensiuni acest procent scade mult, ajungînd la 0,09 în inter-

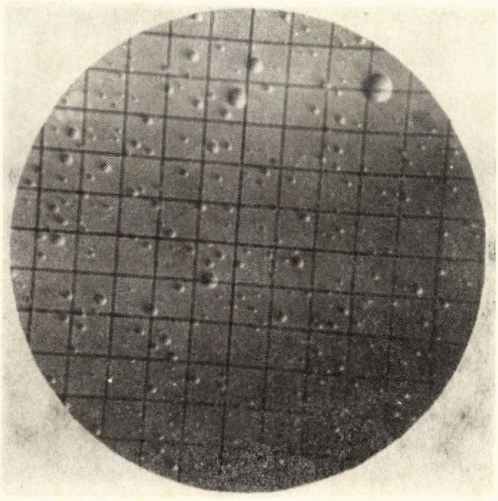


Fig. 1 — Picături obținute prin pulverizarea unui combustibil cu o viscozitate de 1,34 °E, la 20 °C; 1 div = 55 μ.

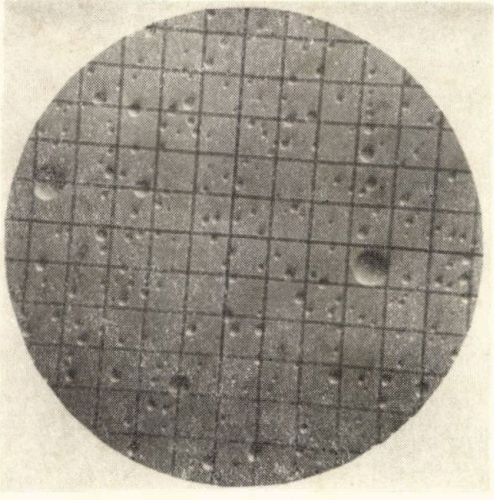


Fig. 2 — Picături obținute prin pulverizarea unui combustibil cu o viscozitate de 1,56 °E, la 20 °C; 1 div = 55 μ.

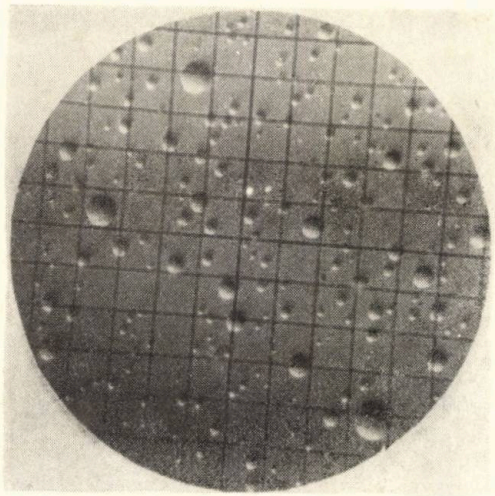


Fig. 3 — Picături obținute prin pulverizarea unui combustibil cu o viscozitate de 1,74 °E, la 20 °C; 1 div = 55 μ.

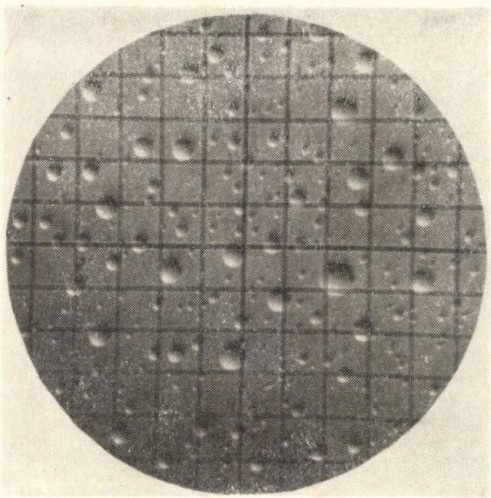


Fig. 4 — Picături obținute prin pulverizarea unui combustibil cu o viscozitate de 1,88 °E, la 20 °C; 1 div. = 55 μ.

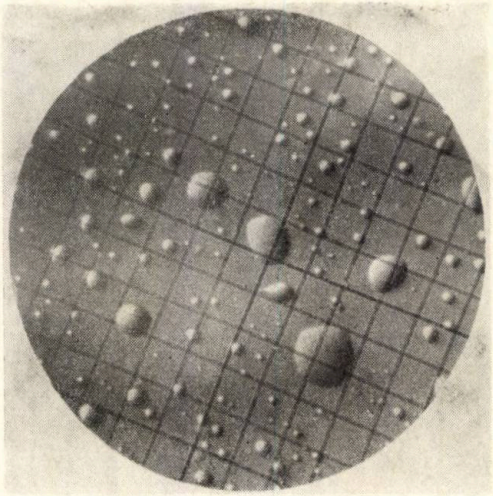


Fig. 5 — Picături obținute prin pulverizarea unui combustibil cu o viscozitate de 2,0 °E, la 20 °C; 1 div. = 55 μ.

Tabelul 2

Numărul de picături în procente, pe grupe de dimensiuni, pentru combustibili cu viscozități diferite

Diametrul picăturilor μ	Viscozitatea combustibilului, °E la 20 °C				
	1,34	1,56	1,74	1,88	2,0
0 ... 5	59,35	35,83	29,45	40,22	34,62
5 ... 10	31,49	49,64	47,80	39,66	38,93
10 ... 15	6,88	11,30	16,98	12,78	18,42
15 ... 20	12,06	2,26	4,52	4,13	5,20
20 ... 25	0,09	0,71	0,41	1,87	1,18
25 ... 30	0,09	0,23	0,54	0,37	0,59
30 ... 35	—	—	0,13	0,56	0,30
35 ... 40	—	—	0,13	0,18	0,15
40 ... 45	—	—	—	0,18	0,15
45 ... 50	—	—	—	—	0,30

valul 25 ... 30 μ. Pe măsură ce viscozitatea combustibilului crește, repartiția numerică a picăturilor după dimensiuni se modifică în sensul că cele mai numeroase ocupă intervale dintre 5 μ și 15 μ.

Pentru a ilustra mai bine acest lucru, în fig. 6 s-au trasat curbele ce reprezintă repartiția numerică a picăturilor după dimensiuni, pentru combustibili cu viscozități diferite. Curbele au fost trasate astfel încît procentul din numărul total al picăturilor cuprinse într-un anumit interval de dimensiuni, să fie proporțional cu aria de sub curbă, limitată de cele două ordonate ce trec prin extremitățile intervalului respectiv.

Pentru aprecierea calității unei pulverizări, mai sugestivă decît repartiția numerică a picăturilor este repartiția cantitativă, pe grupe de dimensiuni, a combustibilului pulverizat, repartiție indicată în tabelul 3.

Pentru a obține valorile de mai sus, s-a considerat că toate picăturile cuprinse într-un interval de dimensiuni au același diametru și anume, egal cu media intervalului respectiv.

Pe baza datelor din tabel s-au trasat curbele caracteristice din fig. 7. Curbele au fost trasate astfel încît volumul de combustibil, considerat în procente din volumul total al picăturilor, pulverizat în picături cuprinse într-un anumit interval, este proporțional cu aria de sub curbă, limitată de cele două ordonate ce trec prin extremitățile intervalului respectiv.

Din analiza curbelor rezultă că o dată cu creșterea viscozității, se micșorează cantitatea de combustibil care se pulverizează fin. În plus, pentru combustibilii cu viscozități mari, după ce trec printr-un minim în zona diametrelor medii (25...30 μ), curbele prezintă o creștere în zona diametrelor mari. Astfel de creșteri pe ramura finală a curbelor indică pulverizări necorespunzătoare.

Tabelul 3

Repartiția cantitativă, în procente, a combustibilului pulverizat, pe grupe de dimensiuni, pentru combustibili cu diferite viscozități

Diametrul mediu al picăturilor μ	Viscozitatea combustibilului, °E la 20 °C				
	1,34	1,56	1,74	1,88	2,0
2,5	2,16	0,79	0,42	0,44	0,31
7,5	31,62	30,30	18,95	12,10	9,72
12,5	32,13	32,07	31,27	18,12	21,38
17,5	26,46	17,61	22,85	16,09	16,57
22,5	2,72	12,02	4,49	15,81	8,18
27,5	4,88	7,19	10,74	5,67	7,35
32,5	—	—	4,43	14,05	6,06
37,5	—	—	6,83	7,19	4,65
42,5	—	—	—	10,47	6,78
47,5	—	—	—	—	18,93

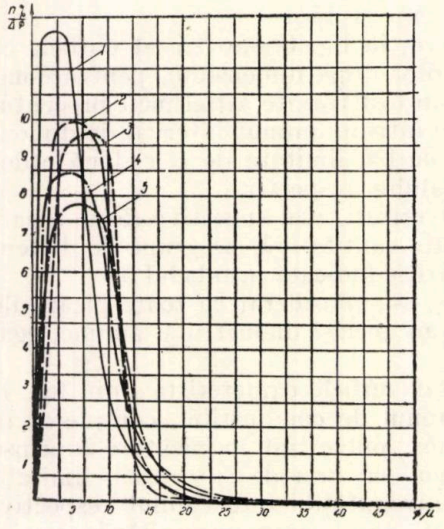


Fig. 6 — Repartiția numerică a picăturilor după dimensiuni, pentru combustibili cu viscozități diferite. *1* — 1,34 °E, la 20 °C; *2* — 1,56 °E, la 20 °C; *3* — 1,74 °E, la 20 °C; *4* — 1,88 °E, la 20 °C; *5* — 2,0 °E, la 20 °C.

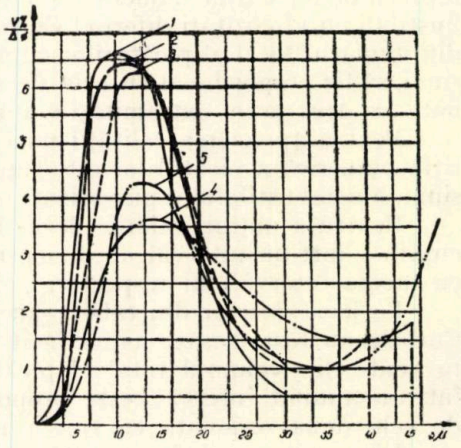


Fig. 7 — Repartiția cantitativă a combustibilului pulverizat, pe grupe de dimensiuni, pentru combustibili cu viscozități diferite. *1* — 1,34 °E, la 20 °C; *2* — 1,56 °E, la 20 °C; *3* — 1,74 °E, la 20 °C; *4* — 1,88 °E, la 20 °C; *5* — 2,0 °E, la 20 °C.

Procesul de ardere în motor decurge în condiţii cu atît mai bune cu cît suprafaţa de contact dintre combustibil şi aer este mai mare. De aceea se poate considera drept criteriu de apreciere a calităţii unei pulverizări, suprafaţa specifică de contact dintre combustibil şi aer.

Variaţia acestui parametru, pentru combustibili cu viscozităţi diferite, este dată în tabelul 4 şi reprezentată în graficul din fig. 8.

Tabelul 4

Suprafaţa specifică de contact dintre combustibil şi aer, în cazul pulverizării unor combustibili cu viscozităţi diferite

Viscozitatea combustibilului, °E, la 20 °C	1,34	1,56	1,74	1,88	2,0
mm^2/mm^3	659	524	445	356	334

Se observă că pentru o creştere a viscozităţii de la 1,34 $°E_{20}$ pînă la 2,0 $°E_{20}$ suprafaţa de contact a picăturilor au aerul din spaţiul în care se face injecţia se reduce la jumătate, cantitatea de combustibil rămînînd neschimbată.

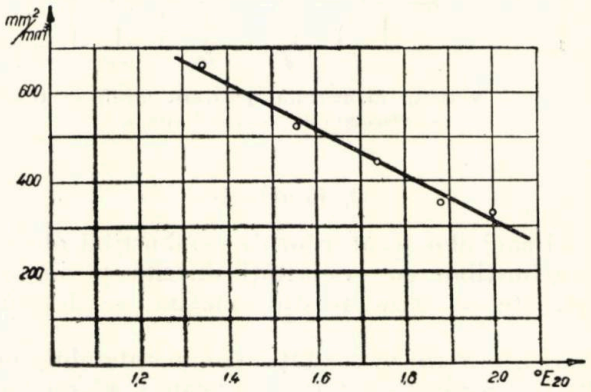


Fig. 8 — Variaţia suprafeţei specifice de contact dintre combustibil şi aer, în funcţie de viscozitatea combustibilului.

În sfîrşit, s-a determinat şi diametrul picăturii medii pentru pulverizările combustibililor de diferite viscozităţi. El s-a determinat după calculul prealabil al volumului, ca medie aritmetică a volumelor picăturilor măsurate.

Rezultatele obţinute sînt înscrise în tabelul 5 şi reprezentate în graficul din fig. 9.

Tabelul 5

Diametrul picăturii medii a pulverizării, pentru combustibili cu viscozităţi diferite

Viscozitatea combustibilului °E, la 20 °C	1,34	1,56	1,74	1,88	2,0
Diametrul picăturii medii, μ	7,5	8,8	10,2	11,1	11,9

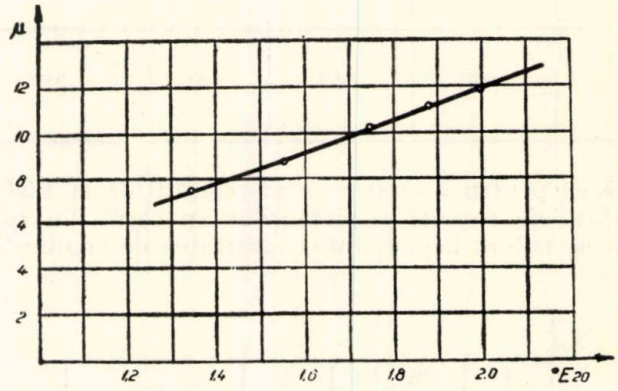


Fig. 9 — Variaţia diametrului picăturii medii în funcţie de viscozitatea combustibilului.

3. Concluzii

Din analiza imaginilor picăturilor de combustibil obţinute prin pulverizarea unor combustibili cu viscozităţi diferite şi din analiza curbelor caracteristice trasate pe baza acestor imagini, se desprind următoarele concluzii:

1. Pe măsura creşterii viscozităţii combustibilului, numărul picăturilor cu diametru mic scade, iar intervalul în care se găsesc picăturile pulverizării se lărgeşte către zona diametrelor mari.

2. Cantitatea de combustibil pulverizat fin scade o dată cu creşterea viscozităţii.

3. Pentru cantităţi egale de combustibil pulverizat, suprafaţa totală a picăturilor scade de două ori, atunci cînd viscozitatea creşte cu 0,66 °E la 20 °C.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de motoare termice

Primită la 23 XI 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Giffen E., *The Atomisation of Liquid Fuels.* London, 1953.
2. Melkumov T. M., *Teoria motorului rapid cu autoaprindere.* I.D.T., Buc., 1954 (trad. din l. rusă).
3. Zugrăvel M., *Considerațiuni asupra perfecționării metodelor directe de determinare a caracteristicilor de pulverizare.* Bul. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *1—2.*

L'INFLUENCE DE LA VISCOSITÉ D'UN COMBUSTIBLE SUR LA QUALITÉ DE LA PULVÉRISATION, DANS LE CAS DE L'INJECTION MÉCANIQUE

(Résumé)

En analisant les images des gouttes de différents combustibles, obtenus par pulvérisation on aboutit à les conclusions suivantes.

1) Le nombre des gouttes ayant des dimensions petites, baise avec l'augmentation de la viscosité, l'intervalle dans lequel se trouvent les gouttes pulvérisées s'élargissant vers la zone des grands diamètres.

2) La quantité de combustible pulvérisé finement baise avec l'augmentation de la viscosité.

3) Pour des quantités égales de combustible pulvérisé, la surface totale des gouttes baise deux fois quand la viscosité s'acroît avec 0,66 °E à 20 °C.

Explication des figures

Fig. 1 — Gouttes obtenues par la pulvérisation d'un combustible ayant la viscosité 1,34 °E à 20 °C ; 1 div. = 55 μ.

Fig. 2 — Gouttes obtenues par la pulvérisation d'un combustible ayant la viscosité 1,56 °E à 20 °C ; 1 div. = 55 μ.

Fig. 3 — Gouttes obtenues par la pulvérisation d'un combustible ayant la viscosité 1,74 °E à 20 °C ; 1 div. = 55 μ.

Fig. 4 — Gouttes obtenues par la pulvérisation d'un combustible ayant la viscosité 1,88 °E à 20 °C ; 1 div. = 55 μ.

Fig. 5 — Gouttes obtenues par la pulvérisation d'un combustible ayant la viscosité 2,0 °E à 20 °C ; 1 div. = 55 μ.

Fig. 6 — Répartition numérique des gouttes selon leurs dimensions, pour des combustibles ayant différentes viscosités. *1* — 1,34 °E à 20 °C ; *2* — 1,56 °E à 20 °C ; *3* — 1,74 °E à 20 °C ; *4* — 1,88 °E à 20 °C ; *5* — 2,0 °E à 20 °C.

Fig. 7 — Répartition quantitative du combustible pulvérisé, par cathégories de dimensions, pour des combustibles ayant différentes viscosités. *1* — 1,34 °E, à 20 °C ; *2* — 1,56 °E à 20 °C ; *3* — 1,74 °E à 20 °C ; *4* — 1,88 °E à 20 °C ; *5* — 2,0 °E, à 20 °C.

Fig. 8 — Variation de la surface spécifique de contact entre le combustible et l'air, en fonction de la viscosité du combustible.

Fig. 9 — Variation du diamètre de la goutte moyenne en fonction de la viscosité du combustible.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 669.046;.003.1

CONSIDERAŢII TEHNICO-ECONOMICE PRIVIND UNELE PROCESE TEHNOLOGICE NOI DE ÎNCĂLZIRE A METALELOR

DE

SANDA OPREA şi N. IONIŢĂ

1. Problema încălzirii metalelor are o mportanţă deosebită în diversele ramuri ale industriei metalurgice şi constructoare de maşini, unde acest tratament se efectuează în scopul prelucrărilor prin deformaţii plastice (laminare, forjare, presare, tratamente termice etc).

După cum este cunoscut, la temperaturile de încălzire în cuptoare au loc o serie de procese fizico-chimice determinate de reacţiile dintre gazele componente rezultate ale arderii precum şi între aceste gaze şi suprafaţa materialului metalic. Ca rezultat al proceselor fizico-chimice ce intervin în atmosfera cuptorului de încălzire se produce oxidarea, decarburarea sau uneori sulfizarea suprafeţelor pieselor respective care înrăutăţesc calitatea acestora.

Apariţia acestor defecte necesită surplusuri de cheltuieli pentru executarea unor operaţii de prelucrări mecanice suplimentare precum şi importante pierderi de materiale. În timpul proceselor obişnuite oxidarea conduce la o pierdere nerecuperabilă de 2,5 ... 5% la fiecare încălzire, iar decarburarea şi sulfizarea duce la micşorarea sensibilă a calităţii organelor de maşini şi sculelor.

Acţiunea oxizilor metalici devine şi mai periculoasă dacă se are în vedere şi faptul că aceştia intră în reacţie cu majoritatea materialelor refractare, formînd compuşi fuzibili, fapt ce antrenează reducerea termenului de serviciu al zidăriei cuptorului.

Din cele expuse rezultă că sarcina reducerii preţului de cost şi îmbunătăţirea calităţii produselor industriale prelucrate la cald este strîns legată de conducerea raţională a proceselor de ardere în cuptoarele metalurgice de încălzire. Economiile de metal ce se pot obţine pe această cale apar ca fiind mici la prima vedere în raport de preocupările de producţie majore ale întreprinderilor industriale. Totuşi luate în valoare absolută ele au o importanţă deosebită pe ansamblul industriei.

Astfel, de exemplu, protejarea oţelurilor contra oxidării şi decarburării în timpul tratamentului termic poate conduce la economii însemnate de metal după cum urmează: în construcţia de tractoare ajunge la 7% din greutatea pieselor tratate termic, sau pînă la 60 ... 70 kg oţel la un tractor pe şenile; în construcţia de automobile pînă la 7,5%; în cazul tratamentului termic neoxidant al benzilor de oţel laminat la rece, economia de oţel obţinută se poate ridica pînă la 20%.

Realizarea unor importante economii pe seama acestor pierderi devine posibilă prin corelarea necesităţilor tehnologice izvorîte dintr-o cunoaştere şi stăpînire temeinică a proceselor intime ce au loc în atmosfera de încălzire a cuptoarelor cu principiile unei conduceri raţionale a procesului de ardere.

2. Procesele tehnologice de încălzire a metalelor în industrie au la bază folosirea în mod curent a combustibililor lichizi sau gazoși prin arderea cărora se obține în cuptoare o atmosferă formată din CO, H_2, CO_2, H_2O vapori, N_2 etc. (tabelul 1).

Cunoașterea proceselor fizico-chimice intime ce au loc în atmosfera de încălzire a cuptoarelor poate conduce fie la necesitatea folosirii în practică a unor medii de încălzire inerte din punct de vedere chimic, cu toate implicațiile tehnico-economice legate de acest procedeu, fie la stabilirea unor medii de încălzire pe baza folosirii combustibililor obișnuiți care se pot dirija în sensul evitării fenomenelor nedorite amintite mai sus. Acest procedeu de folosire a mediilor de încălzire dirijabilă este cunoscut astăzi în tehnică sub denumirea de *atmosfere controlate.*

La dirijarea mediilor de încălzire din atmosferele controlate se are în vedere faptul că viteza reacțiilor între gazele componente, precum și între acestea și suprafața metalică scade cu cît concentrația atmosferei gazoase se apropie de concentrațiile de echilibru, limită la care viteza devine nulă.

Reacțiile chimice între gazele menționate mai sus din sistemul mediu de încălzire-material metalic sînt de mai multe tipuri.

I. *Reacții chimice între gazele componente*

(1) $$CO + H_2O \rightleftarrows CO_2 + H_2, \quad K_1 = \frac{P_{H_2}}{P_{H_2O}} \frac{P_{CO_2}}{P_{CO}},$$

$$\Delta G_T^0 = -10\,250 + 22{,}96\,T - 4{,}48\,T \log T;$$

(2) $$C + CO_2 \rightleftarrows 2\,CO, \quad K_2 = \frac{P_{CO}^2}{P_{CO_2}},$$

$$\Delta G_T^0 = 40\,800 - 41{,}7\,T.$$

II. *Reacții chimice între gaze și metal*

(3) $$Fe + H_2O \rightleftarrows FeO + H_2, \quad K_3 = \frac{P_{H_2}}{P_{H_2O}},$$

$$\Delta G_T^0 = -4\,800 - 4{,}48 \log T + 17{,}16\,T;$$

(4) $$Fe + CO_2 \rightleftarrows FeO + CO, \quad K_4 = \frac{P_{CO}}{P_{CO_2}},$$

$$\Delta G_T^0 = 5\,450 - 5{,}8\,T.$$

În cazul folosirii gazului metan, reacția de descompunere a surplusului de gaz metan este de forma:

(5) $$CH_4 \rightleftarrows C + 2H_2, \quad K_5 = \frac{P_{H_2}^2}{P_{CH_4}},$$

$$\Delta G_T^0 = 16\,520 - 12{,}25\,T \log T + 15{,}62\,T.$$

Tabelul 1

Combustibil	Analiza combustibilului											Analiza produselor de ardere ($n = 1$)				
	C	CO	H_2	S	SH_2	CH_4	Cl_2	O_2	H_2O	N_2	C_nH_n	CO_2	H_2O	SO_2	N_2	P_i (kcal/mm³) kg
Gaz furnal	—	28	4	—	—	—	8	—	—	60	—	18,38	20,40	—	61,30	950
Gaz gazogen cu 15% umiditate	—	27	14	—	0,20	0,60	6	0,20	—	52	—	18,10	9,30	0,11	72,49	1 253
Gaz de cocserie	—	8	50	—	—	29	2	—	—	7	4	8,8	21,70	—	69,60	4 566
Bigaz	—	18,46	22,18	—	—	9,96	8,40	—	—	40,24	0,76	13,57	15,45	—	78,78	2 000
	—	22,50	14,60	—	—	0,90	6,60	—	—	55,30	0,20	16,80	9,23	—	73,97	1 160
Gaz natural metan	—	—	—	—	—	99,18	0,07	0,15	—	0,60	—	9,497	18,997	—	71,509	8 150
Păcură	87	—	11,40	0,50	—	—	—	1,10	—	—	—	14,21	11,21	0,0335	74,50	9 950

Reacțiile chimice în cazul procesului de decarburare a oțelului sînt:

(6) $$C_{Fe} + CO_2 = 2\,CO, \quad K_6 = \frac{P^2_{CO}}{P_{CO_2}};$$

(7) $$C_{Fe} + H_2O \rightleftarrows CO + H_2, \quad K_7 = \frac{P_{CO} + P_{H_2}}{P_{H_2O}},$$
$$\Delta G^0_T = 3\,0550 - 18{,}74\,T - 4{,}48 \log T;$$

(8) $$C_{Fe} + 2\,H_2 = CH_4, \quad K_8 = \frac{P_{CH_4}}{P^2_{H_2}},$$
$$\Delta G^0_T = -\,16\,520 + 12{,}25T \log T - 15{,}62\,T.$$

Valoarea constantelor de echilibru a fiecărei reacții variază continuu cu temperatura (tabelul 2).

Tabelul 2

Valorile constantelor de echilibru pentru reacții la diferite temperaturi

t°C	$K_1 = \frac{[H_2]}{[H_2O]}$	$K_2 = \frac{[CO]}{[CO_2]}$	$K_3 = \frac{[CO_2]}{[H_2O]}$	$K_4 = \frac{[CO]^2}{[CO_2]}$	$K_5 = \frac{[H_2]}{[CH_4]}$
400	9,12	0,74	12,3	0,00009	0,0566
450	6,38	0,86	7,38	0,00073	0,164
500	4,68	0,96	4,88	0,0047	0,422
550	3,53	1,03	3,45	0,023	0,977
600	2,99	1,17	2,55	0,096	2,09
650	2,65	1,36	1,96	0,343	3,92
700	2,38	1,53	1,56	1,06	7,16
750	2,17	1,72	1,27	2,96	12,3
800	2,00	1,90	1,05	7,48	20,1
850	1,84	2,07	0,891	17,46	31,8
900	1,72	2,24	0,765	37,76	48,3
950	1,61	2,41	0,688	76,70	71,0
1 000	1,51	2,57	0,589	146,5	102,4
1 050	1,44	2,72	0,527	264,0	141,2
1 100	1,37	2,88	0,474	463,4	192,0
1 150	1,31	3,03	0,433	767,4	256,0
1 200	1,26	3,21	0,395	1 244	335,0
1 250	1,22	3,36	0,363	1 945	431,5
1 300	1,18	3,49	0,339	2 951	547,0

Ca exemplu de variație a constantelor de echilibru reproducem pe acel al reacției (6) (fig. 1).

Din cele expuse rezultă concluzia practică că pentru a dirija un proces de încălzire a unui metal în mediu gazos este necesar să se coreleze în per-

manenţă concentraţia substanţelor ce intră în fiecare reacţie din atmosfera cuptorului, cu valoarea constantei de echilibru a reacţiei respective în funcţie de temperatură.

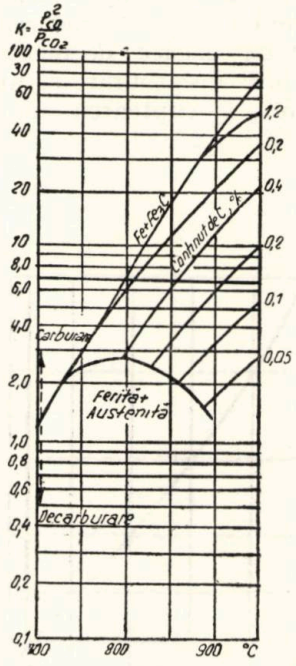


Fig. 1

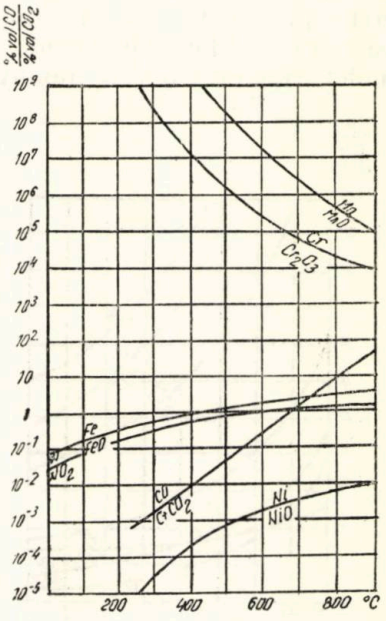


Fig. 2

Curbele de echilibru ale sistemului Me—MeO funcţie de conţinutul de H_2 şi H_2O respectiv CO şi CO_2 al atmosferei şi de temperatură, pentru diferite metale, indică oxidabilitatea sau reductibilitatea în condiţii diferite în sistemul respectiv (fig. 2 şi fig. 3).

Rezultă astfel că la dirijarea procesului de încălzire a metalului în scopul eliminării pericolului oxidării trebuie asigurată corelarea raportului concentraţiilor de H_2O şi H_2 respectiv de CO şi CO_2, cu valoarea constantelor de echilibru corespunzătoare reacţiilor (3) şi (4), fapt asigurat prin folosirea atmosferelor controlate.

Importanţa tehnico-economică deosebită ce o prezintă folosirea atmosferelor controlate a condus în ultima vreme la o intensificare a cercetărilor în acest domeniu, atît pe linia diversificării tipurilor de atmosfere controlate cît şi pe linia metodelor de dirijare a procesului de ardere. Problema eliminării pierderilor de metal în timpul încălzirii rămîne deci, alături de problema îmbunătăţirii calităţii produselor, o chestiune de importanţă actuală pentru sectoarele de prelucrare la cald.

În această ordine de idei se pot cita și realizările cercetătorilor de la Institutul britanic de cercetări siderurgice care căutînd un procedeu mai economic și mai eficace decît acel al folosirii atmosferelor controlate sau chiar al cuptoarelor electrice au reușit ca printr-o simplă încălzire a semifabricatelor cu un jet emanat de arzătoare cu gaz să obțină rezult te deosebite pentru început, în raport de metoda clasică de încălzire în cuptoare cu combustibil lichid. Pierderile prin decarburare și formare de țunder sînt de 0,5% în raport cu 2,5 ... 5% la cuptoarele obișnuite.

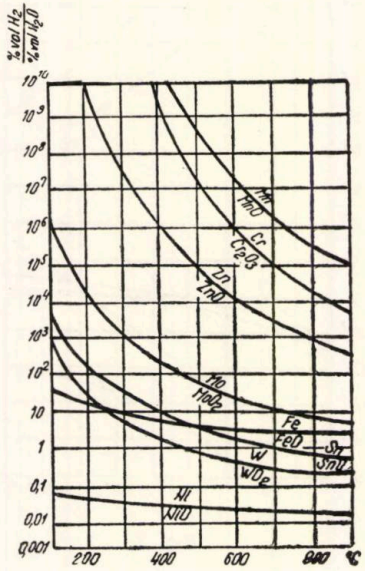


Fig. 3

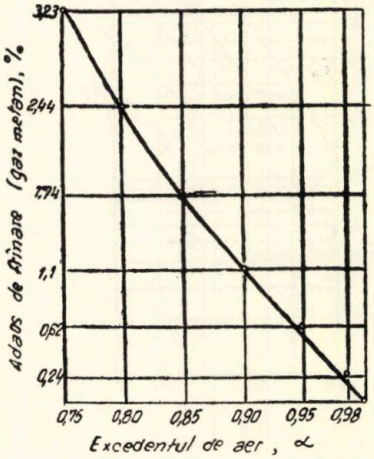


Fig. 4

Jeturile de gaze sub formă de flacără sînt dirijate perpendicular pe toate suprafețele semifabricatelor, transmisia căldurii fiind directă, fără a se folosi căldura radiată de gazele arse și de cărămizile refractare. Prin urmare în tunelul de încălzire căptușeala refractară lucrează la o temperatură mai scăzută, consumul materialelor fiind de asemenea mai mic.

3. Plecînd de la principiile teoretice ce stau la baza folosirii atmosferelor controlate și de la necesitatea de a nu se efectua cheltuieli suplimentare de investiții la sistemele clasice folosite pe scară largă în industria noastră, în cadrul lucrărilor noastre experimentale am procedat la încălzirea unui număr suficient de probe dintr-un oțel hipoeutectoid într-o atmosferă gazoasă rezultată din arderea incompletă a gazului metan la temperatura de 1200 °C.

Prin arderea incompletă a gazului metan realizată prin folosirea unui coeficient de exces de aer subunitar a rezultat folosirea unei anu-

mite cantităţi de gaz metan drept adaos de frînare a intensităţii de oxidare la suprafaţa metalică a pieselor. Atmosfera gazoasă obţinută în cuptor se aseamănă cu compoziţia atmosferei controlate de tip $CO-CO_2-H_2-H_2O-N_2$, deosebirile fiind de ordin cantitativ relativ la CO_2 şi H_2O care nu au fost purificate.

S-a determinat curba de variaţie a adaosului de frînare în funcţie de coeficientul de exces de aer (fig. 4) precum şi domeniul în care carbonul rezultat din disocierea gazului metan nu s-a depus sub formă de negru de fum la suprafaţa pieselor sau pe pereţii cuptorului. Din diagramă rezultă că la folosirea unui excedent de aer optim de 0,95 a corespuns un adaos de frînare de 0,62%. În cadrul experienţelor efectuate cu excedentul de aer de 0,95 pierderile de metal sînt între 1,5 ... 2%, ceea ce constituie un avantaj evident dacă se are în vedere că în practică aceste pierderi se ridică la 4 ... 5%.

Explicaţia fenomenului rezidă în faptul că trecerea de la metal spre oxid superior sau viceversa, în funcţie de temperatură, se petrece obligatoriu în mod succesiv după relaţiile:

$$3Fe_2O_3 + CO \rightleftarrows 2Fe_3O_4 + CO_2, \quad \Delta G_T^0 = -7\,880 - 12{,}87\,T; \tag{9}$$

$$Fe_3O_4 + CO \rightleftarrows 3\,FeO + CO_2, \quad \Delta G_0^T = 7\,120 - 9{,}15\,T; \tag{10}$$

$$FeO + CO \rightleftarrows Fe + CO_2, \quad \Delta G_0^T = -5\,450 + 5{,}8\,T. \tag{11}$$

Prin urmare la acţiunea reciprocă a oxizilor de carbon trebuie să se ia în considerare cu ce oxizi se găseşte în contact amestecul respectiv precum şi direcţia procesului care depinde de temperatură şi raportul CO/CO_2.

Analizînd stabilitatea termodinamică a celor 3 ecuaţii rezultă că în prezenţa unei anumite concentraţii de CO (apărută ca urmare a folosirii adaosului de frînare) se produce o acţiunea intensivă de reducere a oxizilor superiori la fierul metalic. În mod similar se poate explica şi acţiunea reducătoare a hidrogenului rezultat de asemenea din adaosul de frînare.

Eficienţa economică a aplicării metodei descrise, deşi nu se ridică la nivelul metodei britanice de folosire a jetului de gaze, apare evidentă dacă se ţine seama că economiile de metan realizate nu comportă cheltuirea de fonduri de investiţii iar pierderile suplimentare rezultate din folosirea adaosului de frînare nu reprezintă mai mult de 25% din valoarea pierderilor de metal curente ce se produc prin aplicarea procedeelor de încălzire clasice.

Primită la 15 V 1969

Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej", şi Academia de Studii economice, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Corriollis G., *Les traitements thermiques controlés*. Métaux, Corrosion, Industries, 1958, *362*.
2. Lincevski V. P., *Cuptoare de încălzire*. Ed. tehn., Buc., 1952 (trad. din l. rusă).
3. Teodorescu A., *Tratamente termice în atmosfere controlate*. Ed. tehn., Buc., 1964.
4. Смыков А., *Контролируемые атмосферы*. Гостехиздат, М., 1953.
5. Jenkins I., *Controlled Atmospheres for Treatment of Metals*. Chapman and Hall, London, 1953.
6. Göhring W., Werkstatt und Betrieb, 1964. *3*.
7. Oprea Fl., *Teoria proceselor metalurgice*. EDP, Buc., 1966.
8. * * * *Jetul de gaze încălzind metalele*. Știință și Tehnică, Buc., 1969.

SOPRA ALCUNI ASPETTI TECNICI ED ECONOMICI CONCERNENTI CERTI PROCESSI TECNOLOGICI NUOVI DI RISCALDAMENTO DEI METALLI

(Sunto)

Gli autori, prendendo le mosse da alcuni risultati sperimentali propri, indicano alcune nuove possibilità che ne conducono all'economia in certi processi tecnologici nuovi di riscaldamento dei metalli.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 3–4, 1969

SECŢIA V

CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 3–4, 1969

СЕКЦИЯ V

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕХНИКА

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 3–4, 1969

SECTION V

CONSTRUCTIONS. HYDROTECHNICS

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia V
CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

D. C. 539.4.011

USE OF THE „FACTORIAL MOMENTS" OPERATORS IN SOLVING OF SPACE CONTOURS

BY

ANTON ŞESAN, ADRIAN VULPE and FLORIN MACAVEI

1. The differential relations among the flexural functions:

$$\{y,\ \theta,\ M,\ T,\ p\} = \{y,\ y^{I},\ \rho y^{II},\ \rho y^{III},\ \rho y^{IV}\} \tag{1}$$

can be expressed in a generalised form (discontinuities, any loads, variable inertia moment, etc.) and at the same time very simple for applications, with „factorial moments" operators of different orders [1] ... [4]. :

$$\{Y, y, \theta, M, T, p, p', p''\} = \{M_{\rho}^{IV},\ M_{\rho}^{III},\ M_{\rho}^{II},\ M^{I},\ M^{0},\ M^{-I},\ M^{-II},\ M^{-III}\}. \tag{2}$$

Having in view that the passing from a „factorial moment" to another one is given by the relation

$$M_{\rho}^{i} = \frac{M^{k}}{\rho}\,\frac{d^{i-k}}{(i-k)\,!} \tag{3}$$

and expressing the external actions (ties, statical loadings, discontinuities etc.) as „factorial moments" of suitable order, it can be written, with the simplity of the current calculus of common statical moments, the expression of any flexural function as sum (from left or right, in the manner that it is more suitable (Fig. 1)) of factorial moments of the correspondent order

$$\theta\,(x_1) = M_{\rho}^{II}\,(x_1) = \sum_{0}^{x_1}(\pm\, M_{\rho}^{II}) = \sum_{l}^{x_1'}(\mp M_{\rho}^{II}), \tag{4}$$

$$y\,(x_1) = M_{\rho}^{III}\,(x_1) = \sum_{0}^{x_1}(\pm\, M_{\rho}^{III}) = \sum_{l}^{x_1'}(\mp M_{\rho}^{III}). \tag{5}$$

For example, for the section x of the beam of Fig. 2, the expressions of the deflection and bending moment are respectively:

$$y(x) = M_{\rho}^{III}(x) = \sum_{0}^{x} M_{\rho}^{III} = M_{\rho}^{III}(0) + M_{\rho}^{III}(0)\frac{x}{1!} + \frac{M^{I}(0)}{\rho}\frac{x^2}{2!} -$$

$$(6) \quad -\frac{M^{0}(0)}{\rho}\frac{x^3}{3!} + \sum_{0}^{x}\frac{M_i^{0}}{\rho}\frac{(x-a_i)^3}{3!} + \sum_{0}^{x}\frac{M_i^{I}}{\rho}\frac{(x-b_i)^2}{2!} + M_{\rho,c}^{II}\frac{x-c}{1!} +$$

$$+\sum_{0}^{x}\frac{M_i^{-I}}{\rho}\frac{(x-d_i)^4}{4!} - \sum_{0}^{x}\frac{M_i^{-I}}{\rho}\frac{(x-e_i)^4}{4!} + M_{\rho,f}^{III},$$

$$M(x) = M^{I}(x) = \sum_{0}^{x} M^{I} = M^{I}(0) - M^{0}(0)\frac{x}{1!} + \sum_{0}^{x} P_i\frac{x-a_i}{1!} +$$

$$(7) \quad +\sum_{0}^{x} M_i^{I} + \sum_{0}^{x} M_i^{-I}\frac{(x-d_i)^2}{2!} - \sum_{0}^{x} M_i^{-I}\frac{(x-e_i)^2}{2!}.$$

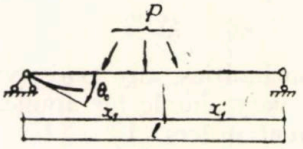


Fig. 1

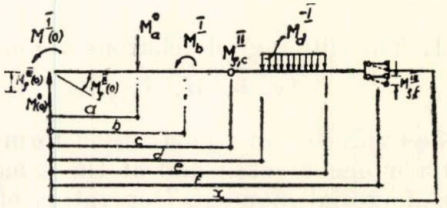


Fig. 2

In comparison with the conjugate beam method, „factorial moments" operators have the advantage of the calculus on the actual beam—without an artificial arranging of the ties — by determining directly any flexural function. On the other hand, by this way, the calculus of the positions of the weight centres, is avoided, only the positions of the actions (which are known from the statement of the problem) being of interest.

The calculus can be made for the variable inertia moment, knowing that each factorial moment represents the variation of the moment of immediately higher order:

$$(8) \qquad M_{\rho}^{i} = \frac{1}{\rho_0}\frac{1}{(i-k-1)!}\int_{0}^{x_1}\frac{\rho_0}{\rho(t)}(x_1-t)^{i-k-1}M^{k}(t)\,dt.$$

The elastic deformation produced by the shear force according to the schematizations of Strength of Materials — is reduced to the slides without rotations of the sections. Bernoulli's hypothesis being no more respected, the rotation acquires two distinct significations: rotation of the section and rotation of the tangent to the deformed axis. In the differential relations

(1) is included only the rotation of the section, therefore the influence of the shear force can be taken into consideration only in the expression of the deflection

$$y^T(x) = \int_0^x \gamma \, dx + y_0^T = \int_0^x k \frac{T}{GA} dx + y_0^T; \tag{9}$$

using the factorial moments

$$\{y^T,\ T,\ p,\ p',\ p''\} = \{M^I_{\rho^*},\ M^\circ,\ M^{-I},\ M^{-II},\ M^{-III}\} \tag{2*}$$

relation (9) becomes:

$$y^T(x) = M^I_{\rho^*}(x) = \sum_0^x (\pm M^I_{\rho^*}), \tag{10}$$

which includes all actions until the level of the shear force inclusive, as well as the deflection at the origin produced by the shear force. Thus, for section x of Fig. 2 we have:

$$y^T(x) = y_0^T + \frac{k}{GA} T_0 - \sum \frac{k}{GA} P_i (x - a_i) - \sum \frac{k}{GA} p \frac{(x - d_i)^2}{2!} + \tag{6*}$$
$$+ \sum \frac{k}{GA} p \frac{(x - e_i)^2}{2!}.$$

In the writing of relation (6*) we used operator (4), in which ρ is replaced by $\rho^* = GA/k$.

Taking into account the influence of shear force, the general expression of the deflection will be

$$y(x) = M^{III}_\rho(x) + M^I_{\rho^*}(x) = \sum_0^x (\pm M^{III}_\rho) + \sum_0^x M^I_{\rho^*} \tag{11}$$

and the explicit form, in terms of primary actions:

$$y(x) = y^M(x) + y^T(x) = (6) + (6^*). \tag{12}$$

2. For a beam of a spatial polygonal line (Fig. 3), a factorial moment of any order has three components: the first one on the x-axis, the second one in the xOy-plane and the third one in the xOz-plane.

For the components of the two planes it was shown that the unique relation of passing from any order to another one is (3), as well for the sequence (2) (for which $\rho = EI$) as for the sequence (2*) (for which $\rho^* = GA/k$).

The sequences (2) and (2*) of the factorial moment components on the x-axis are:

$$\{\Delta x,\ \theta_x,\ M_x,\ N,\ p_x,\ p'_x,\ p''_x\} = \{M^{III}_\rho,\ M^{II}_\rho,\ M^I,\ M^0,\ M^{-I},\ M^{-II},\ M^{-III}\}, \tag{2}_x$$

$$\{\Delta x,\ N,\ p_x,\ p'_x,\ p''_x\} = \{M^I_{\rho^*},\ M^0,\ M^{-I},\ M^{-II},\ M^{-III}\}. \tag{2*}_x$$

Relation (3) maintains the same form for the sequence $(2^*)_x$ with $\rho^* = EA$, the effect of the axial force being added at the level of the linear deformation as in the case of the shear force. It maintains only partially its form for series $(2)_x$, because the axial force does not produce a torsion moment, and the rotation θ_x does not produce deflection:

$$(13) \qquad \begin{cases} i = I,\ III, & M^i = 0 \quad \text{for} \quad k < i; \\ i = II, & M^i = 0 \quad \text{for} \quad k < i - 1. \end{cases}$$

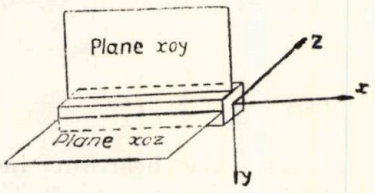


Fig. 3

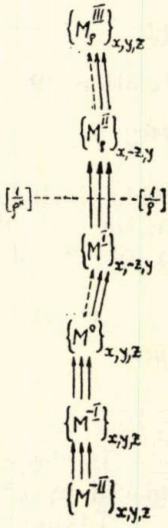


Fig. 4

On the whole, for a spatial beam the two series of the factorial moments will be:

$$(2)_s \quad [\{M_\rho^{III}\},\ \{M_\rho^{II}\},\ \{M^I\},\ \{M^0\},\ \{M^{-I}\},\ \{M^{-II}\},\ \{M^{-III}\}],$$

$$(2^*)_s \quad [\{M_{\rho^*}^I\},\ \{M^\circ\},\ \{M^{-I}\},\ \{M^{-II}\},\ \{M^{-III}\}]\ ^1),$$

the components of the vectors $\{M^j\}$ being represented in fig. 4.

Denoting

$$[\mathrm{d}] = \begin{bmatrix} d & & \\ & d & \\ & & d \end{bmatrix}$$

and taking into consideration that the advancing to a power of the elements of a diagonal matrix and their division to the factorial of that power is equivalent to advancing of the matrix to that power and its division to that factorial, with conditions (13) the ,,factorial moment'' operator for a spatial beam, preserves its expression for the plane:

---

[1]) Besides sequences $(2_s$ and $(2^*)_s$ there exists another sequences of factorial moments, whose components are however more rarely met in the practice (distributed moments):

$$[\{M_\rho^{III}\},\ \{M_\rho^{II}\},\ \{M^I\},\ \{M^0\},\ \{M^{-I}\},\ \{M^{-II}\},\ \{M^{-III}\},] =$$

$$(2')_s \qquad = \left[\begin{bmatrix} \Delta x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_z \\ \theta_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M_x \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m_x \\ m_z \\ m_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m'_x \\ m'_z \\ m'_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m''_x \\ m''_z \\ m''_y \end{bmatrix}\right],$$

the passing from a level to another are being made through the same operator $(3)_s$.

$$(3)_s \qquad \{M_\rho^i\} = \left[\frac{1}{\rho}\right] \frac{[d]^{i-k}}{(i-k)!} \{M^k\},$$

where $\left[\frac{1}{\rho}\right] = -\begin{bmatrix} \frac{1}{GI_t} & & \\ & \frac{1}{EI_x} & \\ & & \frac{1}{EI_y} \end{bmatrix}$ for $(2)_s$, and $\left[\frac{1}{\rho^*}\right] = -\begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{k}{GA} & \\ & & \frac{k}{GA} \end{bmatrix}$

for $(2^*)_s$.

In order that all passings between levels be made with the sign plus — what makes programming easier — the z-component of the vectors $\{M_\rho^{II}\}$ and $\{M^I\}$ was defined as positive when it has opposite sense to the sense of the z-axis (Fig. 4).

Since the effect of shear and axial forces is added at the level of the linear deformation, the factorial moment operator $(3)_s$ will act in the sequence $(2^*)_s$ only when this deformation is calculated:

$$(12)_s \qquad \begin{Bmatrix} \Delta x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \{M_\rho^{III}\} + \{M_{\rho^*}^I\}.$$

In the case of a space contour (fig. 5), the components of the factorial moments $\{M^j\}$ at the end of the bar n must be rotated in the coordinates of the bar $n+1$ for which the same operator $(3)_s$ will act.

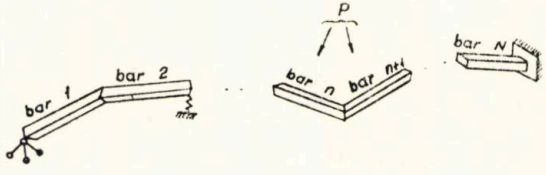


Fig. 5

Denotind $[\mu]_n$ the 3×3 matrix which projects the versors of the axises of bar n on those of bar $(n+1)$, the rotation matrix $[\mu]_n^j$ of the factorial moment $\{M^j\}$ will be:

$$(14) \qquad [\mu]_n^j = \begin{cases} [\mu]_n, & \text{for } j \neq 1,2; \\ [\bar{\mu}]_n, & \text{for } j = 1,2, \end{cases}$$

the matrix $[\bar{\mu}]_n$ being obtained from $[\mu]_n$ by changing the sign of the last line and column and their interchanging with the second line and second column respectively.

Knowing that any factorial moment $\{M^k\}_{n_1}$ which acts on the bar n of the contour produces only moments of equal and higher orders $\{M^j\}$, $j \geqslant k$, and that therefore any moment $\{M^i\}_{n_2}$ from a section n_2 will be produced only by the factorial moments of equal and smaller orders $\{M^j\}$, $j \leqslant k$, it follows that one can determine the value of the $\{M^i\}_{n_2}$ produced by the $\{M^k\}_{n_1}$ (fig. 6):

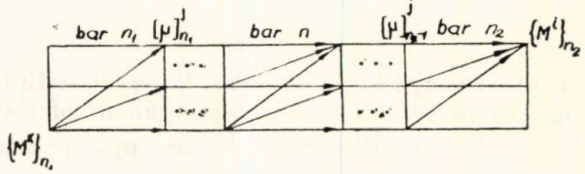


Fig. 6

$$(15)\quad \{M^i\}_{n_2} = \sum \frac{[d]^{i-j_{n_2-1}}_{n_2}}{(i-j_{n_2-1})!}\,[\mu]^{j_{n_2}-1}_{n_2-1} \cdots \frac{[d]^{j_{n_1+1}-j_{n_1}}_{n_1+1}}{(j_{n_1+1}-j_{n_1})!}\,[\mu]^{j_{n_1}}_{n_1}\frac{[d]^{j_{n_1}-k}}{(j_{n_1}-k)!}\,\{M^k\}_{n_1},$$

the product of relation (15) representing a polygonal line from $\{M^k\}_{n_1}$ to $\{M^i\}_{n_2}$ in the graph of Fig. 6, and the sum being performed for all these lines.

Concisely writing

$$(15')\quad \{M^i\}_{n_2} = \sum \prod_{n=n_1}^{n_2} \frac{[d]^{j_n-j_{n-1}}}{(j_n-j_{n-1})!}\,[\mu]^{j_{n-1}}_{n-1}\,\{M^k\}_{n_1}$$

and denoting

$$(16)\quad \left\{\frac{d^{i-k}}{(i-k)!}\right\}_{n_1,\,n_2} = \sum \prod_{n=n_1}^{n_2} \frac{[d]^{j_n-j_{n-1}}_{n}}{(j_n-j_{n-1})!}\,[\mu]^{j_{n-1}}_{n-1},$$

one obtains the expression of the factorial moment operator for a space contour:

$$(3)_{s.c.}\quad \{M^i\}_{n_2} = \left\{\frac{d^{i-k}}{(i-k)!}\right\}_{n_1,n_2}\{M^k\}_{n_1}.$$

In the last relation, the operator $\left\{\frac{d^{i-k}}{(i-k)!}\right\}_{n_1,\,n_2}$ is a 3×3 matrix and the vectors $\{M^k\}_{n_1}$ and $\{M^i\}_{n_2}$ have their components expressed in the coordinates of the bar n_1, respectively n_2.

The total magnitude of a moment $\{M^i\}_{n_2}$ will be:

$$\{M^i\}_{n_2} = \sum_{n=1}^{n_2} \left\{ \frac{d^{i-k}}{(i-k)!} \right\}_{n,\, n_2} \{M^k\}_n . \tag{17}$$

For $i = III$, to deformations calculated with (17) are added to those produced by sequences $(2^*)_s$:

$$\begin{Bmatrix} \Delta x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{n_2} = \{M^{III}_{\rho}\}_{n_2} + \{M^{I}_{\rho^*}\}_{n_2} . \tag{18}$$

Since the linear deformation does not influence the other factorial moments (which are of inferior order), it is not necessary to perform the addition (18) at the end of each bar, but it should be made directly in n_2.

For solving the space structures, conditions at the extremities and intersections of the contours are put.

Received the 5 VI 1969

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Statics and
Strenght of Materials

REFERENCES

1. Șesan A., Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*, pp. 407—414.
2. — Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*, pp. 359—362.
3. — Bul. Inst. polit. Iași, 1959, **V (IX)**, *3—4*, pp. 335—342.
4. — Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI (X)**, *1—2*, pp. 369—374.
5. Lee S. L., *The Conjugate Frame Method and its Application in the Elastic and Plastic Theories of Structures*. J. of the Franklin Inst., 1958, **266**, *3*, p. 207.
6. Bazaut Z. P., *Conjugate Analogy for Space Structures*. J. of the Structural Division, 1966, **92**, *ST3*, p. 137.
7. Falk S., *Biegen, Knicken und Schwingen des mehrfeldrigen geraden Balkens*. Abhandl. braunschweig. wiss. Ges., 1955, **7**, S. 74—92.

UTILIZAREA OPERATORILOR „MOMENTE FACTORIALE" PENTRU REZOLVAREA CONTURURILOR SPAȚIALE

(Rezumat)

Se generalizează pentru contururi spațiale operatorul „moment factorial" introdus în [1] ... [4] pentru calculul grinzilor drepte. Aplicarea acestui operator permite prinderea influenței momentului încovoietor, a celui de torsiune cît și a forței tăietoare și axiale.

În raport cu alte metode cunoscute (a cadrului conjugat [5], a analogiei conjugate [6], etc.) procedeul propus prezintă avantajul calculului pe structura reală — fără o potrivire artificială a legăturilor — determinînd direct oricare dintre funcțiile încovoierii, și reprezintă totodată, datorită trecerii directe între oricare dintre punctele conturului spațial, o generalizare a procedeului reducției și a matricelor de transfer aplicate la grinzi.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia V
CONSTRUCŢII, HIDROTEHNICĂ

C. D. 539.4.014

TENSIONS ET DÉPLACEMENTS DANS LE DEMI-ESPACE TRANSVERSAL ANISOTROPE SOUS L'ACTION DES CHARGES DISTRIBUÉES SUR DES SURFACES ÉLASTIQUES LIMITÉES

PAR

AL. EFTIMIE et G. BOTEZ

1. Introduction

M i c h e l l [6] a montré que dans un demi-espace élastique homogène, transversal anisotrop, ayant à sa surface une charge verticale concentrée P, avec les notation R, r, z et θ définies comme dans la fig. 1, sur un plan horizontal à une profondeur z, la contrainte normale et la contrainte tangentielle sont données par les relations:

$$(1) \qquad \sigma_z = \lambda R \cos\theta = \lambda z, \qquad \tau_{rz} = \lambda R \sin\theta = \lambda r,$$

où

$$\lambda = \frac{P}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} \left[\left(r^2 - \frac{z^2}{\alpha} \right)^{-3/2} - \left(r^2 + \frac{z^2}{\beta} \right)^{-3/2} \right],$$

$$\alpha + \beta = \frac{AC - F^2 - 2FL}{A}, \quad \alpha\beta = \frac{C}{A}.$$

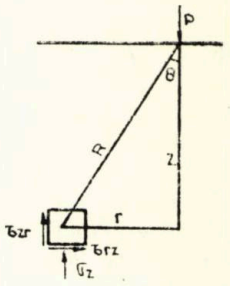


Fig. 1

B a r d e n [1] exprime les paramètres A, C, F, L en fonction des constantes élastiques, qui caractérisent l'anisotropie transversale, sous la forme:

$$A = \frac{nE_V (1 - \nu_2\nu_3)}{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2\nu_3)}, \qquad C = \frac{E_V (1 - \nu_1^2)}{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2\nu_3)},$$

$$F = \frac{E_V (1 + \nu_1)\nu_2}{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2\nu_3)}, \qquad L = \frac{E_V \nu_2}{\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3}.$$

L'expression du déplacement vertical d'un point du plan limite ($z = 0$) du demi-espace transversal anisotrope est, d'après Michell-Barden, $w = \frac{P}{r}\frac{J}{E}$, où

$$J = \frac{E_V}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{L}}\,\frac{[(AC - L)^2 - (F + L)^2]^{3/2}}{AC - F^2} \tag{2}$$

est un coefficient sans dimensions.

La relation $E_H/E_V = n = \nu_2/\nu_3$ existant entre les constantes élastiques, qui caractérisent l'anisotropie transversale, donne la possibilité d'exprimer une constante élastique en fonction des autres. Ainsi, dans [3], en utilisant les substitutions $\nu_3 = \nu_2/n$ et $E_H = nE_V = nE$, on a obtenu :

$$\alpha + \beta = \frac{1 + n - 2\nu_1\nu_2}{n^2 - \nu_2^2}, \qquad \alpha\beta = \frac{1 - \nu_1^2}{n - \nu_2^2} \tag{3}$$

et à l'aide des substitutions $\nu_2 = n\nu_3$ et $E_H = nE_V = nE$,

$$\alpha + \beta = \frac{n + 1 - 2n\,\nu_1\nu_3}{n(1 - n\nu_3^2)}, \qquad \alpha\beta = \frac{1 - \nu_1^2}{n\,(1 - n\nu_3^2)}\,. \tag{4}$$

Avec la première substitution et l'approximation $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, on a obtenu dans [3] l'expression du déplacement sous la forme

$$J = \frac{1}{2\pi n}\sqrt{(n - \nu^2)\,[n + 1 - 2\nu^2 + \sqrt{(n - \nu^2)\,(1 - \nu^2)}]} \tag{5}$$

et avec la deuxième substitution et l'approximation $\nu_1 = \nu_3 = \nu$,

$$J = \frac{1}{2\pi n}\sqrt{n\,(1 - n\nu^2)\,[n + 1 - 2n\nu^2 + 2\sqrt{n\,(1 - n\nu^2)\,(1 - \nu^2)}]}\,. \tag{6}$$

2. Surface rectangulaire

On considère une surface rectangulaire ayant les cotés $2b_1$ et $2l_1$, parfaitement flexible, qui transmet au sol une charge uniformément répartie, d'intensité p (fig. 2).

La contrainte verticale dans un point $M(x, y, z)$ du demi-espace produit par la force élémentaire $p\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$, considérée concentrée, conformément à la formule (1) est

$$\mathrm{d}\sigma_z = \frac{p\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{2\pi}\,\frac{z}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}\left\{\left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \frac{z^2}{\alpha}\right]^{-3/2} - \right.$$
$$\left. - \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \frac{z^2}{\beta}\right]^{-3/2}\right\}.$$

En appliquant le principe de superposition des effets, ce qui revient à l'intégration de la fonction $d\sigma_z$ sur toute la surface rectangulaire, on obtient la contrainte verticale σ_z, au point M, sous la forme

$$\sigma_z = \frac{p}{2\pi}\frac{z}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\left\{\int_{-l_1}^{+l_1}\int_{-b_1}^{+b_1}\frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2/\alpha]^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \int_{-l_1}^{+l_1}\int_{-b_1}^{+b_1}\frac{d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2/\beta]^{3/2}}\right\},$$

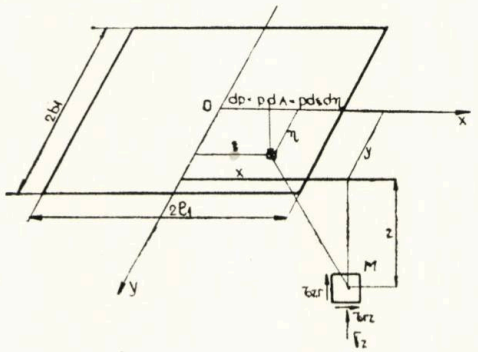


Fig. 2

et après l'effectuation des calculs,

$$\sigma_z = \frac{p}{2\pi}\frac{z}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\left\{\sqrt{\alpha}\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha}}{z}\frac{(y+b_1)(l_1-x)}{\sqrt{(x-l_1)^2+(y+b_1)^2+z^2/\alpha}} - \right.\right.$$

$$- \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha}}{z}\frac{(y-b_1)\,(l_1-x)}{\sqrt{(x-l_1)^2+(y-b_1)^2+z^2/\alpha}} -$$

$$- \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha}}{z}\frac{-(y+b_1)(l_1+x)}{\sqrt{(x+l_1)^2+(y+b_1)^2+z^2/\alpha}} + \tag{7}$$

$$\left. + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha}}{z}\frac{-(y-b_1)\,(l_1+x)}{\sqrt{(x+l_1)^2+(y-b_1)^2+z^2/\alpha}}\right] -$$

$$\left. - \sqrt{\beta}\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\beta}}{z}\frac{(y+b_1)\,(l_1-x)}{\sqrt{(x-l_1)^2+(y+b_1)^2+z^2/\beta}} - \right.\right.$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\beta}}{z} \frac{(y - b_1)(l_1 - x)}{\sqrt{(x - l_1)^2 + (y - b_1)^2 + z^2/\beta}} -$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\beta}}{z} \frac{-(y + b_1)(l_1 + x)}{\sqrt{(x + l_1)^2 + (y + b_1)^2 + z^2/\beta}} +$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\beta}}{z} \frac{-(y - b_1)(l_1 + x)}{\sqrt{(x - l_1)^2 + (y - b_1)^2 + z^2/\beta}} \Bigg] \Bigg\} .$$

En opérant dans (7) $x = y = 0$, on obtient la contrainte σ_z dans un point sur la verticale du centre du rectangle, au niveau z,

$$\sigma_{z0} = \frac{2p}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} \left[\sqrt{\alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{z} \frac{b_1 l_1}{\sqrt{b_1^2 + l_1^2 + z^2/\alpha}} \right) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\beta} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{z} \frac{b_1 l_1}{\sqrt{b_1^2 + l_1^2 + z^2/\beta}} \right) \right] . \tag{8}$$

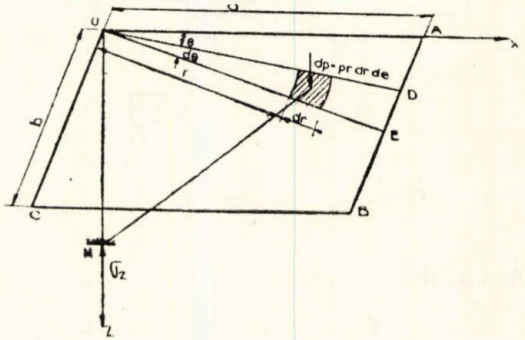


Fig. 3

On obtient la contrainte σ_z dans un point à la profondeur verticale du point de coin, en remplaçant dans (7) $x = l_1$ et $y = b_1$:

$$\sigma_{zc} = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} \left[\sqrt{\alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{z} \frac{4 b_1 l_1}{\sqrt{4 l_1^2 + 4 b_1^2 + z^2/\alpha}} \right) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\beta} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{z} \frac{4 b_1 l_1}{\sqrt{4 l_1^2 + 4 b_1^2 + z^2/\beta}} \right) \right] . \tag{9}$$

On obtient aussi directement une autre expression de l'effort unitaire σ_z pour les points de la profondeur verticale du coin du rectangle. Ainsi, d'après la fig. 3, la contrainte verticale élémentaire produite par la charge

concentrée $dp = pr\,dr\,d\theta$ dans un point de la profondeur verticale du coin, est conformément à (1),

$$d\sigma_z = \frac{pr\,dr\,d\theta}{2\pi}\,\frac{z}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\left[\left(r^2+\frac{z^2}{\alpha}\right)^{-3/2}-\left(r^2+\frac{z^2}{\beta}\right)^{-3/2}\right].$$

On intègre d'abord la fonction $d\sigma_z$ sur la surface ODE, c'est-à-dire entre les limites $r=0$ et $r = a/\cos\theta$ et ainsi,

$$d\sigma_{zODE} = -\frac{p\,d\theta}{2\pi}\,\frac{z}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\left[\left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{z^2}{\alpha}\right)^{-1/2}-\left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{z^2}{\beta}\right)^{-1/2}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}).$$

Ensuite, on intègre la fonction $d\sigma_{zODE}$ sur la surface du triangle OAB, c'est-à-dire entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \operatorname{arctg}(b/a)$, en obtenant

$$\sigma_{zODE} = \frac{p}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\left\{\sqrt{\alpha}\arcsin\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2\alpha}}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\beta}\arcsin\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2\beta}}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)\right]\right\}-\frac{p}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Pour intégrer l'expression $d\sigma_{zODE}$ sur la surface du triangle OBC, on remplace a par b et vice-versa dans l'expression de $d\sigma_{zODE}$ et on obtient

$$\sigma_{zOAB} = \frac{p}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\left\{\sqrt{\alpha}\arcsin\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2\alpha}}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\beta}\arcsin\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2\beta}}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)\right]\right\}-\frac{p}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

On a donc $\sigma_{zc} = \sigma_{zOAB} + \sigma_{zOBC}$, ou

$$\sigma_{zc} = \frac{p}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\left\{\sqrt{\alpha}\left\{\arcsin\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2\alpha}}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.+\arcsin\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2\alpha}}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)\right]\right\}-$$

(10)

$$-\sqrt{\beta}\left\{\arcsin\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2\beta}}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\arcsin\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2\beta}}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)\right]\right\}\right\}-\frac{p}{4}.$$

Pratiquement, les formules (9) et (10) conduisent au même résultat. Les formules (7),(8) et (9) sont valables pour chaque n possible en pratique, sauf le cas $n = 1$, quand on arrive à une indétermination et où l'on applique les formules connues pour le démi-espace élastique homogène et isotrope.

Les solutions établies satisfont les conditions au limites pour le problème. Ainsi, $\lim_{z\to 0} \sigma_z = p$ pour tous les points de la surface du rectangle, exceptant les points du contour et $\lim_{z\to\infty} \sigma_z = 0$.

En opérant dans (8) $b_1 = l_1 = a$, on obtient pour une surface carrée

$$\sigma_{z0} = K_1 p, \tag{11}$$

où

$$K_1 = \frac{2}{\pi(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}\left[\sqrt{\alpha}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{\alpha}}{z}\,\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + z^2/\alpha}} - \sqrt{\beta}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{\beta}}{z}\,\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + z^2/\beta}}\right].$$

En utilisant les formules (3), où l'on fait l'approximation $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, on peut calculer les coefficients α et β pour différentes valeurs du degré d'anisotropie n pratiquement possible et du coefficient de Poisson, et en considérant des différents rapports z/a ; on obtient ensuite les valeurs du coefficient K_1 données dans le tableau 1.

Si l'on examine ces valeurs, on constate que la contrainte σ_z décroit par rapport à la contrainte donnée par la formule de Boussinesq, quand $n > 1$, et croît quand $n < 1$. On a donc, sous la surface chargés, une dispersion plus grande des contraintes (pour $n > 1$) que celle indiquée par Boussinesque.

Du tableau 1 on observe encore que la différence entre la valeur de K_1 pour $n > 1$ et celle qui correspond à $n = 1$ (cas de l'isotropie) croît dans la profondeur, arrivant, pour les données considérées, jusqu'à 50%.

On observe de même que la variation du coefficient de Poisson a une très petite influence sur la variation du coefficient K_1 par rapport à l'influence de la variation du degré d'anisotropie n, ce qui semble justifier l'approximation $\nu_1 = \nu_2 = 0$.

3. Surface circulaire

Ici l'on considère une surface circulaire de rayon a, parfaitement flexible, ayant une charge uniforme d'intensité p. Avec les notations de la fig. 4 et tenant compte de (1), la contrainte verticale σ_z dans un point $M(x, y, z)$ du demi-espace est

$$\sigma_z = \frac{pz}{2\pi(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left\{\frac{x}{[(R-x)^2 + z^2/\alpha]^{3/2}} - \frac{x}{[(R-x)^2 + z^2/\beta]^{3/2}}\right\} dx,$$

et après les calculs correspondants

Tableau 1

Valeurs du coefficient K_1

ν		0,2					0,3					0,4				
z/a \ n	1	0,5	1,5	2	2,5	3	0,5	1,5	2	2,5	3	0,5	1,5	2	2,5	3
0,5	0,6960	0,7850	0,6470	0,6140	0,5840	0,5660	0,7910	0,6440	0,6100	0,5820	0,5610	0,8040	0,6400	0,6010	0,5800	0,5510
1	0,3360	0,4520	0,2910	0,2640	0,2470	0,2330	0,4560	0,2890	0,2620	0,2440	0,2291	0,4610	0,2810	0,2600	0,2410	0,2260
1,5	0,1940	0,2480	0,1520	0,1350	0,1270	0,1200	0,2550	0,1500	0,1340	0,1240	0,1130	0,2670	0,1495	0,1330	0,1235	0,1100
2	0,1140	0,1495	0,1060	0,0910	0,0880	0,0770	0,1550	0,1050	0,0880	0,0812	0,0685	0,1635	0,1033	0,0873	0,0802	0,0660
3	0,0580	0,0760	0,0430	0,0380	0,0350	0,0330	0,0770	0,0430	0,0380	0,0346	0,0312	0,0798	0,0424	0,0367	0,0339	0,0310
5	0,0220	0,029	0,0155	0,0199	0,0127	0,0119	0,0292	0,0154	0,0137	0,0126	0,0117	0,0310	0,0152	0,0135	0,0123	0,0115

Tableau 2

Valeurs du coefficient K_2

ν		0,2					0,3					0,4				
z/r \ n	1	0,5	1,5	2	2,5	3	0,5	1,5	2	2,5	3	0,5	1,5	2	2,5	3
0,5	0,890	0,943	0,882	0,867	0,850	0,830	0,945	0,878	0,865	0,850	0,827	0,948	0,875	0,861	0,845	0,826
1	0,650	0,744	0,593	0,550	0,529	0,503	0,751	0,590	0,547	0,520	0,502	0,760	0,560	0,545	0,518	0,502
1,5	0,426	0,525	0,390	0,349	0,325	0,300	0,537	0,388	0,348	0,319	0,298	0,553	0,386	0,345	0,316	0,295
2	0,294	0,381	0,263	0,240	0,204	0,192	0,390	0,262	0,236	0,203	0,190	0,398	0,260	0,232	0,202	0,187
2,5	0,202	0,280	0,174	0,156	0,143	0,132	0,284	0,173	0,154	0,139	0,127	0,290	0,171	0,154	0,135	0,126
3	0,157	0,208	0,135	0,120	0,103	0,095	0,210	0,135	0,119	0,102	0,094	0,216	0,133	0,102	0,100	0,092
3,5	0,113	0,160	0,102	0,088	0,080	0,070	0,166	0,100	0,087	0,073	0,065	0,171	0,095	0,087	0,072	0,063
4	0,088	0,130	0,079	0,063	0,058	0,052	0,130	0,077	0,063	0,056	0,051	0,139	0,076	0,062	0,055	0,049

$$\sigma_z = \frac{p}{z}\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\left\{\alpha\frac{aR-(R^2+z^2/\alpha)}{[(R-a)^2+z^2/\alpha]^{1/2}}-\beta\frac{aR-(R^2+z^2/\beta)}{[(R-a)^2+z^2/\beta]^{1/2}}+\right.$$
$$\left.+\alpha\left(R^2+\frac{z^2}{\alpha}\right)^{1/2}-\beta\left(R^2+\frac{z^2}{\beta}\right)^{1/2}\right\}. \tag{11}$$

Pour un point de la verticale du centre de la surface circulaire, en remplaçant en (11) $r = 0$, on obtient

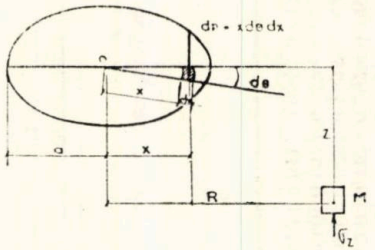


Fig. 4

$$\sigma_{z0} = K_2\, p, \tag{12}$$

où

$$K_2 = 1 - \frac{z}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\left[\left(a^2+\frac{z^2}{\alpha}\right)^{-1/2}-\left(a^2+\frac{z^2}{\beta}\right)^{-1/2}\right],$$

c'est-à-dire justement la formule donnée par Barden [1] pour ce cas particulier. Avec des différents rapports z/a et des différentes valeurs de n et ν, pratiquement possibles, on obtienent les valeurs du coefficient K_2 du tableau 2, dont l'examination nous conduit aux mêmes conclusions que dans le cas de la surface rectangulaire. Ainsi, pour $n > 1$, il y a plus de dispersion latérale des contraintes σ_z et pour $n < 1$ il y a une concentration des contraintes σ_z immédiatement au dessus de la surface chargée, plus grande que celle indiquée par la théorie de Boussinesq.

La solution (11) vérifie les conditions à la limite $\lim_{z\to 0} \sigma_z = p$, $\lim_{z\to\infty} \sigma_z = 0$, en exceptant les points du contour, où la première condition n'est pas satisfaite. Pour $n = 1$ la formule (11) ne s'applique pas.

4. Déplacements

Dans les deux cas étudiés, le déplacement vertical W d'un point de la surface du demi-espace peut être obtenu respectivement des relations:

$$W = \frac{Jp}{E}\iint_A \frac{d\xi\, d\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \quad \text{et} \quad W = \frac{Jp}{E}\iint_A d\theta\, dx.$$

On observe que les déplacements élastiques des points de la surface du demi-espace anisotrope sont obtenus des relations du milieu isotrope connues, dérivés de la théorie de Boussinesq, par multiplication avec le facteur numérique $J\pi/(1-\nu^2)$, où J est défini par la relation (2), ou pratiquement par (5) ou (6).

En considérant pour n est ν des différentes valeurs, pratiquement possibles, on a obtenu pour J les valeurs du tableau 3, aussi bien avec la relation (5) qu'avec la relation (6). On constate que la valeur du coeficient J, aussi bien la valeur calculé avec la relation (5) que celle calculée avec (6), décroît pour $n > 1$ et croît pour $n < 1$. L'influence de la variation du coefficient de Poisson sur J est presque tout aussi grande que l'influence de la variation de n.

Tableau 3

Valeurs du coefficient J

	ν \ n	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Formule (5)	0,2	0,420	0,358	0,306	0,281	0,265	0,254	0,246
	0,3	0,346	0,325	0,290	0,270	0,252	0,246	0,241
	0,4	0,332	0,278	0,268	0,254	0,245	0,238	0,233
Formule (6)	0,2	0,472	0,374	0,306	0,274	0,248	0,237	0,203
	0,3	0,382	0,363	0,290	0,264	0,231	0,207	0,191
	0,4	0,338	0,348	0,268	0,226	0,196	0,174	0,167

Les relations (5) (et (6) donnent des valeurs différentes pour J, cette différence croissant en même temps avec n et ν. Il semble raisonnable de prendre pour J la valeur moyenne et, dans ce cas, la différence entre les déplacements isotropes et anisotropes, pour les données considérées, arrive à 25%.

5. Conclusions

La capacité de dispersion de la charge pour un sol de fondation transversal anisotrope croît en même temps avec le degré d'anisotropie et vice-versa. C'est une cause importante des discordances constatées entre les tassements calculés avec des formules bassées sur la thérorie de Boussinesq et les tassements observées.

La formule des déplacements étant plus affectée par la variation du coefficient de Poisson (coefficient de valeur pratique douteuse), il est indiqué d'utiliser pour le calcul des tassements des formules se basant sur l'expression des contraintes et non pas sur l'expression des déplacements.

Reçue le 9 VII 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Statique et de Résistance des Matériaux

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

BIBLIOGRAPHIE

1. Barden L., *Stresses and Displacements in a Cross-Anisotropic Soil.* Geotechnique, 1963, **13**, *3*, pp. 198–210.
2. Cernătescu R., Silion T., *Curs de geotehnică.* EDP, Buc., 1963.
3. Eftimie A., *Contributions à l'étude des efforts et des déplacements dans le sol des fondations.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1–2.*
4. Lehr H., *Fundaţii.* Vol. **I**, ESAC, Buc., 1954.
5. Maior N., Păunescu M., *Curs de geotehnică şi fundaţii.* EDP, Buc., 1963.
6. Michell J. H., *The Stress Distribution in an Aelotropic Solid with an Infinite Plane Boundary.* Proc. London Math. Soc., **32**, pp. 247–258.
7. Stănculescu I., *Curs de geotehnică şi fundaţii.* EDP, Buc., 1963.

TENSIUNILE ŞI DEPLASĂRILE ÎNTR-UN SEMISPAŢIU TRANSVERSAL ANIZOTROP SUB ACŢIUNEA UNOR SARCINI DISTRIBUITE PE SUPRAFEŢE ELASTICE LIMITATE

(Rezumat)

Pornind de la expresiile tensiunilor şi deplasărilor într-un semispaţiu transversal anizotrop, date de Michell [6], se stabilesc expresiile tensiunilor în semispaţiul transversal anizotrop încărcat cu sarcini distribuite uniform pe suprafeţe elastice limitate. Se determină şi expresiile deplasărilor punctelor din planul limită ($z = 0$).

Se trage concluzia că expresiile deplasărilor punctelor din planul limită se obţin din deplasările respective, calculate în ipoteza izotropiei, multiplicate cu un factor care este funcţie de constantele elastice ce caracterizează anizotropia transversală. În cazul cînd gradul de anizotropie este supraunitar, atît tensiunile cît şi deplasările calculate în ipoteza anizotropiei sînt mai mici decît cele calculate în ipoteza izotropiei şi reciproc.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia V
CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

C. D. 539.41; 624.15

SUR LE CALCUL DES POUTRES ANNULAIRES APPUYÉES SUR UN MILIEU ÉLASTIQUE

PAR

CRISTIAN COCOVES

Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 28—30 septembre 1967

1. Introduction

Le calcul des poutres annulaires appuyées sur un milieu élastique, chargées normalement sur leur plan, présente une grande importance dans le pratique des ingénieurs.

Les anneaux circulaires appuyées sur un milieu élastique se rencontrent souvent dans les constructions (comme par exemple dans les poutres de fondation pour les châteaux d'eau et pour les tours de réfrigération desservant l'industrie pétrolière et l'industrie chimique, du même que dans les autres constructions provenant des surfaces de révolution coniques, cylindriques, sphériques et d'autres formes.)

Les mêmes anneaux circulaires s'emploient dans l'industrie lourde et aéronautique comme des treilles liés et qui s'influencent d'une manière réciproque.

Le présent ouvrage s'occupe de l'anneau circulaire appuyé sur un milieu élastique et actionné normalement sur son plan, en prenant en considération le cas le plus général de chargement.

2. Calcul de l'anneau circulaire

2.1. Hypothèses

1. Les pressions du milieu élastique sont directement proportionnelles aux flèches (l'hypothèse de Winkler).
2. Le section transversale de l'anneau est constante.
3. Les déformations axiales sont petites et elles sont négligeables.

Notations: A — l'aire transversale de l'anneau; $C = GI_t$ — la rigidité à la torsion de l'anneau circulaire; $C_1 = k_1 b^3/12$ — la rigidité à la torsion du milieu élastique (pour toute la largeur de la section); $D_x = EI_x$ — la rigidité à la flexion de l'anneau circulaire; k_1 — le

module de réaction du sol du milieu élastique ; $K_y = k_1 b$ — le module de réaction du sol (pour toute la largeur de la section) ; $p_{(\varphi)}$ — la charge normale distribuée sur le plan de l'anneau ; $m_{(\varphi)}$ — le moment distribué ; P — la charge unique normale sur le plan de l'anneau ; M_0 — le moment concentré ; M_x — le moment fléchissant ; M_z — le moment de torsion ; Q_z — l'effort tranchant ; β — l'angle de torsion de la section de l'anneau ; v — la flèche de l'anneau normale sur son plan ; 2γ — l'angle du centre des points d'application des chargements extérieurs P et M_0.

2.2. Conditions d'équilibre statique

On détache un petit élément de l'anneau circulaire avec la longueur ds sur lequel dans les sections s et $s + ds$ vont travailler les efforts Q_x, M_x, M_z et respectivement $Q_x + dQ_x$, $M_x + dM_x$ et $M_z + dM_z$.

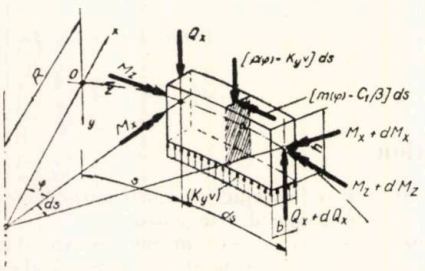


Fig. 1

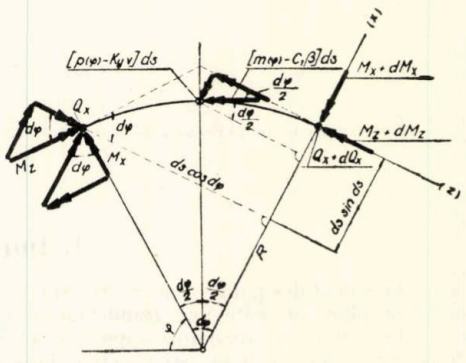


Fig. 2

Si l'on écrit les équations d'équilibre statique et l'on exprime $ds = R\,d\varphi$, on obtient :

$$(1) \qquad (\Sigma X = 0), \qquad \frac{dQ_x}{d\varphi} = R[p_{(\varphi)} - K_y v],$$

$$(2) \qquad (\Sigma M_x = 0), \qquad \frac{dM_x}{d\varphi} - M_z + RQ_x = 0,$$

$$(3) \qquad (\Sigma M_z = 0), \qquad \frac{dM_z}{d\varphi} + M_x + R[m_{(\varphi)} - C_1\beta] = 0.$$

2.3. Relations efforts-déformations

Par les équations des déformations on exprime la loi de Hooke. Si nous évaluons la variation des déformations par rapport aux axes Ox et Oz en substituant $ds = Rd\varphi$ on obtient (fig. 3) :

par rapport à l'axe Ox

$$M_x = -\frac{D_x}{R}\left(\beta + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\varphi^2}\right); \tag{4}$$

par rapport à l'axe Oz

$$M_z = \frac{C}{R}\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\right). \tag{5}$$

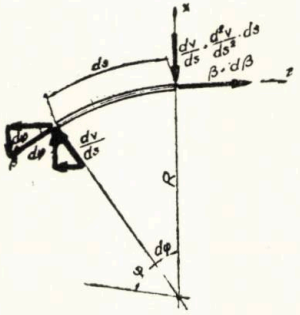


Fig. 3

De l'équation (2) il résulte :

$$Q_x = \frac{1}{R^2}\left[(D_x + C)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{C}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{D_x}{R}\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}\varphi^3}\right]. \tag{6}$$

Les relations (1) et (3) nous donnent :

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_x}{\mathrm{d}\varphi^2} - \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}\varphi} + R^2[p_{(\varphi)} - K_y v] = 0. \tag{7}$$

Après les calculs des dérivées et des substitutions on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^6\beta}{\mathrm{d}\varphi^6} + \left(2 - \dfrac{\eta}{\nu}\right)\dfrac{\mathrm{d}^4\beta}{\mathrm{d}\varphi^4} + (1 + \eta + \lambda)\dfrac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\varphi^2} - \dfrac{\lambda}{\nu}(1 + \eta)\beta = \\ = \dfrac{R^3}{C}(1 + \nu)\dfrac{\mathrm{d}^2 p_{(\varphi)}}{\mathrm{d}\varphi^2} - \dfrac{R^2}{C}\left[\dfrac{\mathrm{d}^4 m_{(\varphi)}}{\mathrm{d}\varphi^4} - \nu\dfrac{\mathrm{d}^2 m_{(\varphi)}}{\mathrm{d}\varphi^2} + \lambda m_{(\varphi)}\right], \\ \dfrac{\mathrm{d}^6 v}{\mathrm{d}\varphi^6} + \left(2 - \dfrac{\eta}{\nu}\right)\dfrac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}\varphi^4} + (1 + \eta + \lambda)\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\varphi^2} - \dfrac{\lambda}{\nu}(1 + \eta)v = \\ = \dfrac{R^4}{\nu D_x}\left[\nu\dfrac{\mathrm{d}^2 p_{(\varphi)}}{\mathrm{d}\varphi^2} - (1 + \eta)p_{(\varphi)}\right] + \dfrac{R^3}{\nu D_x}(1 + \nu)\dfrac{\mathrm{d}^2 m_{(\varphi)}}{\mathrm{d}\varphi^2}, \end{cases} \tag{8}$$

ce qui constitue un système de deux équations différentielles du sixième ordre, où

$$\nu = \frac{C}{D_x}, \quad \eta = \frac{C_1 R^2}{D_x} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{K_y R^4}{D_x}. \tag{9}$$

À partir des opérations simples, on obtient la liaison entre les équations différentielles (8) et (9)

$$\frac{\lambda(1+\nu)}{R} v = -\left[\nu \frac{d^4\beta}{d\varphi^4} + (2\nu - \eta)\frac{d^2\beta}{d\varphi^2} + \nu(1+\eta)\beta\right] + \frac{R^2}{D_x}\left[R(1+\nu)p_{(\varphi)} - \frac{d^2 m_{(\varphi)}}{d\varphi^2} + \nu m_{(\varphi)}\right]. \tag{10}$$

2.4. Intégration des équations différentielles

L'intégration des équations différentielles (8) et (9) est différente, en fonction des charges extérieures.

Dans les cas où la charge extérieure est formée par des charges uniques et par des moments concentrés, $p_{(\varphi)} = 0$ et $m_{(\varphi)} = 0$ et le système d'équations (8) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{d^6\beta}{d\varphi^6} + 3b\dfrac{d^4\beta}{d\varphi^4} + 3c\dfrac{d^2\beta}{d\varphi^2} + d\beta = 0, \\ \dfrac{d^6 v}{d\varphi^6} + 3b\dfrac{d^4 v}{d\varphi^4} + 3c\dfrac{d^2 v}{d\varphi^2} + dv = 0, \end{cases} \tag{8'}$$

où :

$$3b = 2 - \frac{\eta}{\nu}, \qquad 3c = 1 + \eta + \lambda, \qquad d = -\frac{\lambda}{\nu}(1+\eta). \tag{11}$$

Les équations (8') sont homogènes avec des coefficients constants, et ont l'équation caractéristique

$$m^6 + 3bm^4 + 3cm^2 + d = 0, \tag{12}$$

avec les racines

$$\begin{cases} m_1 = -m_2 = m = \sqrt{(S_1 + S_2) - b}, \\ m_3 = -m_4 = \xi + i\psi, \quad m_5 = -m_6 = \xi - i\psi, \end{cases} \tag{13}$$

où :

$$(14)\quad \begin{cases} \xi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}+\omega_1\right)}, \quad \psi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}-\omega_1\right)}, \\ \omega_1 = -\left(\frac{S_1+S_2}{2}+b\right), \qquad \omega_2 = \sqrt{3}\,\frac{S_1-S_2}{2}, \\ S_1 = \sqrt[3]{r+(q^3+r^2)^{1/2}}, \quad S_2 = \sqrt[3]{r-(q^3+r^2)^{1/2}}, \\ q = c-b^2, \quad r = \frac{1}{2}(3bc-d)-b^3. \end{cases}$$

Alors les solutions des équations différentielles (8′) seront :

$$(15)\quad \beta = \bar{A}_1\,\mathrm{sh}m\varphi + \bar{A}_2\,\mathrm{ch}\,m\varphi + \bar{A}_3\,\mathrm{sh}\,\xi\varphi\sin\psi\varphi + \bar{A}_4\,\mathrm{ch}\xi\varphi\cos\psi\varphi + \\ + \bar{A}_5\,\mathrm{sh}\xi\varphi\,\cos\psi\varphi + \bar{A}_6\,\mathrm{ch}\,\xi\varphi\sin\psi\varphi,$$

$$(16)\quad v = \bar{B}_1\,\mathrm{sh}m\varphi + \bar{B}_2\,\mathrm{ch}m\varphi + \bar{B}_3\,\mathrm{sh}\xi\varphi\sin\psi\varphi + \bar{B}_4\,\mathrm{ch}\xi\varphi\cos\psi\varphi + \\ + \bar{B}_5\,\mathrm{sh}\xi\varphi\cos\psi\varphi + \bar{B}_6\,\mathrm{ch}\,\xi\varphi\sin\psi\varphi.$$

La relation (10) qui réalise la liaison entre les constantes d'intégration $\bar{A}_n$ et $\bar{B}_n$ devient

$$(10')\quad \frac{\lambda(1+\nu)}{R}v = -\left[\nu\frac{\mathrm{d}^4\beta}{\mathrm{d}\varphi^4} + (2\nu-\eta)\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\varphi^2} + \nu(1+\eta)\beta\right].$$

À l'aide de la relation (10′) on peut écrire

$$(17)\quad \begin{cases} \bar{B}_1 = T\bar{A}_1, & \bar{B}_4 = L\bar{A}_4 + M\bar{A}_3, \\ \bar{B}_2 = T\bar{A}_2, & \bar{B}_5 = L\bar{A}_5 + M\bar{A}_6, \\ \bar{B}_3 = L\bar{A}_3 - M\bar{A}_4, & \bar{B}_6 = L\bar{A}_6 - M\bar{A}_5, \end{cases}$$

où nous avons noté :

$$(18)\quad \begin{cases} T = -\dfrac{R}{\lambda(1+\nu)}\left[\nu m^4 + (2\nu-\eta)\,m^2 + \nu(1+\eta)\right], \\ L = -\dfrac{R}{\lambda(1+\nu)}\left[\nu(\xi^4 - 6\xi^2\psi^2 + \psi^4) + \right. \\ \qquad \left. + (2\nu-\eta)(\xi^2-\psi^2) + \nu(1+\eta)\right], \\ M = \dfrac{R}{\lambda(1+\nu)}\left[4\nu(\xi\psi^3 - \xi^3\psi) - 2(2\nu-\eta)\xi\psi\right]. \end{cases}$$

2.5. Conditions initiales pour des forces concentrées

Soit l'anneau chargé avec les force concentrées P (fig. 4). Tenant compte de la symétrie géométrique et du chargement, on peut écrire :

(f) $v_{(\gamma)} = v_{(-\gamma)}$, (g) $\left(\frac{d^2v}{d\varphi^2}\right)_{(\gamma)} = \left(\frac{d^2v}{d\varphi^2}\right)_{(-\gamma)}$,

(h) $\beta_{(\gamma)} = \beta_{(-\gamma)}$, (i) $\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{(\gamma)} = \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{(-\gamma)}$,

(j) $\left(\frac{d\beta}{d\varphi}\right)_{(\gamma)} = \left(\frac{d\beta}{d\varphi}\right)_{(-\gamma)}$, (k) $\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{(\varphi=0)} = 0$, $Q_{x(\varphi=0)} = 0$.

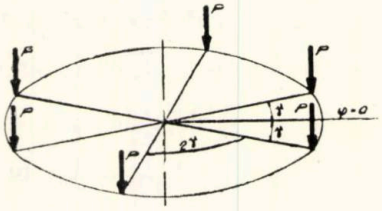


Fig. 4

Utilisant les conditions (f), (g) (h), dans les relations (15), (16) nous obtenons :

(15′) $\beta = \bar{A}_2 \operatorname{ch} m\varphi + \bar{A}_3 \operatorname{sh} \xi\varphi \sin \psi\varphi + \bar{A}_4 \operatorname{ch} \xi\varphi \cos \psi\varphi$,

(16′) $v = \bar{B}_2 \operatorname{ch} m\varphi + \bar{B}_3 \operatorname{sh} \xi\varphi \sin \psi\varphi + \bar{B}_4 \operatorname{ch} \xi\varphi \cos \psi\varphi$.

Écrivons aussi

(*l*) $Q_{x_{(\varphi=\gamma)}} = -\frac{P}{2}$, $\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{(\varphi=\gamma)} = 0$ et $\left(\frac{d\beta}{d\varphi}\right)_{(\varphi=\gamma)} = 0$.

Il en résulte un système de trois équations qui donne les inconnues $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$:

(19)
$$\begin{cases} \bar{A}_2 = -\dfrac{PR^2}{2\bar{I}} M \left[\theta^2_{(\gamma)} + \Delta^2_{(\gamma)}\right], \\ \bar{A}_3 = -\dfrac{PR^2}{2\bar{I}} \left[(L - T)\Delta_{(\gamma)} - M\theta_{(\gamma)}\right] m \operatorname{sh} m\gamma, \\ \bar{A}_4 = \dfrac{PR^2}{2\bar{I}} \left[(L - T)\theta_{(\gamma)} + M\Delta_{(\gamma)}\right] m \operatorname{sh} m\gamma, \end{cases}$$

où

$$(20)\quad \bar{I} = \begin{vmatrix} X_{(\gamma)} & Y_{(\gamma)} & Z_{(\gamma)} \\ Tm\,\mathrm{sh}\,m\gamma & L\theta_{(\gamma)} + M\Delta_{(\gamma)} & L\Delta_{(\gamma)} - M\theta_{(\gamma)} \\ m\,\mathrm{sh}\,m\gamma & \theta_{(\gamma)} & \Delta_{(\gamma)} \end{vmatrix}$$

et

$$(21)\quad \begin{cases} X_{(\varphi)} = \left[\left(D_x + C - \dfrac{CT}{R}\right) + \dfrac{TD_x}{R}m^2\right] m\mathrm{sh}m\varphi\,, \\ Y_{(\varphi)} = \left[(D_x + C)\,\theta_{(\varphi)} - \dfrac{C}{R}(L\theta_{(\varphi)} + M\Delta_{(\varphi)}) + \dfrac{D_x}{R}(LV_{(\varphi)} + MW_{(\varphi)})\right], \\ Z_{(\varphi)} = \left[(D_x + C)\Delta_{(\varphi)} - \dfrac{C}{R}(L\Delta_{(\varphi)} - M\theta_{(\varphi)}) + \dfrac{D_x}{R}(LW_{(\varphi)} - MV_{(\varphi)})\right], \\ \theta_{(\varphi)} = \xi\,\mathrm{ch}\xi\varphi\,\sin\psi\varphi + \psi\,\mathrm{sh}\xi\varphi\,\cos\psi\varphi, \\ \Delta_{(\varphi)} = \xi\,\mathrm{sh}\xi\varphi\,\cos\psi\varphi - \psi\mathrm{ch}\xi\varphi\,\sin\psi\varphi, \\ U_{(\varphi)} = (\xi^2 - \psi^2)\mathrm{sh}\xi\varphi\,\sin\psi\varphi + 2\xi\psi\mathrm{ch}\xi\varphi\,\cos\psi\varphi, \\ E_{(\varphi)} = (\xi^2 - \psi^2)\mathrm{ch}\xi\varphi\,\cos\psi\varphi - 2\xi\psi\mathrm{sh}\xi\varphi\,\sin\psi\varphi, \\ V_{(\varphi)} = (\xi^3 - 3\xi\psi^2)\,\mathrm{ch}\,\xi\varphi\,\sin\psi\varphi - (\psi^3 - 3\xi^2\psi)\,\mathrm{sh}\,\xi\varphi\,\cos\psi\varphi, \\ W_{(\varphi)} = (\xi^3 - 3\xi\psi^2)\,\mathrm{sh}\,\xi\varphi\,\cos\psi\varphi + (\psi^3 - 3\xi^2\psi)\,\mathrm{ch}\,\xi\varphi\,\sin\psi\varphi. \end{cases}$$

Les déformatios et les efforts dans la section deviennent :

$$(22)\quad \beta = \bar{A}_2\,\mathrm{ch}\,m\varphi + \bar{A}_3\,\mathrm{sh}\,\xi\varphi\,\sin\psi\varphi + \bar{A}_4\,\mathrm{ch}\,\xi\varphi\,\cos\psi\varphi,$$

$$(23)\quad v = (T\,\mathrm{ch}m\varphi)\,\bar{A}_2 + (L\,\mathrm{sh}\,\xi\varphi\,\sin\psi\varphi + M\,\mathrm{ch}\,\xi\varphi\,\cos\psi\varphi)\,\bar{A}_3 + (L\,\mathrm{ch}\,\xi\varphi\,\cos\psi\varphi - M\,\mathrm{sh}\xi\varphi\,\sin\psi\varphi)\,\bar{A}_4\,,$$

$$(24)\quad Q_x = \frac{1}{R^2}(X_{(\varphi)}\bar{A}_2 + Y_{(\varphi)}\bar{A}_3 + Z_{(\varphi)}\bar{A}_4),$$

$$(25)\quad M_x = -\frac{D_x}{R}\left\{\left[\left(1 + \frac{T}{R}m^2\right)\mathrm{ch}\,m\varphi\right]\bar{A}_2 + \left[\mathrm{sh}\,\xi\varphi\,\sin\psi\varphi + \frac{1}{R}(LU_{(\varphi)} + ME_{(\varphi)})\right]\bar{A}_3 + \left[\mathrm{ch}\,\xi\varphi\,\cos\psi\varphi + \frac{1}{R}(LE_{(\varphi)} - MU_{(\varphi)})\right]\bar{A}_4\right\},$$

$$(26)\quad M_z = \frac{C}{R}\left\{\left[\left(1 - \frac{T}{R}\right)m\,\mathrm{sh}m\varphi\right]\bar{A}_2 + \left[\theta_{(\varphi)} - \frac{1}{R}(L\theta_{(\varphi)} + M\Delta_{(\varphi)})\right]\bar{A}_3 + \left[\Delta_{(\varphi)} - \frac{1}{R}(L\Delta_{(\varphi)} - M\theta_{(\varphi)})\right]\bar{A}_4\right\}.$$

3. Un exemple de calcul

Pour la poutre annulaires en béton armé appuyée sur un milieu élastique (fig. 4) on connaît :

$2\gamma = 60°$, $R = 4$ m, $k_1 = 12$ kgf/cm^3, $\mu = 1/6$, $E = 1{,}8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2

et la section de la poutre annulaire $b = 40$ cm, $h = 60$ cm (rectangulaire).

On demande la détermination des diagrammes des déformations et des efforts.

3.1. Solution

À l'aide des relations (9) on trouve

$$\nu = 0{,}44799, \quad \eta = 0{,}07901, \quad \lambda = 94{,}81841,$$

qui permettent de calculer les b, c, d (11) :

$$b = 0{,}60787, \quad c = 31{,}96461, \quad d = -228{,}36442.$$

Pour les racines (13), (14) de l'équation caractéristique (12) on obtient en premier lieu $q = 31{,}59509$, $r = 143{,}10245$, $S_1 = 7{,}18666$, $S_2 = -4{,}39635$, $\omega_1 = -2{,}00303$, $\omega_2 = 10{,}03118$ et puis

$$\xi = 2{,}02807, \quad \psi = 2{,}47308, \quad m = 1{,}47730.$$

Maintenant à l'aide de (18) on obtient

$$T = -0{,}3205\ R, \quad L = 0{,}32365\ R, \quad M = 0{,}07143\ R.$$

Au moyen de ces valeurs on calcule les expressions nécessaires pour les relations (22)...(26), qui sont données dans les tableux 1...4.

Tableau 1

$\varphi°$	sh $m\varphi$	sh $m\varphi$	sh $\xi\varphi$ sin $\psi\varphi$	sh $\xi\varphi$ cos $\varphi\psi$	ch $\xi\varphi$ cos $\varphi\psi$	ch $\xi\varphi$ sin $\psi\varphi$
0	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
5	0,12927	1,00832	0,03809	0,17377	0,99214	0,21748
10	0,26068	1,03342	0,15117	0,32823	0,96579	0,44479
15	0,39644	1,07571	0,33545	0,44365	0,91272	0,69013
20	0,53818	1,13591	0,58385	0,49939	0,81977	0,95841
25	0,69011	1,21501	0,88584	0,47454	0,66945	1,24969
30	0,85292	1,31433	1,22469	0,34683	0,44107	1,55748

Tableau 2

$\varphi°$	$\theta(\varphi)$	$\Delta(\varphi)$	$U(\varphi)$	$E(\varphi)$	$V(\varphi)$	$W(\varphi)$
0	0,00000	0,00000	10,03118	− 2,00303	0,00000	0,00000
5	0,87081	−0,18543	9,87604	− 2,36937	− 3,60431	− 8,36386
10	1,71380	−0,43423	9,38522	− 3,45092	− 7,78961	−16,32153
15	2,49682	−0,80699	8,48374	− 5,19316	−13,09627	−23,42960
20	3,17875	−1,35742	7,05379	− 7,49873	−19,98371	−29,16775
25	3,70804	−2,12818	4,94101	−10,22695	−28,77548	−32,93322
30	4,01663	−3,14862	1,97136	−13,16856	−39,62694	−33,98320

Tableau 3

φ°	$\frac{1}{R}[L\theta_{(\varphi)} + M\Delta_{(\varphi)}]$	$\frac{1}{R}[L\Delta_{(\varphi)} - M\theta_{(\varphi)}]$	$\frac{1}{R}[LU_{(\varphi)} + ME_{(\varphi)}]$	$\frac{1}{R}[LE_{(\varphi)} - MU_{(\varphi)}]$	$\frac{1}{R}[LV_{(\varphi)} + MW_{(\varphi)}]$	$\frac{1}{R}[LW_{(\varphi)} - MV_{(\varphi)}]$
0	0,00000	0,00000	3,10357	1,36489	0,00000	0,00000
5	0,26869	−0,12222	3,02718	−1,47038	− 1,76405	−2,44954
10	0,52366	−0,26297	2,79106	−1,78736	− 3,68713	−4,72611
15	0,75046	−0,43955	2,37483	−2,28656	− 5,91244	−6,64759
20	0,93185	−0,66642	1,74732	−2,93092	− 8,55152	−8,01276
25	1,04810	−0,95369	0,86860	−3,66299	−11,66603	−8,60342
30	1,07508	−1,30600	−0,30268	−4,38292	−15,25319	−8,16806

Tableau 4

φ°	$X_{(\varphi)}\ 10^{-12}$	$Y_{(\varphi)}\ 10^{-12}$	$Z_{(\varphi)}\ 10^{-12}$
0	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,03446	−0,08080	−0,34516
10	0,06949	−0,18664	−0,67872
15	0,10568	−0,34127	−0,98744
20	0,14347	−0,56585	−1,25449
25	0,18397	−0,87692	−1,45901
30	0,22754	−1,28549	−1,57361

Avec les valeurs calculées dans les tableaux, pour $\varphi = \gamma = 30^\circ$ on détermine les constantes d'intégration $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ et $\bar{A}_4$ (19) :

$$\bar{A}_2 = -0{,}36536 \cdot 10^{-12}\ \frac{PR^2}{2},\quad \bar{A}_3 = 0{,}34835 \cdot 10^{-12}\ \frac{PR^2}{2},\quad \bar{A}_4 = 0{,}29807 \cdot 10^{-12}\ \frac{PR^2}{2},$$

qu'on doir introduire dans (22) ... (26) pour obtenir les déformations et les efforts. On obtient les résultats contenus dans le tableau 5 et représentés dans la fig. 5.

Tableau 5

φ°	$\frac{\beta}{P}\ 10^8$ rad/kgf	$\frac{v}{P}\ 10^6$ cm/kgf	$\frac{Q_x}{P}$	$\frac{M_x}{P}$ cm	$\frac{M_z}{P}$ cm
0	−0,53827	4,25824	0,00000	−16,39600	0,00000
5	−0,47512	4,34308	−0,01781	−15,10125	1,38299
10	−0,29624	4,58032	−0,14636	−11,11649	2,53523
15	−0,03285	4,92940	−0,22591	+ 4,38048	3,92472
20	+0,26168	5,31792	−0,31174	+ 5,26717	3,21595
25	+0,51368	5,64748	−0,40379	−17,98891	2,23045
30	+0,62312	5,78944	−0,50000	+33,70676	0,00000

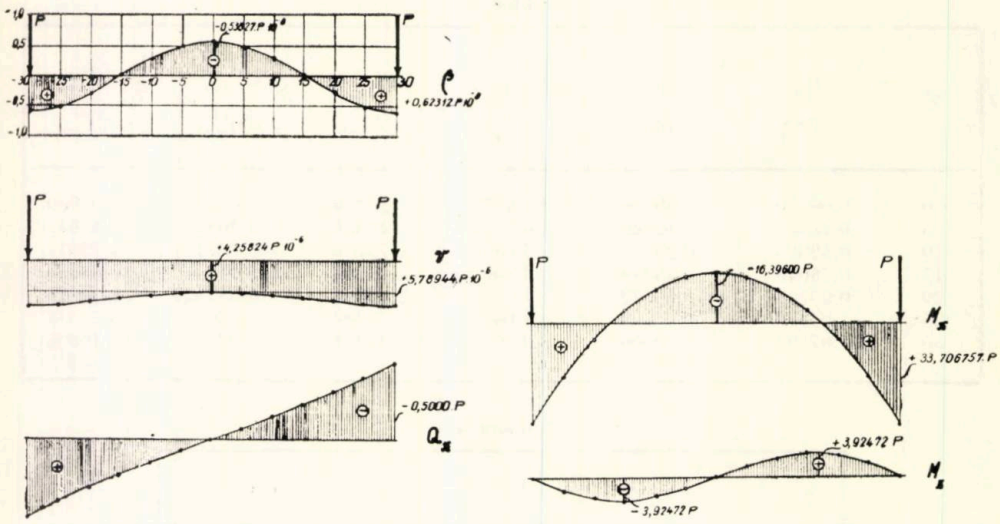


Fig. 5

Institut Polytechnique, Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. Oravas G., *Beitrag zur Berechnung des Kreisringes auf elastischer Unterlage.* D. Bauingenieur, Mai 1956.
2. Rodriguez D. A., *Three-Dimensional Bending of a Ring on an Elastic Foundation.* J. Appl. Mechanics, 1961.
3. Volterra E., *Bending of a Circular Beam Resting on an Elastic Foundation.* J. Appl. Mechanics, 1952.
4. — *Deflections of Circular Beams Resting on Elastic Foundations obtained by Methods of Harmonic Analysis.* J. Appl. Mechanics, 1953.

ASUPRA CALCULULUI INELULUI CIRCULAR PE MEDIU ELASTIC

(Rezumat)

În lucrare se expune teoria generală pentru calculul inelului circular pe mediu elastic, încărcat normal pe planul său.

Pentru cazul particular al încărcării cu sarcini concentrate P se corectează rezultatele obținute în lucrarea [1] și se dă un exemplu numeric de calcul.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția IV
CONSTRUCȚII. HIDROTEHNICĂ

D. C. 624.014.2; 624.044

SOME INVESTIGATIONS ON THE DYNAMIC PROPERTIES OF STEEL MODELS

BY

LUCIAN STRAT, C. MIHAI and MIRCEA MANOLOVICI

1. Introduction

The variation of dynamic properties of structures in different stages of elastic and elasto-plastic behaviour becames today a very important problem taking in view that most of new structures are designed by admitting some inelastic deflections when subjected to strong earthquake motions only a few times during the life of the building.

In order to estimate more accurate the reliability of structures dynamically acted, the analyst must know not only the natural period, damping and normal modes in elastic range-but also in some stages of the development of plastic hinges.

In the case of earthquake motions the load-time function is of irregular form and at the multidegree systems, even in elastic range, the rigorous analysis and computation are complicated [1], [2].

Therefore some authors recommend a step by step analysis [1], [3] or the use of an equivalent one-degree system whose behaviour is analysed by means of the spectrum technique [4] ... [6].

When the resistance function is nonlinear and/or inelastic, it becames more difficult to do a rigorous analysis of structural response, even in the simple case of the one-degree system with bilinear hysterezis function.

The variation of the stiffness, the irregularity of the load-time function and also the nonlinear form of the damping function, lead in these conditions to the linearization equivalent technique [5], [7], to a numerical analysis [1], [8], [9], but very few data can be obtained about the variation of natural frequency and damping on actual frame structures.

Thus it becames evident the necessity of experimental research in order to know in some respect the variation of dynamic properties when elastic limits are exceeded [10], [11].

2. Approach of the Problem

Although the investigations on buildings are expensive and cannot be seldom performed, the japanese investigators [10] made some measurements of the natural frequency and of the damping of concrete

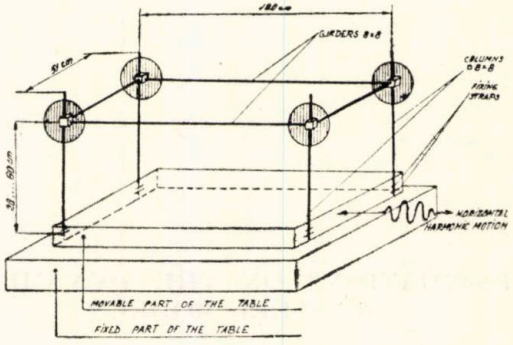


Fig. 1. — Diagram of the frames tested on the one ton shaking table.

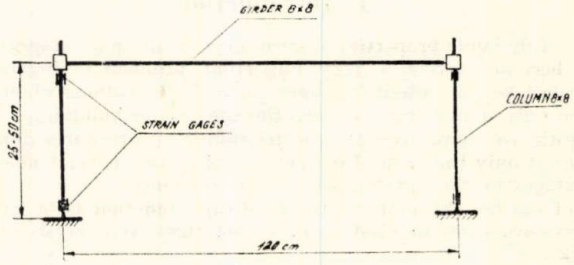


Fig. 2. — Disposition of the transducers on the frame.

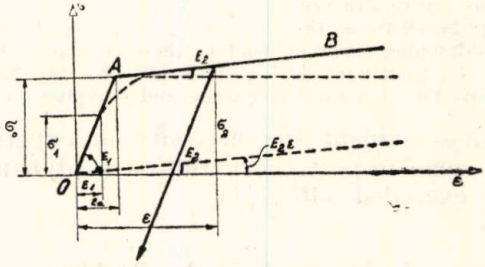


Fig. 3. — Simplifying bilinear curve.

buildings when the structures were tested up to failure. The results of these investigations show that the properties of structures dynamically acted subsequently change with the forming of cracks and the appearance of middle and severe damage.

Investigations on models of great pannel buildings at 1/4 scale also indicate a variation of the natural period, for instance from 2,1 to 4,0 sec. [11]. Some results are shown in Table 1.

Table 1

Measurements of natural period variation
(after TNIISK and japanese investigations)

No. of model	Natural period in different stage of damage related to the elastic value		
	Middle damage	Severe damage	Japanese investigation
01	2,1	4,00	
02	2,14	3,14	
03	1,88	2,62	from 2,09 to 2,68
04	1,20	1,78	

A set of experimental investigations are presented in the paper concerning the study of dynamic properties of steel models subjected to an increasing forced dynamic motion (see Fig. 1, diagram of the frames tested on the one tone shaking table ; Fig. 2, disposition of the transducers on the frame and Fig. 13, the vibration actuator).

We shall indicate, among other possible ways, an approach to the problem. This approach is valid if we know the load deflection dependence for a given system and if we agree that the dependence corresponds to dynamic action at various cycles. We assume a bilinear behaviour, like the broken line OAB in Fig. 3. It can be easily found a relation between frequencies corresponding to the OA range and the AB range.

In the first elastic stage of behaviour, i.e. on the OA part of $\sigma-\varepsilon$ diagram, the Young modululs E_1 is related to elastic strains. For one-bay portal frame, if the deformations of the girder are neglected (i. e. for one story rigid frame), the spring constant is

$$K_1 = \frac{24\,E_1 I}{h^3}. \tag{1}$$

In the second stage (elasto-plastic) of behaviour, on the AB part (Fig. 3), let E_2 be Young modulus. In fact E_2 is a variable amount an instantaneous value $E_{2p} = \Delta\sigma/\Delta\varepsilon$.

A mean value of E_2 established for the investigated bars lead to a ratio α between the values E_1 and E_{2p}

$$\alpha_m = \frac{E_1}{E_{2p}} = 146.$$

This value has a great dispersion according to the stress level on the $\sigma - \varepsilon$ curve.

For the one-bay frame the equivalent spring constant is

$$K_2 = \frac{24\, E_2 I}{h^3} \,. \tag{2}$$

We denote: ω_1 — natural pulsation of horizontal vibration of the one-bay frame in the first stage; K_1 — spring constant of frame vibration in the first stage; ω_2 — natural pulsation of horizontal vibration of the one-bay frame in the second stage; K_2 — equivalent spring constant of frame vibration in the second stage.

Now we can write the following relations for the horizontal oscillation of the one bay portal frame:

a) in the first (elastic) stage

$$\omega_1^2 = \frac{K_1}{m} = \frac{24 E_1 I}{m h^3} \,; \tag{3}$$

b) in the second stage

$$\omega_2^2 = \frac{K_2}{m} = \frac{24 E_2 I}{m h^3} \,. \tag{4}$$

If we express the radio of the square natural pulsation given by (3) and (4), we get:

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{E_1}{E_2} = \alpha. \tag{5}$$

Taking into acount that in the present investigations $\alpha_m = 146$, that means $\omega_1^2/\omega_2^2 = 146$, we obtain $\omega_2 = \omega_1/12{,}1$ and substituting $\omega_1 = 2\pi f_1$ and $\omega_2 = 2\pi f_2$, where f_1 is the natural frequency in elastic range, f_2 — the natural frequency in elasto-plastic assumed range, we obtain

$$f_1 = 12 f_2 \,. \tag{6}$$

The proportionality given by (5) keeps when we take in view the bending of the frame girder. Extending for a more general development of plastic hinges, we can write:

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{E_1}{E_2} = \alpha_{12} \,, \qquad \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2} = \frac{E_2}{E_3} = \alpha_{23} \,.$$

According to (6) in the proximity of failure there must be a large decrease of the natural frequency. But the experimental results indicate a smoother variation and even before failure occurs, the ratio f_1/f_2 is not so large. Indeed, when plastic zones appear many nonlinear parameters interfere, in relation with the energy loss, the redistribution of stresses, a.s.o. As we have seen, by the alternation of a loading plastic cycle with an elastic unloading cycle (the hysterezis backbone curve), the addition of permanent sets modify in a different manner the behaviour of the structure and thus also the dynamic properties.

3. Investigations on Frame Models Using the One Ton Shaking Table

In order to catch the variation of the dynamic characteristics, little size frame models of various heights were assembled and tested on the one ton capacity shaking table. The frame models were realised from columns having a 8×8, 10×10 and 20×20 mm square section ; at the top, columns were connected by a horizontal sliding frame with the same dimensions as the columns. The span in the movement side was 1,20 according to the size of the upper part of the shaking table. The models were fixed to the movable part of the table (Fig. 1 and 2).

The sliding frame allows to vary the heights of the columns and an adequate system created the possibility of lumping the mass. The load is realised by means of pig iron plates.

The investigations were made using the shaking table achieved on the fluid bearing principle with selfstabilised statical and dynamic pressure. The driving system provides a harmonic motion with amplitudes until 3 cm and with a frequency ranging between 2 and 16 cps.

The measurements of strains and displacements in different stages of the appearance of plastic hinges were carried out by means of electric strain gages and of recording vibrographs (Fig. 8 and 9). We used an adequate electronic equipment—a 4D3 strain bridge coupled with a KRIZIK five channel oscilloscope and a photo-recorder. In measuring the vibrations of the movable part and of the top of the frame, good results were obtained by means of an inductive transducer also coupled to the oscilloscope (Fig. 9).

Providing a set of increasing forced vibrations, we gradually succeded to plastify the frame sections and by measuring the resonant frequencies and the damping we get the variation of dynamic properties of the frames. As it was seen, there was a good coincidence between the results obtained by means of electric gages and by means of mechanical recorders.

At frame models having a 10×10 mm and 10×20 mm cross section we reached the plastic hinge at the fixed end. The variation of the natural frequency and of critical damping is shown in Fig. 4. We stated that natural frequency descreases by $20 \ldots 25\%$ and that damping increases by a mean value of 33% in the elasto-plastic range.

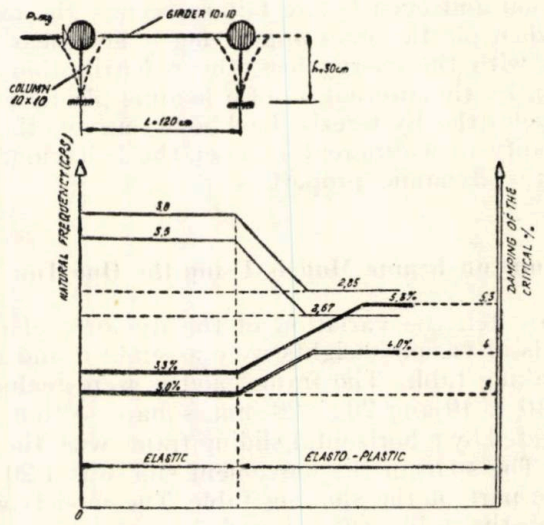


Fig. 4. — Frequency and damping variation.

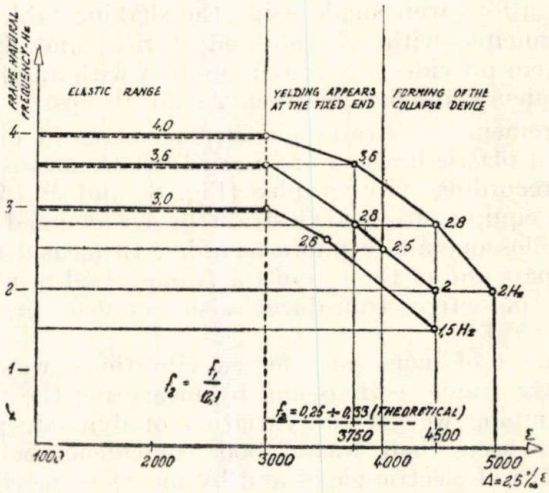


Fig. 5. — Graph of frequency–unitary strain.

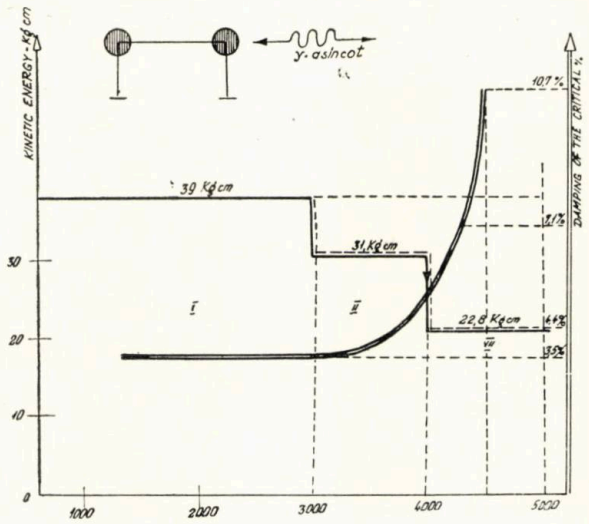


Fig. 6. — Graphs representing the strain-varying kinetic energy and the strain-varying damping of the critical.

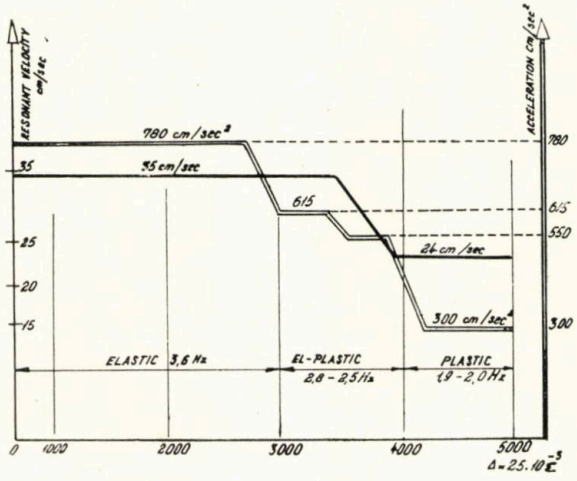


Fig. 7. — Graphs representing the strain-varying resonant velocity and the strain varying acceleration.

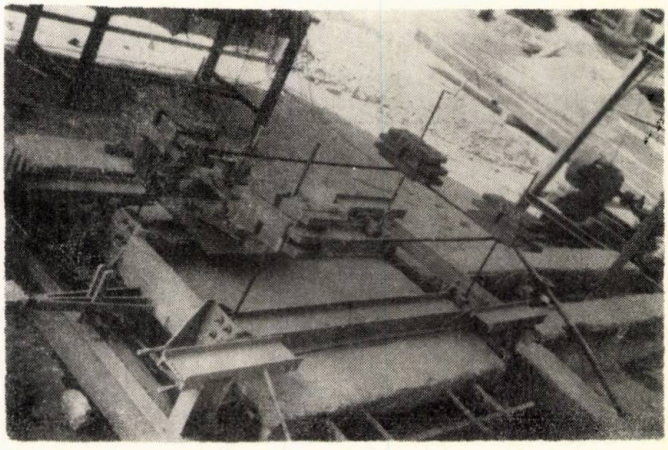


Fig. 8

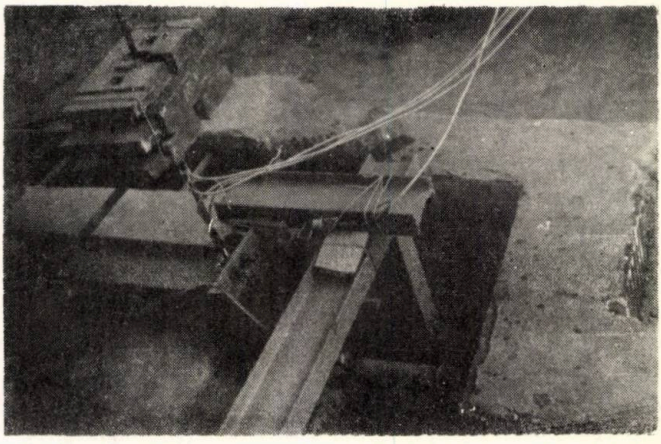


Fig. 9

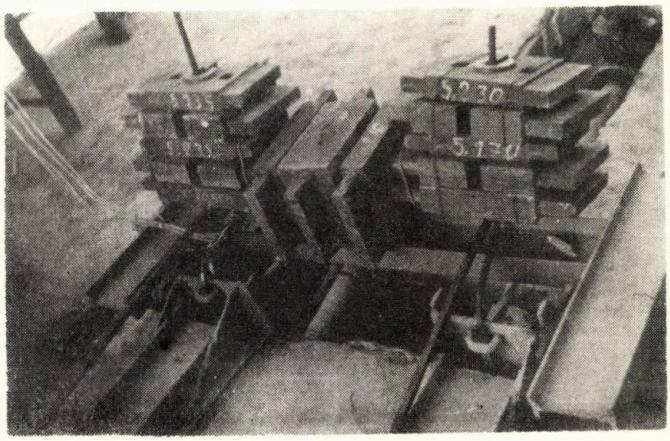


Fig. 10

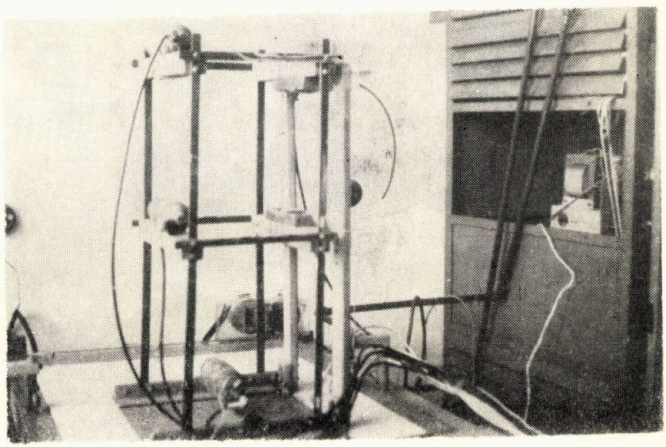


Fig. 11

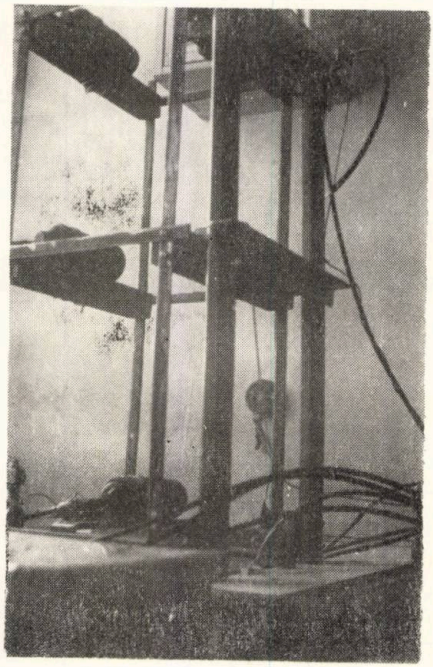


Fig. 12

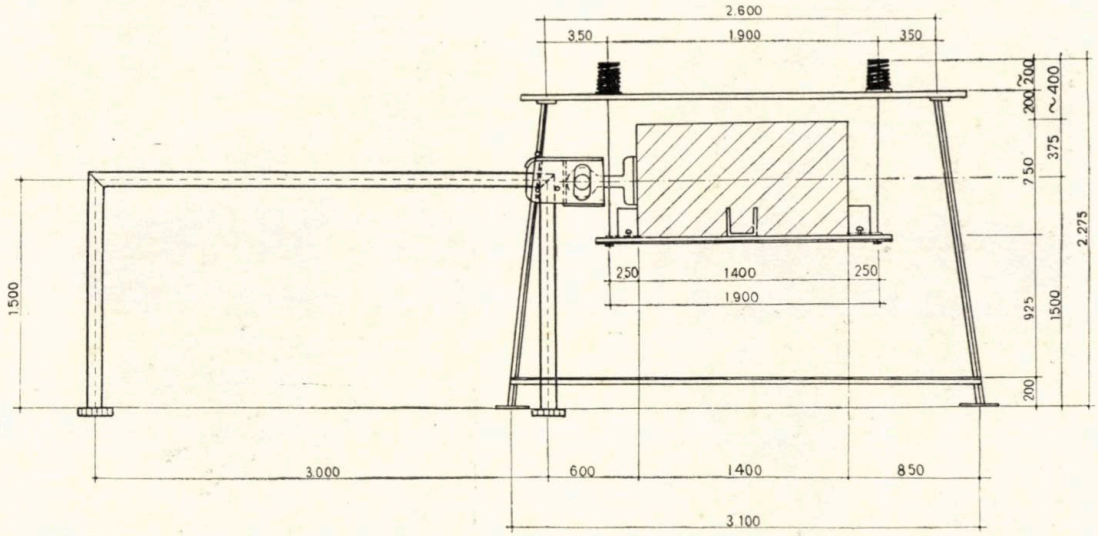


Fig. 13. — The vibration actuator.

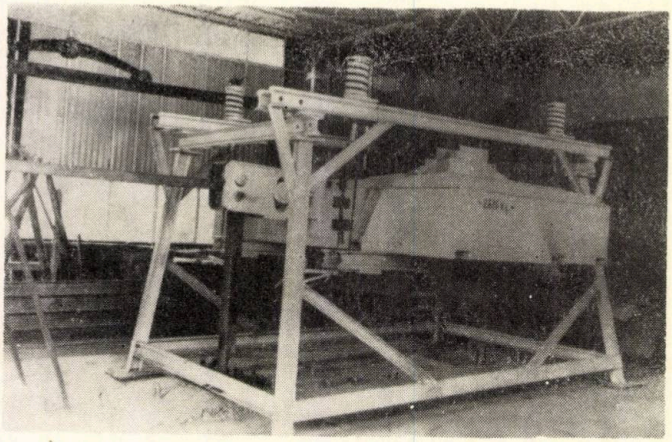


Fig. 14

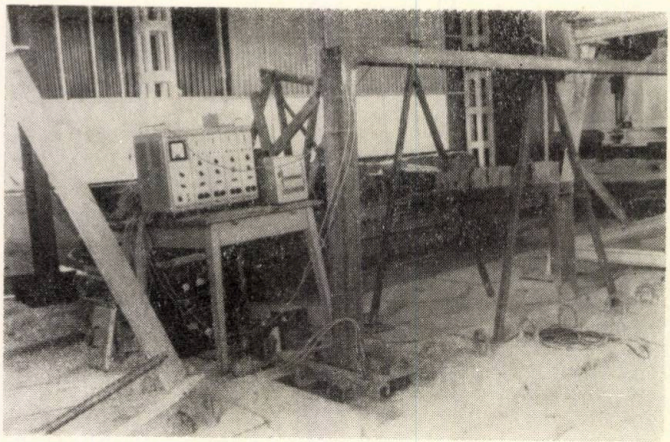


Fig. 15

At frame models with members having 8×8 mm cross section we continued the investigation up to failure and gradually we followed the change of dynamic properties in connection with the forming of plastic hinge device.

The strain varying natural frequency is represented in this case in Fig. 5. On the X-axis are the values Δ of the strain measurements

$$\Delta = 2{,}5\,{}^{0}/_{00}\,\varepsilon, \tag{7}$$

where ε is the ratio of $\Delta l/l$.

Observing Fig. 5 we can see that by a sample the natural frequency of 4 cps decreases after the development all of plastic hinges to a value of 2 cps; another frame model with a 3 cps natural frequency decreased to 1,6 cps in the neighbourhood of collapse. That means a 50% reduction related to the recorded value in elastic range. The other limits recorded during the testing are presented in table 2.

Of course the collapse took place at a limit load corresponding to the static equivalent force

$$P_{\text{lim}} = \frac{4M_p}{h}, \tag{8}$$

valid for the one-bay portal frame.

The ratio between natural frequency in elastic and in elasto-plastic according to (6) gives a remarkable difference in comparison with experimental results (table 2).

Table 2

Measurements of natural frequencies

No. of model	Natural frequency (cps)		
	Elastic stage	Elasto-plastic stage	$f_2 = f_1/\sqrt{\alpha}$
1	4	3 ... 2	0,33
2	3	2,2 ... 1,6	0,25
3	3,6	2,8 ... 2	0,30

Some results obtained by means of the TNIISK research-workers using shaking tables have already been presented in Table 1. Four 1/4 scale pannel building models were succesively tested until failure occured. In the last column one gives the values of the ratio between periods recorded by japanese investigators by means of powerful actuators [10]. Our investigations (Table 2) are presented with reference only by steel models.

After the forming of plastic hinges when the energy dissipation increased, damping raised more. For instance, as shown in Fig. 6, damping increased from 3,5% to 10,7%. A mean value in several tests of the critical to 10,7% the damping ratio was 2,5.

The strain varying kinetic energy and the strain-varying damping of the critical is shown in Fig. 6. When damping increased from 3,5 variation of the kinetic energy was

$$\Delta E_c = \frac{39-22,8}{39} = 42\%.$$

The strain varying resonant velocity for the same frame model is shown in Fig. 7. It is also traced the decrease of the acceleration at resonant frequencies. In this case the value of the acceleration decreases from 780 cm/sec^2 to 300 cm/sec^2.

Besides steel frame models mentioned above (Fig. 8 ... 10), steel frames were investigated on the little size shaking table (Fig. 11 and 12). Because this little size table perform both periodical and earthquake like motions by means of the servocontroller, many interesting studies have been made related to the filter action of the structure at random input, about yielding response and about the variation of the natural period of multistory little size frame models (up to 60 kg weight).

4. Investigations of One-bay Steel Frames Using a Vibrational Generator

Dynamic properties in different elastic and elasto-plastic stages were also investigated using a powerful forced generator, whose own weight comprises 2 800 kg (Fig. 13 and Fig. 14).

The one-bay steel frames were achieved from I 12 shapes; the span was 3,00 m and the height 1,50 m. Thecol umns were fixed in special foundations (Fig. 15). The joints were assembled by welding.

In order to get an adequate horizontal force able to attain yielding in the frame members, we used a forced vibrating actuator with eccentrical mass, having the following performances: a frequency from 1,5 to 20 cps; a vibration force from 0,2 to 20 ton; a maximal weight of 2,80 ton (that means at the highest value of the eccentrical mass location).

The actuator is provided with two horizontal drums, in which are put the additional eccentric charges (masses). This device is suspended by means of helycoidal springs and tension rods to a rigid framework. The coupling between the frame joint and the generator was realised by means of a special device which allows the free rotation of the frame joint and the desired release of it, in order to permit free damped vibrations of the structure to be tested (Fig. 14).

The above described equipment enabled dynamic actions in elastic, with partial plastification of the fixed end sections, with total plastification of these sections (the forming of plastic hinges) and with partial plastification of the top end sections.

The recordings were made by means of a POB oscilloscript and a 4D3 electric strain bridge (Fig. 15). The obtained results do not allow a more general conclusion about the step by step variation of dynamic properties at this type of frame (natural scale) ; they must be completed by further investigation. However we stated that in elasto-plastic range, the natural frequency decreased to 16 ... 20% while damping of the critical increased (2,4 ... 2,6) times in the stage of plastification of fixed end sections.

5. Conclusions

The experimental investigations carried out, on little and medium size steel frame models by means of shaking tables and of a forced vibration generator lead to some interesting conclusions about the variation of dynamic properties.

The mathematical approach may differ in comparison with the experimental investigations due to the nonlinear behaviour of structures and other parameters involved when elastic limits are exceeded. Even in the case of these investigations, the variation of experimental data may differ according to the model scale factor.

Thus, in the case of little size models, the natural frequency descreased in elasto-plastic by 20 ... 25% ; in the neighbourhood of collapse (the influence of instability was of course significant), the decrease was even 50%. The damping increased by 25 ... 38% at the beginning of plastification. In the stage of clloapse, some measurements revealed a three times increase of the damping.

Referring to middle size steel models (frames with I 12 members) the variation of these values was smaller : admitting a partially plastified zone, the frequency decreased by 16 ... 20%, and damping of the critical increased 2,4 ... 2,6 times.

We think that experimental reasearch about the variation of dynamic response must be continued. The scale factor has a capital influence as it was stated. In the case of the structural design in elasto-plastic range when permanent set is permitted, a more accurate estimation of the dynamic parameters would enable a more reasonable design.

Received the 23 X 1969

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Statics and Strength of Materials
and
Building Research Institute,
Branch of Jassy

REFERENCES

1. Biggs M. J., *Introduction to Structural Dynamics.* Mc. Graw-Hill Book Comp., 1964.
2. Timoshenko S., *Vibration Problems in Engineering.* D. Van Nostrand Comp., Inc., New York, 1955.
3. Newmark N. M., *A Method of Computation for Structural Dynamics.* Trans. ASCE, 1962, **127**, pp. 1406—1435.
4. Jacobsen L. S., *Steady Forced Vibrations as Influenced by Damping.* Trans. ASME, 1930, **51**, p. 227.
5. Hudson E. D., *Equivalent Viscous Friction for Hysteretic Systems with Earthquake-like Excitations,* Proc. of the III-d W.C.E.E, Auckland, 1964.
6. Housner G. W., *Spectrum Intensities of Strong-Motion a Earthquake.* Symposium of Effects of Earthquakes and Blasts on Structures, Los Angeles, 1954, pp. 20—36.
7. Kryloff N., Bogoliuboff N., *Introduction to Nonlinear Mechanics.* Princeton University Press, Princeton, 1943.
8. Newmark N. M., *Computation of Dynamic Structural Response in the Range Approaching Failure.* Proc. Symp. on Earthquake and Blast Effects, Earthquake Eng. Res. Inst., Los Angeles, 1952.
9. Iwan W. D., *The Dynamic Response of Bilinear Hysteretic Systems,* Proc. of the Third W.C.E.E., Auckland, 1964.
10. Хисада, Т., Накалава К., *Вибрационные испытания различных типов специальных конструкции вплоть до разрушения.* Proc. of the World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, Colifornia, june 1956 (translated from English).
11. Айзенберг. М. Я., *Сеисмические и сеисмовзрывные воздействия на сооружения с изменяющимся в результате повреждении динамическими характеристиками.* „Сеисмостойкость здании и интженерных сооружении", Москва, 1967.

UNELE CERCETĂRI PRIVIND CARACTERISTICILE DINAMICE ALE MODELELOR DE CADRE METALICE

(Rezumat)

Se prezintă rezultate ale cercetărilor cu caracter experimental — efectuate pe modele de cadre metalice la diferite scări — privind variația caracteristicilor dinamice în domeniul elastic și peste limita de elasticitate a materialului.

S-au înregistrat o serie de valori, conservative pentru tipul de structură care s-a supus acționării dinamice, valori care ar putea permite o creștere a preciziei de calcul a parametrilor dinamici cînd se ține seama de comportarea neliniară a structurii. Experimentările s-au efectuat utilizînd platforme vibrante de diferite capacități și un generator de vibrații forțate de mare putere.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția V
CONSTRUCȚII, HIDROTEHNICĂ

C. D. 666.974

RECHERCHES SUR LA PELLICULE ADHÉRENTE DE LAIT DE CIMENT AU GRANULITE

PAR

ANATOLIE MIHUL, R. GRIGORESCU, SERGIU COROBCEANU, M. VOICU et R. TANCIU

Communication présentée lors du Congrès international de bétons légers, Londre, le 27—29 mai 1969

1. Considérations générales

Les avantages économiques offerts par les bétons légers à agrégat de granulite ont conduit au dernier temps à la nécessité d'étendre le domaine de recherche concernant leur utilisation rationnelle dans des constructions comme des matériaux tant de résistance que de thermoisolation.

Les bétons macroporeux obtenus par la réalisation des espaces lacuneux entre les granules de l'agrégat, solidarisées par liant seulement dans les points de contact, sont indiqués surtout là où le besoin d'isolation thermique (poids spécifique apparente baisse sous 1000 kg/m³ et conductibilité thermique d'environ 0,40 ... 0,55 kcal/mh°C) devient prépondérent, sans être négligée en totalité la résistance.

À ces bétons la pâte de liant doit être dosée de sorte qu'elle serve seulement à l'enveloppement sous forme de pellicule de chaque granule d'agrégat, assurant en même temps la formation des noeuds de liaison aux points de contact entre les granules. Un excès de pâte-liant produit la diminution du volume des creux, l'accroissement du poids spécifique apparent, la réduction du degré d'isolation thermique ; en même temps le matériel obtenu dans de telles conditions résulte hétérogène, parce que le surplus de liant s'accumule à la base des blocs ou des parois.

L'obtention des bétons macroporeux à agrégat de granulite de bonne qualité et avec une consommation minime de pâte-liant est freinée par quelques difficultés qui apparaissent dues à l'ignorance en détail de l'influence de divers facteurs qui interviennent à la préparation. Les procédés utilisés jusqu'à présent sont empiriques, ils nécessitent beaucoup de tâtonnements et d'essais, sans assurer en général la modalité de déterminer la consommation minime nécessaire de ciment.

Pour éliminer ces inconvenients, au laboratoire de béton armé de l'Institut polytechnique de Jassy on a entrepris une série de recherches envisageant l'établissement de l'épaisseur de la pellicule de lait de ciment adhérente à la granule de granulite en état humide, en état sec, à la température nor-

male et à la température élevée (80 ... 130 °C). Par les essais effectués on a envisagé d'établir le dosage optimum pour des bétons macroporeux de différentes catégories.

2. Recherches sur la pellicule de pâte-liant

Le critère selon lequel on a apprécié l'influence de différents facteurs sur les caractéristiques d'adhérence de la pellicule de lait de ciment au granulite, réalisée en diverses conditions, a été la détermination par pesage de la quantité de pâte-liant (pellicule) qui a été retenue à la surface des granules d'agrégat.

Aux essais de laboratoire effectués on a varié la nature de l'agrégat, la grandeur des granules, la consistance de la pâte de ciment, la température du chauffage, le degré d'humidité de la granule et la manière de les humecter (par aspersion ou par immersion).

Ces facteurs déterminent la tension superficielle qui est réalisée, d'une partie, à l'interface des deux phases — eau et particules de ciment — et, d'une autre partie, entre la dispersion de liant et les granules de granulite. C'est ce qui, en réalité, détermine l'épaisseur de la pellicule de pâte adhérente à l'agrégat.

La méthodologie utilisée suit les étapes suivantes : on prépare de la pate de ciment dans un agitateur mécanique ayant une vitesse des palettes de plus de 1300 rot/min ; ensuite, a l'aide d'une pincette, on introduit la granule de granulite dans la pâte de ciment, après l'avoir pesée, et on l'agite. Après un intervalle de 1 min la granule est extraite avec la pellicule adhérente.

Par pesage on détermine la quantité de pairte de ciment adsorbée ; par le calcul de l'eau excédentâ on peut déterminer la quantité de pâte de ciment retenue.

On a travaillé avec la pâte-liant seulement dans l'intervalle de 5 ... 15 minutes après la préparation pour éliminer l'influence de l'état de hydrolyse et de hydratation, qui aurait modifié l'épaisseur de la pellicule par rapport au temps écoulé dès la préparation de la pâte. Les déterminations ont été effectuées sur un nombre de 30 éprouvettes de même type de granules (agrégat de rivière et granulite) des sortes 3 ... 7 mm, 7 ... 15 mm et 15 ... 30 mm, en maintenant rigoureusement les mêmes conditions de travail. Pour les recherches on a utilisé le ciment Pz 400. On a varié la consistance de la pâte, en employant un facteur E/C de 0,40 ; 0,50 ; 0,60 ; 0,70 et 0,80.

Les résultats concernant l'influence de l'agrégat (nature et grandeur des granules) sur la quantité de lait de ciment adsorbée à la surface des granules sont présentés dans les tableaux 1 et 2.

En analysant les conditions d'adhérence de la pâte-liant en fonction de la nature de l'agrégat utilisé, on constate que les granules de granulite ayant des surfaces raides ont une influence favorable sur l'adhérence du

Tableau 1

Influence de la nature de l'agrégat

Facteur E/C	Agrégats, sorte 7 ... 15 mm			Agrégats, sorte 15 ... 30 mm		
	de rivière	granulite		de rivière	granulite	
		sec	immersé		sec	immersé
0,50	36,4	72,8	43,5	25,8	44,9	26,5
0,55	21,6	53,6	36,7	15,0	31,5	21,6
0,60	18,2	44,4	30,6	9,8	27,3	17,5
0,65	16,0	35,9	22,8	8,2	22,0	14,1
0,70	15,4	29,0	19,5	6,8	16,7	10,4

Tableau 2

Influence des dimensions des granules d'agrégat

Granulite de sorte	État de la granule	Facteur E/C			
		0,40	0,50	0,60	0,70
3 ... 7 mm	sec	216,0	167,3	119,4	97,6
	aspersé	183,5	122,7	98,1	61,2
	immersé	124,2	89,8	64,1	40,7
7 ... 15 mm	sec	96,3	72,8	44,4	29,0
	aspersé	75,3	62,7	40,5	24,4
	immersé	59,7	45,5	33,6	19,5
15 ... 30 mm	sec	78,7	44,9	27,3	16,7
	aspersé	63,0	35,3	23,6	14,2
	immersé	56,0	26,5	17,5	10,4

liant, en constituant un bon appui pour la réalisation d'une pellicule à épaisseur suffisamment uniforme quand le facteur E/C est grand.

Si le granulite est immersé, la quantité de pâte-liant retenue par les granules baisse, se rapprochant plus de cellle qui correspond à l'agrégat de rivière.

Le tableau 2 met en évidence l'accroissement à proportion inverse de la quantité de pâte-liant qui adhère par rapport à la valeur du facteur E/C et aux dimensions des granules. Ce phénomène est plus évident pour les granules du sorte 3 ... 7 mm et 7 ... 15 mm.

Pour l'illustrer, on a représenté sur la fig. 1 la variation de la quantité de pâte-liant retenue par l'agrégat, en fonction des dimensions des granules.

Dans le cadre des recherches expérimentales on a accordé une importance particulière à l'analyse de l'action de la chaleur accumulée par le granulite sur la manière d'adhérer de la pellicule aux granules, et aussi au processus de durcissement de la pierre de ciment sous l'effet du chauffage accumulé.

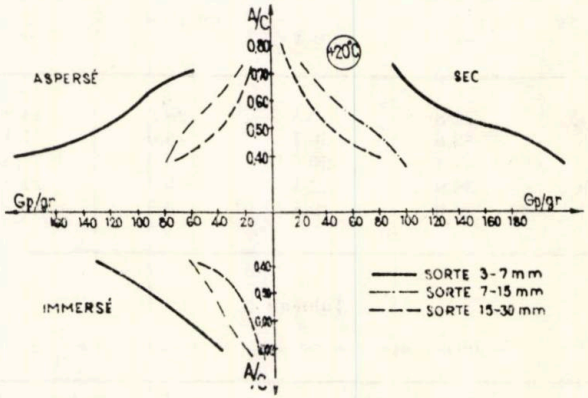


Fig. 1 — Variation de la quantité de pâte-liant en fonction des dimensions des granules, du facteur E/C et de l'état d'humidité de l'agrégat.

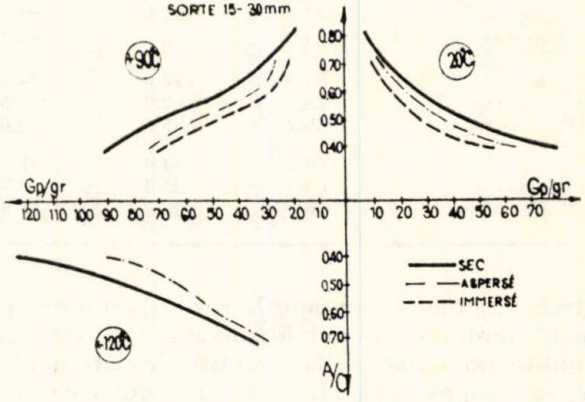


Fig. 2 — Variation de la quantité de liant en fonction de la température.

Dans ce but, nous avons utilisé, dans les expériences, du granulite réchauffé aux températures de 20, 90 et 120 °C, en modifiant en même temps l'état d'humidité des granules. Les résultats obtenus pour le sorte 7 ... 15 mm ont été inscrits dans le tableau 3, et pour le sorte 15 ... 30 mm, dans la fig. 2.

Tableau 3

Influence de la température du granulite sur le sorte 7 ... 15 mm

Température	État de la granule	Caractéristiques	Facteur E/C			
			0,40	0,50	0,60	0,70
+20 °C	sec	poids pellicule / poids agrégate	96,3	72,8	44,4	29,0
		poids pierre ciment / poids agrégat	74,5	52,9	29,9	18,3
		épaisseur pellicule(mm)	0,927	0,700	0,427	0,279
	aspersé	poids pellicule / poids agrégat	75,3	62,7	40,5	24,4
		poids pierre ciment / poids agrégat	58,1	45,2	27,4	15,5
		épaisseur pellicule(mm)	0,725	0,603	0,390	0,235
	immersé	poids pellicule / poids agrégat	59,7	43,5	33,6	19,5
		poids pierre ciment / poids agrégat	46,2	31,4	22,7	12,5
		épaisseur pellicule(mm)	0,574	0,418	0,323	0,187
+90 °C	sec	poids pellicule / poids agrégat	107,2	92,5	66,3	47,9
		poids pierre ciment / poids agrégat	82,5	66,8	44,7	30,5
		épaisseur pellicule(mm)	1,030	0,890	0,637	0,461
	aspersé	poids pellicule / poids agrégat	89,6	75,1	58,2	30,0
		poids pierre ciment / poids agrégat	69,2	54,0	39,2	19,0
		épaisseur pellicule(mm)	0,863	0,722	0,560	0,289
	immersé	poids pellicule / poids agrégat	73,4	61,9	42,8	25,3
		poids pierre ciment / poids agrégat	60,2	44,5	28,9	16,0
		épaisseur pellicule(mm)	0,705	0,596	0,412	0,243
+120 °C	sec	poids pellicule / poids agrégat	130,0	104,7	73,7	45,6
		poids pierre ciment / poids agrégat	107,2	75,6	49,8	29,1
		épaisseur pellicule(mm)	1,345	1,005	0,709	0,438
	aspersé à eau de 90 °C	poids pellicule / poids agrégat	112,8	86,4	60,3	39,2
		poids pierre ciment / poids agrégat	86,7	62,2	40,8	24,9

De l'analyse de l'ensemble des valeurs obtenues on a constaté qu'aux granules sèches la température élevée augmente bien l'épaisseur de la pellicule de liant, mais d'une manière non-uniforme. Ce désavantage peut être réduit en grande partie si les granules chauffées sont immersées ou seulement aspersées avec de l'eau à 90 °C environ.

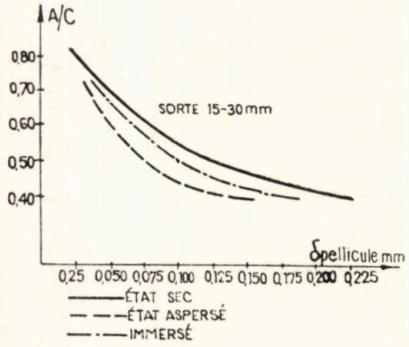


Fig. 3 — L'épaisseur de la pellicule en fonction de l'humidité.

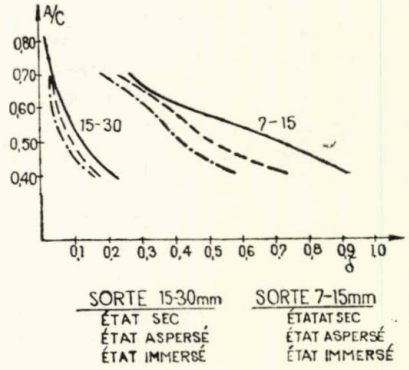


Fig. 4 — L'épaisseur de la pellicule en fonction de la dimension de l'agrégat et du degré d'humidité.

Tabelul 4

Épaisseur de la pellicule adhérente à la granule

Température	État de la granule	Sorte 7 ... 15 mm				Sorte 15 ... 30 mm			
		0,40	0,50	0,60	0,70	0,40	0,50	0,60	0,70
+ 20 °C	sec	0,927	0,700	0,427	0,279	0,244	0,127	0,078	0,047
	aspersé	0,725	0,603	0,390	0,235	0,179	0,100	0,067	0,041
	immersé	0,574	0,418	0,323	0,187	0,159	0,075	0,050	0,030
+ 90 °C	sec	1,130	0,890	0,637	0,461	0,253	0,199	0,140	0,087
	aspersé	0,863	0,722	0,560	0,289	0,205	0,155	0,090	0,079
	immersé	0,705	0,595	0,412	0,243	0,188	0,129	0,079	0,061
+120 °C	sec	1,345	1,005	0,709	0,438	0,353	0,231	0,162	0,103
	aspersé avec de l'eau à 90 °C	1,082	0,833	0,579	0,377	0,249	0,173	0,140	0,088

Avec les résultats obtenus des recherches expérimentées on a pu déterminer l'épaisseur de la pellicule de ciment adhérente aux granules de granulite et on a dressé les graphiques présentés dans les fig. 3 et 4, ; dans l'abscisse on a inscrit les concentrations de la dispersion du liant (facteur E/C), et dans l'ordonée l'épaisseur de la pellicule, en mm.

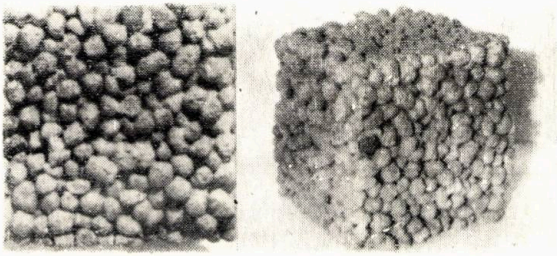


Fig. 5. — La structure du béton macroporeux avec du dosage optime de liant.

Pour les sortes 7...15 mm et 15...30 mm qui sont le plus souvent employées dans les chantiers on a présenté dans le tableau 4 (pour les facteurs E/C expérimentés et pour les températures de 20, 90 et 120°C), les valeurs moyennes en mm de la grosseur de la pellicule retenue.

Les résultats obtenus par voie expérimentale, de cette manière, sont vérifiés ensuite en exécutant une quantité plus grande de béton macroporeux, préparé avec le dosage établi par le calcul basé sur les données obtenues aux chargements effectués sur les granules individuelles ; la quantité de lait de ciment est considérée corectement déterminée s'il n'en résulte point d'excès, toutes les granules étant uniformément enrobées (fig. 5).

3. Conclusions

De l'analyse des résultats des recherches effectuées on a tiré quelques conclusions, desquelles nous retenons :

1. Pour confectionner un béton macroporeux composé de granules de granulite, il existe des possibilités de déterminer avec assez d'assurance, pour un certain facteur E/C, sans tâtonner, le dosage optimum de ciment.

2. Les recherches expérimentales effectuées ont prouvé que pour un certain dosage de ciment il correspond un seul facteur E/C, qui peut être déterminé par la méthode proposée.

3. La quantité de pâte-liant retenue dépend des caractéristiques de l'agrégat, du liant, du mélange eau-liant, de la manière d'humecter les granules et de la température à laquelle sont réchauffées les granules.

Ainsi : plus le facteur E/C est petit, plus la quantité de pâte adhérente aux granules d'agrégat augmente ; la quantité de pâte de liant adhérente aux granules augmente avec la diminution du diamètre des granules, le phénomène étant plus évident pour les sortes plus réduites que 15 mm ; les granules immersées en eau jusqu'à leur saturation adsorbent une quantité plus réduite de lait de ciment, quantité qui peut être réduite à la moitié par rapport à celle correspondant aux granules sèches ; les granules aspersées d'eau absorbent toujours une quantité supérieure par rapport à celles immersées ; la témperature élevée des granules en état sec augmente en grande mesure l'épaisseur de la pellicule adhérente, solution qui n'est pas indiquée en pratique ; la température élevée des granules en état humide (à l'extérieur jusqu'à 90°C) n'augmente point l'épaisseur de la pellicule.

4. Le procédé de chauffer les granules jusqu'à une température d'environ 120°C, leur aspergement à eau chaud d'environ 90°C et leur mélange avec une pâte de ciment à température normale, préparée avec un certain facteur E/C bien déterminé, assure l'optention des résultats particulièrement bons en ce qui concerne la réalisation d'une pellicule homogène de pierre de ciment et un durcissement rapide du béton (où l'on utilise la chaleur accumulée sans un traitement thermique ultérieur).

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Béton Armé

CERCETĂRI ASUPRA PELICULEI ADERENTE DE LAPTE DE CIMENT LA GRANULELE DE GRANULIT

(Rezumat)

Se prezintă rezultatele cercetărilor efectuate asupra variației grosimii peliculei de lapte de ciment adsorbite de granulele de cheramzit în stare umedă, în stare uscată, la temperaturi obișnuite și la temperaturi ridicate (80 ... 130 °C).

Procedeul utilizat permite stabilirea dozajelor optime de ciment pentru betoanele macroporice cu agregat ușor. Totodată, pot fi studiate o serie de caracteristici tehnologice, mecanice și fizice, prin intermediul grosimii peliculei de ciment, care este determinată de starea de umiditate a agregatului și de temperatura acestuia.

Metoda de determinare constă în înmuierea granulelor de granulit în pasta de ciment preparată cu diferiți factori A/C; granulele sînt introduse în pasta de ciment uscate, după stropire sau după imersare în apă, fiind încălzite la temperaturi între 20 °C și 120 °C.

Cantitatea de pastă liant reținută depinde de caracteristicile agregatului, ale liantului, ale amestecului apă-liant, ale modului de umezire a granulelor și de temperatura la care sînt încălzite granulele.

Astfel: a) cu cît factorul A/C este mai mic cu atît cantitatea de pastă aderentă la granulele de agregat crește; b) cantitatea de pastă liant aderentă la granule crește în măsura în care scade diametrul granulelor, fenomenul fiind mai evident pentru sorturile mai mici de 15 mm; c) granulele imersate în apă pînă la saturație adsorb o cantitate mai redusă de lapte-ciment, cantitate ce se poate înjumătăți în raport cu cea corespunzătoare granulelor uscate; d) granulele stropite cu apă absorb întotdeauna o cantitate superioară în raport cu cele imersate; e) temperatura ridicată a granulelor în stare uscată sporește în mare măsură grosimea peliculei aderente, soluție neindicată pentru practică; f) temperatura ridicată a granulelor în stare umedă (la exterior pînă la circa 90 °C) nu sporește grosimea peliculei.

Procedeul de încălzire a granulelor pînă la o temperatură de cca 120 °C, stropirea lor cu apă fierbinte de cca 90 °C și amestecarea lor cu o pastă de ciment la temperatură normală, preparată cu un anumit factor A/C bine determinat, asigură obținerea unor rezultate deosebit de bune privind realizarea unei pelicule omogene de pastă de ciment și întărirea rapidă a betonului (la care se utilizează căldura acumulată fără o tratare termică ulterioară).

Explicația figurilor

Fig. 1 — Variația cantității de pastă liant în funcție de dimensiunile granulelor, de factorul E/C și de starea de umiditate a agregatului.

Fig. 2 — Variația cantității de liant în funcție de temperatură.

Fig. 3 — Grosimea peliculei în funcție de umiditate.

Fig. 4 — Grosimea peliculei în funcție de dimensiunea agregatului și de gradul de umiditate.

Fig. 5 — Structura betonului macroporos cu dozaj optim de liant.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția V
CONSTRUCȚII. HIDROTEHNICĂ

CD 624.043 : 693.56

VARIAȚIA CARACTERISTICILOR DINAMICE ÎN ELEMENTE METALICE ȘI DE BETON PRECOMPRIMAT FUNCȚIE DE EFORTURILE DE PRECOMPRIMARE

DE

C. IONESCU

Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, din 28—30 septembrie 1967

1. Determinarea variației stării de eforturi în timp la elemente și structuri din metal și beton precomprimat este o problemă deosebit de importantă atît sub aspect teoretic cît și practic. În studiul de față s-a cercetat această problemă prin prisma variației caracteristicilor dinamice ale elementelor la oscilațiile libere transversale.

Într-o primă etapă s-au efectuat experimentări pe grinzi simplu rezemate din oțel, țevi cu secțiune pătratică și circulară — pentru o interpretare mai comodă a rezultatelor — precum și din beton precomprimat.

Elementele au fost precomprimate cu corzi Ø 5 SBP utilizînd sisteme de precomprimare de tip special; corespunzător fiecărei creșteri în trepte a efortului de precomprimare s-a urmărit variația frecvenței oscilațiilor libere transversale ale grinzii și a procentului din amortizarea critică.

Pentru efectuarea măsurătorilor s-a utilizat un palpator de vibrații electromagnetic, montat la mijlocul deschiderii grinzii, conectat la un osciloscop catodic și un generator de frecvență pentru citirea directă a frecvențelor (Hz).

Reprezentînd grafic datele experimentale (fig. 1) se pune în evidență dependența aproximativ liniară dintre efortul pe secțiune a elementului precomprimat și frecvența oscilațiilor corespunzătoare (efortul crește de la 0 la 720 kg/cm² iar frecvența scade de la 39,3 la 25,5 Hz). Se remarcă corespondența între scăderea frecvenței și creșterea forței de precomprimare.

În graficul din fig. 2 este reprezentat procentul din amortizarea critică funcție de efortul de precomprimare; se observă scăderea procentului din amortizarea critică o dată cu creșterea forței de precomprimare (efortul

de precomprimare crește de la 0 la 720 kg/cm² iar procentul din amortizarea critică scade de la 2,24% la 1,07%).

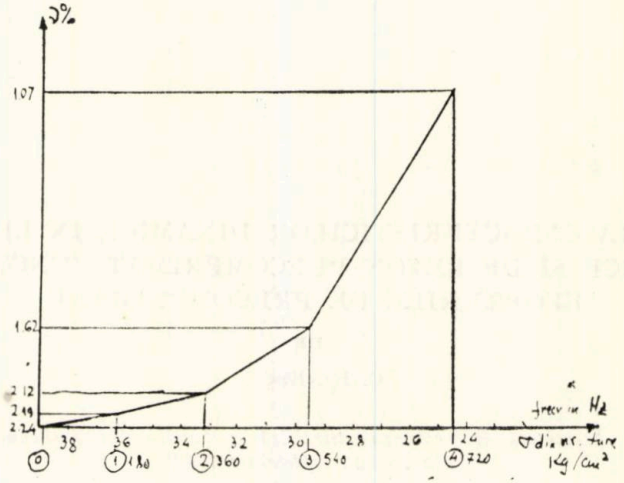


Fig. 1

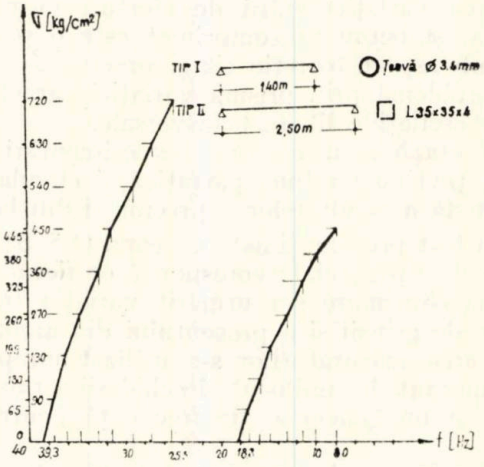


Fig. 2

Din studiul comparativ al oscilațiilor grinzii neprecomprimate (fig. 3) și precomprimate la efortul maxim (fig. 4) se observă scăderea frecvenței oscilațiilor și micșorarea procentului din amortizarea critică funcție de creșterea forței de precomprimare (marca de timp 2×10^{-2} sec este imprimată pe peliculă).

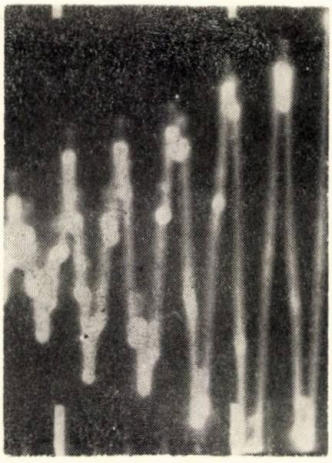


Fig. 3

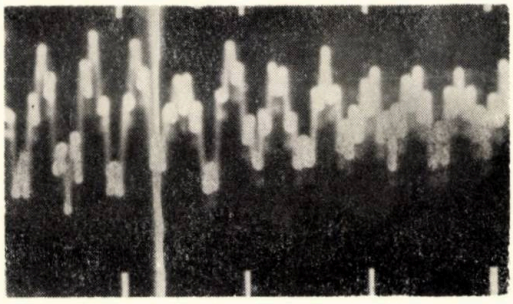


Fig. 4

2. Interpretarea teoretică a acestor rezultate experimentale s-a făcut avînd în vedere că frecvența oscilațiilor proprii în cazul oscilațiilor libere transversale ale barelor comprimate se exprimă prin:

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\sqrt{1-\frac{\alpha^2 l^2}{\pi^2}}, \tag{1}$$

în care

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI}, \qquad \frac{\alpha^2 l^2}{\pi^2} = \frac{N}{N_{cr}}, \qquad N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

de unde

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{2}$$

Prin creșterea forței de precomprimare frecvența oscilațiilor se micșorează și este dată de expresia

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{\alpha^2 l^2}{\pi^2}} = \omega_0\sqrt{1-\frac{N}{N_{cr}}}.$$

Înlocuind valoarea N_{cr} în relația de mai sus se obține

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{Nl^2}{\pi^2 EI}}, \tag{3}$$

sau, sub altă formă:

$$N = \frac{\pi^2 EI}{f_0^2}(f_0^2 - f_1^2). \tag{4}$$

Această relație de legătură între frecvența oscilațiilor inițiale f_0, frecvența oscilațiilor la un moment dat f_1 și forța care produce comprimarea barei a fost utilizată pentru verificarea datelor experimentale obținute în urma măsurătorilor efectuate pe grinzi metalice precomprimate de tip I (grindă simplu rezemată cu deschiderea de 1,40 m și secțiune circulară Ø 3,4 mm) și de tip II (grindă simplu rezemată cu deschiderea de 2,50 m și secțiune patratică compusă din două corniere sudate L 35 × × 35 × 4 mm).

Abaterile dintre datele teoretice și cele experimentale sînt cuprinse în domeniul 0 ... 2,5%. Rezultă că relația (4) poate fi utilizată pentru a determina forța de precomprimare la care este supusă o grindă simplu rezemată.

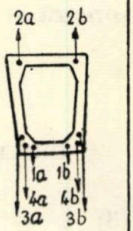
Experimentările efectuate au fost extinse la elemente de dimensiuni mari din beton precomprimat și anume la grinzi tubulare (fig. 5)[1]).

[1]) Grinzi utilizate la acoperișul halei blindate de la I.I.S. „Țesătura" din Iași.

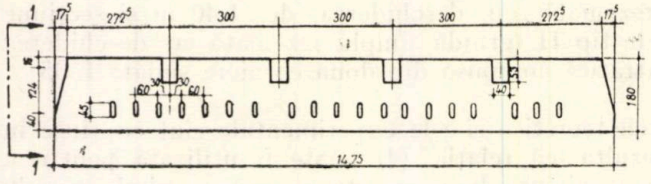
Măsurătorile întreprinse (în timpul precomprimării) pentru determinarea frecvenței oscilațiilor pe direcțiile orizontală și verticală, la un număr de 70 grinzi precomprimate succesiv pînă la efortul nominal din proiect, sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Etapa	Ordinea de precomprimare a cablurilor	Efort t	Frecvența (Hz) vertical G. F.	Frecvența (Hz) vertical F	Frecvența (Hz) orizontal G. F.	Frecvența (Hz) orizontal F	Amortizare ν (%) vertical	Amortizare ν (%) orizontal	Poziția cablurilor
1	0	0	13,5	13,8	6,0	5,9	12,2	4,85	
2	1 *a* și 1 *b*	116,0	12,6	12,2	5,8	5,8	12,5	4,25	
3	1 *a* – 1 *b* 2 *a* – 2 *b*	152,0	10,0	9,0	4.0	3,8	9,5	2,58	
4	1 *a* – 1 *b* 2 *a* – 2 *b* 3 *a* – 3 *b*	208,8	9,5	8,6	3,8	3,85	6,8	2,08	
5	1 *a* – 1 *b* 2 *a* – 2 *b* 3 *a* – 3 *b* 4 *a* – 4 *b*	318,8	8,8	8,35	3,6	3,92	5,9	1,55	
6	Injectare	318,8	9,9	10,1	4,1	4,2	—	—	



G. F. = generator frecvență; F = fotografie .



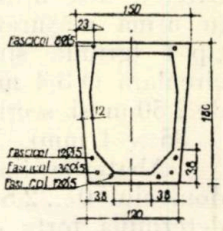


Fig. 5

Se observă că frecvența oscilațiilor grinzii scade o dată cu creșterea forței de precomprimare, iar după injectarea grinzii frecvența oscilațiilor crește.

Procentul din amortizarea critică scade la 50% din valoarea inițială, cu creșterea forței de precomprimare de la zero la valoarea efortului nominal din proiect, atît pe direcția orizontal-transversală cît și pe direcția vertical-transversală a grinzii tubulare.

3. În urma experimentărilor efectuate pe grinzi metalice și grinzi tubulare din beton precomprimat s-a constatat:

1. Variația caracteristicilor dinamice permite urmărirea în timp a stărilor de eforturi inițiale.

2. Frecvența oscilațiilor elementelor scade cu creșterea forței de precomprimare; urmărirea frecvențelor poate servi ca mijloc de control al precomprimărilor (dacă frecvența oscilațiilor elementului nu scade rezultă că precomprimarea nu se execută în condițiile din proiect, pierderile de efort în cabluri depășind limitele admisibile).

3. Variația procentului din amortizarea critică (determinat cu relația $\lambda = \delta/2\pi$) apare ca un mijloc de control la elementele din metal și beton precomprimat.

4. Se poate face un control calitativ prin măsurarea caracteristicilor dinamice la un număr de grinzi, determinînd o valoare medie a frecvențelor oscilațiilor și a variației procentului din amortizarea critică, funcție de care se controlează calitativ precomprimarea.

Aceste constatări nu sînt valabile pentru elementele din metal și beton precomprimat cu forța de precomprimare aplicată excentric pe secțiuni, pentru care trebuie stabilite prin determinări experimentale, relații corespunzătoare.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statică și
rezistența materialelor

THE VARIATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF METAL AND CONCRETE PRESTRESSED MEMBERS AS FUNCTION OF THE PRESTRESSING EFFORT

(Abstract)

One presents a method to determine the stress state variation in time, of metal and concrete prestressed members, using, as physical parameters, the dynamic characteristic changes (natural period of vibration, critical damping percentage).

One also shows the experimental results that confirm the existence of some relations between the prestressing effort and the dynamic characteristics variation.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția V
CONSTRUCȚII. HIDROTEHNICĂ

C. Z. 624.13; 625.04

CERCETĂRI ȘI OBSERVAȚII CU PRIVIRE LA COMPORTAREA PĂMÎNTURILOR LA ÎNCĂRCĂRI REPETATE

I. INFLUENȚA FRECVENȚEI ÎNCĂRCĂRILOR ASUPRA DEFORMAȚIILOR TOTALE, REVERSIBILE ȘI NEREVERSIBILE

DE

C. ANTON

1. Introducere

Comportarea elasto-vîscos-plastică a pămînturilor, influențează acumularea deformațiilor în cazul acțiunii unor încărcări repetate aplicate cu viteze și frecvențe variabile. Această afirmație, care apare în numeroase lucrări, ne-a determinat să întreprindem cercetări asupra pămînturilor frecvent folosite în platforma drumurilor, fiind cunoscut că acțiunea încărcărilor cu care este solicitat corpul drumului are un caracter repetat.

2. Partea experimentală

Încercările s-au efectuat pe un pămînt cu caracteristicile (fig. 1): $w_L = 39\%...42\%$, $w_p = 15{,}5\%$, $I_p = 23{,}5 \ldots 26{,}5$, $w_{opt} = 18{,}7\%$, $\gamma_d = 1{,}662$ gf/cm³.

Proba s-a pregătit într-o cuvă cu pereți de beton avînd lățimea de 2,90 m, lungimea 5,90 m și adîncimea 1,30 m. Fundul cuvei nu a fost betonat, pămîntul avînd caracteristici similare cu ale probei. Prin compactarea cu maiuri mecanice la o umiditate de 17,5% s-a obținut o greutate volumetrică uscată $\gamma_d = 1{,}622$ gf/cm³.

Încărcarea repetată la un număr mare de cicluri a fost efectuată cu o instalație construită în cadrul Institutului politehnic din Iași după un brevet de invenție a autorului. Încărcările s-au aplicat pe o placă rigidă cu diametrul de 50 cm și grosimea de 40 mm, folosind șapte trepte de încărcare pînă la presiunea maximă $p = 4{,}5$ kgf/cm².

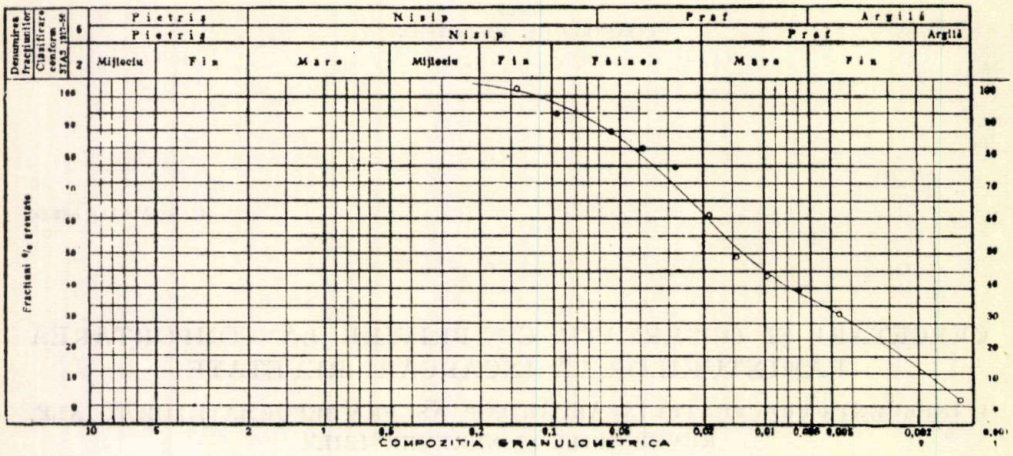


Fig. 1

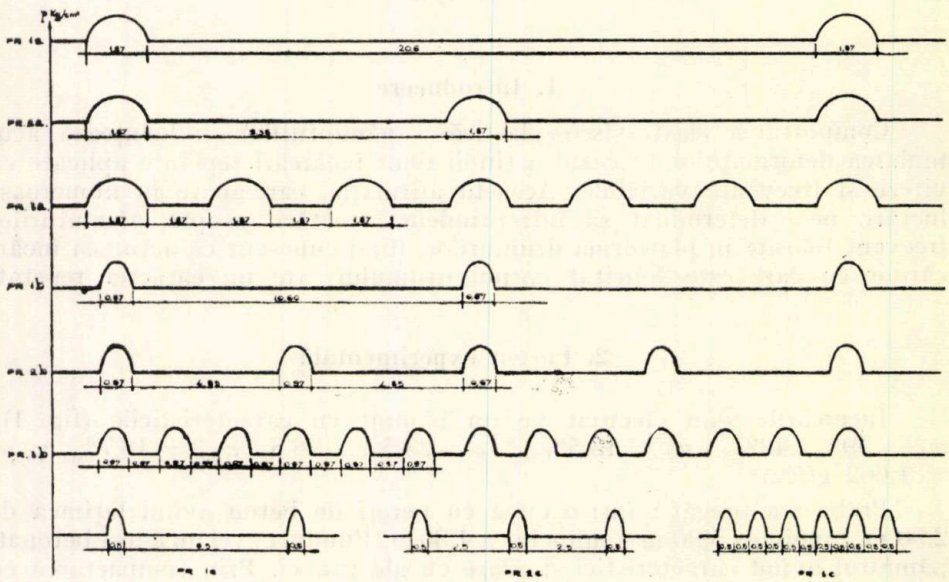
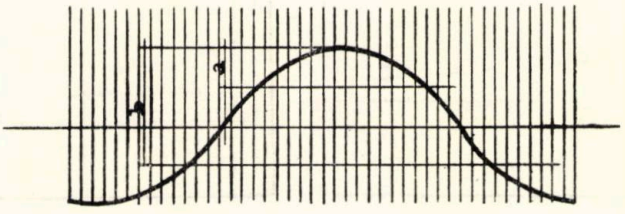


Fig. 2

La fiecare treaptă s-au aplicat inițial 500 cicluri de încărcare, pînă la o relativă stabilizare a deformațiilor, după care s-au aplicat cîte o sută de cicluri pentru fiecare din programele arătate (fig. 2). Curba ce reprezintă variația presiunii în cadrul unui ciclu de încărcare-descărcare este de forma $P = G \cos a$, fiind prezentată în (fig. 3).

Pentru efectuarea măsurătorilor au fost folosite tastografe de tipul Metalwerker-Meerane cu bandă inscriptoare și comparatoare 1 : 100 montate pe grinzi metalice izolate de cuva de încercare. Prin instalarea unor microîntrerupătoare și prin modificări ale tastografului, s-au înregistrat pe



a. DOMENIUL MINIM AL CURBEI INCARCARE-DESCARCARE
b. DOMENIUL MAXIM AL CURBEI INCARCARE-DESCARCARE

Fig. 3

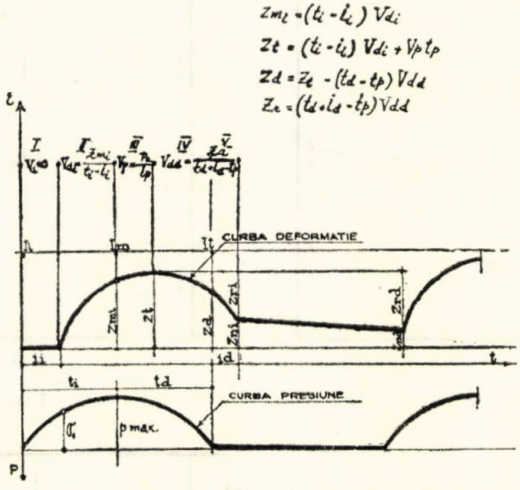


Fig. 4

benzi momentele care marchează începerea și terminarea încărcării. S-au putut obține în modul acesta prin prelucrarea benzilor datele prezentate în fig. 4, din care se folosesc aici numai cele referitoare la deformațiile totale, reversibile și nereversibile.

În cadrul aceleiași trepte de încărcare (T_c) s-au folosit trei trepte pentru viteza de încărcare (V_c) și trei valori ale frecvenței (P_r) marcate în diagrame prin raportul t_p/t_c.

Pe diagramele prezentate în fig. 5 ... 18 în abscisă sînt trecute frecvențele determinate ca raport între t_p/t_c, iar pe ordonată — deformațiile în sutimi de milimetru obținute la 100 de cicluri.

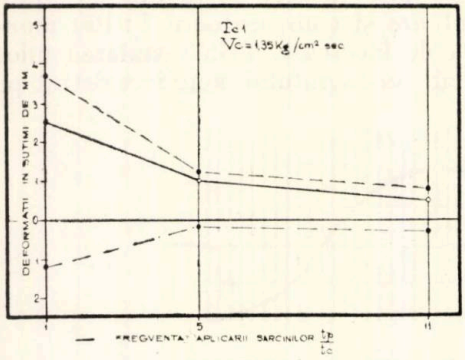


Fig. 5

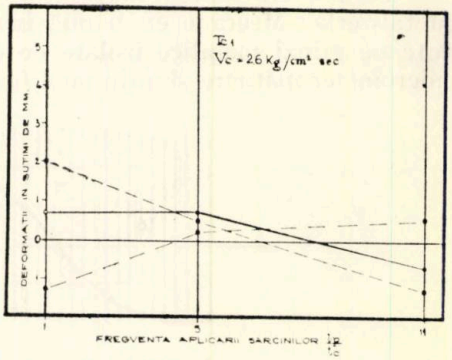


Fig. 6

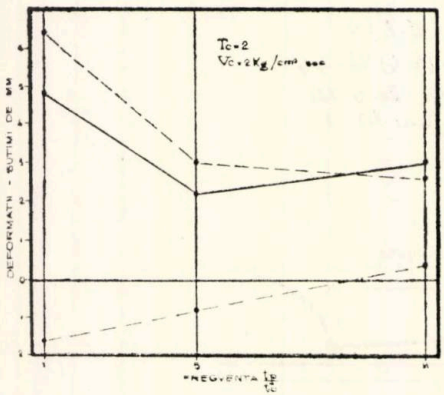


Fig. 7

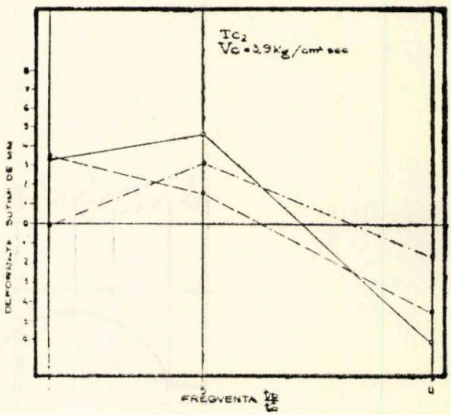


Fig. 8

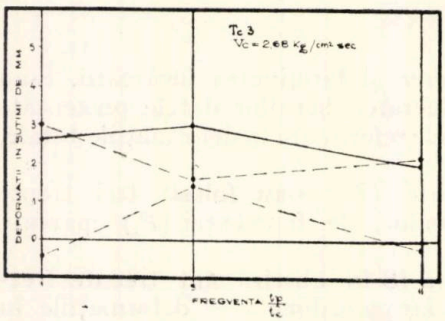


Fig. 9

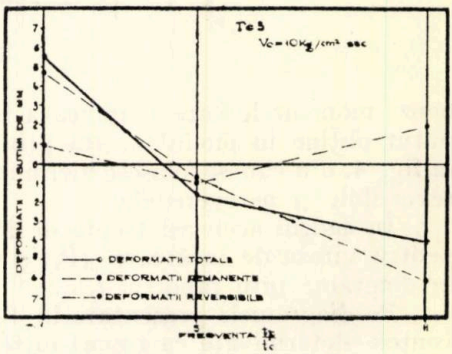


Fig. 10

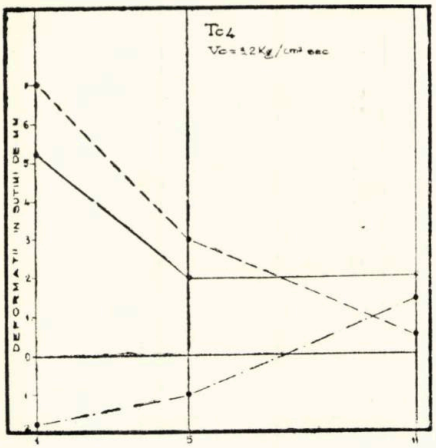


Fig. 11

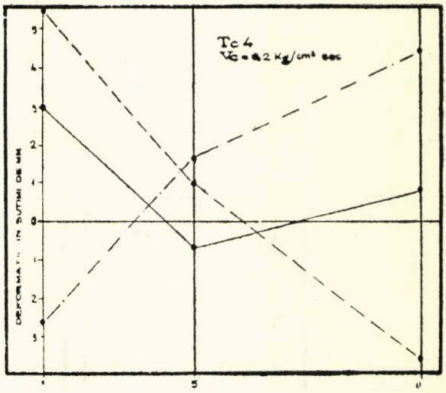


Fig. 12

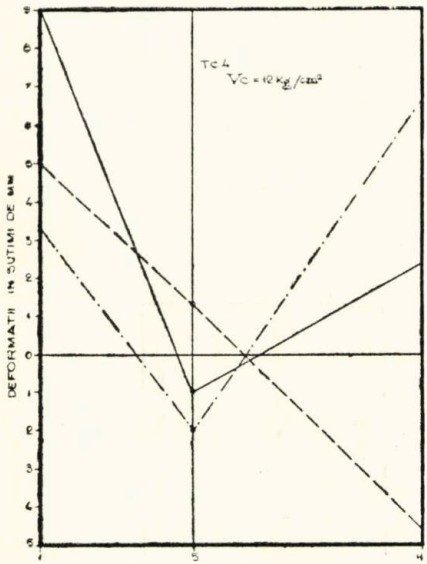


Fig. 13

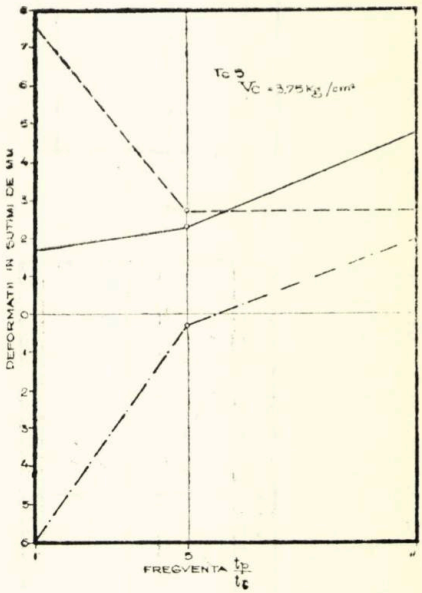


Fig. 14

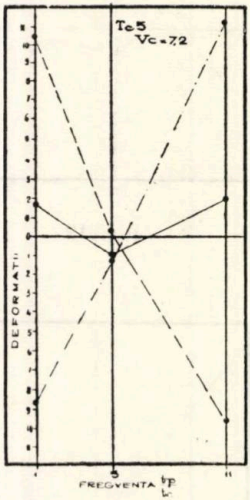


Fig. 15

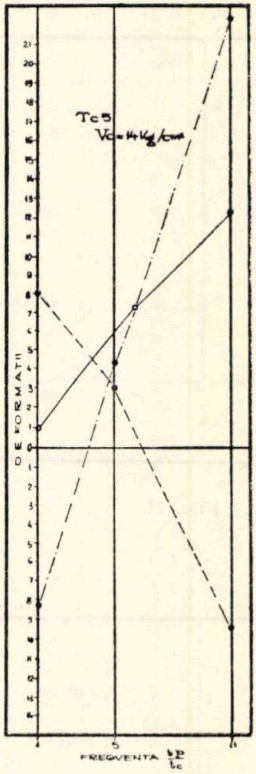


Fig. 16

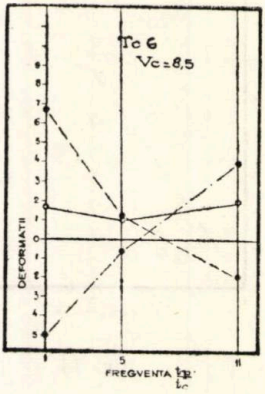


Fig. 17

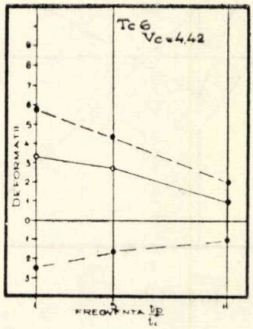


Fig. 18

În tabelul 1 s-au adoptat următoarele semne convenționale: + pentru creșterea valorii deformației de la o frecvență la alta, — pentru micșorarea valorii deformației de la o frecvență la alta, 0 pentru menținerea aceleași valori a deformației pentru două frecvențe consecutive.

Tabelul 1

Treapta de încărcare T_c	Viteza de aplicare a presiunii kgf/cm²sec	Variația relativă a deformațiilor cu frecvența					
		$P_r 1 - P_r 2$			$P_r 2 - P_r 3$		
		Z_t	Z_n	Z_r	Z_t	Z_n	Z_r
1 $p = 1{,}26$ kgf/cm²	1,35	+	+	+	+	+	—
	2,6	+	+	—	0	+	—
2 $p = 1{,}88$ kgf/cm²	2,0	—	+	—	+	+	—
	3,9	+	+	+	—	+	—
3 $p = 2{,}50$ kgf/cm²	2,68	+	—	+	—	+	—
	10,0	+	+	—	+	+	+
4 $p = 3{,}0$ kgf/cm²	3,2	0	+	—	+	+	—
	6,2	—	+	—	+	+	—
	12	—	+	+	+	+	+
5 $p = 3{,}50$ kgf/cm²	3,75	—	+	—	—	+	—
	7,2	—	+	—	+	+	—
	14	—	+	—	—	+	—
6 $p = 4{,}12$ kgf/cm²	4,42	+	+	—	+	+	—
	8,5	—	+	—	+	+	—

3. Observații și concluzii

1. Pentru tipul de pămînt folosit deformațiile nereversibile cresc o dată cu frecvența la toate treptele de încărcare.

Variația deformațiilor nereversibile (Z_n) cu frecvența încărcărilor nu este liniară. Pînă la viteze medii de aplicare a presiunii de 10 kgf/cm²sec deformațiile nereversibile cresc mai intens pe intervalul de frecvențe t_p/t_c cuprins între 1...5.

2. Deformațiile reversibile scad o dată cu sporirea frecvenței pentru toate treptele de încărcare.

Pentru încărcările la care viteza de aplicare a presiunilor este mai mare decît 10 kgf/cm²sec, deformațiile reversibile cresc o dată cu frecvența.

3. Deformațiile totale fiind o rezultantă a deformațiilor reversibile și nereversibile nu prezintă o lege de variație cu frecvența încărcărilor.

Se poate totuși observa că pentru treapta de frecvență cuprinsă între $t_p/t_c = 11$ și $t_p/t_c = 5$ deformațiile reversibile sînt cele care influențează

mai puternic valoarea deformațiilor totale. De asemenea se constată că pentru treapta de frecvență cuprinsă între $t_p/t_c = 5$ și $t_p/t_c = 1$, creșterea deformațiilor nereversibile este mai mare decît micșorarea deformațiilor reversibile, ceea ce are ca rezultat creșterea deformațiilor totale pentru treptele de încărcare $p = 2{,}5...4{,}12$ kgf/cm².

Aceste prime concluzii privitoare la influența frecvenței încărcărilor asupra deformațiilor totale, reversibile și nereversibile, sînt necesare pentru folosirea regimului optim de încărcare în cadrul încercărilor ce au ca scop determinarea modulilor de deformație și elasticitate la încărcări repetate.

La o viteză de 50 km/oră durata acțiunii încărcării pe suprafața îmbrăcăminții se evaluează la 0,02 ... 0,03 sec. Presiunile pe suprafața pămîntului sub sisteme rutiere sînt cuprinse între 0,2 ... 1 kgf/cm² iar durata acțiunii acestora ajunge la 0,1 ... 0,2 sec, datorită repartizării prin intermediul sistemului rutier. Rezultă o viteză de aplicare a presiunilor cuprinsă între 5 și 10 kgf/cm² sec.

Rezultatele obținute ne îndreptățesc să facem unele afirmații privitoare la condițiile în care ar trebui făcute încercările.

Determinarea modulilor de deformație la încărcări repetate trebuie efectuată cu frecvențe ridicate dar nu mai mari decît cele mai desavantajoase oferite de circulația în convoi. Este necesar să se fixeze frecvența maximă realizabilă în cazul unui convoi de vehicule grele, ca program de încărcare, pentru determinarea deformațiilor totale ce vor servi la calcularea modulului de deformație. După cum se poate observa din fig. 2 acest lucru este realizabil cu instalația construită de autor.

Avînd în vedere că deformațiile reversibile scad cu frecvența încărcărilor, pentru determinarea modulilor de elasticitate (la care se folosesc deformațiile reversibile) trebuie folosite programe de încărcare cu frecvențe reduse.

În cadrul încercărilor am determinat și influența vitezei de aplicare pentru fiecare treaptă de încărcare la toate frecvențele utilizate. Ca urmare a acestor rezultate, ce vor fi publicate ulterior, se vor contura mai precis condițiile în care trebuie determinate deformațiile la încărcări repetate, pentru a obține valorile cele mai potrivite pentru modulii de deformație și elasticitate.

Primit la 21 XII 1968

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de drumuri și poduri

RESEARCHES AND REMARKS REGARDING THE SOIL BEHAVIOUR UNDER REPEATED LOADINGS

I. On the influence of the loading frequency upon the total reversible and irreversible deformations

(Summary)

The paper presents the influence of the repeated loadings frequency — acted by means of some rigid plates — upon the soil deformation. The testing was carried out on a dusty clay by a facility realised at the Polytechnic Institute of Jassy.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția V
CONSTRUCȚII. HIDROTEHNICĂ

MORTARE COLORATE PE BAZĂ DE COLORANȚI ORGANICI

DE

C. BRANIȘTE, R. MATEI, I. BURLACU și D. CIOBANU

1. Introducere

Pentru colorarea mortarelor și betoanelor pe bază de ciment se utilizează în special pigmenți minerali; coloranții organici se folosesc într-o măsură mai restrînsă în acest scop.

Mortarele și betoanele colorate se utilizează în construcții pentru executarea blocurilor de zidărie, a țiglelor și a altor elemente și materiale de construcție care completează aspectul estetic al clădirilor, contribuind la finisarea lor arhitectonică.

Pigmenții folosiți la colorarea mortarelor și betoanelor trebuie să îndeplinească anumite condiții: să fie lipsiți de ghips, cretă, săruri, acizi, componenți de natura humusului sau cărbune. De asemenea ei trebuie să aibă o granulație fină, putere mare de colorare, să fie rezistenți la acțiunea luminii, a varului, să nu formeze eflorescențe, să nu influențeze defavorabil asupra prizei sau a constantei de volum a cimentului [1], [2].

Deci condițiile de calitate ale pigmenților pentru ciment sînt destul de severe.

Un alt neajuns care se ivește la obținerea mortarelor și betoanelor colorate este faptul că cenușiul cimentului influențează efectul de culoare, mai ales în cazul nuanțelor deschise. Atunci trebuie să se folosească la confecționarea mortarului colorat ciment alb sau cel puțin un adaos de ciment alb la cimentul Portland.

În literatura de specialitate [3] se menționează că pigmenții minerali sînt mai rezistenți la acțiunea luminii decît cei organici. În practică s-a întîmplat însă adeseori ca un pigment de culoare stabilă la lumină — așa cum este albastrul de Prusia (ferocianura ferică) — să se decoloreze cînd se folosește sub forma unei culori de o tonalitate mai deschisă, adică în cazul amestecării cu un pigment alb (ZnO). De aici rezultă că pentru a obține o culoare stabilă la lumină trebuie să se țină seama nu numai de pigmentul folosit dar și de ceilalți componenți ai materialului utilizat (albul întrebuințat pentru obținerea unei tonalități mai deschise precum și natura liantului).

Pentru obținerea mortarelor colorate în lucrarea de față s-au folosit coloranți organici solubili și insolubili în apă, adăugați inițial la mortare confecționate pe bază de ciment alb. În funcție de cantitatea de pigment sau colorant adăugat la ciment au fost obținute nuanțe de culori diferite.

Deoarece mortarele pe bază de ciment alb aveau rezistențe mecanice mici și erau friabile, s-au confecționat mortare colorate pe bază de ciment Portland la care s-a adăugat baritină (pigment alb natural) în scopul de

a deschide cenuşiul cimentului pentru a nu influenţa asupra culorii. Baritina s-a adăugat în proporţie de 60% faţă de cimenttul Portland.

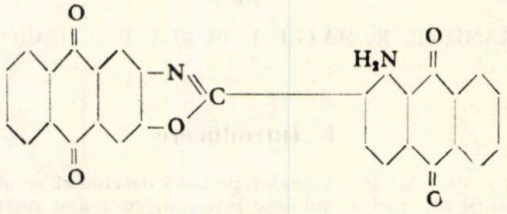
Pe lîngă efectul de deschidere a cenuşiului cimentului, baritina mai are efect pozitiv şi asupra rezistenţelor mecanice ale cimentului, producînd creşterea lor [4].

2. Partea exerimentală

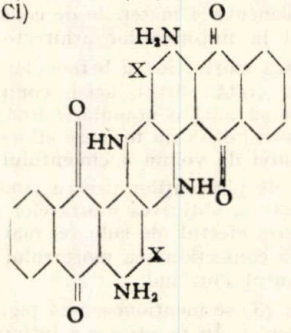
Pentru a obţine mortare colorate s-au folosit coloranţi organici cetonici, insolubili în apă şi solubili prin reducere în mediu alcalin şi coloranţi direcţi-azoici, solubili în apă.

Dintre coloranţii cetonici au fost utilizaţi [5]:

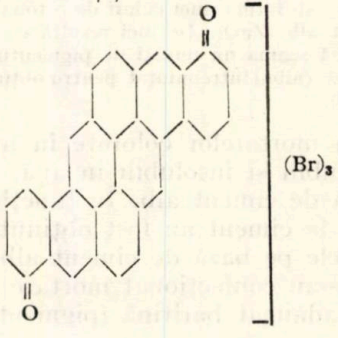
1) Indantren rot FBA (C.I. 67.000/10)



2) Indantren Br grün 2FB (C.I. 69850/11)
(X = Br sau Cl)

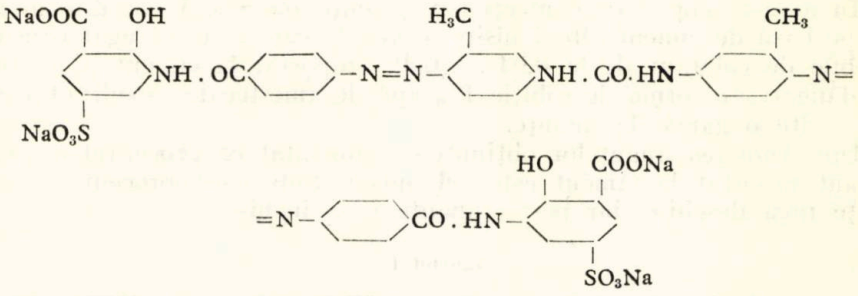


3) Indantren orange 4R (C. I. 59710/4)

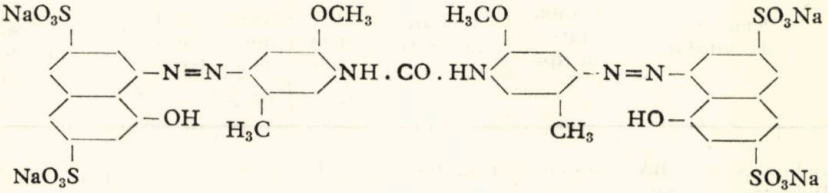


Dintre coloranții azoici s-au utilizat:

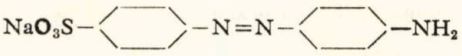
4) Sirius licht gelb GRLL (C.I. 29020/33)



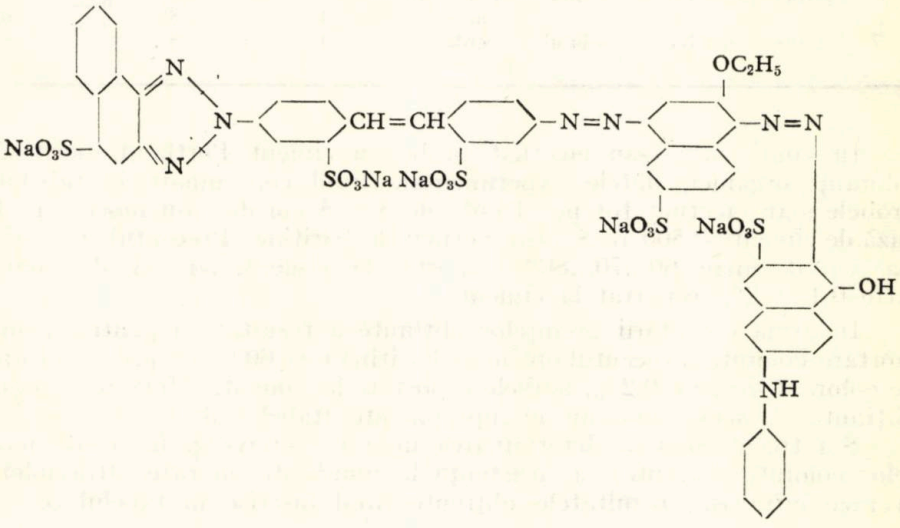
5) Sirius licht rot 4BL (C.I. 29065/79)



6) Sirius orange GGL (C.I. 40215/39)



7) Sirius grün BBTL (C.I. 27.970/34)



Cu coloranții menționați s-au făcut soluții având concentrația 1% în apă, după care s-a determinat cantitatea optimă de colorant organic ce trebuie adăugată la cimentul alb pentru obținerea unui mortar colorat.

În aceast scop s-au confecționat plăcuțe de 5 × 5 cm din mortar 1 : 3 pe bază de ciment alb și nisip normal la care s-au adăugat cantități variabile de colorant de la 0,04 ... 0,4% raportat la ciment. Colorantul s-a adăugat sub formă de soluție 1% apă de amestecare, rezultînd pentru fiecare cîte o gamă de nuanțe.

Din studierea nuanțelor obținute s-a constatat că procentul de 0,2% colorant raportat la ciment este cel optim. Sub acest procent se obțin nuanțe prea deschise, iar peste, nuanțe prea închise.

Tabelul 1

Nr. crt.	Denumirea colorantului	Solubilitatea în apă	Culoarea în soluție	Dozaj				
				Ciment alb părți	Nisip normal părți	Apa de amestecare %	Adaos de colorant %	Adaos optim de colorant %
1	Indantren rot FBA	insolubil	roșu deschis	1	3	8	0,04 ; 0,08 ; 0,12 ; 0,16 ; 0,20 ; 0,24 ; 0,28 ; 0,32 ; 0,36 ; 0,40	0,2
2	Indantren Br grün 2FB	insolubil	verde	1	3	8		0,2
3	Indantren orange 4R	insolubil	portocaliu	1	3	8		0,2
4	Sirius licht gelb GRLL	solubil	galben	1	3	8		0,2
5	Sirius licht rot 4BL	solubil	roșu închis	1	3	8		0,2
6	Sirius orange GGL	solubil	portocaliu închis	1	3	8		0,2
7	Sirius grün BBTL	solubil	verde	1	3	8		0,2

În continuare s-au efectuat probe cu ciment Portland, baritină și coloranți organici, datele experimentale fiind consemnate în tabelul 2. Probele s-au efectuat tot pe plăcuțe de 5 × 5 cm dar din mortar 1 : 3 pe bază de ciment *P* 500 BSS, nisip normal și baritină. Procentul de baritină s-a variat între 60...70...80% raportat la ciment, iar cel de colorant între 0,1...0,2% raportat la ciment.

În urma cercetării nuanțelor obținute a rezultat că pentru a obține mortare colorate, procentul optim de baritină este 60% iar procentul optim de colorant organic 0,2%, ambele raportate la ciment. Mortarele colorate obținute în acest mod au nuanțe plăcute (tabelul 3).

S-a trecut apoi la determinarea unor caracteristici fizice ale mortarelor colorate obținute, ca rezistența la umiditate, la raze ultraviolete și la raze infraroșii, rezultatele obținute fiind înscrise în tabelul 3.

Caracteristicile fizice ale mortarelor colorate din tabelul 3 s-au determinat astfel: culoarea, după 28 zile de întărire în aer a plăcuţelor; rezistenţa culorii la umiditate, după 28 zile de la confecţionare, dar păstrînd

Tabelul 2

Nr. crt.	Denumirea colorantului	Dozaj						
		Ciment P 500 BSS părţi	Nisip normal părţi	Baritină %	Apă %	Colorant %	Adaos optim de baritină %	Adaos optim de colorant %
1	Indantren rot FBA	1	3	60 70 80	8	0,1 0,2	60	0,2
2	Indantren Br grün 2FB	1	3	60 70 80	8	0,1 0,2	60	0,2
3	Indantren orange 4R	1	3	60 70 80	8	0,1 0,2	60	0,2
4	Sirius licht gelb GRLL	1	3	60 70 80	8	0,1 0,2	60	0,2
5	Sirius licht rot 4BL	1	3	60 70 80	8	0,1 0,2	60	0,2
6	Sirius orange GGL	1	3	60 70 80	8	0,1 0,2	60	0,2
7	Sirius grün BBTL	1	3	60 70 80	8	0,1 0,2	60	0,2

plăcuţele prima zi în tipare în atmosferă umedă şi restul pînă la 28 zile întîi sub apă şi apoi uscate.

În literatura de specialitate [6] se menţionează că în cazul coloranţilor organici solubili, stabilitatea vopsirii la tratamente umede este funcţie de afinitatea colorantului pentru materialul respectiv. Cu privire la structura coloranţilor şi stabilitatea lor pe material, se poate considera că aceeaşi factori care măresc afinitatea, măresc şi rezistenţa la tratamentele umede. Astfel, mărirea moleculei colorantului, care este însoţită în general de o creştere a afinităţii, determină şi creşterea rezistenţelor la tratamente

umede. Dimpotrivă, creşterea numărului de grupe solubilizante determină micşorarea afinităţii şi deci şi rezistenţa la tratamente umede devine mai mică.

În ceea ce priveşte coloranţii insolubili, stabilitatea lor mare la tratamente umede se datoreşte tocmai acestei însuşiri.

Tabelul 3

Nr. crt.	Denumirea colorantului	Dozaj					Culoarea mortarului întărit în aer	Rezistenţa culorii la umiditate (în scara de gris)	Rezistenţa culorii la raze ultraviolete (30 ore) (în scara de gris)	Rezistenţa culorii la raze infraroşii (30 ore) (în scara de gris)
		Ciment P 500 părţi	Nisip normal părţi	Baritină %	Apă %	Adaos de colorant %				
1	Indantren rot FBA	1	3	60	8	0,2	mov deschis	4—5	5	5
2	Indantren Br grün 2FB	1	3	60	8	0,2	vernil	4—5	4	4—5
3	Indantren orange 4R	1	3	60	8	0,2	mov-gris	4—5	5	5
4	Sirius licht gelb GRLL	1	3	60	8	0,2	vernil-galben	4—5	5	4—5
5	Sirius licht rot 4BL	1	3	60	8	0,2	mov	4—5	3	3—4
6	Sirius orange GLL	1	3	60	8	0,2	havan	4—5	3—4	3
7	Sirius grün BBTL	1	3	60	8	0,2	vernil	4—5	2	3

La mortarele cu coloranţi organici obţinute de autori şi supuse acţiunii umidităţii s-a observat o uşoară deschidere a culorii în raport cu mortarele păstrate în aer.

Pentru a determina rezistenţa culorii mortarului la raze ultraviolete şi la raze infraroşii s-a procedat în modul următor: plăcuţele de mortar ţinute 24 ore în atmosferă umedă şi restul pînă la 28 zile sub apă şi apoi uscate, au fost acoperite pe jumătate cu hîrtie neagră şi expuse radiaţiilor timp de 30 ore. După îndepărtarea hîrtiei s-a examinat partea expusă radiaţiilor prin comparaţie cu partea neexpusă.

Mecanismul decolorării se explică în general în felul următor [6]: prin absorbţia luminii, moleculele iradiate trec de la starea lor normală, cu un conţinut minim de energie, într-o stare excitată cu energie mai mare. Plusul de energie rezultat măreşte energia de vibraţie a moleculei. Durata

excitării este scurtă, molecula revenind la starea ei iniţială ; dar după un număr de treceri de la starea iniţială la starea excitată şi înapoi, energia de vibraţie mare, la care se adaugă slăbirea legăturilor de valenţă în urma trecerii electronilor la un nivel energetic mai mare, provoacă ruperea moleculei, adică fotoliza.

Radiaţiile ultraviolete cu λ mai mic, de exemplu 300 mμ, au o energie de activare mare, 96 kcal/mol, şi deci pot influenţa mai mult legăturile de valenţă. Practic, fotoliza este deseori însoţită şi de alte reacţii, în special de oxidare (fotooxidare) iar în unele cazuri şi de reducere.

Cazul cel mai frecvent în decolorarea vopsirilor este acel al distrugerii colorantului prin oxidare. Procesul de oxidare se desfăşoară în sistemul colorant-apă-oxigen.

Rezistenţa vopsirilor la lumina zilei nu este determinată numai de structura colorantului, ci este afectată de o serie de factori ca natura materialului respectiv, concentraţia de colorant, natura luminii, umiditatea şi temperatura la care se face expunerea, prezenţa altor substanţe în materialul respectiv etc. În general, creşterea umidităţii accelerează decolorarea vopsirilor, iar la umiditate relativă constantă, decolorarea creşte cu temperatura. Rezistenţa vopsirii la lumina zilei creşte de obicei cu concentraţia de colorant.

Coloranţii organici utilizaţi prezintă rezistenţe foarte bune la lumină [5]. Din examinarea mortarelor colorate obţinute cu aceşti coloranţi şi expuse radiaţiilor ultraviolete şi infraroşii s-a constatat că mortarele obţinute cu coloranţi insolubili în apă au rezistenţă mai bună la lumină decît cele obţinute cu coloranţi solubili în apă.

Celelalte caracteristici fizice şi mecanice ale mortarelor colorate obţinute au fost determinate pe epruvete (cuburi cu latura de 7,07 cm, cuburi cu latura de 5 cm şi brichete cu secţiunea de rupere de 5 cm^2) confecţionate din mortar 1 : 3 cu adaosul de baritină şi colorant organic optim. Aceste epruvete au fost păstrate după confecţionare 24 ore în matriţe în atmosferă umedă şi apoi pînă la 28 zile sub apă. Rezultatele determinărilor sînt date în tabelul 4, care denotă că greutatea specifică aparentă a probei martor cu adaos de 60% baritină este mai mare decît a probei martor fără nici un adaos.

De asemenea greutăţile specifice aparente ale probelor cu adaos de baritină şi coloranţi organici sînt mai mari decît ale probei martor fără nici un adaos ; valorile lor sînt cuprinse în jurul greutăţii specifice aparente a probei martor cu adaos de baritină.

O dată cu creşterea greutăţii specifice aparente, creşte compactitatea materialului şi ca urmare permeabilitatea lui (absorbţia de apă) se micşorează. Astfel la proba martor cu adaos de 60% baritină permeabilitatea este mai mică decît la proba maror fără adaos.

La probele cu adaos de baritină şi coloranţi organici valoarea permeabilităţii este cuprinsă între valorile permeabilităţilor probelor martor fără nici un adaos sau cu adaos de 60% baritină. La proba martor cu adaos de 60% baritină uzura e mai mică decît la proba martor fără adaos

Tabelul 4

Nr. crt.	Denumirea colorantului (a probei)	Dozaj					Greutate specifică aparentă	Permeabilitate (absorbția de apă)	Uzură	Rezistența la compresiune	Rezistența la tracțiune	Gelivitate	
		Ciment P 500 g	Nisip normal g	Baritină g	Apă cc.	Colorant organic, %	g/cm³	%	%	kgf/cm²	kgf/cm²	pierderea în greutate %	pierderea în rezistență %
1	Martor	500	1500	—	160	0,2	2,12	5,260	13,94	542	36,23	0,076	10,35
2	Martor cu baritină	500	1500	300	160	0,2	2,32	4,532	12,43	633	45,00	0,315	3,35
3	Indantren rot FBA	500	1500	300	160	0,2	2,28	4,805	12,40	578	43,55	0,052	0,719
4	Indantren Br grün 2FB	500	1500	300	160	0,2	2,38	4,351	11,28	546	37,76	0,087	3,32
5	Indantren orange 4R	500	1500	300	160	0,2	2,33	5,082	12,03	528	39,22	0,237	0,532
6	Sirius licht gelb GRLL	500	1500	300	160	0,2	2,36	4,223	11,88	514	42,42	0,096	0,987
7	Sirius licht rot 4BL	500	1500	300	160	0,2	2,33	4,406	10,99	515	43,52	0,173	8,075
8	Sirius orange GGL	500	1500	300	160	0,2	2,29	4,960	12,52	552	36,25	0,112	0,895
9	Sirius grün BBTL	500	1500	300	160	0,2	2,25	5,335	10,89	538	42,55	0,405	5,485

iar la probele cu adaos de baritină şi coloranţi organici uzura are valori apropiate de ale probei martor cu baritină. Adaosul de baritină are o influenţă pozitivă şi asupra rezistenţelor la compresiune şi tracţiune, producînd creşterea lor.

Adaosul de colorant organic fiind în cantitate foarte mică faţă de ciment (0,4%), nu influenţează prea mult asupra rezistenţelor mecanice. Ele sînt apropiate de rezistenţele mecanice ale celor două probe martor, cu baritină şi fără baritină.

La încercarea la gelivitate mortarul cu adaos de baritină şi coloranţi organici se comportă bine, pierderile de greutate şi de rezistenţă la compresiune după 25 cicluri de îngheţ-dezgheţ fiind sub limita admisă de standarde.

3. Concluzii

Din încercările efectuate pentru obţinerea de mortare colorate pe bază de coloranţi organici, rezultă următoarele:

1. Pentru obţinerea de mortare colorate, fie cu pigmenţi minerali, fie cu coloranţi organici, prin utilizarea ca liant a cimentului alb se obţin mortare friabile, cu rezistenţe mecanice scăzute; de aceea se recomandă folosirea cimentului Portland cu un adaos de 60% baritină (pigment alb natural) care, pe lîngă faptul că deschide cenuşiul cimentului pentru a nu influenţa asupra culorii, conferă mortarului şi rezistenţe mecanice ridicate.

2. Dintre coloranţii organici folosiţi la obţinerea mortarelor colorate pe bază de ciment Portland şi adaos de 60% baritină, se recomandă coloranţii organici cetonici care sînt insolubili în apă dar sînt solubili prin reducere în mediul bazic din mortar; ei prezintă rezistenţă bună la umiditate şi lumină. Se pot folosi şi coloranţi organici azoici care sînt solubili în apă, dar au o rezistenţă mai mică la lumină.

3. Pentru a obţine mortare colorate, cantitatea optimă de colorant organic ce trebuie adăugată la mortarul pe bază de ciment Portland-baritină-nisip normal este de 0,2% raportată la ciment.

4. Mortarele colorate obţinute cu coloranţii organici menţionaţi au în general o rezistenţă bună la umiditate şi la lumină (raze ultraviolete şi raze infraroşii).

5. Coloranţii organici folosiţi la obţinerea mortarelor colorate nu au influenţă negativă asupra rezistenţelor mecanice ale mortarelor, deoarece intră într-o proporţie foarte mică (0,2%) faţă de ciment.

6. Mortarele colorate obţinute au rezistenţă bună la uzură şi la gelivitate.

7. Adaosul de baritină la mortarele colorate micşorează de asemenea permeabilitatea mortarelor la apă.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de fundaţii şi materiale

BIBLIOGRAFIE

1. König R., *Coloranți pentru ciment și colorarea produselor din beton.* Materiale de construcții (caiet selectiv), 1959, *4*, pp. 4—8.
2. * * * *Betoane colorate.* Materiale de construcții (caiet selectiv), 1956, *11*, pp. 103—105.
3. * * * Materiale de construcții (caiet selectiv), 1965, *8*, p. 469.
4. Branişte C., Vasilescu Fl., *Influența adaosului de baritină asupra proprietăților cimentului Portland.* Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII (XVI)**, *1—2.*
5. * * * *Colour Index.* Vol. I—V, The Society of Dyeos and Colourists. The American Association of Textile Chemists and Colorists, Ed. II, 1956.
6. Grindea M., *Tehnologia chimică textilă.* Buc., 1961.

LES MORTIERS COLORÉS PAR DES COLORANTS ORGANIQUES

(Résumé)

On a étudié l'obtention des mortiers colorés par le ciment Portland, la barytine et des colorants organiques.

On a precisé d'abord le rapport entre le ciment Portland et la barytine pour écarter le gris du ciment, en établisant le rapport optimum de 100 p ciment et 60 p barytine. On a confectionné des mortiers normals raides de ciment Portland avec addition de barytine et colorants organiques cétoniques et azoiques, en pourcentages variables de 0,04 ... 0,4%; le rapport optimal du colorant est 0,2%.

On a déterminé aussi les caractéristiques des mortiers colorés obtenus: résistance à l'humidité, résistance à la lumière, résistance aux rayons ultraviolets et infrarouges, ainsi que les résistances mécaniques à la compression, à l'extension, à l'usure et à la gélivité.

D'après les données de laboratoire il résulte que les mortiers avec des colorants organiques peuvent être utilisés avec succes pour les travaux de finissage.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia V
CONSTRUCŢII . HIDROTEHNICĂ

C. Z. 620.179.15

INVESTIGAREA ROENTGENOGRAFICĂ A STRUCTURII UNOR MATERIALE DE CONSTRUCŢIE, FOLOSIND SUBSTANŢE RADIOOPACE DE CONTRAST

DE

IGOR IVANOV, FELICIA ILIEŞ, M. MANOLESCU şi S. CONSTANTINESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere. Premise teoretice şi experimentale

Avînd în vedere interesul deosebit pe care îl suscită în ultimii ani metodele nedistructive de investigare a materialelor de construcţie, laboratorul de radioizotopi din cadrul Centrului de cercetări al Institutului de construcţii din Bucureşti studiază posibilităţile de aplicare în acest domeniu a metodelor radiometrice.

Urmărind permanent să se păstreze avantajele intrinsece ale acestoi metode, avantaje constînd în operativitatea şi obiectivitatea cercetării unor proprietăţi fizico-chimice şi fizico-mecanice ale materialelor de construcţie, imposibilă sau foarte greu abordabilă prin alte metode, şi încercînd, pe de altă parte, reducerea pe cît posibil a gradului lor de periculozitate, s-a adoptat o cale deosebită de investigare radiometrică. Principiul ei constă în iradierea cu radiaţii Roentgen sau gamma a probelor de materiale cercetate, în prealabil imersate în anumite soluţii de substanţe radioopace de contrast.

Un fascicul paralel şi monocromatic de radiaţii Roentgen sau gamma, la trecerea sa printr-un material, se atenuează exponenţial, datorită mai multor mecanisme competitive de interacţiune a radiaţiilor cu substanţa (efect fotoelectric, Compton şi formare de perechi) după legea

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \tag{1}$$

în care I_0 este intensitatea fasciculului de radiaţii incidente ($x = 0$), I — intensitatea fasciculului emergent, după străbaterea materialului de grosime x [cm], μ — coeficientul de atenuare liniară a radiaţiilor, dependent de densitatea absorbantului, cît şi de numărul atomic al acestuia.

Într-adevăr, exprimînd relația (1) sub forma $I = I_0 e^{-\mu^e n_e x}$, în care densitatea de volum a numărului de electroni este $n_e = Z\rho N/A$ (cu Z — numărul atomic, N — numărul lui Avogadro, A — numărul de masă, ρ — densitatea materialului, [g/cm³]) iar $\mu_e = \mu/n_e$ reprezintă coeficientul de atenuare electronic, se obține

$$I = I_0 e^{-\rho \frac{NZ}{A} \mu^e x} . \tag{2}$$

Deci

$$\mu = \frac{\rho NZ}{A} \mu^e , \tag{3}$$

ceea ce confirmă afirmațiile de mai sus.

La iradierea unui material neomogen din punct de vedere al compoziției, coeficienții de atenuare liniară a radiațiilor — diferiți pentru diferite substanțe — conduc la o intensitate variabilă a fasciculului emergent, care căzînd pe un film roentgen, îl impresionează potrivit cu intensitatea lui în fiecare punct. În urma efectelor Compton și fotoelectric, în emulsia fotografică apar electroni de energie mare, care, neutralizînd ionii de Br^- și Ag^+, dau naștere la granule de argint metalic; după developare acestea produc înnegrirea caracteristică a filmului pe care se imprimă structura internă a probei iradiate.

Contrastul alb-negru al imaginii radiologice este determinat de diferența dintre coeficienții de atenuare a porțiunilor examinate din material, în baza relației

$$\frac{I_2}{I_1} = e^{(\mu_1 - \mu_2) x} , \tag{4}$$

în care I_1, I_2 reprezintă intensitățile emergente din două porțiuni diferite ale materialului, iar μ_1, μ_2 — coeficienții de atenuare liniară a acestor două porțiuni.

La materialele de construcție, în general substanțe prin excelență radioopace, se întîmplă ca acești coeficienți liniari de atenuare să fie sensibil egali, ceea ce în unele cazuri produce serioase dificultăți în aprecierea contrastului clar-obscur al imaginii radiologice.

Pentru a putea aplica totuși cu succes metoda de investigare radiologică în cercetarea structurii interne a materialelor de construcții, autorii au extins în acest domeniu o metodă curentă utilizată în practica radiologică medicală, ce constă în folosirea unui efect de contrast artificial, realizat cu ajutorul substanțelor radioopace de contrast, care provocînd o diferență sensibilă a coeficienților de atenuare în porțiunile examinate, conduce la întărirea imaginii radiologice obținute.

Inițial cercetările au vizat alegerea celor mai bune substanțe radioopacee de contrast, conform criteriilor selective a calității rezultatelor, accesibilității și prețului de cost.

Din considerații teoretice simple, conform relației (3), rezultă că cele mai bune efecte de contrast artificial se vor obține cu substanțele ale căror molecule sînt formate din elemente cu număr atomic mare. Pentru confirmare s-au efectuat o serie de încercări cu clorură de bariu ($BaCl_2$) iodură de potasiu (KI), acetat de plumb ($(CH_3—COO)_2Pb$, substanțe ieftine care s-au utilizat în diverse concentrații pînă la limita lor superioară de solubilitate (tabelul 1).

Tabelul 1

Substanţa	Concentraţii %		
$^{56}_{BaCl_2}$	8	17	35
$^{19}_{KI}$	25	50	140
$^{82}_{Pb(CH_3-COO)_2}$	10	20	55

În soluţiile de mai sus s-au imersat, timp de 24 ore, prisme de pastă de ciment şi mortar de ciment care au fost apoi roentgenografiate. Substanţele de contrast se ridică în probe prin ascensiune capilară, mărind considerabil contrastul clar-obscurului natural şi fac posibilă roentgenografierea materialului de cercetat în condiţii bune. Din examinarea clişeelor, ţinînd seama de clar-obscur şi evidenţa netă a structurii, a rezultat că acetatul de plumb în concentraţie de 55%, soluţie saturată (*a*), conduce la cele mai bune rezultate (fig. 1), după care urmează clorura de bariu în concentraţie de 34% (*b*) şi iodura de potasiu în concentraţii de 140% (*c*), ceea ce era şi de aşteptat.

Pe baza acestor constatări şi a unor consideraţii asupra metodologiei de lucru, a fost elaborată o metodă radiometrică nouă pentru cercetarea materialelor de construcţii.

2. Principiul metodei. Modul de lucru

Materialele de construcţie solide sînt în general poroase sau microfisurate, porozitatea materialelor fiind de natură capilară sau grosieră, deschisă sau închisă. De aceea materialele de construcţie poroase sînt permeabile pentru soluţiile apoase care pot pătrunde în material prin presiune sau prin absorbţie capilară.

Avînd în vedere acest fapt, probele de cercetat se imersează în soluţie 55% saturată de acetat de plumb şi se lasă 24 de ore, timp suficient pentru ca soluţia radioopacă de contrast să difuzeze prin ascensiune capilară în porii materialului, îmbibîndu-l.

După imersiune, probele se roentgenografiază la o instalaţie Roentgen de defectoscopie industrială tip P.D.A. cu tensiunea anodică maximă de 200 kV şi intensitatea maximă 14 mA. Parametrii de lucru optimi, tensiunea anodică, intensitatea şi timpul de expunere, variază în funcţie de natura materialului încercat. Clişeele se developează prin tehnica curentă şi apoi se examinează la negatoscop. Ca o primă aplicare imediată a acestei metode generale, în laboratorul nostru s-a trecut la elaborarea unui procedeu pentru determinarea proprietăţilor hidrofobe ale materialelor hidroizolante.

3. Verificarea proprietăţilor hidrofobe ale cimentului hidrofob şi a produsului apa-stop

Pătrunzînd în materialul de construcţie prin presiune directă sau prin absorbţie capilară, apa exercită acţiuni dizolvante, de eflorescenţă (depunerea sărurilor apei la suprafaţa probei), sau expansiune (spargerea materialului datorită presiunii de cristalizare) în funcţie de compoziţia ei, provocînd micşorarea rezistenţelor mecanice, a rezistenţei la îngheţ-dezgheţ repetat şi conferind materialelor defecte de natură estetică.

Pentru evitarea acestor urmări, în tehnica construcţiilor se folosesc hidroizolaţii—ansamblu de măsuri constructive împotriva pătrunderii umidităţii apelor subterane sau a apelor pluviale de infiltraţii.

Prin alte variante, tehnica hidroizolaţiei foloseşte hidrofobizarea porilor deschişi şi a canalelor capilare ale materialelor de construcţie prin impregnarea lor cu substanţe hidrofobe. Mecanismul procesului de hidrofobizare se bazează pe următoarele: suprafaţa oricărui corp solid, în reprezentarea lui Langmuir, are o tensiune superficială şi deci exces de energie superficială. Întrucît conform principiului al doilea al termodinamicii, orice corp tinde să-şi micşoreze excesul de energie superficială liberă, pe suprafaţa sa pot decurge de la sine numai acele procese ce sînt legate de micşorarea energiei superficiale libere. Deci şi pe suprafaţa corpurilor solide se pot adsorbi acele substanţe care micşorează energia superficială, deci tensiunea superficială, şi anume substanţele tensioactive.

Un material experimental bogat confirmă că substanţele polare adsorb bine pe suprafaţa lor substanţele polare, în timp ce cele nepolare adsorb substanţele nepolare.

Substanţele hidrofobizante sînt de regulă substanţe organice cu structură macromoleculară, puternic alungită şi asimetrică, avînd un radical nepolar şi grupări polare ionizabile, cum sînt: R—$COONH_2$, aminoacizii, R—OH alcoolii, R—COOH acizi organici etc. Astfel de substanţe sînt tensioactive şi se adsorb pe suprafaţa solidului, conform relaţiei lui Gibbs

$$G = -\frac{C}{RT}\left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta C}\right), \tag{5}$$

în care G este cantitatea adsorbită şi C — concentraţia (S = const.)

Adsorbindu-se cu gruparea polară spre suprafaţa materialului care urmează a fi hidrofobizat (material de regulă complex silicios, deci hidrofil) moleculele substanţei hidrofobizante sînt reţinute prin forţe Van der Waals de către substanţa solidului, prelungind reţeaua cristalină a acestuia. Capetele nepolare hidrofobe ale substanţei hidrofobizante, rămînînd în afară, materialul îşi schimbă caracterul suprafeţei sale, devine în întregime superficial hidrofobizant şi apa nu aderă la suprafaţa lui.

Întrucît apa se ridică într-un material prin ascensiune capilară, nivelul de ridicare a apei în material constituie un criteriu de apreciere a porozităţii capilare a materialului. Dacă porii materialului sînt iniţial hidrofobi

sau hidrofobizanţi, ascensiunea capilară este practic nulă, deci apa nu urcă sau urcă foarte puţin în material.

Pentru a verifica proprietăţile hidrofobizante ale produselor utilizate, am fost tentaţi iniţial să imersăm probe hidrofobizante în soluţii „marcate" cu $Ca^{45}(NO_3)_2$ şi prin autoradiografiere să urmărim ascensiunea capilară. Dar atît utilizarea izotopului Ca_{45} ($T_{1/2} = 153d$), care prezintă reale pericole, cît şi dificultăţile tehnicii autoradiografice conferă metodei un caracter puţin operativ, de periculozitate.

Adoptînd însă noua metodă de utilizare a substanţelor radioopace de contrast, investigarea este simplă, rapidă şi exactă. Probele din materialele de cercetat se introduc în soluţii de substanţe rapidoopace de contrast de o anumită concentraţie şi apoi pe roentgenogramă se urmăreşte prezenţa sau absenţa ascensiunii capilare.

Astfel pentru a determina proprietăţile hidrofobizante ale substanţelor hidroizolante „apa-stop" şi „ciment hidrofob" (ciment + o substanţă hidrofobă de măcinare — oleină), s-au turnat probe paralelipipedice de betoane şi mortare (16 × 4 × 4 cm) după 4 reţete diferite (tabelul 2), decofrîndu-se după 24 de ore şi păstrîndu-se apoi 7 zile pe grătar în baie de apă şi apoi în atmosfera laboratorului.

După 72 de ore de la imersarea probelor în soluţia radioopacă de acetat de plumb 40%, înălţimea de imersare fiind 1 cm, probele au fost scoase, şterse pentru îndepărtarea eflorescenţei şi apoi roentgenografiate la instalaţia Roentgen, cu parametrii de lucru stabiliţi la 120 kV şi 5 mA şi cu un timp de expunere de 6 min (folosind folii întăritoare de plumb — foi subţiri

Tabelul 2

Reţeta	Compoziţia	B kgf/cm²	ϱ kg/m³	a/c	Mod de preparare
I (fig. 2, 3)	Beton cu ciment obişnuit şi apa-stop	170	2 400	0,45	cu adaos de apa-stop 0 ; 1 ; 2 ; 3%
II (fig. 4)	Beton cu ciment hidrofob	170	2 400	0,45	malaxat nemalaxat
III (fig. 4, 5)	Mortar cu ciment obişnuit şi apa-stop : ciment 408 kg, nisip 1,03 m³, apă 0,250 m³				cu adaos de apa-stop 0 ; 1 ; 2 ; 3%
IV (fig. 7)	Mortar cu ciment hidrofob (aceeaşi compoziţie)				malaxat nemalaxat

de circa 0,2 mm, între care se pune filmul, şi care prin fotoelectronii emişi la căderea radiaţiilor Roentgen intensifică procesul de înnegrire, se scurtează timpul de circa 2,2 ori) ; s-a utilizat filme ORWO şi TEXO-R.

Din urmărirea ascensiunii capilare pe film (fig. 2...7) se constată că nici produsul ,,apa-stop" şi nici ,,cimentul hidrofob" nu sînt substanţe hidroizolante de calitate superioară, înălţimea de urcare a apei în probe fiind suficient de mare, deşi s-au roentgenografiat feţele inferioare ale probelor paralelipipedice, deci tocmai acelea care, în orice caz, au şi o compactare deosebit de bună.

4. Studiul structurii unor materiale de construcţie

4.1. Punerea în evidenţă a structurii interne şi a defectelor existente în materialul lemnos şi de construcţii

În literatura de specialitate se citează studii asupra lemnului, prin radiografii simple, dar rezultatele obţinute nu sînt concludente. Aplicînd metoda substanţelor radioopace de contrast, s-au utilizat prisme din 4 esenţe de lemn diferite : brad, tei, fag şi stejar.

Aceste prisme prezentau defecte naturale şi provocate. Au fost introduse într-o soluţie de acetat de plumb, lăsate 24 de ore şi apoi roentgenografiate (fig. 8 *a*). Paralel au fost efectuate roentgenografii pe gol (fig. 8 *b*). Compararea celor două serii de roentgenografii demonstrază superioritatea netă a metodei aplicate, care permite evidenţierea clară a structurii interne a esenţelor de lemn, a fibrelor şi defectelor de structură existente.

În industria materialelor de construcţii, pentru mărirea durabilităţii materialului lemnos şi în scopul evitării sau întîrzierii proceselor de degradare a lemnului (putrezire), se utilizează printre alte substanţe de impregnare, o soluţie apoasă de clorură mercurică ($HgCl_2$) ; este deci foarte util să se cunoască eficienţa impregnării industriale cu această substanţă. Profitînd de faptul că clorura mercurică este formată din elemente cu număr atomic mare (80) şi deci poate constitui ea însăşi o substanţă radioopacă de contrast, am utilizat-o ca atare la aplicarea metodei mai sus menţionată.

S-a lucrat cu probe din diferite esenţe de lemn : fag, stejar, brad, tei (fig. 8 *c*, 8 *d*), cu dimensiunile $16 \times 4 \times 0{,}9$ cm. Ele au fost imersate într-o soluţie aproape saturată de clorură mercurică ($HgCl_2$), lăsate 24 ore, după care au fost roentgenografiate cu parametrii : distanţa focală 45 cm, 100 kV, 5 mA, 3 min.

Studiul fotografiilor prezentate denotă o pătrundere netă în material a substanţei conservate şi evidenţiază structura internă şi defectele existente în probele cercetate.

4.2. Încercări de hidrofobizare a ipsosurilor

Ipsosul fiind un liant nehidraulic, face priză şi se întăreşte în aer, dar după întărire nu rezistă la acţiunea apei, motiv pentru care nu poate fi utilizat în construcţiile exterioare şi nici în cele interioare cu umiditatea relativă a aerului peste 60%.

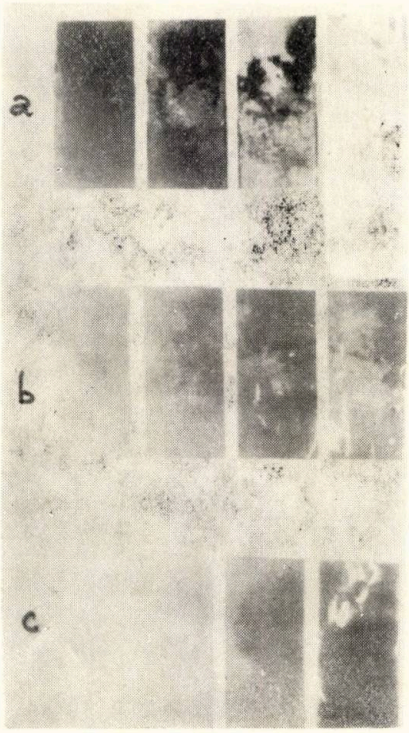


Fig. 1

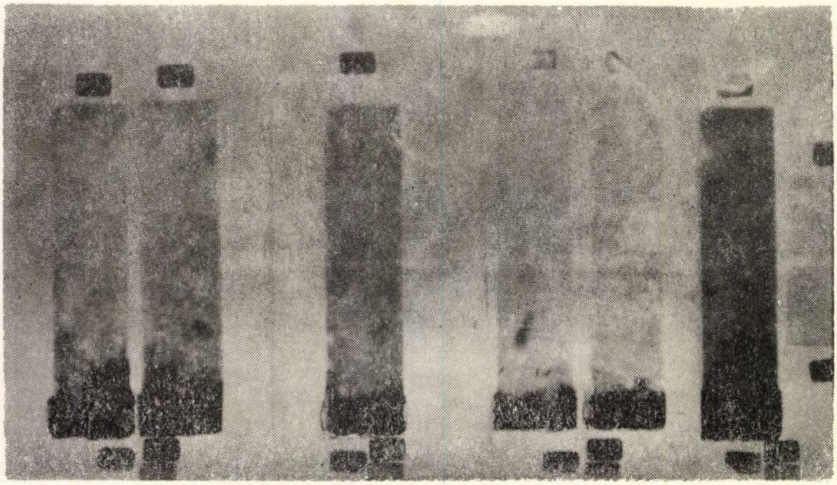


Fig. 2

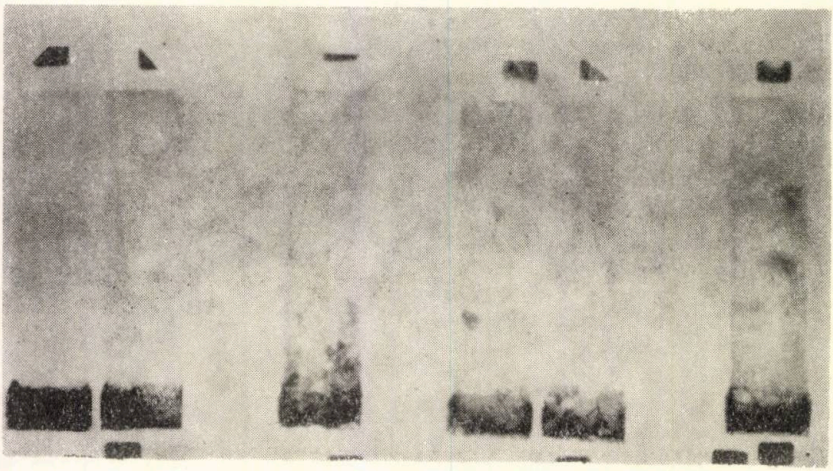


Fig. 3

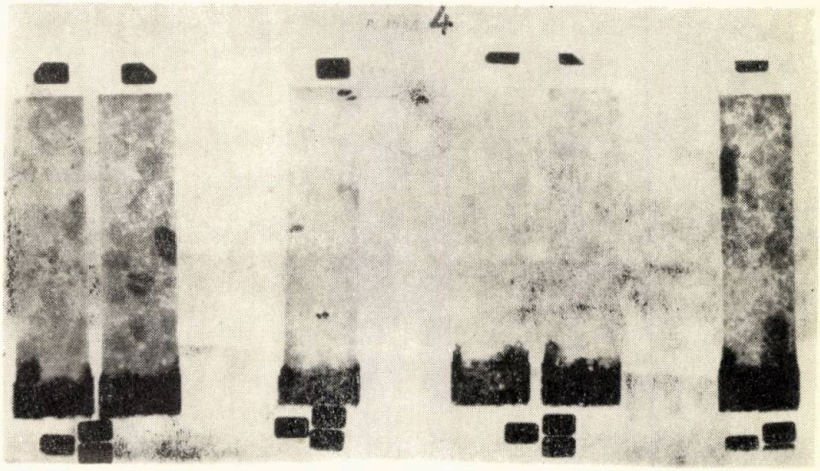


Fig. 4

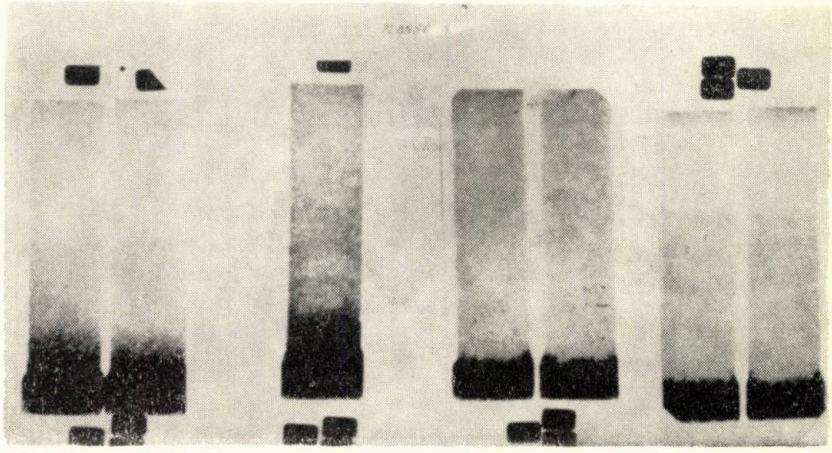


Fig. 5

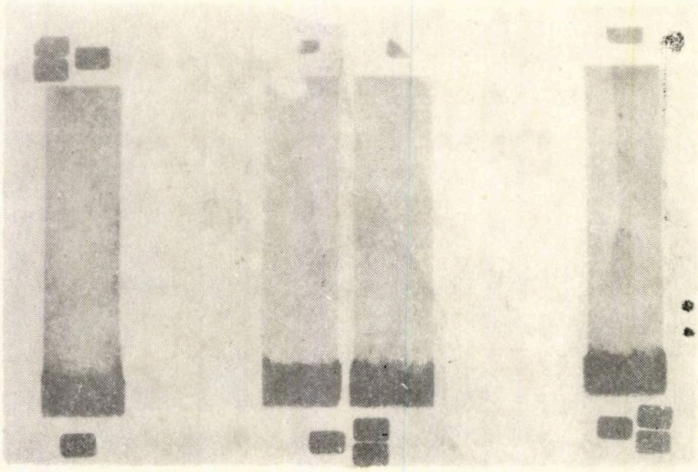


Fig. 6

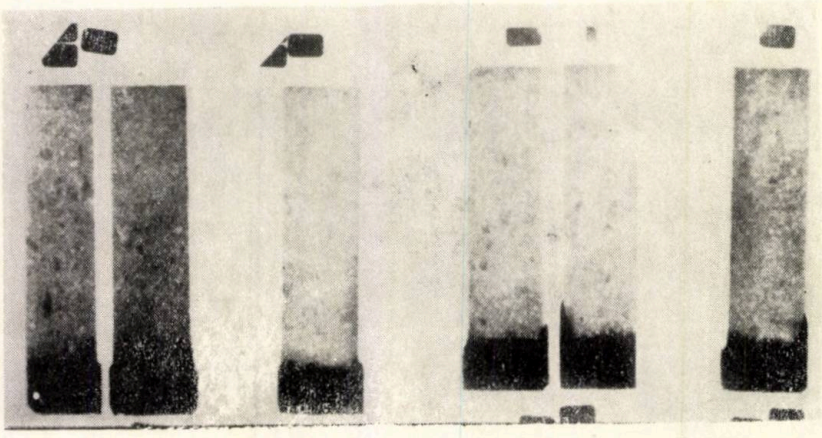


Fig. 7

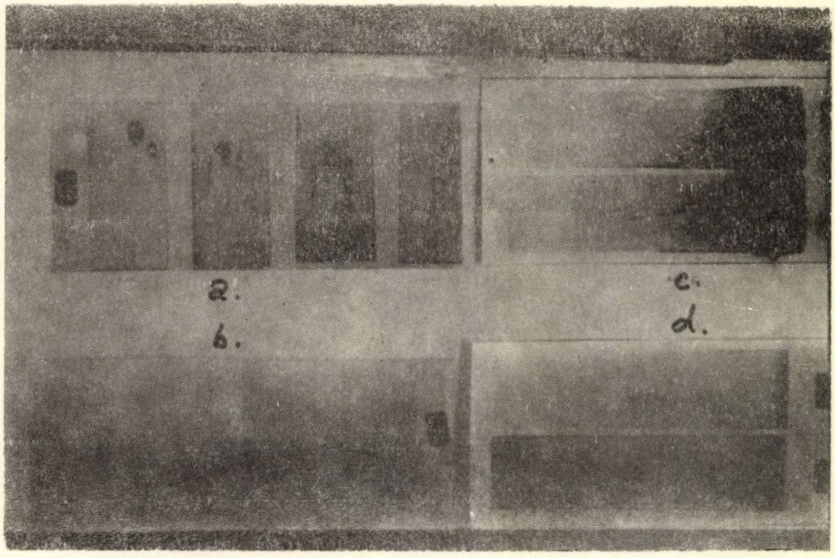


Fig. 8

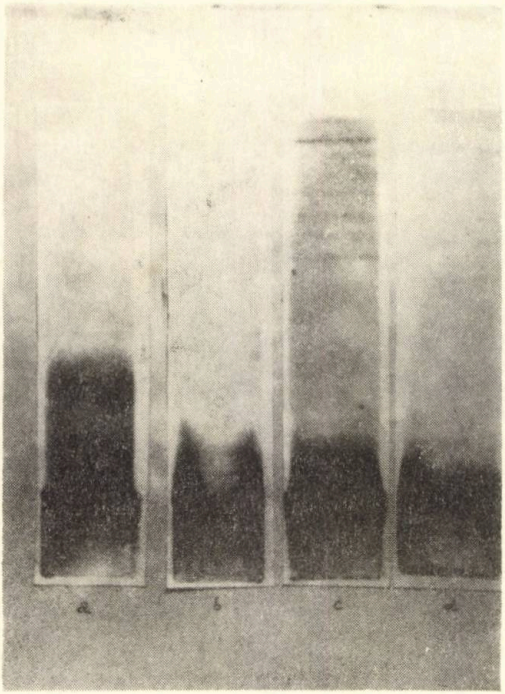


Fig. 9

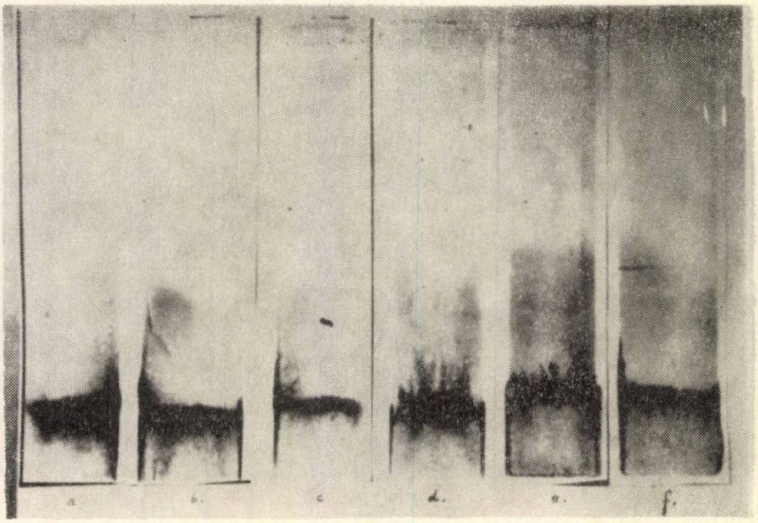


Fig. 10

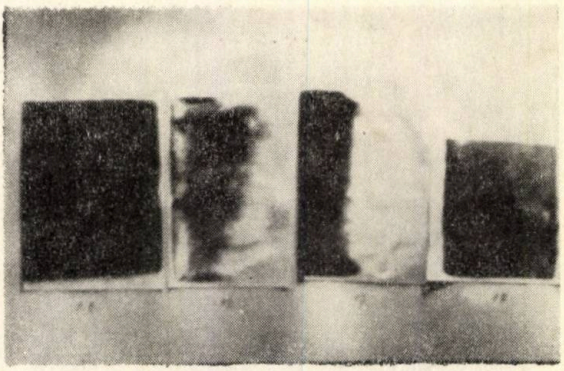


Fig. 11

Fiind însă mai ieftin decît alţi lianţi, există o preocupare pentru a reduce solubilitatea în apă a ipsosurilor întărite, cercetîndu-se acţiunea diverselor adaosuri sau tratamente de hidrofobizare. În literatură se propune adăugarea la ipsosul de construcţie a cel mult 10% ciment Portland, adaos de tras şi var, silicat de sodiu şi siliconat de sodiu sau tratarea superficială cu dimetildiclorsilan.

În această ordine de idei s-au studiat comparativ prin metoda substanţelor radioopace de contrast, diferitele procedee pentru mărirea stabilităţii ipsosului întărit la acţiunea apei. S-au preparat probe de ipsos (4×4×16 cm) după 10 reţete diferite (tabelul 3) care, după întărire, au fost imersate în soluţie de acetat de plumb 44% (înălţimea de imersare 2 cm). Probele au fost ţinute în imersiune 3 ore şi apoi roentgenografiate la 120 kV, 5 mA, 9 min.

Tabelul 3

Reţeta	Compoziţia
I (fig. 9 *a*)	Ipsos simplu
II (fig. 9 *b*)	Ipsos + ciment Portland 5%
III (fig. 9 *c*)	Ipsos + ciment Portland 10%
IV (fig. 9 *d*)	Ipsos + ciment Portland 15%
V (fig. 10 *a*)	Ipsos + var 5%
VI (fig. 10 *b*)	Ipsos + var 10%
VII (fig. 10 *c*)	Ipsos + var 15%
VIII (fig. 10 *d*)	Ipsos + siliconat (răşină 801, SISS) 0,4%
IX (fig. 10 *e*)	Ipsos + siliconat (răşină 801, SISS) 0,5%
X (fig. 10 *f*)	Ipsos + siliconat (răşină 801, SISS) 0,6%

Analiza roentgenogramelor (fig. 9, 10) denotă ineficienţa practică a adaosurilor hidrofobizante utilizate.

4.3. Studiul structurii interne a materialelor ceramice

Materialele ceramice, poroase în general, pot fi studiate din punct de vedere al structurii lor interne cu ajutorul aceleiaşi metode. Faptul este ilustrat de examinarea roentgenografiilor efectuate pe probe de materiale ceramice diferite: cărămizi pline, cărămizi găurite cu găuri verticale, cărămizi pentru placaj, ţigle trase, presate, produse refractare silice etc. (fig. 11).

5. Concluzii

Rezultatele experimentale obţinute dovedesc că metoda radiometrică propusă este o metodă de investigare comodă şi corectă, care poate fi utilizată cu succes la studierea şi rezolvarea diverselor probleme legate de cercetarea materialelor de construcţii.

Institutul de construcţii, Bucureşti
şi
Institutul pedagogic, Bucureşti

INVESTIGATION ROENTGENOGRAPHIQUE DE LA STRUCTURE DE CERTAINS MATÉRIAUX DE CONSTRUCTION, À L'AIDE DES SUBSTANCES RADIO-OPAQUES DE CONTRAST

(Résumé)

On propose une méthode radiométrique qui utilise des éprouvettes immersées au préalable dans des solutions radio-opaques de contrast. Elle permet l'étude commode et correcte des propriétés des matériaux de construction.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția V
CONSTRUCȚII . HIDROTEHNICĂ

C. Z. 651.93 ; 691.22

COMPOZIȚIA CHIMICO-MINERALOGICĂ ȘI GRANULOMETRICĂ A UNOR NISIPURI, CU GENEZE DIFERITE, REFLECTATE ASUPRA CALITĂȚII MORTARELOR

DE

ELISABETA PĂUNEL, FLORIN CONSTANTINESCU, OREST NICHITA, C. CARAMAN, FLORICA VASILESCU, N. SAVA și I. PENCA

Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Avînd în vedere rolul important pe care-l prezintă natura mineralogică și compoziția granulometrică a agregatului asupra calității și a prețului de cost a mortarului, studiul de față s-a axat pe stabilirea unei corelații între aceste caracteristici, urmărite la o serie de nisipuri din țara noastră și reflectate asupra calității mortarelor realizate cu ajutorul lor.

2. Rezultatele cercetării

2.1. Locul de recoltare a nisipurilor examinate

S-au examinat nisipuri cu geneze diferite, cu granulozități și compoziții mineralogice foarte variate:

a) Nisipul de Dunăre recoltat din depunerile aluvionare ale acestui fluviu: din malul drept Călărași, din ostrovul de la km 376 (adîncimea 2 și 7 m), de la km 267 (adîncimea 2 și 7 m), km 268 (adîncimea 2 și 8 m), de la Hîrșova și de la km 249—250 (aval de Hîrșova și anume malul stîng al brațului stîng). Zonele de exploatare aparțin sectorului 3 dunărean (fig. 1, 2 și [9]).

b) Nisipul de rîu de la Lespezi — din amonte și aval de podul de peste Siret și nisipul de la Suraia-Focșani, ambele formînd depozite rezultate din depunerile aluvionare.

c) Nisipurile de carieră de la Catarg-Iași și de la Valea-Lupului-Iași.

O parte din aceste nisipuri se exploatează deja și se folosesc în construcții (nisipul de Dunăre km 249—250, 267—268, de la Hîrșova, nisipul de Lespezi, Suraia, Catarg-Repedea Iași) cu rezultate mai mult sau mai puțin bune, în funcție de calitatea lor și de măsurile aplicate pentru ameliorarea deficiențelor.

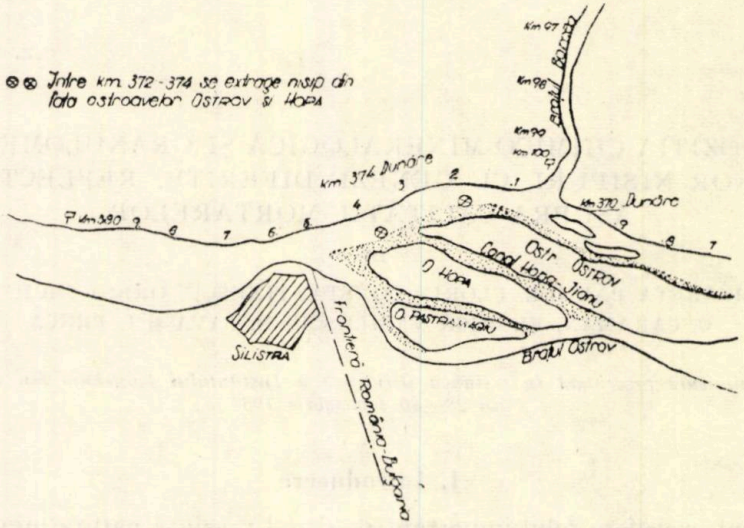


Fig. 1.— Detalii asupra depozitelor de nisip din ostrovul km 376 Dunăre.

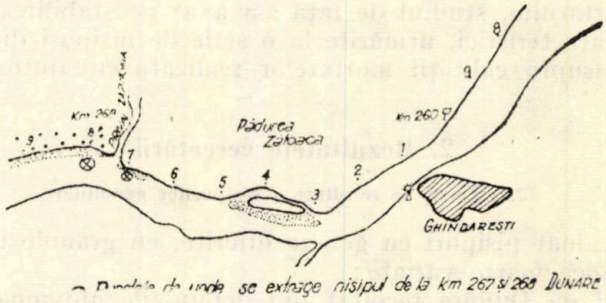


Fig. 2. — Detalii asupra depozitelor de nisip de la km 267—268 Dunăre.

Toate aceste nisipuri sînt relativ fin granulare; fracțiuni mai mari (în unele zone chiar pînă la 15 mm) conține nisipul de Dunăre, în care sînt prezente multe cochilii; cele de carieră, fiind puțin spălate de ape, conțin fracțiuni argiloase și levigabile în proporție mai mare. Nisipul de la Valea Lupului prezintă un grad mare de impurificare, fracțiunile calcaro-argiloase și oxizii de fier fiind prezenți în cantitate mare.

Rezultatele examenelor de laborator sînt prezentate sintetic în tabelele 1 ... 3; pentru mortarele realizate cu aceste nisipuri s-a întocmit tabelul 4.

2.2. Compoziţia chimico-mineralogică a nisipurilor examinate

Astăzi se ştie că agregatele din mortare şi betoane (considerate multă vreme ca materiale inerte), iau parte activă într-o serie de procese fizico-chimice la contactul agregat-liant [11], [12]. Aceste procese sînt determinate de compoziţia chimico-mineralogică şi granulometrică a nisipurilor respective şi de structura mineralelor şi a rocelor care au luat parte la formarea lor. În tabelul 1 sînt prezentate rezultatele analizei chimice.

Tabelul 1

Compoziţia chimică a nisipurilor studiate

Locul recoltării	Insolubil în HCl %	Locul recoltării	Insolubil în HCl %	$Al_2O_3 + Fe_2O_3$ %	CaO %	MgO %	P.C. %	Total
Dunăre : mal drept Călăraşi	94,4	km 249 (proba *1*)	80,00	14,80	5,20	0,70	—	100,17
Dunăre : ostrov km 376, $h = 2$ m	92,4	km 249 (proba *2*)	79,02	15,25	4,80	0,63	—	99,70
idem $h = 7$ m	93,6	km 249 (proba *3*)	76,36	16,02	7,30	0,32	—	100,00
Dunăre : km 267, $h = 2$ m	90,3	km 249 (proba *4*)	78,20	17,85	3,40	0,42	—	99,87
idem $h = 7$ m	92,64	Lespezi-amonte pod	92,78	3,96	2,18	0,56	0,68	100,16
Dunăre km 268, $h = 2$ m	92,80	Lespezi-aval pod	85,76	4,54	3,06	0,78	3,32	97,46
Dunăre km 268, $h = 8$ m	90,92	Catarg-Repedea (Iaşi)	92,78	3,96	2,18	0,56	0,68	100,16
Dunăre Hîrşova	92,80	Valea-Lupului (Iaşi)	55,80	8,10	18,34	0,88	16,34	99,45
Suraia-Focşani (rîul Siret)	91,58							

Nisipul de Dunăre, cu excepţia celui de la km 249—250, conţine SiO_2 în proporţie de 90,30%...94,40%, ce variază cu locul şi adîncimea de recoltare; se poate spune că este un nisip silicios; scoicile sînt rare. Nisipul de la km 249—250 este mult mai sărac în SiO_2 (76,36% ... 80%), conţinînd însă scoici de dimensiuni mari.

Nisipurile de Lespezi şi Suraia-Siret conţin SiO_2 în proporţie mare (> 90%), dar variabilă după locul de recoltare. Nisipurile din carierele Catarg-Iaşi sînt de asemenea silicioase. Excepţie face nisipul de Valea-Lupului-Iaşi, intenţionat ales pentru comparaţie; el este foarte sărac în silice (55,80%), bogat însă în CaO (din scoici) şi în substanţe organice.

Nisipurile de Dunăre de la km 249—50 conţin şi granule rezultate din alterarea rocilor feldspatice (fără a fi prezente fracţiunile argiloase), ceea ce se reflectă şi în conţinutul mare în Al_2O_3 constatat la analiza chimică (14,80% ... 17,85%) şi care este redus în nisipul de carieră (3,96% ... 8,10%).

Prezenţa scoicilor în nisipul de Dunăre se reflectă în conţinutul mare de CaO (pînă la 7,30%); la fel şi în nisipul de Valea-Lupului (18,34%).

Compoziţia mineralogică şi geneza au determinat în mare măsură aspectul suprafeţei granulelor de nisip, rulate şi rotunjite în cazul depunerilor din apele curgătoare (Dunăre, Siret) şi invers în cazul nisipurilor de carieră. Cele care sînt provenite din roci silicioase au suprafaţa lucioasă-netedă, cele calcaroase sînt aspre.

Compoziţia mineralogică şi aspectul suprafeţei granulelor fiind factori determinanţi în procesul de aderenţă a pietrei de ciment la agregatul din mortare şi betoane, am urmărit să diferenţiem (funcţie de compoziţia mineralogică) natura aderenţei care se va realiza la contactul între liant şi agregat.

Aderenţa pur mecanică se întîlneşte în cazul agregatelor cît mai puţin rulate şi cu suprafaţa foarte rugoasă; în cazul de faţă va fi mai accentuată la nisipul de carieră, cu cît acesta este mai bogat în granule calcaroase, dar va depinde şi de structura pietrei de ciment. La aderenţa mecanică, în anumite cazuri, se adaugă aderenţa de natură chimică, funcţie de natura chimică şi mineralogică, de fineţea granulometrică a agregatului, cît şi de compoziţia liantului.

Aderenţa, ca rezultat a reacţiilor chimice dintre agregat şi CaO, ori $CaSO_4$ din piatra de ciment, este diferită după natura mineralogică a granulelor de agregat şi anume [2]:

a) Granulele inerte: în această grupă se include cuarţul cu granule mari, în care caz aderenţa este de natură mecanică şi variază funcţie de structura pietrei de ciment. Cercetările recente [11], [12] au arătat că şi cuarţul poate deveni activ şi anume cu atît mai mult cu cît este mai fin granular[1]). După cum rezultă din tabelele 1 şi 3, nisipurile examinate, cu toate că în majoritate sînt silicioase, nu ating gradul de fineţe pentru a avea rol activ din punct de vedere chimic. Tufurile vulcanice, care conţin silice amorfă şi deci activă, nu sînt prezente în aceste nisipuri studiate.

b) În granulele supuse reacţiei sulfocalcice trebuie să fie prezenţi ionii de Al. În cazul granulelor provenite din minerale care aparţin grupei feldspatoizilor, zeoliţilor etc. ionul de Al are coordinaţia 4; în acest caz are loc o dizolvare a suprafeţei agregatului la contactul cu pasta liant;

[1]) De la fineţea corespunzătoare suprafeţei specifice de 50 000 cm^2/g cuarţul capătă caracter puzzolanic [11].

se consideră că se realizează o bună aderență, spre deosebire de cazul cînd este prezent ionul de Al cu coordinația 6 (de exemplu în caolin, haloizit, montmorilonit etc.) ; ne mai avînd loc dizolvarea la suprafața de contact agregat-liant, aderența este nulă, motiv care explică slaba aderență la agregat a pastei de ciment în cazul prezenței în nisip a părților argiloase, adesea bogate în mineralele mai sus amintite.

Compoziția mineralogică a nisipului va influența în mică măsură dilatarea mortarului prin faptul că la roci α (coeficientul de dilatație) este redus : la calcar $7 \ldots 8 \cdot 10^{-6}$, la bazalt și granit $9 \ldots 10^{-6}$, la gresie $12 \ldots 13 \cdot 10^{-6}$.

Ținînd seama de studiile întreprinse în U.R.S.S., unde s-a reușit să se obțină betoane B. 600, în care agregatul mărunt (nisipul) conținea 40% scoici, noi am utilizat pentru comparație nisipul cu cochilii de la km 249—250-Dunăre și cel de la Valea Lupului-Iași.

2.3. Fracțiunile argiloase din nisipurile studiate

Părțile levigabile, respectiv fracțiunea argiloasă, se află în proporție redusă în nisipurile de Dunăre (tabelul 2) (1,2 ... 2,1%), dar în schimb sînt prezente în cantități mari în toate celelalte nisipuri studiate. Fracțiunea argiloasă, pe lîngă rolul negativ în procesul de aderentă, despre care s-a vorbit mai sus, poate deveni și nocivă prin fixare pe granulele de nisip rezultate din alterarea rocilor feldspatice (sodice și potasice).

În cazul nisipurilor calcaroase, argila este calcifiată și pierde din hidrofilia care o caracterizează.

2.4. Compoziția granulometrică a nisipurilor examinate

Compoziția granulometrică optimă fiind condiție de bază pentru realizarea mortarelor de calitate și în același timp economice, s-a urmărit măsura în care această condiție este îndeplinită în cazul nisipurilor luate în studiu. Rezultatele sînt prezentate în tabelul 3 și fig. 3.

Nisipurile de Dunăre, cu excepția celor din malul drept Călărași și chiar din ostrovul de la km 376, sînt fin granulare, în majoritate $< 0{,}60$ mm (68,45 % ... 88,08 %) ; cele de carieră și de la Lespezi și Suraia de asemenea sînt fin granulare.

Variațiile de finețe granulară de la un nisip la altul se pot aprecia cu mai multă exactitate după valorile suprafețelor specifice, care la nisipurile de Dunăre variază între 118...208 cm^2/g. Valorile cele mai mari se întîlnesc la nisipul de la Lespezi, care conține 98% fracțiuni mai mici de 0,40 mm.

Finețea granulară accentuată a nisipurilor examinate, respectiv suprafața specifică mare, determină un consum ridicat de pastă liant, produce contracții accentuate și mortarele devin astfel neeconomice. În cazul folosirii acestor nisipuri pentru mortare fine, prezența unei cantități chiar reduse de granule mari (> 1 mm), impune ciuruirea, operație care de asemenea ridică prețul de cost.

Tabelul 2

Unele proprietăţi fizice ale nisipurilor studiate

Loc recoltare nisip	Densitatea specifică ρ (g/cm³)	Densitatea aparentă grămadă ρ_g(t/m)		Volum goluri (%)		Părţi levigabile, %
		afînat	îndesat	afînat	îndesat	
Dunăre: mal drept Călăraşi	2,297	1,479	1,625	41,5	37,2	2,1
Dunăre: ostrov km 376, h = 2 m	2,680	1,485	1,630	42,0	37,5	1,8
idem, h = 7 m	3,087	1,470	1,600	39,4	35,3	1,4
Dunăre: km 267, h = 2 m	2,644	1,492	1,643	40,5	36,4	1,8
idem, h = 7 m	2,750	1,490	1,650	41,8	32,9	1,2
Dunăre: km 268, h = 2 m	2,702	1,475	1,680	42,2	31,7	1,4
idem, h = 8 m	1,965	1,472	1,645	40,9	35,6	1,3
Dunăre: Hîrşova	2,685	1,483	1,650	42,3	37,0	1,5
Dunăre: km 249						
proba *1*	2,622	1,493	1,725	39,5	30,0	1,5
proba *2*	2,675	1,547	1,800	37,5	26,0	1,4
proba *3*	2,639	1,465	1,720	40,5	30,0	1,2
proba *4*	2,617	1,470	1,740	42,0	31,5	1,2
Suraia-Focşani (rîul Siret)	2,625	1,571	1,685	35,8	32,0	5,2
Lespezi-amonte pod (rîul Siret)	2,504	1,462	1,676	41,6	33,1	5,4
Lespezi-aval pod (rîul Siret)	2,496	1,592	1,710	36,2	31,5	5,2
Catarg-Repedea Iaşi	2,458	1,586	1,701	35,2	30,8	8,0
Valea-Lupului Iaşi	2,436	1,468	1,675	39,7	31,2	4,9

2.5. Mortare cu nisipuri de Dunăre, Suraia şi Valea Lupului [2])

Cu nisipurile de la Hîrşova, de la km 249—250 şi de la Suraia s-au realizat mortare cu ciment P 400 şi cu var, mărci diferite şi consistenţa corespunzătoare compactizării pe cale manuală.

[2]) Rezultatele privind mortarele cu nisip de Valea Lupului — Iaşi s-au reprodus, pentru comparaţie, din [3].

Tabelul 3

Compoziţia granulometrică a nisipurilor studiate

% trecut prin ciur ∅ mm / Loc recoltare	0,06	0,09	0,10	0,20	0,40	0,60	0,75	1,00	2,00	3,00	Suprafaţa specifică (cm^2/g)
Dunăre: Călăraşi mal drept	0,10	0,16	0,20	1,20	10,2	19,4	22,8	28,4	46,0	100	118,63
Dunăre: ostrov km 376, $h = 2$ m	0,10	0,30	0,50	8,00	33,6	59,7	70,6	83,4	96,6	100	150,48
idem, $h = 7$ m	0,01	0,02	0,20	2,80	26,4	41,8	45,4	50,8	60,6	100	126,50
Dunăre: km 267, $h = 2$ m	0,16	0,30	0,60	10,8	59,0	77,6	82,8	89,2	96,8	100	202,2
idem $h = 7$ m	0,08	0,20	0,50	11,7	52,1	71,1	77,1	84,1	94,3	100	198,0
Dunăre: km 268, $h = 2$ m	0,18	0,70	0,80	8,9	58,1	76,0	81,5	89,6	95,7	100	158,0
idem, $h = 8$ m	0,30	0,60	0,90	18,4	69,1	82,0	86,5	91,0	97,0	100	201,0
Dunăre: Hîrşova	0,30	0,50	0,70	11,2	65,4	84,0	87,5	92,3	97,4	100	206,0
Dunăre, km 249:											
proba *1*	0,32	0,78	—	10,7	50,4	75,4	—	92,0	96,0	96,5	151 0
proba *2*	0,40	0,80	—	12,7	44,9	68,5	—	77,0	83,2	84,5	196,0
proba *3*	0,32	0,96	—	19,2	55,4	81,7	—	93,4	97,0	97,4	203,0
proba *4*	0,24	0,84	—	19,9	62,2	88,1	—	95,1	97,5	98,4	209,0
Suraia-Siret	1,30	2,20	2,70	14,3	53,3	71,5	77,1	80,4	85,3	100,0	201,0
Lespezi-Siret:											
amonte pod	6,50	9,45	23,5	74,0	98,2	99,2	99,6	99,8	99,9	100,0	305,0
aval pod	6,04	14,5	31,5	66,1	72,8	78,2	79,2	81,7	89,5	99,5	298,0
Catarg-Repedea Iaşi	2,11	10,5	40,1	91,5	97,0	97,5	98,6	98,9	—	—	166,0
Valea-Lupului Iaşi	6,13	18,03	—	65,5	—	83,6	—	93,1	—	97,6	288,0

Deoarece nisipul de la Valea Lupului Iaşi este bogat în fracţiuni argiloase, oxizi de fier şi scoici, cotîndu-l ca un nisip de calitate inferioară, am prezentat în paralel rezultatele încercărilor la compresiune a mortarelor care se pot realiza cu acest nisip [13].

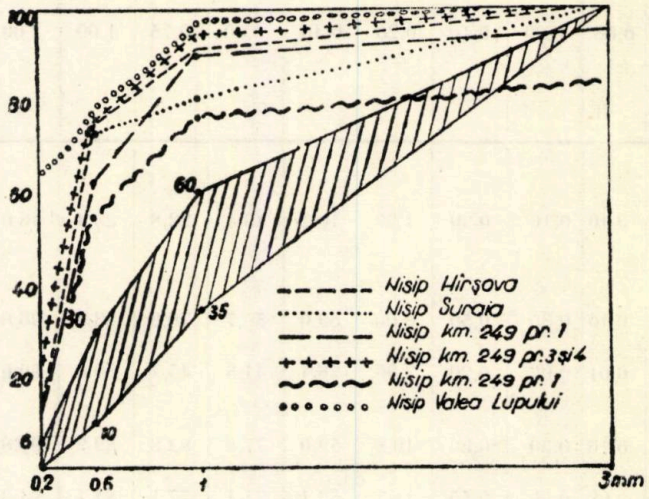


Fig. 3 — Poziţia curbelor granulometrice ale nisipurilor examinate faţă de curbele limite impuse de standard.

În tabelul 4 sînt înscrise rezultatele care reflectă influenţa compoziţiei chimico-mineralogice şi granulometrică asupra calităţii mortarelor (apreciată prin valoarea R_c) : a) cu nisipul de la Valea Lupului nu s-a putut atinge nici una din mărcile prevăzute, fiind un nisip foarte fin granular, bogat în fracţiuni calcaro-argiloase şi în părţi levigabile (tabelele 1, 3) ; b) cu nisipurile de Dunăre nu s-a putut realiza marca 100 ; în rest R_c întrece cu mult mărcile propuse (tabelul 4).

3. Concluzii

1. Compoziţia chimico-mineralogică şi gradul de fineţe a nisipurilor examinate reprezintă factorii determinanţi în procesul de aderenţă a liantului la agregat.

2. Compoziţia chimico-mineralogică şi granulometrică a nisipurilor studiate sînt proprietăţi determinante cu care intervine agregatul asupra calităţii mortarului.

3. Realizînd mortare din nisipuri cu geneze şi caracteristici tehnice variate se poate pune în evidenţă influenţa pe care compoziţia chimico-mineralogică, granulozitatea şi părţile levigabile le exercită asupra mărcii mortarului.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de geologie şi geotehnică

Tabelul 4

Rezistența la compresiune a mortarelor realizate cu nisipurile studiate

Loc recoltare nisip		Caracteristicile mortarelor realizate	Mortare de zidărie														Mortare de tencuială					
			marca														marca					
			100			50			25			10			4			50			25		
Hîrșova		Rezistența la compresiune	91			51			26			14			6			51			26		
		Densitatea aparentă		2025			2045			1930			1900			1860			1950			1915	
		Consistența			6			7			7			6			7			7			7
Km 249	proba *1*	Rezistența la compresiune	73			64			50			31			6			97			50		
		Densitatea aparentă		2120			2115			2045			2065			1980			2115			2070	
		Consistența			6			7			10			6			8			7			7
	proba *2*	Rezistența la compresiune	78			50			27			26			8,5			72			35		
		Densitatea aparentă		2150			2120			2110			2060			1970			2130			2090	
		Consistența			6			7			8			6			8			7			7
	proba *3*	Rezistența la compresiune	71			52			33			15			6,4			55			43		
		Densitatea aparentă		2145			2120			2090			2050			1990			2120			2070	
		Consistența			6			7			8			6			8			7			7
	proba *4*	Rezistența la compresiune	72			50			32			24			6			66			32		
		Densitatea aparentă		2140			2110			2100			2060			1980			2110			2080	
		Consistența			6			7			8			6			8			7			7
Suraia		Rezistența la compresiune	120			85			31			21			8			88			32		
		Densitatea aparentă		2140			2100			1960			1950			1940			2100			1985	
		Consistența			7			7			9			7			8			7			8
Valea Lupului		Rezistența la compresiune	50			18			11			7			2,5			37			16		

BIBLIOGRAFIE

1. Biezok I., *Coroziunea și protecția betonului.* Ed. tehn., Buc., 1965.
2. Chepelle J., *Utilisation du sable de laitier et des cendres dans les bétons.* Rev. Mat. Constr. Fr., 1962, *562—563*, pp. 194—204.
3. Chelărescu Al. ș.a., *Studiul nisipului de la Valea Lupului-Iași.* Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI (X)** *1—2* pp. 393—398.
4. Dreux M. G., *Contribution à l'étude de l'influence de la propriété du sable sur les qualités du béton.* Ann. de l'Inst. Techn. du Bat. et des trav. publ., 1964, *198*, pp. 721—741.
5. Florov N. A., Gordeev A. A., *Întrebuințarea nisipurilor cu granulație mică pentru betoanele hidrotehnice.* Construcții hidrotehnice, 1955, *7*, pp. 10—18.
6. Garisse F., *De l'influence des gresiers calcaires dans le béton.* Suplém. aux Ann. de l'Inst. Techn. des Bat. et des trav. publ., 1966, *221*, pp. 471—482.
7. Nicolau V., *Betonul armat.* Ed. tehn., Buc., 1962.
8. Nicolau V. ș.a., *Introducere în teoria betonului.* Vol. I, ESAC, Buc., 1964.
9. Păunel E., Constantinescu Fl., Caraman C., Vasilescu Fl., Sava N., *Studiul nisipurilor de Dunăre ca material pentru construcție.* Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII, (XVII)**, *3—4*, pp. 237—246.
10. Steopoe Al., *Materiale de construcție.* Ed. tehn., Buc., 1964.
11. — *Agregatele silicioase în betoane.* Rev. constr. și mat. constr., 1967, *3*, pp. 142—135.
12. — *Agregatele calcaroase în betoane.* Rev. constr. și mat. constr., 1967, *4*, pp. 207—211.
13. Stolnicov V. V., Gubov A. S., *Betoane hidrotehnice preparate cu nisipuri fine.* Construcții hidrotehnice, 1954, *10*, pp. 8—12.

LA COMPOSITION CHIMIQUO-MINÉRALOGIQUE ET GRANULOMÉTRIQUE DE QUELQUES TYPES DE SABLES, DE DIFFÉRENTS GENÈSES, REFLÉTÉES SUR LES QUALITÉS DES MORTIERS

(Résumé)

En réalisant des mortiers de quelques sables avec des genèses et des caractéristiques techniques différentes, on a recherché l'influence exercé par la composition chimique-minéralogique et granulométrique et les fractions lévigables sur la marque du mortier et sur l'adhérence du liant aux agrégat.

Explication des figures

Fig. 1 — Détail sur les dépots de sable de l'ostrove du km 376 — le fleuve Danube.
Fig. 2 — Détail sur les dépots de sable du km 267—268 — le fleuve Danube.
Fig. 3 — Les courbes granulométriques des sables examinés en comparaison avec les courbes limites imposées par le standard.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XV (XIX), Fasc. 3—4, 1969

SECŢIA VI

INDUSTRIE UŞOARĂ

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XV (XIX), вып. 3—4, 1969

СЕКЦИЯ VI

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XV (XIX), Fasc. 3—4, 1969

SECTION VI

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia VI
INDUSTRIE UŞOARĂ

D. C. 677.01 ; 519.24

ON THE GENERAL THEORY OF FIBRE BLENDS

I. GENERAL STATISTICAL RELATIONS OF THE BLEND STRUCTURE

BY

MIŞU ZEIDMAN

1. Introduction

The analytical investigation of a blend composition with regard to fibre characteristics, is of great importance for a rational utilisation of raw materials.

Blend designing, i.e. determination of most adequate components and their proportions in the blend, can be made on the basis of relations connecting the components' and blend's parameters. Such relations are the statistical ones, regarding stratified populations characteristics (set of lots).

Several works, among which those of Sevostjanov [1], [2], Monfor [3] etc., have investigated blend's composition with help of such relations, especialy to establish mean values, variance and coefficient of variation.

The present paper, — representing the first part of a broader study about textile fibre blends — is dealing with general relations which connect the statistical parameters of the fibres' blend to the corresponding ones of the components and their proportions in the blend. These relations are refered to: frequency function and other distribution functions, moments of different orders (about a constant, zero and the mean), coefficient of variation and mean deviation (toghether with some applications to the choice of components for blending), as well as to the correlation coefficient, between two fibre properties.

In the present paper the blend's basic relations are extended over the calculation of some distribution characteristics: different distribution functions — especially used in the field of fibre length —, moments of any order about a constant, zero and the mean, irregularity parameters (variance, coefficient of variation, mean deviation and linear irregularity), also to the calculation of covariance and correlation coefficient between two fibre characteristics.

In a subsequent paper, the author intend to treat about applications of the above mentioned general relations to certain particular cases, relating to different physical fibre properties.

1. The Frequency Function and other Derived Functions

To a certain value x of the examined fibre characteristic, correspond $z_i(x)$ statistical units, in each of the k blend's components. Hence $z_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ is the absolute frequency of the random variable x in the i component. If the total number of statistical units, for all the x values, in each of the components is

$$Z_i = \sum_{(x)} z_i(x)\,^{1)}, \tag{1.1}$$

then the relative frequency (frequency function) of this component will be expressed by the ratio

$$f_i(x) = \frac{z_i(x)}{Z_i}. \tag{1.2}$$

The blend beeing the gathering of k components, the total number of statistical units corresponding to value x, in the whole blend, will be the sum of the k values $z_i(x)$, i.e.

$$z(x) = \sum_{i=1}^{k} z_i(x) \tag{1.3}$$

(absolute frequency). For all the values of x, the blend has a volume

$$Z = \sum_{i=1}^{k} Z_i, \tag{1.4}$$

so that the ratio

$$f(x) = \frac{z(x)}{Z} \tag{1.5}$$

represents the relative frequency (frequency function) of the distribution of x in the blend.

The ratios between the volume components Z_i and the whole blend's volume will be called, in the following, *blend proportions*

$$\varphi_i = \frac{Z_i}{Z}. \tag{1.6}$$

Substituting (1.2) in (1.3) and (1.6) în (1.4) and then in (1.5), it follows that

---

[1]) In case of continuous distributions, the volume of the i component will have the expression $Z_i = \int_0^\infty z_i(x)\,dx$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i f_i(x), \tag{1.7}$$

which is the first blend's basic formula. It expresses that the frequency function of a random variable (fibre characteristic) in the blend is the arithmetic mean of the corresponding component frequency functions, weighted with blend proportions. As we shall see lower down, the relationship (1.7) is fundamental in all statistical calculations relating to blends.

The distribution function (cumulative frequency function) is defined by

$$F_i(x) = \int_0^x f_i(x)\,dx, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.8}$$

for each of the k components, and

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx \tag{1.9}$$

for the blend. Using relations (1.7) in (1.9) and taking into account (1.8), it follows

$$F(x) = \int_0^x \left[\sum_1^k \varphi_i f_i(x)\right] dx = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i \int_0^x f_i(x)\,dx,$$

i. e.

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i F_i(x), \tag{1.10}$$

which shows that the distribution function (cumulative frequency) in the blend is an arithmetic mean of the distribution functions in the components, weighted with the blend proportions.

The distribution functions are of use for the calculation of quantiles, which find an increasing utilisation, e.g. in the field of fibre length. As it is known, the q-quantile is that value x_q of the random variable x, which satisfies the equation

$$q = F(x_q) = \int_0^{x_q} f(x)\,dx. \tag{1.11}$$

If x_q lies in the interval (x_{l-1}, x_l), (the centers of two succesive classes), then it can be calculated with the following formula:

$$x_q = x_{l-1} + \Delta x \frac{q - F(x_{l-1})}{F(x_l) - F(x_{l-1})}, \tag{1.12}$$

where $\Delta x = x_l - x_{l-1} = \text{const.}$, and the cumulative frequencies $F(x)$ are calculated by means of (1.10).

To establish the class into which x_q lies, it is necessary to examine only the classes situated between components' quantiles x_{qi}. For theoretical distributions the question about quantile's calculation can get an analytical solution through the relation (1.10). In some particular cases, or by some approximations, the computation of quantiles can be further simplified.

The complementary distribution function. By definition we get

(i) for each component:

$$\Phi_i(x) = \int_x^\infty f_i(x)\,dx = 1 - F_i(x), \tag{1.13}$$

(ii) for the entire blend:

$$\Phi(x) = \int_x^\infty f(x)\,dx = 1 - F(x). \tag{1.14}$$

Using the relations (1.7), (1.8) and (1.9) or (1.10), we shall have:

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i \Phi_i(x). \tag{1.15}$$

The integral distribution function is defined by:

$$\Omega_i(t) = \int_0^t \Phi_i(x)\,dx \tag{1.16}$$

and

$$\Omega(t) = \int_0^t \Phi(x)\,dx, \tag{1.17}$$

respectively for the components and the blend. Using (1.15) and (1.16 the relation (1.17) becomes:

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i \Omega_i(t). \tag{1.18}$$

In the field of fibre length the complementary integral distribution is known, $1 - \Omega(t) = \int_t^\infty \Phi(x)\,dx$, whose graphical representation is called *tuft diagram.*

The derivative frequency function. For any component we have

$$f_i'(x) = \frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.19}$$

and for the blend:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{1.20}$$

Using the fundamental relation (1.7), we obtain:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{i=1}^{k} \varphi_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i \frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\Bigg],$$

or

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i f_i'(x). \tag{1.21}$$

The derivative frequency function can be used to calculate the mode of the distribution $\hat{x}$, which, in general, satisfies the relation $f'(\hat{x}) = 0$. In case of discreet empirical distributions, the mode will be calculated by:

$$\hat{x} = \frac{\left(x_{p-1} + \frac{\Delta x}{2}\right) f'(x_p) + \left(x_p + \frac{\Delta x}{2}\right) f'(x_{p-1})}{|f'(x_p)| + f'(x_{p-1}),},$$

where x_{p-1} and x_p are the centers of two succesive classes between which lies the modal value, while $f'(x_p)$ and $f'(x_{p-1})$ — the corresponding derivative frequencies, so that $f'(x_{p-1}) > 0$ and $f'(x_p) < 0$. In case of theoretical distributions, an analytical resolution could be obtained, using formula (1.21).

2. The Distribution Moments

The moments of order r about a common constant x_c, are defined by:

$$m_{ri}^c = \int_0^\infty (x - x_c)^r f_i(x)\, \mathrm{d}x \tag{2.1}$$

for the components, and

$$m_r^c = \int_0^\infty (x - x_c)^r f(x)\, \mathrm{d}x \tag{2.2}$$

for the blend. Substituting in (2.2) the $f(x)$ from (1.7), we get:

$$m_r^c = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i m_{ri}^c . \tag{2.3}$$

The moments of order r about zero are obtained from (2.3) when $x_c = 0$. Thus:

$$m_r = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i m_{ri} . \tag{2.4}$$

This relationship is of great importance for calculation of principal statistical characteristics (mean, variance, etc.). For this reason we shall call it the *second basic blend's formula*. A first application of this relation is to calculate the mean. Putting in (2.4) $r = 1$, we get $m_1 = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i m_{1i}$, or

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i \bar{x}_i , \tag{2.5}$$

where $m_{1i} = \bar{x}_i$ and $m_1 = \bar{x}$ are the means of components, respectively the bend.

The $r^{-\text{th}}$ moments about corresponding means have the expressions:

$$\mu_{ri} = \int_0^\infty (x - \bar{x}_i)^r f_i(x)\, dx \tag{2.6}$$

for the components, and

$$\mu_r = \int_0^\infty (x - \bar{x})^r f_i(x)\, dx \tag{2.7}$$

for the blend. Taking into account the relationships between moments about zero and moments about the mean, namely:

$$\mu_r = \sum_{h=0}^{r} (-1)^h \binom{r}{h} \bar{x}^h m_{(r-h)} \tag{2.8}$$

and

$$m_r = \sum_{h=0}^{r} \binom{r}{h} \bar{x}^h \mu_{(r-h)} , \tag{2.9}$$

as well as the second basic formula (2.4), we reach to:

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i [\mu_{.i} + (\bar{x}_i - \bar{x})]^{(r)}, \tag{2.10}$$

where, after reasing to $r^{-\text{th}}$ power, the exponents of $\mu_{.i}$ may be taken for lower indexes, indicating the moments' order: $\mu_{.i}^{(h)} = \mu_{hi}$. Under a developed form, the relation (2.10) can be written as:

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i \left[\sum_{h=0}^{r} \binom{r}{h} \mu_{hi} (\bar{x}_i - \bar{x})^{r-h} \right]. \tag{2.11}$$

Applications. 1. *The blend's variance.* Since the variance is the second moment about the mean, we shall have:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i \mu_{2i} + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2, \tag{2.12}$$

where $\sum_{i=1}^{k} \varphi_i \mu_{2i}$ — the mean of components' variances — represents the internal blend's variance and $\sum_{i=1}^{k} \varphi_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$, its external variance. As all terms in the right member are positive, it follows that the blend's variance is always greater than the mean of components' variances.

2. *The blend's asymmetry.* The asymmetry is directly proportional to the third moment about the mean ($A = \mu_3/\sigma^3$) which can be expressed by

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i \mu_{3i} + 3 \sum_{i=1}^{k} \varphi_i (\bar{x}_i - \bar{x}) \mu_{2i} + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i (\bar{x}_i - \bar{x})^3. \tag{2.13}$$

The relation (2.13) shows that μ_3 can be greater or less than the mean of components' moments μ_{3i}, according as the partial means $\bar{x}_i$ greater than the general mean $\bar{x}$ are associated with greater or smaller variances and own deviations about $\bar{x}$.

3. *The blend's excess.* The excess is directly connected with the $4^{-\text{th}}$ moment about the mean, through the relationship $E = \mu_4/\sigma^4 - 3$, and

$$\mu_4 = \sum_{1}^{k} \varphi_i \mu_{4i} + 4 \sum_{1}^{k} \varphi_i (\bar{x}_i - \bar{x}) \mu_{3i} + 6 \sum_{1}^{k} \varphi_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \mu_{2i} + \tag{2.14}$$

$$+ \sum_{1}^{k} \varphi_i (\bar{x}_i - \bar{x})^4.$$

From (2.14) it can be seen that the only term which could take negative values is the second, all the others beeing positive. Consequently, in order that the blend's excess be as great as possible, the components with negative asymmetry must have greater mean values and those with positive asymmetry, smaller mean values, so that $(\bar{x}_i - \bar{x}) \mu_{3i} > 0$.

3. Irregularity Measures

3.1 The Coefficient of Variation

Let V_i and V be the coefficients of variation of the component i and the blend, respectively. Then, taking into account the relationship between coefficients of variation and variances, namely:

$$V^2(x) = \frac{D(x)}{M^2(x)} = \frac{\mu_2(x)}{(\bar{x})^2}$$

and (2.12), we shall obtain

$$V^2(\bar{x})^2 = \sum_1^k \varphi_i V_i^2 (\bar{x}_i)^2 + \sum_1^k \varphi_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \tag{3.1}$$

which allows the calculation of V.

A more simple relationship can be obtained, if instead of coefficient of variation, the following expression, which we shall call *coefficient of irregularity*, will be taken:

$$C = 1 + V^2. \tag{3.2}$$

The two above mentioned coefficients (of variation and of irregularity) vary in the same sense. This fact allows the replacement of V by C for irregularity assessments. Further we shall effect this substitution in order to simplify demonstrations. Replacing V^2 in (3.2) we get:

$$C = 1 + V^2 = 1 + \frac{D}{(\bar{x})^2} = \frac{m_2(x)}{(\bar{x})^2},$$

or

$$m_2(x) = (\bar{x})^2 C. \tag{3.3}$$

Introducing now (3.3) in the fundamental formula (2.4) it results:

$$(\bar{x})^2 C = \sum_1^k \varphi_i (\bar{x})^2 C_i, \tag{3.4}$$

where C_i and C are the coefficients of irregularity of components and blend. From (3.4) we draw C

$$C = \frac{\sum_1^k \varphi_i \bar{x}_i^2 C_i}{\left(\sum_1^k \varphi_i \bar{x}_i\right)^2}. \tag{3.5}$$

The following problem can be solved with the aid of (3.5): on elaboration of a blend consisting of k components, there are given their characteristics except the mean value of one of them (let be $\bar{x}_k$). How great must

this value be, so that the blend's irregularity be minimum? For resolution we equal to zero the first derivative of C with respect to $\bar{x}_k$. After simplifications we obtain the following equation $C_k \bar{x}_k \left(\sum_1^k \varphi_i \bar{x}_i \right) = \varphi_i C_i (\bar{x}_i)^2$.

From the above sums we separate terms of order k

$$C_k \bar{x}_k \left(\sum_1^{k-1} \varphi_i \bar{x}_i + \varphi_k \bar{x}_k \right) = \sum_1^{k-1} \varphi_i C_i (\bar{x}_i)^2 + \varphi_k C_k (\bar{x}_k)^2$$

and get:

$$C_k \bar{x}_k = \frac{\sum_1^{k-1} \varphi_i C_i (\bar{x}_i)^2}{\sum_1^{k-1} \varphi_i \bar{x}_i} . \tag{3.6}$$

In case of a blend composed of only two components, (3.6) becomes $C_1 \bar{x}_1 = C_2 \bar{x}_2$ or

$$\bar{x}_1 (1 + V_1^2) = \bar{x}_2 (1 + V_2^2). \tag{3.7}$$

It is interesting to observe that the k-component's proportion does not influence the choice of $\bar{x}_k$. Indeed, (3.6) can be written in the form

$$C_k \bar{x}_k = \frac{C_1 x_1^2 + \sum_2^{k-1} \frac{\varphi_i}{\varphi_1} C_i x_i^2}{\bar{x}_1 + \sum_2^{k-1} \frac{\varphi_i}{\varphi_1} \bar{x}_i} , \tag{3.8}$$

which allows to see that the choice of $\bar{x}_k$ depends only on the ratios φ_i/φ_1 ($i = 2, 3, \ldots, k-1$). This fact appears more clearly in the case of a two-component blend (see (3.7)). The realationship (3.7) can be applied for the choice of different fibre properties. Succesfully it is employed for chosing fibre length of a component [1]

$$\bar{l}_1 = \bar{l}_2 \frac{1 + V_2^2 (l)}{1 + V_1^2 (l)} , \tag{3.9}$$

assuming that the best blend should be the least irregular with regard to fibre length.

The same supposition can be done with regard to fibre fineness (linear density), which gives the relationship

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_2 \frac{1 + V_2^2 (F)}{1 + V_1^2 (F)} , \tag{3.10}$$

where $\overline{F}_1$ and $\overline{F}_2$ are the mean fibre finenesses of the two components and $V_1(F)$ and $V_2(F)$ their coefficients of variation. If instead of linear density we examine fibre-counts, we get

$$\overline{N}_1 = \overline{N}_2 \frac{1 + V_2^2(N)}{1 + V_1^2(N)}, \tag{3.11}$$

where $\overline{N}_1$ and $\overline{N}_2$, $V_1(N)$ and $V_2(N)$ represent the fibre count means and coefficients of variation of the two components. Apparently, (3.10) and (3.11) contradict each other: the more uniform any component's fibres are, the less must be its mean linear density (according to (3.10)), and the less, also, its mean count (according to (3.11)), because $V(F)$ and $V(N)$ vary in the same sense. In fact, the choice of $\overline{F}_1$ in accordance to (3.10) implies to diminish to minimum the irregularity of the blend's fibre *linear density*. This minimum value does not correspond to the lowest value of blend's fibre *count*, which follows from (3.11).

Fibre fineness variation may be connected with yarn irregularity. It is well known that the general irregularity of a yarn with random structure may be expressed by M a r t i n d a l e 's formula [4]

$$V_y^2 = \frac{1 + V^2(F)}{\overline{n}}, \tag{3.12}$$

$V(F)$ beeing the general irregularity of fibre fineness in the blend, and $\overline{n}$ the average number of fibres in yarn cross section. By an adequate chosing of fibre fineness of some component, when all the other characteristics are given, yarn irregularity can be reduced. Two cases are to distinguish:

1. The average number of fibres in yarn cross section, n, remain unchanged while changing the fibre fineness. In this case, yarn irregularity is directly proportional to the coefficient of irregularity of blend's fibre fineness $1 + V^2(F)$ and the choice of fibre fineness will be done according to (3.6).

2. Modifying fibre fineness, the mean number of fibres in yarn cross section will be changed too, so that yarn linear density remain unchanged, i.e.

$$F_0 = \overline{n}\overline{F}, \tag{3.13}$$

where F_0 is yarn fineness.

The expression of yarn irregularity takes the form $V_y^2 = [1 + V^2(F)]\overline{F}/F_0$. In this case we shall stipulate that the expresion

$$H(F) = \overline{F}[1 + V^2(F)] \tag{3.14}$$

have a minimum value. In accordance to (2.4) and (3.6) we shall write

$$H(F) = \left(\sum_1^k \varphi_i \bar{F}_i\right) \frac{\sum_1^k \varphi_i \bar{F}_i^2 C_i}{\left(\sum_1^k \varphi_i \bar{F}_i\right)^2}, \quad \text{or} \quad H(F) = \frac{\sum_1^k \varphi_i \bar{F}_i^2 C_i}{\sum_1^k \varphi_i \bar{F}_i}.$$

The first derivative of $H(F)$ with respect to F must be equal to zero

$$\frac{dH(F)}{d\bar{F}_k} = \frac{\left(\sum_1^k \varphi_i \bar{F}_i\right) 2\varphi_k C_k \bar{F}_k - \left(\sum_1^k \varphi_i C_i \bar{F}_i^2\right) \varphi_k}{\left(\sum_1^k \varphi_i \bar{F}_i\right)^2} = 0. \tag{3.15}$$

After simplifying with φ_k and separating from the sums $\sum_1^k$ the terms of order k, the quadratic equation in $\bar{F}_k$ follows $\varphi_k C_k \bar{F}_k^2 + 2C_k \bar{F}_k \sum_1^{k-1} \varphi_i \bar{F}_i - \sum_1^{k-1} \varphi_i C_i \bar{F}_i^2 = 0$, which gives

$$\bar{F}_k = \frac{\sum_1^{k-1} \varphi_i \bar{F}_i}{\varphi_k} \left[\sqrt{1 + \frac{\varphi_k \sum_1^{k-1} \varphi_i C_i \bar{F}_i^2}{C_k \left(\sum_1^{k-1} \varphi_i \bar{F}_i\right)}} - 1 \right] \tag{3.16}$$

(the second solution of the equation beeing negative, has no significance). For a 2-component blend, (3.16) reduces to:

$$\bar{F}_1 = \frac{\varphi_2 \bar{F}_1}{\varphi_1} \left[\sqrt{1 + \frac{\varphi_1 C_2}{\varphi_2 C_1}} - 1 \right]. \tag{3.17}$$

3.2. The Mean Deviation

According to relations (A. 3) (A. 4) from appendix, the mean deviation (mean of the absolute deviations) of the component i, is:

$$\bar{\delta}_i = \int_0^{\bar{x}} (\bar{x} - x) f_i(x)\, dx + \tag{3.18}$$

$$+ \int_{\bar{x}}^{\infty} (x - \bar{x}) f_i(x)\, dx + (\bar{x}_i - \bar{x})(S_{1i} - S_{2i}) - 2 \int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}} (\bar{x} - x) f_i(x)\, dx,$$

where $\bar{x}$, the general mean of the blend, is replacing C in (A.3). For the whole blend we have

$$\bar{\delta} = \int_0^{\bar{x}} (\bar{x} - x) f(x)\, dx + \int_{\bar{x}}^{\infty} (x - \bar{x}) f(x)\, dx.$$

Substituting here $f(x)$ from the fundamental relation (1.7), we get:

$$\bar{\delta} = \sum_1^k \varphi_i \left[\int_0^{\bar{x}} (\bar{x} - x) f_i(x)\, dx + \int_{\bar{x}}^{\infty} (x - x) f_i(x)\, dx \right],$$

or employing (3.18),

$$\bar{\delta} = \sum_1^k \varphi_i \bar{\delta}_i - \sum_1^k \varphi_i (\bar{x} - \bar{x}_i)(S_{1i} - S_{2i}) + 2 \sum_1^k \varphi_i B_i, \tag{3.19}$$

where

$$B_i = \int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}} (\bar{x}_i - x) f_i(x)\, dx. \tag{3.20}$$

As the percentage mean deviation (linear irregulatity) is given by the relations $U_i = 100\bar{\delta}_i/\bar{x}_i$ (for the components) and $U = 100\,\bar{\delta}/\bar{x}$ (for the blend) we shall have:

$$U = \frac{\sum_1^k \varphi_i \bar{x}_i U_i}{\bar{x}} - 100 \sum_1^k \varphi_i \left(1 - \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}}\right)(S_{1i} - S_{2i}) + 200 \frac{\sum_1^k \varphi_i B_i}{\bar{x}}. \tag{3.21}$$

4. The Blend's Covariance and Correlation Coefficient

The relation between two fibre characteristics are examined, from a quantitative point of view, by means of correlation coefficient. Let x and y be two random variables representing two fibre properties, and $f(x, y)$ their joint frequency function, defined as the relative number of statistical units associated with a pair of values (x, y). Following a similar way as in the first chapter, we can establish a basic formula for the blend's joint (or bivariate, or two-dimensional) frequency function, i.e.

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^k \varphi_i f_i(x, y), \tag{4.1}$$

where $f(x, y)$ and $f_i(x, y)$ are the joint frequency functions in the blend and components, respectively.

The above relation can be proved by a similar way like that for (1.7). We only must replace notations from Chapter 1 (formulae (1.1) to (1.6)) by those given in Table 1, corrresponding to a joint distribution.

Table 1

Distribution of			
One variable		Two variables	
Symbol	Definition	Symbol	Definition
$z_i(x)$		$z_i(x, y)$	
$Z_i = Z_i(x)$	$= \sum_{(x)} z_i(x)$ or $= \int_0^\infty z_i(x)\,dx$	$Z_i = Z_i(x, y)$	$= \sum_{(x,y)} z_i(x, y)$ or $= \int_0^\infty \int_0^\infty z_i(x, y)\,dx\,dy$
$f_i(x)$	$= \frac{z_i(x)}{Z_i}$	$f_i(x, y)$	$= \frac{z_i(x, y)}{Z_i}$
$z(x)$		$z(x, y)$	
$Z = Z(x)$	$= \sum_{(x)} z(x)$ or $= \int_0^\infty z(x)\,dx$	$Z = Z(x, y)$	$= \sum_{(x,y)} y(x, y)$ or $= \int_0^\infty \int_0^\infty z(x, y)\,dx\,dy$
$f(x)$	$= \frac{z(x)}{Z}$	$f(x, y)$	$= \frac{z(x, y)}{Z}$
φ_i	$= \frac{Z_i}{Z}$	φ_i	$= \frac{Z_i}{Z}$

To calculate means and variances of x and y, we must employ marginal frequencies, defined by

$$f(x\cdot) = \int_0^\infty f(x, y)\,dy, \quad f(\cdot y) = \int_0^\infty f(x, y)\,dx \tag{4.2}$$

for the blend, and

$$f_i(x\cdot) = \int_0^\infty f_i(x, y)\,dy, \quad f_i(\cdot y) = \int_0^\infty f_i(x, y)\,dx \tag{4.3}$$

for the components. By means of the basic formula (4.1) we may establish that

$$f(x\cdot) = \sum_1^k \varphi_i f_i(x\cdot), \quad f(\cdot y) = \sum_1^k \varphi_i f_i(\cdot y), \tag{4.4}$$

which are similar to (4.1).

The means of the product (x, y) are:

$$M_i(x\cdot y) = \int_0^\infty \int_0^\infty x\cdot y f_i(x, y)\,dx\,dy \tag{4.5}$$

for the component i, and

$$M(x\cdot y) = \int_0^\infty \int_0^\infty x\cdot y f(x, y)\,dx\,dy. \tag{4.6}$$

for the blend. Using (4.1), we shall have:

$$M(x\cdot y) = \sum_{i=1}^k \varphi_i M_i(x, y). \tag{4.7}$$

The covariance of x and y in the i-th component is given by

$$\mathrm{cov}_i(x, y) = M_i(x\cdot y) - \bar{x}_i\cdot\bar{y}_i, \tag{4.8}$$

and in the blend

$$\mathrm{cov}(x, y) = M(x\cdot y) - \bar{x}\cdot\bar{y}. \tag{4.9}$$

Taking into account the relationship (4.7) and the fact that, according to (2.5) $\bar{x} = \sum_1^k \varphi_i \bar{x}_i$, $\bar{y} = \sum_1^k \varphi_i \bar{y}_i$ we get:

$$\mathrm{cov}(x, y) = \sum_1^k \varphi_i \mathrm{cov}_i(x, y) + \sum_1^k \varphi_i (\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y}). \tag{4.10}$$

On the analogy of relationship (2.12) about variances, the first sum in (4.10) — mean of component covariances — is the internal covariance and the second sum — mean of products of external deviations — the external covariance.

If $r_i(x, y)$ and $r(x, y)$ are the coefficients of correlation in the components and in the blend, we shall have:

$$r_i(x, y) = \frac{\mathrm{cov}_i(x, y)}{\sigma_i(x)\,\sigma_i(y)} \quad \text{and} \quad r(x, y) = \frac{\mathrm{cov}\,(x, y)}{\sigma(x)\,\sigma(y)}.$$

From these and (4.10), follows:

$$r(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i\, r_i(x, y)\, \frac{\sigma_i(x)\,\sigma_i(y)}{\sigma(x)\,\sigma(y)} + \sum_{1}^{k} \varphi_i\, \frac{(\bar{x}_i - \bar{x})\,(\bar{y}_i - \bar{y})}{\sigma(x)\,\sigma(y)}. \tag{4.11}$$

Appendix

Proof of formula (3.18) (see also [5])

The mean deviation is defined by the expression

$$\bar{\delta} = \int_0^{\infty} |x - \bar{x}|\, f(x)\, \mathrm{d}x, \tag{A.1}$$

which may be written as the sum of two algebraic expressions:

$$\bar{\delta} = \int_0^{\bar{x}} (\bar{x} - x)\, f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\bar{x}}^{\infty} (x - \bar{x})\, f(x)\, \mathrm{d}x. \tag{A.2}$$

Now, let be a constant C, so that $C > \bar{x}$. Then

$$\bar{\delta} = \int_0^{\bar{x}} (\bar{x} - C + C - x)\, f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\bar{x}}^{\infty} (x - C + C - \bar{x})\, f(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\bar{x}} (\bar{x} - C)\, f(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^{\bar{x}} (C - x)\, f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\bar{x}}^{\infty} (x - C)\, f(x)\, \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{\bar{x}}^{\infty} (C - \bar{x})\, f(x)\, \mathrm{d}x,$$

or

$$\bar{\delta} = \int_0^C (C - x) f(x)\, dx + \int_C^{\infty} (x - C) f(x)\, dx + (\bar{x} - C)(S_1 - S_2) - \tag{A.3}$$

$$- 2\int_{\bar{x}}^{C} (C - x) f(x)\, dx,$$

where $S_1 = \int_0^{\bar{x}} f(x)\, dx$ is that fraction of the distribution volume which involves values less than the mean, and $S_2 = \int_{\bar{x}}^{\infty} f(x)\, dx = 1 - S_1$, the fraction which involves values greater than the mean.

If the constant $C < \bar{x}$, then

$$\bar{\delta} = \int_0^C (C - x) f(x)\, dx + \int_C^{\infty} (x - C) f(x)\, dx + (\bar{x} - C)(S_1 - S_2) - \tag{A.4}$$

$$- 2\int_C^{\bar{x}} (x - C) f(x)\, dx.$$

It is to notice that the two relationships for $\bar{\delta}$ (A.3) and (A.4), may be written, in fact, in the same form, so as the third term will be positive or negative, as the case may be. The last integral in (A.3) or (A.4) is always positive, whether $C > \bar{x}$ or $C < \bar{x}$

$$B = \int_{\bar{x}}^{C} (C - x) f(x)\, dx = \int_C^{\bar{x}} (x - C) f(x)\, dx > 0. \tag{A.5}$$

Received the 12 X 1969

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Spinning

REFERENCES

1. Севостьянов А. Г., *Составление смесок и смешивание в хлопкопрядильном производстве.* Гизлегпром., М., 1954, стр. 63.
2. — *Методы исследования неровноты продуктов прядения.* Ростехиздат, М., 1962, стр. 243.
3. Monfort F., *Aspects scientifiques de l'industrie lainière.* Dunod, Paris, 1960, p. 506.
4. Martindale J. G., *A New Method of Measuring Yarn Irregularity.* J. Text. Inst. 1945, **35**, *36*.
5. Zeidman M., *Metodă simplificată pentru calculul neregularității liniare.* Bul. Inst. polit. Iași, 1963, **IX (XIII)**, *1—2*, p. 431.

ASUPRA TEORIEI GENERALE A AMESTECURILOR DE FIRE

I. Relații statistice generale relative la structura amestecului

(Rezumat)

În articolul de față, reprezentînd prima parte a unui studiu mai amplu referitor la compoziția amestecurilor de fibre textile, sînt expuse relații generale care leagă caracteristicile statistice ale fibrelor amestecului, de cele corespunzătoare ale componenților și de proporțiile lor în amestec. Aceste relații se referă la funcția de frecvență și alte funcții de distribuție, la momente (oarecare, inițiale și centrate) de diferite ordine, calculul coeficientului de variație și neregularității lineare (împreună cu unele aplicații la alegerea componenților pentru amestec) precum și la calculul coeficientului de corelație între două caracteristici de fibră.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia VI
INDUSTRIE UŞOARĂ

CONTRIBUTION EXPÉRIMENTALE AU PROBLÈME DE L'ANALYSE DE LA DISTRIBUTION DE LA LONGUEUR DES FIBRES ACRYLIQUES DE TYPE „MELANA"

PAR

MIRCEA NETEA

1. Introduction

Cette recherche a porté sur l'analyse de la distribution de la longueur des fibres acryliques des rubans fabriqués dans une usine de fibres synthétiques. Les rubans ont été obtenus par craquage avec machines Seydel type 633.

La première partie de la recherche présente les résultats de l'analyse comparative avec un seul lot, en utilisant pour mesurer la longueur des fibres, les fibrographes ALMETER et WIRA et aussi la méthode à deux pinces pour fibres individuelles.

Dans la deuxième partie de la recherche on été éxaminés les résultats des mesures obtenus au cours de l'année 1968, en utilisant le fibrographe ALMETER et l'appareil à peignes du type ZWEIGLE-REUTLINGEN.

La recherche a été conduite d'après le modèle de l'éxamen des résultats de l'expérience F. L. I. Interlaboratoire Longueur 1964, efectué par M. F. Monfort [11].

Notations principales : L'_H — longueur moyenne des fibres proportionnée au titre (hauteur) ; L'_B — longueur moyenne des fibres proportionnée au poids (barbe) ; L_n — moyenne arithmetique de la longueur des fibres (distribution numérique) ; CV'_H, CV'_B, CV_n — les coefficients de variation correspondants ; L_{25}, L_{30}, L_{40} (%) — pourcent des fibres inférieures à 25 mm, 30 mm ou 40 mm ; L 5% — longueur des fibres correspondante à la fréquence de 5% dans la diagramme cumulative ; L 1% — longueur des fibres correspondante à la fréquence de 1% dans la diagramme cumulative ; $\overline{\overline{X}}_G$ — moyenne des 9 valeurs obtenues dans le sens G (gauche) ; $\overline{\overline{X}}_D$ — moyenne des 9 valeurs obtenues dans le sens D (droite) ; $CV_{X(G)}$ — coefficient de variation des 9 valeurs ($\overline{\overline{X}}_G$) obtenues dans le sens G ; $CV_{X(D)}$ — coefficient de variation des 9 valeurs ($\overline{\overline{X}}_D$) obtenues dans le sens D ; A_n — index d'assymétrie de la diagramme des fréquences (distribution numérique) ; E_n — index d'excès de la diagramme des fréquences

(distribution numérique) ; L' — fibres semivrillées ; L — fibres rectifiées ; $\overline{L}$ — moyenne des 9 valeurs obtenues dans un sens ou l'autre ; $\overline{CV}$ — moyenne des 9 valeurs obtenues dans un sens ou l'autre ; $\overline{\overline{L}}$ — moyenne des 2 valeurs $(G + D)/2$; $\overline{\overline{CV}}$ — moyenne des 2 valeurs $(G + D)/2$.

2. Partie expérimentale

2.1. But de l'expérience

a) Estimer la précision des appareils Average Length Meter (ALMETER = ALM) et WIRA Fibre Diagram Machine (WFDM) dans la mesure des paramètres suivants des rubans : hauteur (l'_H), barbe (l'_B), coefficient de variation de hauteur ($CV(H)$), % de fibres de longueur inférieure à 40 mm (% L_{40}) et inférieure à 25 mm (% L_{25}), longueur de fibres correspondant à 5% (L 5%) et 1% (L 1%) de la fonction de distribution.

En même temps on a cherché a comparer les résultats obtenus aux fibrographes avec les résultats obtenus avec la méthode à deux pinces.

b) Chercher la distribution des valeurs moyennes des paramètres de position et de dispersion, obtenues pendant une année de fabrication (1968), dans une usine de fibres synthétiques.

2.2. Plan de l'expérience

Lots—echantillons. Pour la première partie de l'expérience on a utilisé un seul lot de ruban obtenu du dernier passage.

Le laboratoire a reçu 3 echantillons de 1,5 m de ruban pour chaque méthode de mesure, qui ont été extraits du même pot. L'extrémité de l'échantillon vers le fond du pot était indiquée par la présence d'un signe.

Dans la suite du texte, cette extrémité sera designée par la lettre D (droite) et l'autre (vers la partie superieure du pot) par la lettre G (gauche).

Pour la deuxième partie de l'expérience ont été analisés environ 400 résultats, en conformité avec les mesures de routine actuelles.

Marche à suivre pour les mesures. a) ALM : 9 mesures sur l'extrémité D et 9 mesures sur l'extrémité G. On a demandé aussi les 18 diagrammes.

b) WFDM : 9 mesures sur l'extrémité D et 9 mesures sur l'extrémité G. On a évité de reunir les deux extrémités D et G, pour analyser la dissymétrie du ruban [11]. Pour chaque échantillon, 3 mesures consécutives (3 diagrammes cumulatives) et on a demandé aussi les 18×3 diagrammes.

c) F.I. (fibres individuelles) : 9 mesures sur l'extrémité D et 9 mesures sur l'extrémite G.

Le nombre de fibres utilisées pour chaque mesure a été d'environ 750.

2.3. Analyse de la variance des résultats

On a calculé pour chaque méthode de mesure la moyenne générale des 9 valeurs pour le sens D ($\overline{\overline{X}}_D$) et pout le sens G ($\overline{\overline{X}}_G$), la variance σ^2 et le $CV_{\overline{\overline{X}}_0}(\%)$ correspondant.

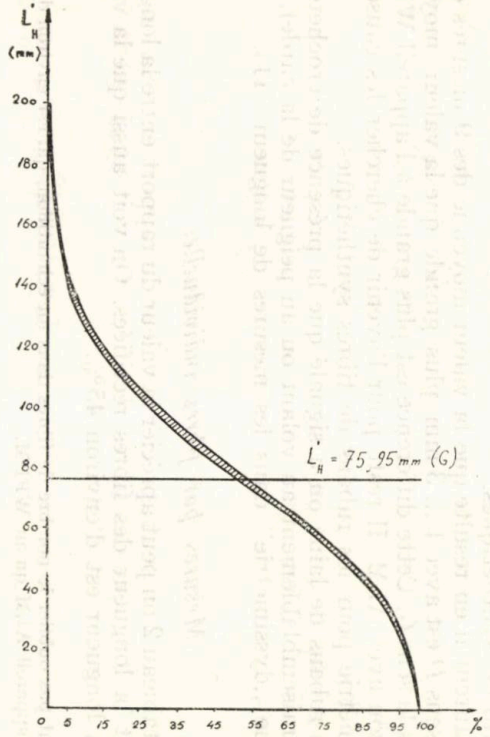


Fig. 1 — La zonne où se trouvent les 9 diagrammes cumulatives de longueur des fibres acryliques-melana effectuées dans le sens *G* (gauche), au fibrographe ALMETER.

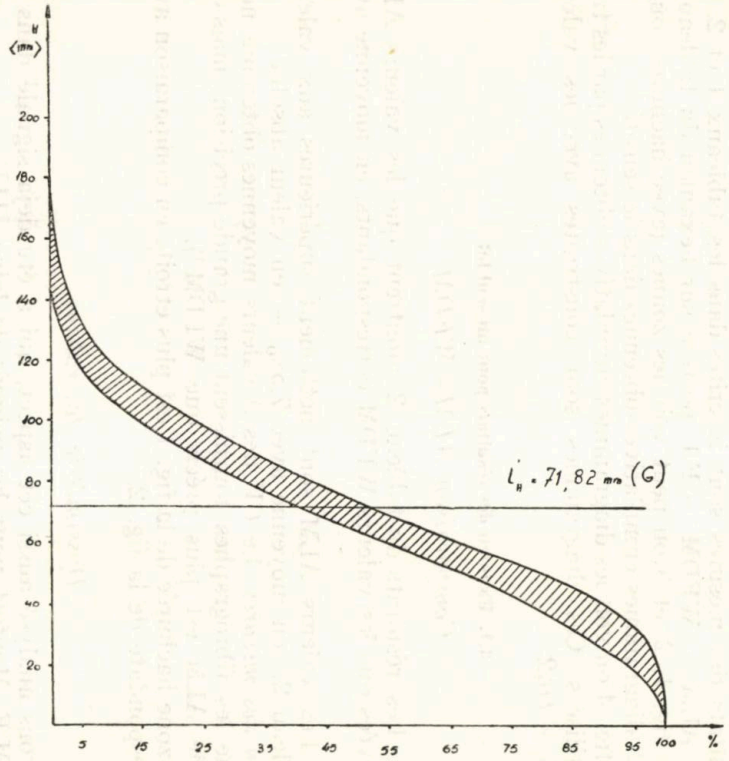


Fig. 2 — La zonne où se trouvent les 9 diagrammes cumulatives de longueur des fibres acryliques-melana, effectuées dans le sens *G* (gauche), au fibrographe WIRA.

3. Résultats de la recherche

Les résultats des mesures sont inscrites dans les tableaux 1 et 2. La comparaison ALM — WFDM — F.I. portera sur l'examen du tableau 2.

Dans les fig. 1, 2, et 3 on peut voir les zonnes (avec hachures) où se trouvent les 9 diagrammes cumulatives obtenues dans le sens *G*.

Dans la fig. 4 on voit les diagrammes cumulatives obtenues par les trois méthodes utilisées. Ces diagrammes sont construites avec les valeurs moyennes $(G + D)/2$.

3.1. Examen des résultats pour un seul lot

Comparaison ALM—WFDM

Hauteur. Les résultats du tableau 2 montrent que les valeurs ALM sont plus élevées que les valeurs WFDM correspondants, en moyenne avec 4,5%.

CV(H). Les valeurs ALM sont nettement supérieures aux valeurs WFDM (tableau 2), en moyenne avec 7,5% — en valeur absolue.

Précision des mesures. Le *CV* des 9 valeurs moyennes obtennue nous montrent que les fibrographes fournissent une grande precision, mais que le fibrographe ALM est plus précis que WFDM [1]).

Ainsi la zone hachurée de la fig. 1 est plus étroite en comparaison avec la zone correspondate de la fig. 2.

Dyssimétrie des rubans

Nous avons analysé aussi cet aspect, qui a été deja signalé dans les travaux de M.F. Monfort pour les peignés de laine [11].

Dans le tableau 2 on voit que ce phénomène est présent aussi dans les rubans de fibres synthétiques.

Pour l'hauteur il en résulte que la valeur moyenne des 9 mesures obtenues dans le sens *D* est avec 1 ... 3 mm plus grande que la valeur moyenne obtenue dans le sens *G*. Cette différence est plus grande à l'appareil WFDM en comparaison avec ALM. Il reste pour l'avenir de chercher les causes de cette dyssimétrie pour les rubans de fibres synthétiques.

Pour les rubans de laine on a signalé que la présence de crochets des fibres (dus vraisemblablement au volant ou au peigneur de la carde), conduisent à une ,,dyssimétrie'' dans les mesures de longueur [11].

Mesures par fibres individuelles

Dans le tableau 2 on peut aprécier la valeur du rapport entre la longueur semi vrillés et la longueur des fibres rectifiées. On voit aussi que la valeur du *CV* de la longueur est d'environ 45%.

---

[1]) Il ne faut pas oublier le nombre de fibres dans un échantillon, qui est environ dix fois plus grand à l'appareil ALM qu'au WFDM.

Tableau 1

Comparaison des résultats de mesures de la longueur et du coefficient de variation pour tes trois méthodes: ALM, WFDM et F.I.

No	Sens	Almeter									WFDM		Fibres individuelles	
		$\int$	$\iint$	L'_H mm	L'_B mm	V'_H %	L'_{25} %	L'_{40} %	L' 5% mm	L' 1% mm	L'_H mm	V'_H %	L_n mm	V_n %
1	A	77,3	49,1	77,3	95,2	48,2	5,0	13,8	138,0	161,0	68,54	44,40	84,40	45,00
	B	79,8	51,7	79,8	97,0	46,5	4,0	11,5	139,0	160,0	74,98	36,25	76,80	52,00
2	A	75,3	47,5	75,3	94,6	50,5	6,4	16,5	138,0	160,0	71,50	41,30	83,10	45,00
	B	75,5	46,8	75,5	93,0	48,2	6,0	15,4	136,0	157,0	74,50	40,55	79,30	46,35
3	A	75,5	47,2	75,5	93,6	54,0	7,0	16,7	137,0	159,0	74,18	39,60	77,10	46,45
	B	76,3	48,6	76,3	95,5	50,4	5,8	14,9	138,0	162,0	74,22	42,45	83,50	43,70
4	A	76 8	49 2	76,8	96,2	50,4	7,2	16,2	137,0	162,0	71,75	46,35	84,20	41,20
	B	77,0	49,0	77,0	95,5	49,0	5,9	14,7	138,0	162,0	73,92	41,65	78,20	48,40
5	A	77,5	50,1	77,5	97,0	50,2	6,4	15,5	139,0	163,0	70,63	44,25	81,90	44,50
	B	77,4	49,2	77,4	95,4	48,2	6,0	14,2	138,0	160,0	74,77	42,10	90,70	38,80
6	A	75,5	47,6	75,5	94,6	50,4	6,0	15,0	138,0	159,0	74,15	41,84	82,60	44,25
	B	76,4	47,5	76,4	93,2	47,0	6,5	15,0	137,0	158,0	74,33	40,25	77,30	48,70
7	A	75,2	47,7	75,2	95,0	51,4	6,7	16,0	138,0	162,0	73,45	42,55	81,55	44,70
	B	77,5	49,7	77,5	96,1	49,0	6,0	14,9	138,0	158,0	76,60	40,30	76,50	47,70
8	A	75,0	47,0	75,0	94,0	50,4	6,3	16,2	138,0	160,0	72,95	41,52	76,34	42,50
	B	76,0	48,2	76,0	95,2	50,3	7,0	16,5	138,0	159,0	73,57	43,94	83,00	45,00
9	A	75,5	47,4	75,5	94,1	49,7	6,0	16,0	138,0	159,0	69,27	43,52	78,00	47,70
	B	76,6	48,5	76,6	94,8	48,7	6,0	15,0	138,0	159,0	72,82	42,10	84,30	47,45
10	A	75,95	48,09	75,95	94,92	50,57	6,33	15,77	137,9	160,55	71,82	42,77	81,02	44,60
	B	76,94	48,80	76,94	95,08	48,59	5,91	14,68	137,7	159,44	74,41	41,06	81,07	46,45
$\frac{A+B}{2}$		76,445	48,445	76,445	95,00	49,58	6,12	15,225	137,8	159,99	73,11	42,10	81,045	45,52

L' — fibres semivrillées; L — fibres rectifiées.

Tableau 2

Comparaison des résultats de mesures des valeurs moyennes L'_H, L'_B, L'_n, CV'_H, CV'_B, CV'_n *et* $CV_{\overline{\overline{X}}}$, *pour les deux sens (G et D), en utilisant les trois méthodes : ALM, WFDM et F.I.*

Paramètres \ Méthode		ALMETER	WFDM	F.I.
$\overline{L'_H}$	(A)	75,95 mm	71,82 mm	—
$\overline{L'_H}$	(B)	76,94 mm	74,41 mm	—
$\overline{\overline{L'_H}}$	$\frac{(A+B)}{2}$	76,44 mm	73,11 mm	—
$\overline{L'_B}$	(A)	94,92 mm	—	—
$\overline{L'_B}$	(B)	95,08 mm	—	—
$\overline{\overline{L'_B}}$	$\frac{(A+B)}{2}$	95,00 mm	—	—
$\overline{CV'_H}$	(A)	50,57%	42,77%	—
$\overline{CV'_H}$	(B)	48,59%	51,06%	—
$\overline{\overline{CV'_H}}$	$\frac{(A+B)}{2}$	49,58%	41,96%	—
$\overline{L_n}$	(A)	—	—	81,020 mm
$\overline{L_n}$	(B)	—	—	81,080 mm
$\overline{\overline{L_n}}$	$\frac{(A+B)}{2}$	—	—	81,045 mm
$\overline{CV_n}$	(A)	—	—	44,60%
$\overline{CV_n}$	(B)	—	—	46,45%
$\overline{\overline{CV_n}}$	$\frac{(A+B)}{2}$	—	—	45,52%
$CV_{\overline{\overline{X}}}$	(A)	1,197%	2,700%	3,590%
$CV_{\overline{\overline{X}}}$	(B)	1,530%	1,330%	5,160%
$CV_{\overline{\overline{X}}}$	$\frac{(A+B)}{2}$	1,363%	2,015%	4,375%

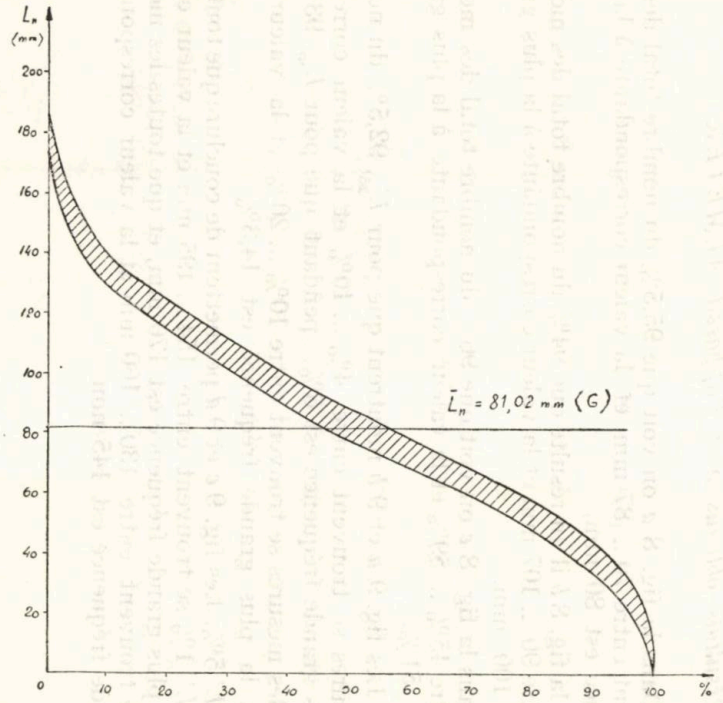


Fig. 3 — La zonne où se trouvent les 9 diagrammes cumulatives de longueur des fibres acryliques-melana effectuées dans le sens *G* (gauche), par la méthode des deux pinces pour fibres individuelles.

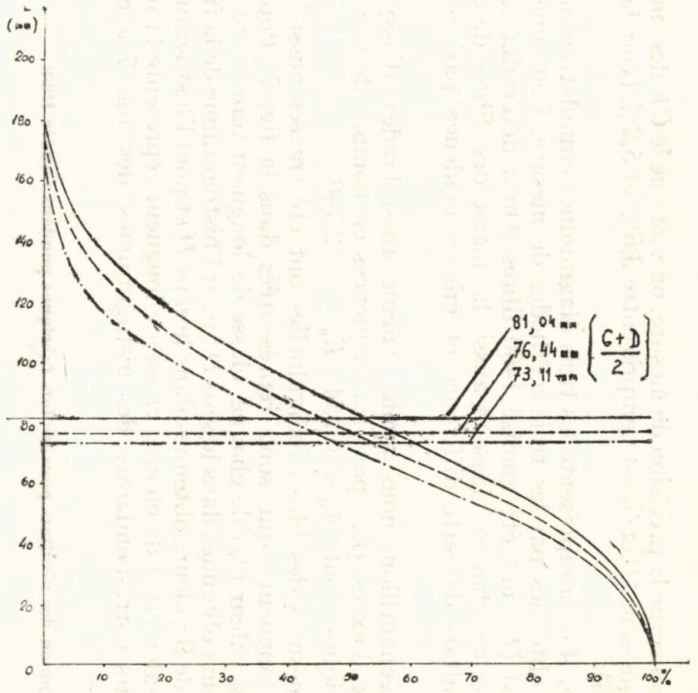


Fig. 4 — Les diagrammes cumulatives de longueur des fibres acryliques-melana, comparatif pour les trois méthodes utilisées : ALM, WFDM et F.I.

En ce qui concerne la précision de mesure, on voit que le CV des mesures faites dans chaque sens (D et G) est compris entre 3,6% et 5,2% (voir la fig. 3 pour le sens G).

Dans la fig. 4 on a représenté les trois diagrammes cumulatives moyennes $(G + D)/2$ obtenues par les trois méthodes de mesure. Pour une seule mesure du total (*18*) ont été analisé 1400 fibres. On a déterminé ainsi le nombre de fibres de chaque classe et aussi la masse des fibres de chaque classe. Les résultats de cette différence et mis en évidence par les fig. 5 et 6.

Pour cet échantillon nous avons calculé aussi l'index d'assymétrie (A_n) et l'index d'excès (E_n) pour les fréquences en nombre de fibres. Les valeurs numériques sont $A_n = 0{,}254$, $E_n = -2{,}746$.

Pour les mesures des fibres individuelles ont été tracées aussi les histogrammes de longueur, qui sont représentées dans la fig. 7. Pour celle de la fig. 7 *a* la valeur (%) de chaque classe de longueur représente la moyenne de 9 valeurs obtenues dans le sens D ; pour l'histogramme de la fig. 7 *b*, — la moyenne de 9 valeurs obtenues dans le sens D et pour l'histogramme de la fig. 7 *c*, la valeur (%) de chaque classe de longueur représente la moyenne de 2 valeurs correspondantes des histogrammes des fig. 7 *a* et 7 *b*.

3.2. Examen des résultats pour les lots fabriqués pendant l'année 1968

Résultats obtenus avec l'appareil ALMETER

Hauteur. Dans la fig. 8 *a* on voit que 95,5% du nombre total des mesures se trouvent entre 70 ... 87 mm et la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 80 mm.

Barbe. De la fig. 8 *b* il en résulte que 94% du nombre total des mesures se trouvent entre 90 ... 107 mm et la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 100 mm.

$CV(H)$. Dans la fig. 8 *c* on voit que 96% du nombre total des mesures se trouvent entre 45% ... 59% et la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 51%.

L'_{25} et L'_{40}. Les fig. 9 *a* et 9 *b* montrent que pour L'_{25}, 92,5% du nombre total des mesures se trouvent entre 4% ... 10% et la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 6%, pendant que pour L'_{40}, 93% du nombre total des mesures se trouvent entre 10% ... 20% et la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 14,3%.

L' 1% et L' 5%. Les fig. 9 *c* et 9 *d* permettent de conclure que toutes les mesures pour L' 1% se trouvent entre 154 ... 195 mm et la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 170 mm, et que toutes les mesures pour L' 5% se trouvent entre 130 ... 160 mm et la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 145 mm.

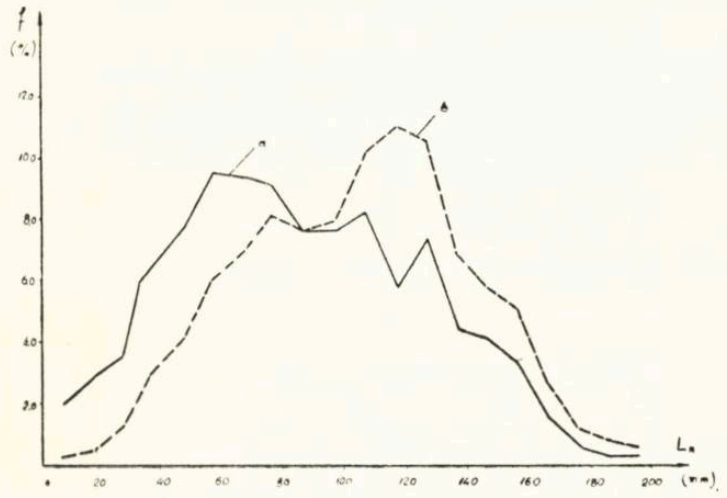


Fig. 5 — Les diagrammes des fréquences de longueur des fibres acryliques-melana. *a* — fréquence en nombre de fibres par classes ; *b* — fréquence en masse des fibres par classes.

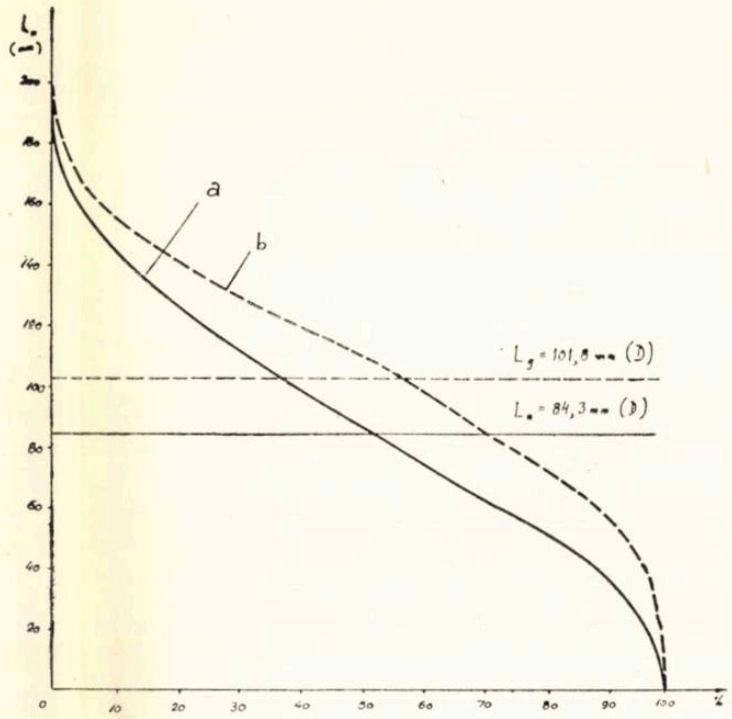


Fig. 6 — Les diagrammes cumulatifs de longueur des fibres acryliques-melana. *a* — fréquence en nombre de fibres par classes ; *b* — fréquence en masse des fibres par classes.

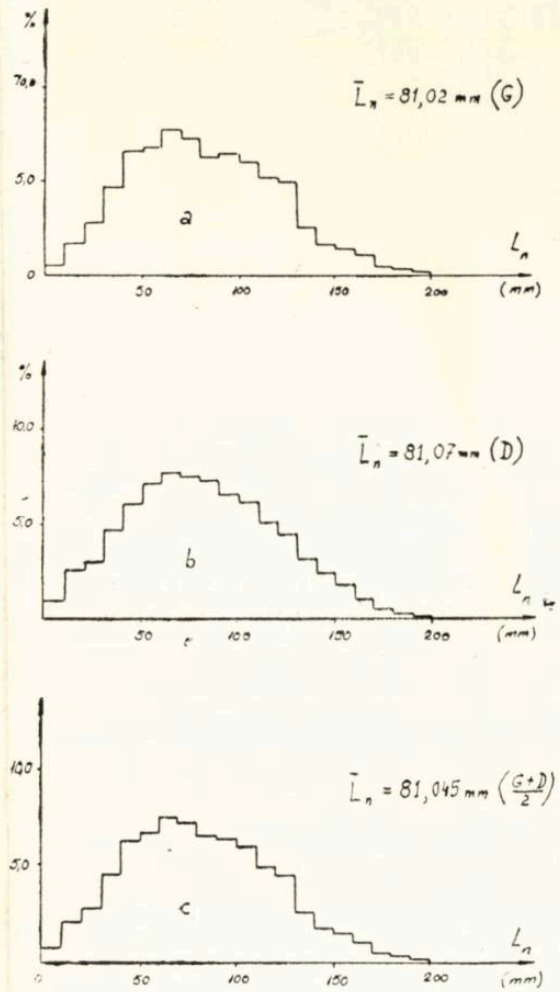


Fig. 7 — Les histogrammes de longueur des fibres acryliques-melana, obtenues par la méthode des fibres individuelles.

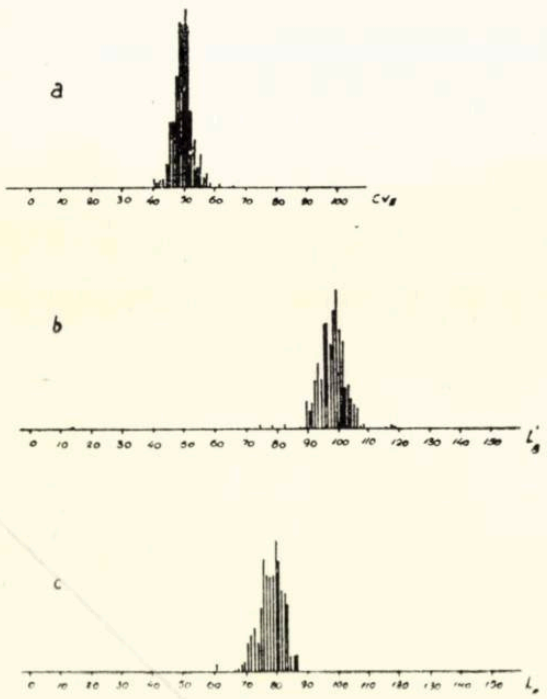


Fig. 8 — La distribution des longueurs moyennes hauteur et barbe et du CV'_H pour les fibres acryliques-melana fabriqées pendant l'année 1968 (appareil ALMETER).

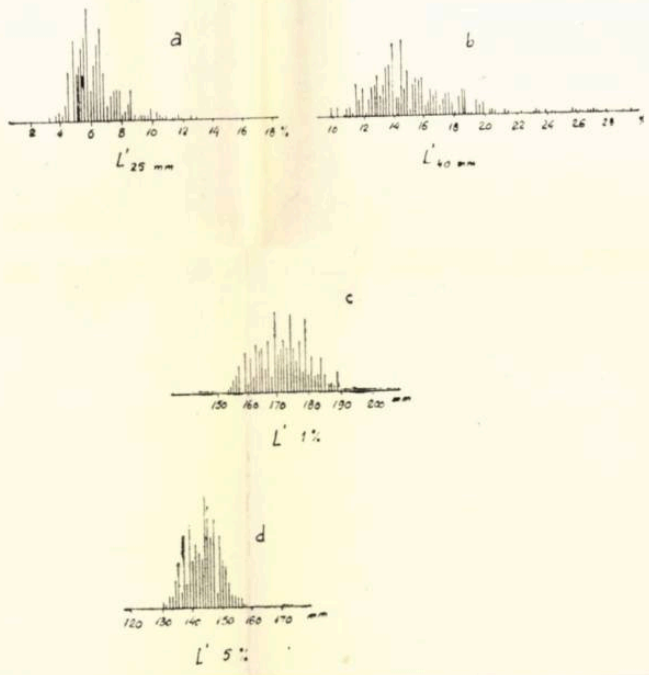


Fig. 9 — La distribution des fibres courtes et longues (acryliques-melana), fabriquées pendant l'année 1968 (appareil ALMETER).

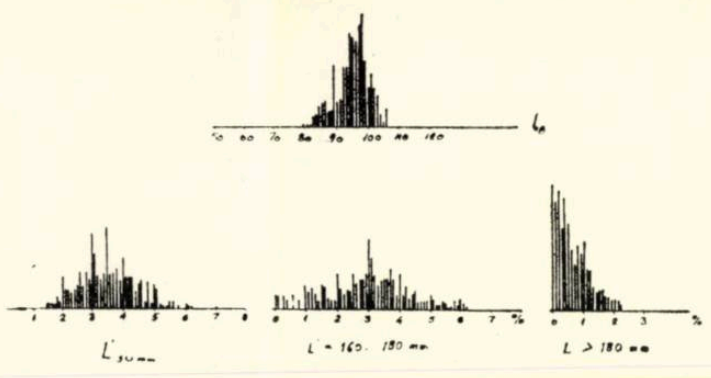


Fig. 10 — La distribution de la longueur des fibres acryliques-melana fabriquées pendant l'année 1968 (appareil à peignes ZWEIGLE REUTLINGEN).

Résultats obtenus avec l'appareil ZWEIGLE

Barbe. Dans la fig. 10 *a* on voit que 94,5% du nombre total des mesures se trouvent entre 85 ... 105 mm et la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 99 mm (la valeur obtenue à l'appareil ALM est 100 mm).

L'_{30}. La fig. 10 *b* montre que 95% du nombre total des mesures pour L'_{30} se trouvent entre 2% ... 6% et la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 3,6%.

Pourcent des fibres de $L' = 160 ... 180$ *mm.* Dans la fig. 10 *c* on voit que 97% du nombre total des mesures se trouvent entre 1% ... 6% et la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 3,1%.

Pourcent des fibres avec $L' > 180$ *mm.* La fig. 10 *d* dénote que cette fois 98% du nombre total des mesures se trouvent entre 0 ... 2% et que la valeur correspondante à la plus grande fréquence est 0,1%.

L'auteur exprime ses sentiments de gratitude envers la Direction des Usines des Fibres Synthétiques de Săvineşti et au collectif de travail du laboratoire textile melana, qui ont manifesté toute leur symphatie pour cettes recherches.

Reçue le 16 X 1969

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Filature

BIBLIOGRAPHIE

1. Bona M., *La distribution de longueur des fibres de laine.* Ann. Scient. Textiles Belges, 1962, *2.*
2. Dillies H., Mazingue G., *La distribution de la longueur des fibres de laine. Comparaison des appareils Schlumberger et ALMETER.* Bull. de l'Inst. Textile de France, mars-avril 1965.
3. Graf V., Henning H. J., *Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen.* Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1952.
4. Greuel M., Henning H. J., *Vergleichende Faserlängenmessungen an Wollkammzügen.* Zeitschrift für die Gesamte Textilindustrie, 1968, *5.*
5. Grignet J., *L'ALMETER, un nouvel appareil électronique pour la mesure de la longueur des fibres de laine.* Ann. Scient. Textiles Belges, 1962, *3.*
6. — *Calcul automatique du diagramme cumulatif de barbe, du CV de barbe, des histogrammes de barbe et de hauteur, à partir des tensions de sortie de l'ALMETER.* Ann. Scient. Textiles, Belges, 1964, *4.*
7. — *Nouveaux compléments à l'appareil ALMETER: la pince automatique motorisé; le calculateur auxiliaire D. B. Computer.* Ann. Scient. Textiles Belges, 1967, *1.*
8. — *La normalisation des mesures de longueur ALMETER par la Fédération Lainière Internationale. Détermination des paramètres de la distribution de longueur des fibres de laine à l'aide de l'appareil ALMETER.* Ann. Scient. Textiles Belges, 1967, *3.*
9. Monfort F., *Aspects scientifiques de l'industrie lainière.* Dunod, Paris, 1960.
10. — *Information expérimentale relative au fonctionnement de l'appareil ALMETER.* Ann. Scient. Textiles Belges, 1964, *1.*
11. — *Examen des résultats de l'expérience de la Fédération Lainière Internationale, „Interlaboratoire Longueur, 1964".* Ann. Scient. Textiles Belges, 1964, *3.*
12. Monfort F., Breny H., *La régression et l'écart type sur la moyenne en analyse Schlumberger de barbe* (I). Ann. Scient. Textiles Belges, 1967, *2.*
13. Netea M., *Metode pentru determinarea lungimii fibrelor de lînă şi tip lînă.* M.I.U., C.D.P.T., Buc., 1970.

14. — *Analiza distribuției lungimii fibrelor de melană obținute din cablu prin procedeul ruperii necontrolate.* M.I.U., C.D.P.T., Buc., 1969.
15. Wagner C. D., *Die Herstellung von Garnen nach den Reisspinnverfahren.* Zeitschrift für die Gesamte Textilindustrie, 1968, *5.*
16. Wegener W., *Die Streckwerke der Spinnereimaschinen.* Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1965.
17. Wegener W., Meister H., *Einfluss des Stapels und des Titers von Chemiefasern auf die Ungleichmässigkeit der Streckenbänder und Garne.* Reyon Zellwolle und andere Chemiefasern, 1958, *8.*
18. Wegener W., Hoth E. G., *Die Überlagerungsmethode zur Bestimmung der idealen Länganvariationsfunktion.* Melliandtextilber., 1963, *44, 237.*
19. Wegener W., Rosemann W., Hoth E. G., *Der Nullpunktausgleich für die Faserlängenverteilung von gekämmter Wolle.* Melliandtextilber., 1965, *8.*
20. Wegener W., Fichtner E., *Faseranzahl-Häufigkeit oder Fasergewicht-Häufigkeit?* Melliandtextilber., 1966, *7.*
21. Wegener W., Ehrler P., *Die Darstellung eines Modell-Faserverbandes mittels eines Computers.* Textil Praxis, 1968, *9.*

CONTRIBUȚII EXPERIMENTALE LA PROBLEMA ANALIZEI DISTRIBUȚIEI LUNGIMII FIBRELOR ACRILICE DE TIP „MELANA"

(Rezumat)

Lucrarea conține o analiză a distribuției lungimii fibrelor acrilice de tip melana, fabricate într-o uzină de fibre sintetice. Benzile au fost obținute prin procedeul ruperii necontrolate, cu mașini Seydel tip 633.

Prima parte a lucrării conține o serie de experiențe comparative, folosind aceeași mostră dintr-un singur lot. Pentru măsurare au fost utilizate fibrografele ALMETER și WFDM, precum și metoda cu două pensete pentru fibre individuale.

Partea a doua a lucrării cuprinde analiza distribuției valorilor medii privind lungimea fibrelor fabricate în decursul anului 1968, folosind fibrografuI ALMETER și aparatul cu piepteni ZWEIGLE—REUTLINGEN.

Explicația figurilor

Fig. 1 — Zona în care se află cele 9 diagrame cumulative a lungimii fibrelor acrilice-melana, efectuate în sensul *G* (stînga), la fibrografuI ALMETER.

Fig. 2 — Zona în care se află cele 9 diagrame cumulative a lungimii fibrelor acrilice-melana, efectuate în sensul *G* (stînga), la fibrografuI WIRA.

Fig. 3 — Zona în care se află cele 9 diagrame cumulative a lungimii fibrelor acrilice-melana, efectuate în sensul *G* (stînga), prin metoda cu două pensete pentru fibre individuale.

Fig. 4 — Diagramele cumulative ale lungimii fibrelor acrilice-melana, comparative pentru cele trei metode folosite: ALM, WFDM și fibre individuale.

Fig. 5 — Diagramele de frecvență a lungimii fibrelor acrilice-melana. *a* — frecvențe după numărul de fibre pe clase; *b* — frecvențe privind masa fibrelor pe clase.

Fig. 6 — Diagramele cumulative ale lungimii fibrelor acrilice-melana. *a* — frecvențe după numărul de fibre pe clase; *b* — frecvențe privind masa fibrelor pe clase.

Fig. 7 — Histogramele de lungime ale fibrelor acrilice-melana, obținute prin metoda fibrelor individuale.

Fig. 8 — Distribuția lungimilor medii de tip L'_H, L'_B și a coeficientului de variație CV'_H pentru fibrele acrilice-melana, fabricate în decursul anului 1968 (aparatul ALMETER).

Fig. 9 — Distribuția fibrelor scurte și a celor lungi (acrilice-melana), fabricate în decursul anului 1968 (aparatul ALMETER).

Fig. 10 — Distribuția lungimii fibrelor acrilice-melana, fabricate în decursul anului 1968 (aparatul cu piepteni ZWEIGLE—REUTLINGEN).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia VI
INDUSTRIE UŞOARĂ

C. Z. 677.66

CONTRIBUŢII LA METODOLOGIA CALCULULUI TRICOTURILOR DE DIFERITE STRUCTURI

DE

EMIL HAGIU, SIDORA PREDA şi MARIA BORŞ

1. Introducere

Este cunoscut faptul că destinaţia unui tricot impune anumite valori pentru parametrii de structură ai acestuia. Cunoaşterea exactă a intervalelor de variaţie a valorilor parametrilor de structură, precum şi interdependenţa acestor parametri ,este unul din factorii care asigură atit proiectarea şi producerea unui tricot în condiţii de eficienţă maximă, cît şi obţinerea de produse cu calităţi corespunzătoare destinaţiei.

Dat fiind importanţa celor două aspecte mai înainte semnalate, numeroşi specialişti s-au ocupat de determinarea valorilor parametrilor de structură pentru diferite categorii de tricoturi, precum şi de stabilirea de relaţii de calcul cît mai exacte pentru aceşti parametri.

Lungimea firului dintr-un ochi, unul dintre parametrii de structură cei mai importanţi, ridică dificultăţi destul de însemnate de calcul, datorită dispunerii firului sau firelor sub formă de curbe spaţiale. Stabilirea relaţiilor de calcul exacte pentru acest parametru are o mare importanţă, deoarece lungimea firului dintr-un ochi determină direct cantitatea de fir necesară pentru producerea unei unităţi de tricot.

A. S. Dalidovici studiază în [1] problema calculului lungimii firului dintr-un ochi şi pentru tricoturile patent şi interloc, însă relaţiile stabilite prezintă unele insuficienţe. Astfel, lungimea firului dintr-un ochi pentru tricoturile patent se calculează în ipoteza dispunerii plane a firului şi în funcţie de lăţimea ochiului. Aceşti doi factori conduc la micşorarea domeniului de valabilitate pentru relaţia stabilită. Relaţiile de calcul pentru parametrii de structură ai tricoturilor interloc prezentate în aceeaşi lucrare şi în mod deosebit lungimea firului dintr-un ochi, nu au o suficientă fundamentare teoretică, fapt ce impietează asupra exactităţii şi a domeniului lor de valabilitate.

G. A. Leaf propune în [2] două modele matematice ale ochiului, ambele bazate pe proprietăţile elastice ale firului. Modelele matematice propuse nu sînt particularizate pentru tricoturi de diferite structuri şi conţin constante determinate în condiţii cu totul particulare sau foarte greu de determinat pe cale practică.

În lucrarea de faţă se stabilesc relaţii de calcul exacte şi general valabile pentru lungimea firului dintr-un ochi pentru tricoturile patent şi interloc, folosind atît ipoteze originale cît şi unele din ipotezele lui G. A. Leaf.

2. Calculul lungimii firului dintr-un ochi pentru tricoturi patent

Tricoturile patent sînt alcătuite din șiruri de ochiuri cu aspect de față și șiruri de ochiuri cu aspect de dos, într-o alternanță oarecare. Alternanța șirurilor de ochiuri de aspecte diferite determină raportul tricotului. Buclele de platină ale tuturor ochiurilor în cazul tricoturilor patent de raport 1:1, sau ale anumitor ochiuri în cazul tricoturilor cu alte rapoarte, traversează grosimea tricotului, realizînd legarea șirurilor de ochiuri cu aspect de față cu șirurile de ochiuri cu aspect de dos. Această poziție particulară a buclelor de platină trebuie luată în considerare la explicarea aspectului de față pe ambele părți ale tricotului și, de asemenea, la stabilirea parametrilor de structură și a principalelor proprietăți.

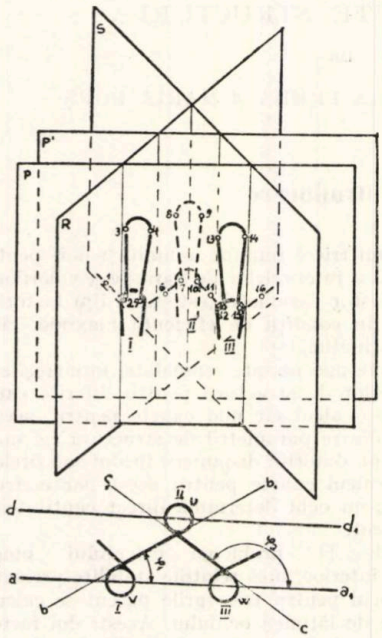


Fig. 1

Fig. 2

În urma analizării dispunerii în spațiu a elementelor ochiurilor unui tricot patent 1:1 după echilibrarea tensiunilor interne (fig. 1) se constată următoarele:

a) flancurile *2—3*, *4—5*, din șirul *I* și *12—13*, *14—15* din șirul *III*, se pot considera ca fiind situate, într-o primă aproximație, într-un plan *P*, paralel cu suprafața tricotului;

b) flancurile *7—8* și *9—10* din șirul *II* se pot considera ca fiind dispuse într-un plan *P'*, paralel cu planul *P* și situat în spatele acestuia;

c) buclele de ac *3—4* din şirul *I*, *13—14* din şirul *III* şi *8—9* din şirul *II* pot fi considerate dispuse în planul *P*, respectiv *P'*;

d) bucla de platină *5—6—7* este situată în planul *R*, iar bucla de platină *10—11—12* în planul *S*.

Planele *R* şi *S* formează cu planul *P* unghiurile φ_1 şi φ_2.

În secţiunea rîndului de ochiuri (fig. 1), dreptele $a - a_1$, $b - b_1$, $c - c_1$ şi $d - d_1$ sînt rezultate din intersecţia planelor *P*, *R*, *S* şi *P'* cu un plan orizontal. Unghiul φ_1 este unghiul dintre dreptele $a - a_1$ şi $b - b_1$, iar φ_2 este unghiul dintre dreptele $a - a_1$ şi $c - c_1$. Din triunghiul isoscel *VUW* se observă că

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1. \tag{1}$$

Situarea buclelor de platină *5—6—7* şi *10—11—12* în planele *R*, respectiv *S* (fig. 1), presupune torsionarea firului în procesul de formare a ochiurilor, cu unghiul γ (fig. 2).

Datorită energiei de deformaţie înmagazinată de fir prin torsionare, în sensuri contrare pentru cele două bucle de platină analizate, ele tind să se rotească astfel încît unghiul de deformaţie γ să fie minim, respectiv unghiurile φ_1 şi φ_2 să atingă valoarea $\pi/2$. Rotirea buclelor de plantină, în sens antiorar a buclei *5—6—7* şi în sens orar a buclei *10—11—12* (fig. 1), se efectuează în jurul unor axe paralele cu direcţia şirurilor de ochiuri ce trec prin punctul *6* şi *11* (fig. 1). Aceasta conduce la o apropiere a şirurilor de ochiuri de pe ambele părţi ale tricotului astfel încît şirurile de ochiuri de pe o parte acoperă şirurile de ochiuri de pe cealaltă parte, tricotul prezentînd aspect de faţă pe ambele părţi.

Valorile teoretice minime ale unghiurile γ, φ_1 şi φ_2 pentru tricoturile patent 1:1, conform fig. 3, se obţin utilizînd triunghiul dreptunghi *VNO*, care dă:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{VN}{NO}, \tag{2}$$

în care $NO = M - \frac{F}{2} - \frac{F}{2}$, $M = 4F$ — grosimea tricotului, F — diametrul aparent al firului, $NO = 3F$ şi $VN = F$. De aici $\operatorname{tg}\gamma = 1/3$ şi atunci, avînd în vedere fig. 3 şi (1):

$$\gamma = 18°26', \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma = 71°34', \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1 = 108°26'. \tag{3}$$

Valorile limită ale unghiurilor γ, φ_1 şi φ_2 sînt $\gamma = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$.

Lungimea firului dintr-un ochi se calculează în ipoteza că toate elementele ochiului se găsesc sub acţiunea acelorași eforturi (tensiuni interne echilibrate) şi drept urmare, aceste elemente se dispun sub forma unor curbe sau segmente de dreaptă spaţiale. Unele elemente, ca de exemplu bucla şi ac şi bucla de platină, se vor considera dispuse în planul tricotului, respectiv în planul *R* sau *S* (fig. 1).

Luînd în considerare dimensiunile cunoscute ale ochiului și anume A, A_c și B, respectiv diametrul aparent al firului F, se obțin pentru elementele ochiului următoarele relații:

a) Lungimea buclei de ac $2-3-4$ (fig. 4) fiind $l_{2-3-4} = \pi d/2$, în care $d = A_c - F$ este diametrul buclei de ac iar $A_c = (4 \dots 5)\,F$ sau mai mult, rezultă

$$l_{2-3-4} = \frac{\pi}{2}(A_c - F). \tag{3}$$

b) Lungimea flancurilor ochiului $1-2$ și $4-5$ (fig. 4) este

$$l_{1-2} = l_{4-5} = \sqrt{B^2 + 2F^2}. \tag{4}$$

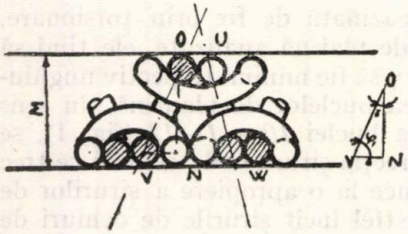


Fig. 3

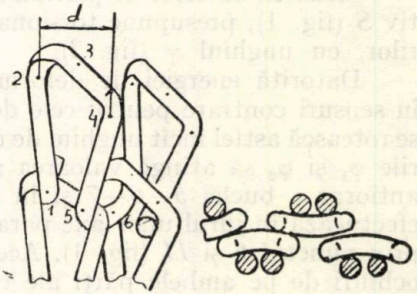


Fig. 4

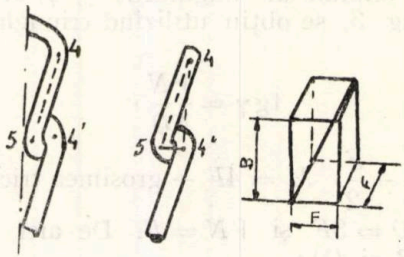


Fig. 5

c) Lungimea buclei de platină $5-6-7$ se obține din fig. 4, $l_{5-6-7} = \frac{\pi}{2}OV$, dar $OV = \sqrt{ON^2 + VN^2}$, $ON = 3F$, $VN = F$ și atunci $OV = \sqrt{10}\,F$, de unde

$$l_{5-6-7} = \frac{\pi}{2}\sqrt{10}\,F. \tag{5}$$

Relația generală de calcul a lungimii firului dintr-un ochi va fi $l = l_{1-2} + l_{2-3-4} + l_{4-5} + l_{5-6-7}$, în care înlocuind pe (3)...(5) se obține

$$l = \frac{\pi}{2}\left[(A_c - F) + F\sqrt{10}\right] + 2\sqrt{B^2 + 2F^2}, \tag{6}$$

sau

$$l = 1{,}57\ A_c + 3{,}39\ F + 2\sqrt{B^2 + 2F^2}. \tag{7}$$

Pentru simplificarea calculelor se poate uneori neglija termenul $2F^2$ de sub radical, formula lungimii firului dintr-un ochi devenind

$$l = 1{,}57\ A_c + 3{,}39\ F + 2B. \tag{8}$$

Relația de calcul a lungimii firului dintr-un ochi stabilită de A. S. Dalidovici pentru tricoturile patent are forma

$$l = \pi\left(\frac{a}{2} + F\right) + 2B, \tag{9}$$

în care este a este lățimea ochiului.

Calculul lungimii firului dintr-un ochi pentru tricoturi patent cu alte rapoarte decît 1 : 1 trebuie efectuat avînd în vedere evoluția particulară a firului la aceste tricoturi. În acest caz se întîlnesc ochiuri caracteristice tricotului patent 1 :1 și ochiuri caracteristice tricotului simplu (glat). Lungimea firului dintr-un ochi se calculează ca o medie ponderată a celor două lungimi distincte,

$$l = \frac{nl_p + ml_g}{n + m}, \tag{10}$$

în care l_g este lungimea firului dintr-un ochi pentru tricotul glat (în acest caz se calculează în funcție de A_c) ; l_p — lungimea firului dintr-un ochi pentru tricotul patent ; n, m, — numărul de ochiuri patent, respectiv glat, din raport.

3. Calculul lungimii firului dintr-un ochi pentru tricoturi interloc

Modelul matematic de calcul a lungimii firului dintr-un ochi pentru tricotul interloc de raportul 1 :1 are la bază următoarele ipoteze : a) șirurile de ochiuri alăturate sînt deplasate pe verticală unele față de altele cu jumătate din înălțimea B a ochiului ; b) toate elementele ochiului se găsesc sub acțiunea acelorași eforturi (tensiuni interne echilibrate) ; c) deformațiile firelor în punctele de legare sînt uniforme.

Vom aproxima forma reală a jumătății ochiului, considerînd arcele de curbe spațiale $P'_1P'_2$, $P'_2P'_3$, P'_3P_4 așezate pe un cilindru eliptic (C) a cărui ecuație față de un sistem ortogonal $Oxyz$ este :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{11}$$

Folosind relaţia cunoscută de calcul a grosimii tricotului produs din bumbac

$$M=\frac{7{,}2\sqrt{\text{tex}}}{31{,}6}, \tag{12}$$

s-a obţinut pentru a valoarea 2,38 F, F fiind diametrul aparent al firului. În baza unor serii de observaţii practice autorii au dedus pentru b valoarea $2F$.

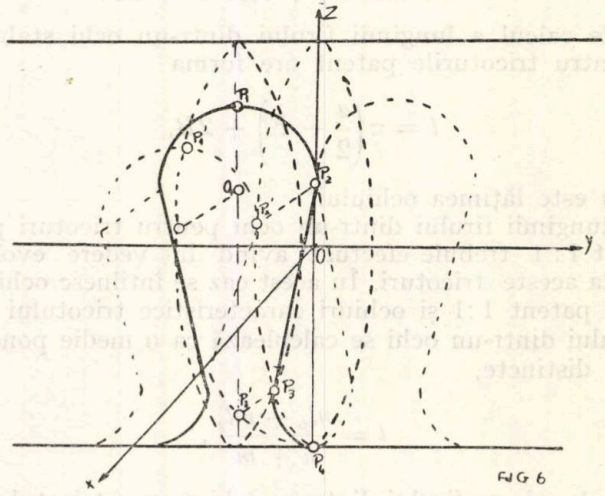


Fig. 6

Presupunem că proiecţiile ortogonale ale punctelor P'_1, P'_2, P'_3 şi P'_4 pe planul yOz sînt punctele $P_1\,(0,-A/2,\ A)$, $P_2\ (0,\ 0,\ A/2)$, $P_3\ (0,\ (F-A)/2,\ (A-2B)/2)$, $P_4\ (0,\ 0,\ -b)$, coordonatele lor fiind calculate în ipoteza că $OO_1=OP_2=OP_1=A/2$, unde A este pasul ochiului şi $O_1\ (0,\ -A/2,\ A/2)$.

Astfel, arcul $P'_1P'_2$ are ecuaţiile:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,\quad \left(y+\frac{A}{2}\right)^2+\left(z-\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}=0, \tag{13}$$

unde:

$$a\sqrt{1-\frac{A^2}{4b^2}}\leqslant x\leqslant a\sqrt{1-\frac{A^2}{b^2}},\quad -\frac{A}{2}\leqslant y\leqslant 0,\quad \frac{A}{2}\leqslant z\leqslant A. \tag{14}$$

Arcele $P'_2P'_3$ şi P'_3P_4 se consideră rezultate din intersecţia cilindrului eliptic (11) cu planele perpendiculare pe yOz ce trec prin punctele P_2 şi P_3, respectiv P_3 şi P_4. Ecuaţiile lor sînt respectiv

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \quad 4By+2(F-A)\,z=A(F-A), \tag{15}$$

unde

$$a\sqrt{1-\frac{A^2}{4B^2}}\leqslant x\leqslant a\sqrt{1-\frac{(A-2B)^2}{4b^2}}, \tag{16}$$

$$\frac{F-A}{2}\leqslant y\leqslant 0, \quad \frac{A}{2}-B\leqslant z\leqslant\frac{A}{2}$$

şi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \quad (A-F)\,x+2a\sqrt{1-\frac{(A-2B)^2}{4b^2}}\,y=0, \tag{17}$$

în care

$$0\leqslant x\leqslant a\sqrt{1-\frac{(A-2B)^2}{4b^2}}, \quad \frac{F-A}{2}\leqslant y\leqslant 0, \quad -b\leqslant z\leqslant\frac{A}{2}-B. \tag{18}$$

Pentru calculul lungimilor acestor arce, s-a recurs la dezvoltări în serie Mac-Laurin limitate la primii doi termeni pentru se a putea determina valorile aproximative ale integralelor eliptice care intervin. S-a obţinut următoarea relaţie pentru lungimea firului dintr-un ochi:

$$\begin{aligned} l=&\left(\frac{b^2-a^2}{2b^2}+0{,}174\right)A-\frac{a^2}{2b}\ln\left|\frac{(A-b)\,(A-2B+2b)}{(A+b)\,(A-2B-2b)}\right|+\\ &+2B-\frac{a^2}{b^2}\,B+\frac{(F-A)^2}{4B}+\frac{a}{b}\sqrt{4b^2-(A-2B)^2}\times\\ &\times\left\{1+\frac{b^2(F-A)^2}{2a^2[4b^2-(A-2B)^2]}-\frac{b^2}{2a^2}\right\}-\frac{b^2}{2a}\ln\left|\frac{\sqrt{4b^2-(A-2B)^2}-2b}{\sqrt{4b^2-(A-2B)^2}+2b}\right|-\\ &-\frac{b^2}{2a}\sqrt{4b^2-(A-2B)^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

4. Rezultate experimentale

4.1. Probe practice

Pentru verificarea relaţiilor de calcul stabilite, în laboratoarele catedrei au fost produse 30 variante de tricoturi patent avînd diferite rapoarte, din fire de natură şi finete diferită şi 3 variante de tricot interloc. Pentru

mostrele executate s-au măsurat valorile parametrilor: D_0', D_0'', D_{0c}, D_0, D_v, l, G. S-au efectuat între 20 și 50 determinări pentru fiecare parametru, valorile lor medii fiind prezentate în tabelele 1 și 2.

În aceleași tabele sînt trecute și valorile calculate ale parametrilor C (coeficientul desimilor) și l (lungimea ochiului) cu relațiile stabilite în lucrare și G (greutatea pe m.p.) cu relațiile uzuale:

$$G(g/m^2) = \frac{0{,}4\,(D_0' + D_0'')\,D_v\,l\,\text{tex}}{1000}, \qquad G(g/m^2) = \frac{0{,}8\,D_0\,D^2\,l\,\text{tex}}{1000}.$$

4.2. Interpretarea rezultatelor

Analizînd rezultatele din coloana 17, tabelul 1, rezultate care prezintă abaterile procentuale ale lungimii firului dintr-un ochi calculat față de lungimea măsurată, se constată că pentru tricoturile patent de raport 1:1 produse din fire de bumbac abaterile sînt sub limitele indicate în literatura de specialitate (media abaterilor este sub +4%), indiferent de coeficientul desimilor. Acest lucru atestă valabilitatea relației de calcul stabilită, confirmînd ipotezele calculului. Se menționează faptul că la unele variante de tricot desimile s-au modificat prin modificarea tensiunii de alimentare a firelor și a avansului fazei buclării a acelor unei fonturi față de acele celeilalte, ceea ce a condus la valori sub limită pentru coeficientul desimilor (de exemplu varianta *6*) sau peste limită, prin modificarea tensiunii de tragere a tricotului (varianta *15* din tabelul 1).

Dacă în calcule se utilizează relația (8), media abaterilor este mai mică. Cu relația (9) a lui A. S. Dalidovici, se obțin rezultate mai apropiate de datele practice în ipoteza că lățimea ochiului a este egală cu pasul ochiului convențional A_c. Această ipoteză nu este valabilă pentru toate cazurile, de pildă pentru valori ale pasului convențional mai mari decît $5F$.

Rezultatele calculelor pentru tricoturile patent 1:1 produse din fire P.A.N. normale nu sînt suficient de concludente. Pentru firele utilizate de noi se constată abateri în plus de aproximativ 16% a lungimii calculate a firului dintr-un ochi, față de lungimea măsurată. La tricoturile patent 2:2 produse din fire P.A.N. de asemenea nu s-au obținut rezultate apropiate de datele practice. Acest lucru se explică pe de o parte prin așezarea specifică a ochiurilor în stare liberă, ceea ce influențează direct desimea, iar pe de altă parte prin proprietățile firului folosit.

Un fapt interesant se constată la tricoturile patent de rapoarte neregulate, 2:1, 3:1, 4:1, etc. Cu cît evoluția firului se apropie mai mult de evoluția firului la tricotul glat (crește numărul ochiurilor caracteristice tricotului glat în raportul tricotului patent), cu atît tricotul se prezintă dimensional mai stabil și se pot aplica relațiile de calcul stabilite. Se evidențiază faptul că relațiile stabilite în această lucrare pentru calculul lungimii firului dintr-un ochi țin seama de caracterul particular al evoluției firului sau firelor la tricotul patent.

Tabelul 1

Nr. crt.	Denumirea tricotului	Natura şi finețea firului	F mm	Parametrii de structură măsuraţi								Parametrii de structură calculaţi					Abateri col $\left(\frac{13-10}{13}\right)$ 100
				D_0'	D_0''	D_{oc}	D_v	A_c	B	l	G	C	G	$l_{rel.12}$	$l_{rel.13}$	$l_{rel.14}$	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1				37,4	37,4	37,4	37,4	1,338	1,338	5,335	120	1,0	119	5,419	5,357	5,331	+ 1,56
2				38	38	38	39,5	1,318	1,268	5,139	125,8	0,96	126	5,212	5,168	4,836	+ 1,4
3				37,8	37,8	37,8	40,3	1,32	1,24	5,05	123,8	0,94	124	5,199	5,149	5,01	+ 2,72
4				38,85	38,85	38,85	45,2	1,28	1,108	4,65	130,9	0,86	130	4,913	4,965	4,756	+ 5,3
5				37,6	37,6	37,6	49,4	1,33	1,013	4,48	130,5	0,762	132,8	4,77	4,715	4,668	+ 5,97
6				38	38	38	57	1,318	0,87	4,101	140	0,668	142,2	4,452	4,326	4,376	+ 7,9
7				36,55	36,55	36,55	39,05	1,37	1,28	5,08	118,6	0,935	116	5,373	5,309	5,268	+ 5,38
8				36,3	36,3	36,3	40,75	1,38	1,228	4,95	114,6	0,817	114,2	5,264	5,22	5,176	+ 5,82
9				37,3	37,3	37,3	44,5	1,34	1,122	4,59	120	0,838	121,5	5,00	4,948	4,904	+ 8,1
1	Tricot			37,35	37,35	37,35	39,6	1,34	1,262	5,14	121	0,943	121,5	5,28	5,22	4,864	+ 2,65
11				38,05	38,05	38,05	40,75	1,315	1,228	5,01	120,8	0,936	124,5	5,160	5,116	5,105	+ 2,82
12	patent	Bumbac în amestec 2 × 10 tex	$F = \frac{1,25\sqrt{20}}{31,6} = 0,7768$	39	39	39	41,8	1,28	1,19	4,82	127	0,932	125,5	5,069	5,022	4,978	+ 4,95
13				39,1	39,1	39,1	40,65	1,27	1,229	4,89	122	0,96	124	5,1	5,067	5,028	+ 4,16
14	1 : 1			38,45	38,45	38,45	39,3	1,3	1,272	4,95	121	0,978	120	5,22	5,183	5,144	+ 4,9
15				38,7	38,7	38,7	38,15	1,28	1,312	5,011	120	1,015	118,4	5,28	5,238	5,189	+ 5,1
16				38,35	38,35	38,35	38,05	1,306	1,315	5,06	118,5	1,008	118,2	5,31	5,270	5,23	+ 4,65
17				42,1	42,1	42,1	51,05	1,18	0,97	4,22	144,4	0,825	145,5	4,48	4,419	4,378	+ 5,6
18				39,6	39,6	39,6	41,2	1,26	1,213	4,86	125,2	0,963	127,2	5,05	5,00	4,951	+ 3,76
19				37,3	37,3	37,3	37,75	1,34	1,325	5,3	118	0,988	119,5	5,397	5,357	5,31	+ 1,74
20				28,6	28,6	28,6	41,6	1,75	1,2	5,53	505,4	0,688	526	6,87	6,59	6,5	+19,48
21				26,36	26,36	26,36	30,6	1,9	1,63	6,73	432,3	0,86	433	7,9	7,7	7,6	+14,8
22				22,85	22,85	22,85	25,5	2,19	1,96	7,58	378,8	0,898	354	8,99	8,81	8,73	+15,65
23				21,45	21,45	21,45	25	2,33	2	7,87	347,7	0,859	338	9,31	9,13	9	+15,45
24	Tricot			29,8	29,8	44,7	28,3	1,109	1,76	7,42	537,7	1,58	500	6,76	6,66	6,61	− 9,74
25	patent			31,8	31,8	47,7	31,3	1,04	1,65	7,18	538	1,525	570	6,443	6,335	6,28	−11,45
26	2 : 2			33,2	33,2	49,8	36,05	1,00	1,38	6,53	631,6	1,382	625	5,93	5,807	5,69	−10
27	Tricot patent 2 :1			33	17,5	33,7	31,5	1,48	1,58	7,32	434,5	1,07	465	7,068	6,912	6,751	− 3,57
28	Tricot patent 3 :1			32	11,5	32,7	42	1,52	1,19	5,72	418,8	0,77	418	6,37	6,22	6,12	+10,4
29				39	14	39,8	42	1,25	1,19	5,64	443	0,948	500	5,83	5,69	5,6	+ 3,25
30	Tricot patent 4 :1	P. A. N. 2 × 2 × 25 tex	$F = 0,428$	32	9	32,8	37	1,52	1,35	6,4	387,7	0,888	388	6,587	6,485	6,44	+ 2,84

Tabelul 2

Nr. crt.	Denumirea tricotului	Natura firului	F mm	Parametrii de structură măsuraţi						Parametrii de structură calculaţi				Abateri col $\left(\frac{12-8}{12}\right)$
				D_0	D_v	A mm	B mm	G g	l mm	C	G g	$l_{gen.}$ mm	l mm	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Interloc	Bum-		59,2	67,88	0,565	0,492	207,5	3,22	0,871	190	3,55	3,1	−3,87
2	1 : 1	bac	0,125	58,2	70,7	0,565	0,465	203,9	3,06	0,822	193	3,49	3,08	+0,57
3		19 tex		59,2	72,2	0,565	0,463	215,1	3,16	0,82	196	3,32	3,00	+5,3

5. Concluzii

1. Verificînd experimental relaţia de calcul stabilită pentru lungimea firului dintr-un ochi la tricoturile interloc 1 : 1, s-a constatat că rezultatele sînt mult mai apropiate de datele practice decît cele obţinute cu relaţia empirică a lui A. S. Dalidovici, ceea ce apare evident prin compararea coloanelor 8, 11 şi 12 din tabelul 2. Relaţia generală stabilită aici are avantajul că poate fi particularizată în funcţie de natura şi fineţea firelor prelucrate şi de destinaţia tricotului, prin explicitare în raport cu coeficientul desimilor şi coeficientul de umplere liniar. Prin explicitare se obţine o relaţie directă şi operativă de calcul ce uşurează sensibil munca de proiectare industrială a tricoturilor.

2. Relaţiile de calcul stabilite aici au o mare importanţă practică în condiţiile unei activităţi planificate, care cere o evaluare riguroasă a cantităţilor de materii prime necesare pentru o perioadă dată. Ţinînd seama de faptul că lungimea firului dintr-un ochi este parametrul care determină în principal consumul de fir pentru producerea unei anumite cantităţi de tricot, apare evidentă necesitatea ca acest parametru să fie cît mai exact determinat pentru evitarea anomaliilor în aprovizionarea cu materii prime.

Primit la 5 X 1969

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tricotaje şi confecţii

BIBLIOGRAFIE

1. Далидович А. С., *Основы теории трикотажа.* М., 1948.
2. Leaf G. A. V., *Models of the Plain-Knitted Loop.* J. of the Text. Inst., Trans., februar 1960, p. 49.

CONTRIBUTIONS À LA MÉTHODOLOGIE DU CALCUL DES TRICOTS CÔTÉ ET INTERLOCK

(Résumé)

Dans la première partie de l'étude on établie des relations de calcul pour la longeur du fil d'une maille pour les tricots côté et interlock, tenant compte de la disposition réelle du fil dans le tricot. Ainsi, pour le tricot côté on prend en considération la disposition particulière de la boucle de platine et pour le tricot interlock on considère la maille disposée sur un cylindre éliptique.

Dans la deuxième partie, on vérifie la validité des relations établies par des mesures des parametres de structure pour 33 variantes de tricot.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secția VI
INDUSTRIE UȘOARĂ

C. Z. 677.6

ASUPRA REZISTENȚEI ÎMBINĂRILOR PRIN COASERE REALIZATE CU AJUTORUL CUSĂTURILOR ELASTICE CU PATRU ȘI CINCI FIRE

DE

I. POTORAN, C. PREDA, S. MITU și C. BUDULAN

1. Introducere

Atît în procesul de confecționare cît și în timpul purtării produselor de îmbrăcăminte, îmbinările prin coasere sînt supuse unor solicitări mecanice complexe care duc fie la ruperea cusăturii, fie la ruperea materialelor textile asamblate. În cele mai frecvente cazuri, aceste solicitări produc modificări în structurile cusăturilor sau a materialelor textile.

Principalele solicitări la care sînt supuse îmbinările prin coasere sînt: întinderea, compresiunea și încovoierea. Acestea pot acționa continuu, periodic sau accidental.

Solicitarea la întindere este cel mai des întîlnită. Ea poate acționa asupra îmbinărilor prin coasere după mai multe direcții: pe direcția lungimii cusăturii, a lățimii cusăturii sau pe o direcție intermediară primelor două. La îmbinările prin coasere cu ajutorul cusăturilor elastice cu patru și cinci fire, se recomandă ca între alungire și sarcina la rupere a detaliilor din tricot și alungirea și sarcina la rupere a cusăturii ,să existe o anumită corespondență și anume: a) alungirea cusăturii trebuie să aibă o valoare apropiată de valoarea corespunzătoare alungirii tricotului; pentru cusături ideale, alungirea cusăturii trebuie să fie egală cu alungirea tricotului; b) rezistența cusăturii trebuie să fie mai mică sau cel mult egală cu rezistența tricotului.

Datorită elasticității tricoturilor, îmbinările prin coasere a detaliilor din tricoturi care sînt supuse diferitelor solicitări mecanice, prezintă unele aspecte deosebit de interesante. Aceste aspecte vor fi prezentate în continuare pentru îmbinările realizate cu ajutorul cusătorilor elastice cu patru fire (fig. 1) și a cusăturilor elastice cu cinci fire (fig. 5).

În cazul cusăturii elastice cu patru fire, îmbinarea cea mai utilizată este cea prezentată în fig. 2: aici este îmbinată bentița *1* confecționată dintr-un tricot patent cu detaliul *2* al diferitelor produse de îmbrăcăminte.

2. Rezultatele cercetării

Pentru studierea comportării acestor tipuri de îmbinări solicitate la întindere se pot confecționa epruvete care apoi sînt încercate pe dinamometrul pentru țesături și tricoturi, conform STAS 6752—63. Cercetările

au fost făcute pentru îmbinări realizate prin coasere cu ață de cusut din bumbac pieptănat 12 tex × 3. Cele două detalii asamblate au fost confecționate din tricot patent 1 : 1 și tricot interloc simplu, realizate cu fire din bumbac pieptănat de finețe 19 tex. Pentru a evidenția modificările dimensionale ale cusăturii precum și valorile corespunzătoare sarcinii la rupere și alungirii la rupere ale îmbinării funcție de tensiunea aplicată firelor din cusătură, au fost confecționate două tipuri de probe: „tip *A*", la care tensiunea firelor este considerată „normală", astfel încît cusătura să aibă forma ca în fig. 1 sau fig. 5; „tip *B*", la care tensiunea firelor acelor

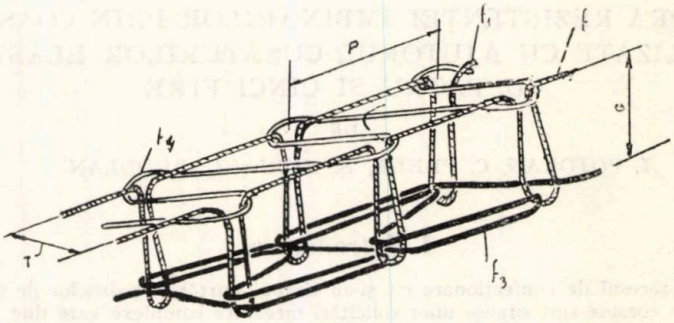


Fig. 1

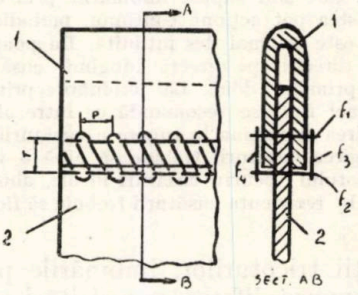


Fig. 2

este micșorată în așa fel încît buclele firelor acelor să-și mărească lungimea cu cca 1/3 *P*.

Au fost efectuate încercări pe dinamometru ținînd seama de direcția forțelor de întindere în raport cu lungimea sau lățimea cusăturii.

În cazul solicitării la întindere în direcția lungimii cusăturii (fig. 3 *a*) au fost înregistrate modificări importante privind mărimile corespunzătoare pasului cusăturii (*P*) și lățimii cusăturii (*T*). Astfel, pasul cusăturii crește cu cca 50%...68% iar lățimea cusăturii scade cu cca 33%...43% în raport cu mărimile inițiale. Se produce mai întîi ruperea cusăturii și

apoi ruperea materialelor (tabelul 1). Primele ruperi se produc la nivelul firelor acelor (f_1 şi f_2). Uneori apar ruperi ale firului lapucătorului (f_3) în punctele de contact cu firele celor două ace. Nu au fost însă înregistrate ruperi ale firului de acoperire (f_4).

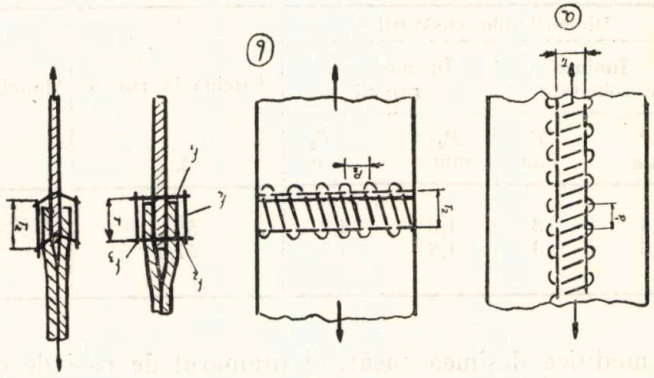


Fig. 3

Tabelul 1

Tipul probei	Dimensiunile cusăturii				Sarcina la rupere kgf		Alungirea la rupere mm	
	Înainte de solicitare		În momentul ruperii					
	P mm	T mm	P_1 mm	T_1 mm	cusătură	material	cusătură	material
A	2,5	3	3,7	2	16	34,5	47	68
B	2,5	3	4,2	1,7	27,5	36	59	73

Din datele prezentate în tabelul 1 rezultă că rezistenţa îmbinărilor la care tensiunea firelor acelor este mai mică decît cea „normală" (probe tip B) este superioară rezistenţei îmbinărilor la care tensiunea firelor acelor este „normală" (probe tip A). Acest lucru se poate explica prin faptul că la probele tip A extensibilitatea cusăturilor fiind mai mică, firele din cusătură acţionează asupra materialului lărgind orificiile făcute în material de către ace. Prin lărgirea acestor orificii are loc o slăbire accentuată a rezistenţei materialului şi deci şi a îmbinării prin coasere.

În cazul solicitării la întindere pe direcţia lăţimii cusăturii (fig. 3 b) se produc ruperi ale materialului în dreptul orificiilor executate în material de către acele de cusut. De asemenea se poate constata micşorarea pasului cusăturii cu cca 36%... 40% şi creşterea lăţimii cusăturii cu cca 38% ... 50% faţă de mărimile iniţiale.

În tabelul 2 sînt indicate modificările dimensiunilor cusăturilor precum şi valorile corespunzătoare sarcinii la rupere şi alungirii la rupere a îmbinărilor.

Tabelul 2

Tipul probei	Dimensiunile cusăturii				Sarcina la rupere	Alungirea la rupere
	Înainte de solicitare		În momentul ruperii			
	P mm	T mm	P_2 mm	T_2 mm	kgf	mm
A	2,5	3	1,6	4,2	55	43
B	2,5	3	1,5	4,5	57,5	49

Cînd se modifică desimea cusăturii (numărul de paşi de cusătură pe 50 mm), pentru îmbinările solicitate la întindere pe direcţia lungimii cusăturii se înregistrează valori diferite ale sarcinii la rupere a îmbinărilor. Cu cît numărul de paşi de cusătură pe 50 mm (N_P /50 mm) este mai mare cu atît creşte şi rezistenţa cusăturii R_c (fig. 4), în timp ce rezistenţa materialului R_M devine mai mică.

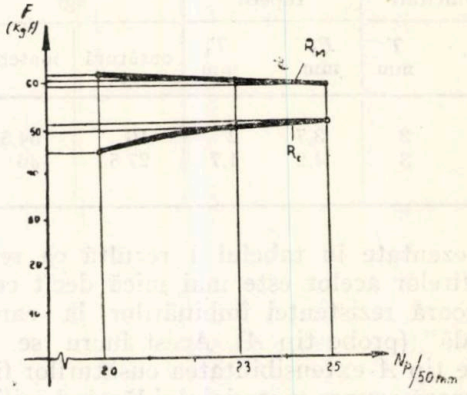


Fig. 4

Spre deosebire de cusătura elastică cu patru fire (fig. 1), cusătura elastică cu cinci fire (fig. 5) permite realizarea unui număr mai mare de îmbinări dintre care cele mai utilizate sînt prezentate în fig. 6. În cazul îmbinării din fig. 6 *a*, cele două straturi de material (*1* şi *2*) sînt legate de firul acului din mijloc (f_2). Firele acelor marginale (f_1 şi f_3) străpung numai un singur

strat iar marginile celor două straturi de materiale sînt acoperite de firul apucătorului (f_4) și firul de acoperire superior (f_5).

Sub acțiunea unor forțe paralele cu suprafața de îmbinare, care solicită îmbinarea la întindere, datorită decalării liniilor mediane $y_1 y_1'$ și $y_2 y_2'$ (fig. 6 *a*), rezultă o rotire a suprafeței de îmbinare, cu atît mai pronunțată cu cît grosimea materialelor care se cos este mai mare.

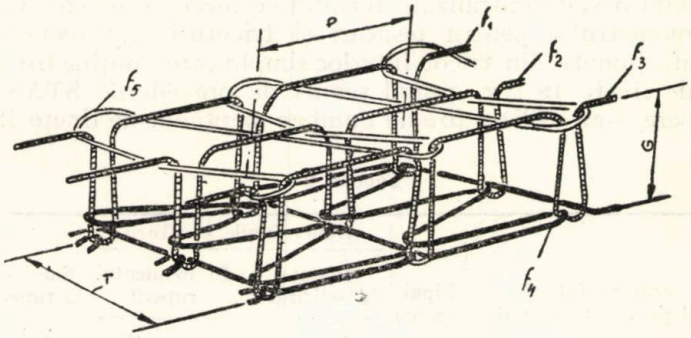


Fig. 5

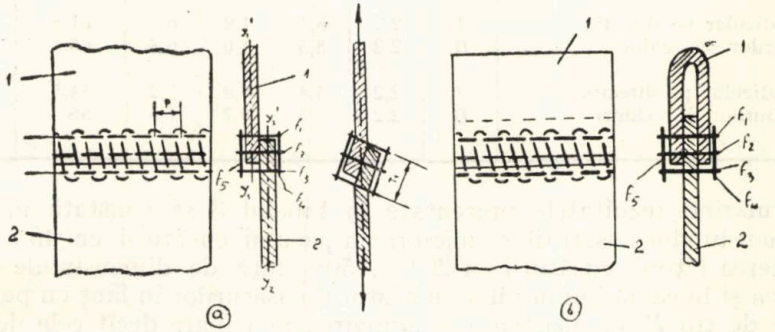


Fig. 6

Analizînd ceea ce se întîmplă cu materialele îmbinate supuse la întindere se constată o distribuție neuniformă a liniilor de forță, care se concentrează în dreptul orificiilor executate în materiale de către cele trei ace. Din această cauză materialele se pot sfîșia.

Simultan cu rotirea suprafeței de îmbinare are loc și o ușoară alunecare a straturilor de material. Acest lucru este posibil datorită alungirii firelor din cusătură și comprimării materialului în zona orificiilor executate de ace. Alunecarea straturilor de material determină deplasarea orificiilor făcute de acul mijlociu, firul f_2 fiind supus unei solicitări de forfecare. Concomitent cu forfecarea, în timpul solicitărilor repetate, are loc alunecarea ației prin

material care dînd loc la frecări ale firelor cu materialele îmbinate, micșorează rezistența îmbinării.

Experimentările făcute au scos în evidență rezultate diferite privind modificările dimensiunilor cusăturii și ale rezistenței îmbinării pentru cazurile cînd cusătura este executată perpendicular pe direcția șirurilor de ochiuri ale tricotului și cînd cusătura este executată perpendicular pe direcția rîndurilor de ochiuri ale tricotului.

În tabelul 3 sînt centralizate rezultatele încercărilor efectuate cu ajutorul dinamometrului pentru țesături și tricoturi. Epruvetele (fig. 6 *a*) au fost confecționate din tricot interloc simplu care conține fire de bumbac pieptănat de finețe 19 tex, ținînd seama de prevederile STAS 6752—63. Pentru coasere, s-au utilizat fire de bumbac pieptănat de finețe 12 tex × 3.

Tabelul 3

Direcția cusăturii față de rîndurile și șirurile tricotului	Tipul probei	Dimensiunile cusăturii				Sarcina la rupere kgf	Alungirea la rupere mm
		Înainte de solicitare		În momentul ruperii			
		P mm	T mm	P_2 mm	T_2 mm		
Perpendicular pe direcția șirurilor de ochiuri	*A*	2,2	5,5	1,2	6	61,5	65,5
	B	2,2	5,5	1,0	6,5	65	70,5
Perpendicular pe direcția rîndurilor de ochiuri	*A*	2,2	5,5	0,9	7,2	54,5	79
	B	2,2	5,5	0,7	7,5	56	85

Urmărind rezultatele prezentate în tabelul 3 se constată modificări ale dimensiunilor cusăturilor: micșorarea pasului cusăturii cu 45% ... 65% și creșterea lățimii cusăturii cu 20% ... 50% față de dimensiunile inițiale. La fel ca și în cazul îmbinărilor cu ajutorul cusăturilor în lanț cu patru fire, probele de tip *B* au rezistența și alungirea mai mare decît cele de tip *A*. De asemenea apar diferențe între valorile înregistrate pentru sarcina la rupere și alungirea la rupere funcție de direcția cusăturii în raport cu rîndurile și șirurile de ochiuri ale tricotului. Extensibilitatea tricotului în lungime este mai mică decît cea în lățime iar sarcina la care este supusă cusătura este suportată în bună parte de tricot, deformațiile produse în structura cusăturii fiind mai mici.

Pentru același tip de îmbinare (fig. 6 *a*), atunci cînd forțele de întindere acționează pe o direcție paralelă cu direcția cusăturii, s-a constatat: creșterea pasului cusăturii cu peste 50% față de mărimea inițială; micșorarea lățimii cusăturii cu peste 40% față de mărimea inițială; ruperea cusăturii la sarcini foarte mici comparativ cu sarcina la rupere a materialelor textile îmbinate prin coasere.

Ruperile cusăturilor s-au inregistrat în special pentru firele celor trei ace, valorile corespunzătoare sarcinii la rupere şi alungirii la rupere pentru probele tip A fiind următoarele: $F = 19$ kgf şi $\Delta l = 58$ mm pentru îmbinările la care cusăturile au fost executate perpendicular pe direcţia şirurilor de ochiuri ale tricotului şi $F = 17{,}5$ kgf şi $\Delta l = 65$ mm pentru îmbinările la care cusăturile au fost executate perpendicular pe direcţia rîndurilor de ochiuri.

În foarte puţine cazuri s-a observat că simultan cu ruperea firelor acelor (f_1, f_2 şi f_3) se produce şi ruperea firului apucătorului (f_4). Nu au fost înregistrate ruperi ale firului de acoperire (f_5).

Pentru îmbinarea prezentată în fig. 6 *b* au fost efectuate încercări privind determinarea rezistenţei atunci cînd cusătura este solicitată la întindere pe direcţia lungimii sale, rezultatele fiind centralizate în tabelul 4. Materialele îmbinate au fost: tricot patent 1 : 1 şi tricot interloc simplu, din aceleaşi materiale ca şi în cazul îmbinărilor cu ajutorul cusăturilor cu patru fire (îmbinarea I_1 din tabelul 4); tricot patent 1 : 1 şi tricot vanisat căptuşit (îmbinarea I_2 din tabelul 4).

Tabelul 4

Îmbinarea	Tipul probei	Dimensiunile cusăturii				Sarcina la rupere kgf		Alungirea la rupere mm	
		În momentul ruperii		Înainte de solicitare					
		P mm	T mm	P_1 mm	T_1 mm	cusătură	material	cusătura	material
I_1	A	2,17	5,5	3,25	3	17,5	43,5	54	80
	B	2,17	5,5	3,5	2,7	19	45	59	83
I_2	A	2,17	5,5	3,3	3	21,5	38,5	60,5	142,5
	B	2,17	5,5	3,7	2,5	23,5	39	66	148

Funcţie de materialele îmbinate au fost înregistrate valori diferite ale sarcinii la rupere şi ale alungirii la rupere. Astfel la îmbinările I_2, valorile corespunzătoare sarcinii la rupere a cusăturii sînt mai mari decît la îmbinările I_1.

3. Concluzii

1. În urma cercetărilor efectuate asupra rezistenţei la purtare a unui mare număr de produse confecţionate din tricoturi, s-a constatat că alungirile tricoturilor nu depăşesc 50% din valoarea corespunzătoare alungirilor la rupere. Pe baza acestei constatări se poate recomanda ca alegerea parametrilor de coasere să se facă în aşa fel încît alungirile cusăturilor să fie egale cu cca 50% din valoarea alungirii la rupere a tricotului solicitat pe o direcţie perpendiculară pe şirurile de ochiuri.

2. Pentru obţinerea unor îmbinări de calitate corespunzătoare se mai recomandă:

a) reglarea presiunii exercitate asupra materialelor care se îmbină de către picioruşul de presare, pentru ca forţa de presare să nu depăşească limitele de 400 ... 800 gf;

b) dotarea maşinilor de cusut cu patru şi cinci fire cu un transportor diferenţial;

c) reglarea corespunzătoare a înălţimii dinţilor transportorului, funcţie de grosimile materialelor care se cos;

c) mărirea elasticităţii cusăturii, prin micşorarea tensiunii firelor acelor, la fel ca în cazul probelor tip *B*;

d) alegerea corespunzătoare a mărimii pasului cusăturii în aşa fel încît numărul de paşi cuprinşi pe o lungime a cusăturii de 50 mm să nu depăşească limitele cuprinse între 20 ... 25 paşi.

Primit la 19 X 1969

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tricotaje şi confecţii

BIBLIOGRAFIE

1. Nicolaev N., *Tehnologia confecţionării tricotajelor.* Ed. tehn., Buc., 1950, p. 279.
2. Cociu V., *Tehnologia confecţiilor din piele.* EDP., Buc., 1965, pp. 277–282.

О СОПРОТИВЛЕНИИ ШВЕЙНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫХ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛАСТИЧНЫХ ШВОВ С ЧЕТЫРЬМЯ И ПЯТЬЮ НИТЯМИ

(Резюме)

Во время швейного процесса и эксплоатации, швейные соединения осуществляемые в виду соединения деталей одежды можно подвергать ряду механических действий: растягиванию, сжатию, изгибу. Из них, сопротивление растяжению в разных направлениях является самым частым, так как оно вызывает существенные изменения как в структуре швов так и в структуре соединённых матерялов.

Работа рассматривает влияние многочисленных факторов на швейные соединения деталей одежды, изготовленных из трикотажа, как например: структуры швов, основных объёмных элементов швов (шага, ширины, толщины), физико-механические свойства нитей, составляющих швы, структура и физико-механические свойства соединённых путъём вышивки, матерялов, технологические параметры швейного процесса, вид действий, направления сил, действующих на швейные соединения и др. В работе изложены изменения, появляющиеся в структуре швов для соединений, подвергнутых растягиванию в определённых паравлениях и условиях натяжения нитей в швейном процессе.

В конце работы приведены сведения о мерах которые можно принять для получения соединений соответствующего качества.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia VI
INDUSTRIE UŞOARĂ

C. Z. 677

CONTRIBUŢII LA INTENSIFICAREA PROCESULUI DE VOPSIRE CU AJUTORUL CÎMPULUI ELECTRIC DE ÎNALTĂ FRECVENŢĂ

DE

FLORIN VĂLU, ELIZA PUŞCAŞU, EMIL HANGANU şi N. MÎNDREA

1. Introducere

Prin intensificare, pe lîngă reducerea duratei proceselor şi îmbunătăţirea proprietăţilor produselor, se pot realiza noi procese — inaccesibile pe alte căi — sau variante mixte ale proceselor existente.

Procesul de vopsire după cum rezultă din literatura de specialitate [1], poate fi intensificat pe cale chimică (cu ajutorul electroliţilor şi a agenţilor chimici de dispersie), pe cale termică (prin ridicarea temperaturii, respectiv vopsirea la temperaturi de peste 100°C) [2], prin procedee mecanice (agitare cu diferite dispozitive) [3], prin procedee fizice (cîmpuri ultrasonore, şocuri de presiune) [4] sau variante mixte ale unor asemenea procedee (acţiunea termohidrodinamică în strat fluidizat) [5].

În lucrarea de faţă s-a cercetat intensificarea procesului de vopsire la temperaturi joase, prin acţiunea cîmpului electric de înaltă frecvenţă asupra ţesăturilor foarte groase, pentru care vopsirile pătrunse — în profunzimea suportului textil — sînt greu realizabile din cauza coeficienţilor mici de difuziune. Experimentările au fost conduse într-un domeniu de frecvenţă de 4500 ... 5500 kHz, superior celui menţionat în literatura de specialitate [6], [7].

În toate procesele de intensificare pe baza mecanismului procesului de vopsire [8] — care constă în difuziunea colorantului din soluţie spre suprafaţa exterioară a fibrei, difuziunea colorantului de la suprafaţa exterioară a fibrei în interiorul acesteia, adsorbţia la suprafaţa interioară a fibrei şi fixarea pe această suprafaţă — se ţine seama de faptul că difuziunea în interiorul fibrei este mai mică decît difuziunea în soluţie datorită rezistenţelor determinate de reţeaua spaţială a macromoleculelor fibrei şi de asemenea de interacţiunea chimică între colorant şi fibră. Difuziunea colorantului în interiorul fibrei este condiţionată de faptul că în perioada iniţială a vopsirii pe suprafaţa fibrei se formează un strat de colorant de

concentraţie mai ridicată [9] care determină colorantul să difuzeze de la periferie spre centrul ei.

Totodată stratul concentrat consituie o barieră pe care particulele de colorant din soluţie trebuie s-o învingă pentru a intra în fibră.

Ca în orice proces de transfer de căldură sau de masă — în cazul nostru difuziunea colorantului în fibră — prin aplicarea procedeelor mecanice sau fizice de intensificare stratul limită interfacial este continuu modificat ca structură, subţiat sau distrus sub acţiunea hidrodinamică a soluţiei. Ca urmare a modificării factorilor hidrodinamici din soluţia de colorant, procesul de vopsire este intensificat.

Pornind de la acţiunea hidrodinamică similară de intensificare pe cale mecanică şi pe cale fizică [4], autorii au extins analogia între acţiunea cîmpului ultrasonor şi a cîmpului electric de înaltă frecvenţă asupra stratului limită.

Prin aplicarea cîmpului electric de înaltă frecvenţă în afară de acţiunea directă asupra stratului concentrat de la interfaţa material textil-soluţie, mai au loc procese de dispersare a colorantului, deci de uniformizare a soluţiei şi de degazare a materialului textil, care contribuie la creşterea coeficientului de difuziune a colorantului în fibră.

Materialul textil aşezat între plăcile condensatorului generatorului de înaltă frecvenţă este supus unei acţiuni perpendiculare a cîmpului electric de înaltă frecvenţă, care are un efect superior de modificare a formări şi structurii stratului limită decît acţiunea paralelă cu stratul de material textil. Alternanţa schimbării polarităţii cîmpului electric de înaltă frecvenţă favorizează formarea unui strat mai puţin compact şi asigură o mai bună dispersare şi uniformizare a soluţiei de colorant. Frecvenţa schimbării polarităţii cîmpului electric de înaltă frecvenţă influenţează decisiv cele trei procese: de modificare a structurii stratului concentrat, de dispersare şi de degazare, ceea ce are ca rezultat o mai bună pătrundere a colorantului în fibră.

Concomitent cu aceste procese are loc şi încălzirea materialului textil dintre plăcile condensatorului de înaltă frecvenţă, datorită pierderilor în dielectric. Apariţia căldurii în urma pierderilor dielectrice se explică prin schimbarea periodică a orientării ionilor ce nu pot urma cu exactitate frecvenţa de schimbare a cîmpului din cauza frecării interne [10]. La intensificarea procesului de vopsire contribuie şi această căldură atît sub forma cunoscută de activare termică, cît şi prin eliberarea gazelor incluse în soluţie şi în materialul textil.

Izolarea acţiunii termice, determinată de cîmpul electric de înaltă frecvenţă s-a realizat prin conducerea determinărilor la durate scurte ale procesului de vopsire şi la temperaturi joase în comparaţie cu cele uzuale de vopsire, deşi reducerea temperaturii influenţează negativ procesul de difuziune al colorantului în fibră datorită asocierii acestuia în soluţie. La temperaturi mici adsorbţia colorantului de către fibră este mai mare şi deci posibilitatea formării unui strat mai concentrat şi mai gros este avantajată în detrimentul difuziunii în fibră. Temperaturile joase favorizează

Relația generală de calcul a lungimii firului dintr-un ochi va fi $l = l_{1-2} + l_{2-3-4} + l_{4-5} + l_{5-6-7}$, în care înlocuind pe (3)...(5) se obține

$$l = \frac{\pi}{2}[(A_c - F) + F\sqrt{10}] + 2\sqrt{B^2 + 2F^2}, \tag{6}$$

sau

$$l = 1{,}57\ A_c + 3{,}39\ F + 2\sqrt{B^2 + 2F^2}. \tag{7}$$

Pentru simplificarea calculelor se poate uneori neglija termenul $2F^2$ de sub radical, formula lungimii firului dintr-un ochi devenind

$$l = 1{,}57\ A_c + 3{,}39\ F + 2B. \tag{8}$$

Relația de calcul a lungimii firului dintr-un ochi stabilită de A. S. Dalidovici pentru tricoturile patent are forma

$$l = \pi\left(\frac{a}{2} + F\right) + 2B, \tag{9}$$

în care este a este lățimea ochiului.

Calculul lungimii firului dintr-un ochi pentru tricoturi patent cu alte rapoarte decît 1 : 1 trebuie efectuat avînd în vedere evoluția particulară a firului la aceste tricoturi. În acest caz se întîlnesc ochiuri caracteristice tricotului patent 1 :1 și ochiuri caracteristice tricotului simplu (glat). Lungimea firului dintr-un ochi se calculează ca o medie ponderată a celor două lungimi distincte,

$$l = \frac{nl_p + ml_g}{n + m}, \tag{10}$$

în care l_g este lungimea firului dintr-un ochi pentru tricotul glat (în acest caz se calculează în funcție de A_c) ; l_p — lungimea firului dintr-un ochi pentru tricotul patent ; n, m, — numărul de ochiuri patent, respectiv glat, din raport.

3. Calculul lungimii firului dintr-un ochi pentru tricoturi interloc

Modelul matematic de calcul a lungimii firului dintr-un ochi pentru tricotul interloc de raportul 1 :1 are la bază următoarele ipoteze : a) șirurile de ochiuri alăturate sînt deplasate pe verticală unele față de altele cu jumătate din înălțimea B a ochiului ; b) toate elementele ochiului se găsesc sub acțiunea acelorași eforturi (tensiuni interne echilibrate) ; c) deformațiile firelor în punctele de legare sînt uniforme.

Vom aproxima forma reală a jumătății ochiului, considerînd arcele de curbe spațiale $P'_1P'_2$, $P'_2P'_3$, P'_3P_4 așezate pe un cilindru eliptic (C) a cărui ecuație față de un sistem ortogonal $Oxyz$ este :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{11}$$

Folosind relația cunoscută de calcul a grosimii tricotului produs din bumbac

$$M=\frac{7{,}2\sqrt{\text{tex}}}{31{,}6}, \tag{12}$$

s-a obținut pentru a valoarea 2,38 F, F fiind diametrul aparent al firului. În baza unor serii de observații practice autorii au dedus pentru b valoarea $2F$.

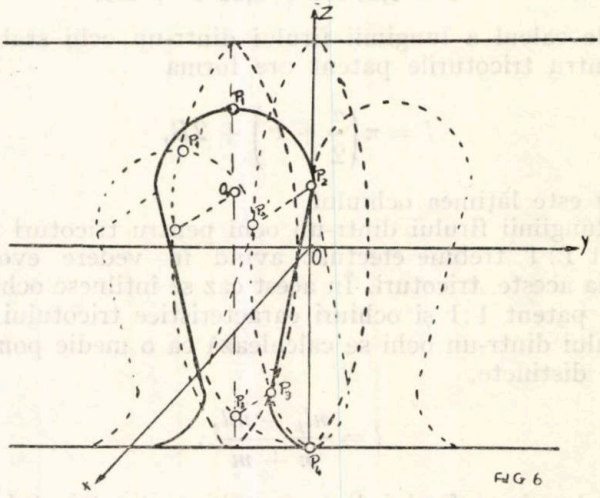


Fig. 6

Presupunem că proiecțiile ortogonale ale punctelor P'_1, P'_2, P'_3 și P'_4 pe planul yOz sînt punctele $P_1(0,-A/2, A)$, P_2 $(0, 0, A/2)$, P_3 $(0, (F-A)/2, (A-2B)/2)$, P_4 $(0, 0, -b)$, coordonatele lor fiind calculate în ipoteza că $OO_1 = OP_2 = OP_1 = A/2$, unde A este pasul ochiului și O_1 $(0, -A/2, A/2)$.

Astfel, arcul $P'_1P'_2$ are ecuațiile:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \quad \left(y+\frac{A}{2}\right)^2+\left(z-\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}=0, \tag{13}$$

unde:

$$a\sqrt{1-\frac{A^2}{4b^2}}\leqslant x\leqslant a\sqrt{1-\frac{A^2}{b^2}}, \quad -\frac{A}{2}\leqslant y\leqslant 0, \quad \frac{A}{2}\leqslant z\leqslant A. \tag{14}$$

Arcele $P'_2P'_3$ şi P'_3P_4 se consideră rezultate din intersecţia cilindrului eliptic (11) cu planele perpendiculare pe yOz ce trec prin punctele P_2 şi P_3, respectiv P_3 şi P_4. Ecuaţiile lor sînt respectiv

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \quad 4By+2(F-A)\,z=A(F-A), \tag{15}$$

unde

$$a\sqrt{1-\frac{A^2}{4B^2}}\leqslant x\leqslant a\sqrt{1-\frac{(A-2B)^2}{4b^2}}, \tag{16}$$

$$\frac{F-A}{2}\leqslant y\leqslant 0, \quad \frac{A}{2}-B\leqslant z\leqslant\frac{A}{2}$$

şi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \quad (A-F)\,x+2a\sqrt{1-\frac{(A-2B)^2}{4b^2}}\,y=0, \tag{17}$$

în care

$$0\leqslant x\leqslant a\sqrt{1-\frac{(A-2B)^2}{4b^2}}, \quad \frac{F-A}{2}\leqslant y\leqslant 0, \quad -b\leqslant z\leqslant\frac{A}{2}-B. \tag{18}$$

Pentru calculul lungimilor acestor arce, s-a recurs la dezvoltări în serie Mac-Laurin limitate la primii doi termeni pentru se a putea determina valorile aproximative ale integralelor eliptice care intervin. S-a obţinut următoarea relaţie pentru lungimea firului dintr-un ochi:

$$\begin{aligned} l=&\left(\frac{b^2-a^2}{2b^2}+0{,}174\right)A-\frac{a^2}{2b}\ln\left|\frac{(A-b)\,(A-2B+2b)}{(A+b)\,(A-2B-2b)}\right|+\\ &+2B-\frac{a^2}{b^2}\,B+\frac{(F-A)^2}{4B}+\frac{a}{b}\sqrt{4b^2-(A-2B)^2}\times\\ &\times\left\{1+\frac{b^2(F-A)^2}{2a^2[4b^2-(A-2B)^2]}-\frac{b^2}{2a^2}\right\}-\frac{b^2}{2a}\ln\left|\frac{\sqrt{4b^2-(A-2B)^2}-2b}{\sqrt{4b^2-(A-2B)^2}+2b}\right|-\\ &-\frac{b^2}{2a}\sqrt{4b^2-(A-2B)^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

4. Rezultate experimentale

4.1. Probe practice

Pentru verificarea relaţiilor de calcul stabilite, în laboratoarele catedrei au fost produse 30 variante de tricoturi patent avînd diferite rapoarte, din fire de natură şi fineţe diferită şi 3 variante de tricot interloc. Pentru

mostrele executate s-au măsurat valorile parametrilor: D'_0, D''_0, D_{0c}, D_0, D_v, l, G. S-au efectuat între 20 și 50 determinări pentru fiecare parametru, valorile lor medii fiind prezentate în tabelele 1 și 2.

În aceleași tabele sînt trecute și valorile calculate ale parametrilor C (coeficientul desimilor) și l (lungimea ochiului) cu relațiile stabilite în lucrare și G (greutatea pe m.p.) cu relațiile uzuale:

$$G(\mathrm{g/m^2}) = \frac{0{,}4\,(D'_0 + D''_0)\,D_v\,l\,\mathrm{tex}}{1000}, \qquad G(\mathrm{g/m^2}) = \frac{0{,}8\,D_0\,D^2\,l\,\mathrm{tex}}{1000}.$$

4.2. Interpretarea rezultatelor

Analizînd rezultatele din coloana 17, tabelul 1, rezultate care prezintă abaterile procentuale ale lungimii firului dintr-un ochi calculat față de lungimea măsurată, se constată că pentru tricoturile patent de raport 1:1 produse din fire de bumbac abaterile sînt sub limitele indicate în literatura de specialitate (media abaterilor este sub +4%), indiferent de coeficientul desimilor. Acest lucru atestă valabilitatea relației de calcul stabilită, confirmînd ipotezele calculului. Se menționează faptul că la unele variante de tricot desimile s-au modificat prin modificarea tensiunii de alimentare a firelor și a avansului fazei buclării a acelor unei fonturi față de acele celeilalte, ceea ce a condus la valori sub limită pentru coeficientul desimilor (de exemplu varianta *6*) sau peste limită, prin modificarea tensiunii de tragere a tricotului (varianta *15* din tabelul 1).

Dacă în calcule se utilizează relația (8), media abaterilor este mai mică. Cu relația (9) a lui A. S. Dalidovici, se obțin rezultate mai apropiate de datele practice în ipoteza că lățimea ochiului a este egală cu pasul ochiului convențional A_c. Această ipoteză nu este valabilă pentru toate cazurile, de pildă pentru valori ale pasului convențional mai mari decît $5F$.

Rezultatele calculelor pentru tricoturile patent 1:1 produse din fire P.A.N. normale nu sînt suficient de concludente. Pentru firele utilizate de noi se constată abateri în plus de aproximativ 16% a lungimii calculate a firului dintr-un ochi, față de lungimea măsurată. La tricoturile patent 2:2 produse din fire P.A.N. de asemenea nu s-au obținut rezultate apropiate de datele practice. Acest lucru se explică pe de o parte prin așezarea specifică a ochiurilor în stare liberă, ceea ce influențează direct desimea, iar pe de altă parte prin proprietățile firului folosit.

Un fapt interesant se constată la tricoturile patent de rapoarte neregulate, 2:1, 3:1, 4:1, etc. Cu cît evoluția firului se apropie mai mult de evoluția firului la tricotul glat (crește numărul ochiurilor caracteristice tricotului glat în raportul tricotului patent), cu atît tricotul se prezintă dimensional mai stabil și se pot aplica relațiile de calcul stabilite. Se evidențiază faptul că relațiile stabilite în această lucrare pentru calculul lungimii firului dintr-un ochi țin seama de caracterul particular al evoluției firului sau firelor la tricotul patent.

Tabelul 1

Nr. crt.	Denumirea tricotului	Natura şi finețea firului	F mm	Parametrii de structură măsuraţi								Parametrii de structură calculaţi					Abateri $\text{col}\left(\frac{13-10}{13}\right)100$
				D_0'	D_0''	D_{oc}	D_v	A_c	B	l	G	C	G	$l_{rel.12}$	$l_{rel.13}$	$l_{rel.14}$	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1				37,4	37,4	37,4	37,4	1,338	1,338	5,335	120	1,0	119	5,419	5,357	5,331	+ 1,56
2				38	38	38	39,5	1,318	1,268	5,139	125,8	0,96	126	5,212	5,168	4,836	+ 1,4
3				37,8	37,8	37,8	40,3	1,32	1,24	5,05	123,8	0,94	124	5,199	5,149	5,01	+ 2,72
4				38,85	38,85	38,85	45,2	1,28	1,108	4,65	130,9	0,86	130	4,913	4,965	4,756	+ 5,3
5				37,6	37,6	37,6	49,4	1,33	1,013	4,48	130,5	0,762	132,8	4,77	4,715	4,668	+ 5,97
6				38	38	38	57	1,318	0,87	4,101	140	0,668	142,2	4,452	4,326	4,376	+ 7,9
7				36,55	36,55	36,55	39,05	1,37	1,28	5,08	118,6	0,935	116	5,373	5,309	5,268	+ 5,38
8				36,3	36,3	36,3	40,75	1,38	1,228	4,95	114,6	0,817	114,2	5,264	5,22	5,176	+ 5,82
9				37,3	37,3	37,3	44,5	1,34	1,122	4,59	120	0,838	121,5	5,00	4,948	4,904	+ 8,1
1	Tricot			37,35	37,35	37,35	39,6	1,34	1,262	5,14	121	0,943	121,5	5,28	5,22	4,864	+ 2,65
11				38,05	38,05	38,05	40,75	1,315	1,228	5,01	120,8	0,936	124,5	5,160	5,116	5,105	+ 2,82
12	patent			39	39	39	41,8	1,28	1,19	4,82	127	0,932	125,5	5,069	5,022	4,978	+ 4,95
13				39,1	39,1	39,1	40,65	1,27	1,229	4,89	122	0,96	124	5,1	5,067	5,028	+ 4,16
14	1 : 1			38,45	38,45	38,45	39,3	1,3	1,272	4,95	121	0,978	120	5,22	5,183	5,144	+ 4,9
15				38,7	38,7	38,7	38,15	1,28	1,312	5,011	120	1,015	118,4	5,28	5,238	5,189	+ 5,1
16				38,35	38,35	38,35	38,05	1,306	1,315	5,06	118,5	1,008	118,2	5,31	5,270	5,23	+ 4,65
17				42,1	42,1	42,1	51,05	1,18	0,97	4,22	144,4	0,825	145,5	4,48	4,419	4,378	+ 5,6
18				39,6	39,6	39,6	41,2	1,26	1,213	4,86	125,2	0,963	127,2	5,05	5,00	4,951	+ 3,76
19		Bumbac în amestec 2 × 10 tex	$F = \frac{1,25\sqrt{20}}{31,6} = 0,7768$	37,3	37,3	37,3	37,75	1,34	1,325	5,3	118	0,988	119,5	5,397	5,357	5,31	+ 1,74
20				28,6	28,6	28,6	41,6	1,75	1,2	5,53	505,4	0,688	526	6,87	6,59	6,5	+19,48
21				26,36	26,36	26,36	30,6	1,9	1,63	6,73	432,3	0,86	433	7,9	7,7	7,6	+14,8
22				22,85	22,85	22,85	25,5	2,19	1,96	7,58	378,8	0,898	354	8,99	8,81	8,73	+15,65
23				21,45	21,45	21,45	25	2,33	2	7,87	347,7	0,859	338	9,31	9,13	9	+15,45
24	Tricot			29,8	29,8	44,7	28,3	1,109	1,76	7,42	537,7	1,58	500	6,76	6,66	6,61	− 9,74
25	patent			31,8	31,8	47,7	31,3	1,04	1,65	7,18	538	1,525	570	6,443	6,335	6,28	−11,45
26	2 : 2			33,2	33,2	49,8	36,05	1,00	1,38	6,53	631,6	1,382	625	5,93	5,807	5,69	−10
27	Tricot patent 2 :1			33	17,5	33,7	31,5	1,48	1,58	7,32	434,5	1,07	465	7,068	6,912	6,751	− 3,57
28	Tricot patent 3 :1			32	11,5	32,7	42	1,52	1,19	5,72	418,8	0,77	418	6,37	6,22	6,12	+10,4
29				39	14	39,8	42	1,25	1,19	5,64	443	0,948	500	5,83	5,69	5,6	+ 3,25
30	Tricot patent 4 :1	P. A. N. 2 × 2 × 25 tex	$F = 0,428$	32	9	32,8	37	1,52	1,35	6,4	387,7	0,888	388	6,587	6,485	6,44	+ 2,84

Tabelul 2

Nr. crt.	Denumirea tricotului	Natura firului	F mm	Parametrii de structură măsuraţi						Parametrii de structură calculaţi				Abateri $\text{col}\left(\frac{12-8}{12}\right)$
				D_0	D_v	A mm	B mm	G g	l mm	C	G g	$l_{gen.}$ mm	l mm	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Interloc	Bum-		59,2	67,88	0,565	0,492	207,5	3,22	0,871	190	3,55	3,1	−3,87
2	1 : 1	bac	0,125	58,2	70,7	0,565	0,465	203,9	3,06	0,822	193	3,49	3,08	+0,57
3		19 tex		59,2	72,2	0,565	0,463	215,1	3,16	0,82	196	3,32	3,00	+5,3

5. Concluzii

1. Verificînd experimental relaţia de calcul stabilită pentru lungimea firului dintr-un ochi la tricoturile interloc 1 : 1, s-a constatat că rezultatele sînt mult mai apropiate de datele practice decît cele obţinute cu relaţia empirică a lui A. S. Dalidovici, ceea ce apare evident prin compararea coloanelor 8, 11 şi 12 din tabelul 2. Relaţia generală stabilită aici are avantajul că poate fi particularizată în funcţie de natura şi fineţea firelor prelucrate şi de destinaţia tricotului, prin explicitare în raport cu coeficientul desimilor şi coeficientul de umplere liniar. Prin explicitare se obţine o relaţie directă şi operativă de calcul ce uşurează sensibil munca de proiectare industrială a tricoturilor.

2. Relaţiile de calcul stabilite aici au o mare importanţă practică în condiţiile unei activităţi planificate, care cere o evaluare riguroasă a cantităţilor de materii prime necesare pentru o perioadă dată. Ţinînd seama de faptul că lungimea firului dintr-un ochi este parametrul care determină în principal consumul de fir pentru producerea unei anumite cantităţi de tricot, apare evidentă necesitatea ca acest parametru să fie cît mai exact determinat pentru evitarea anomaliilor în aprovizionarea cu materii prime.

Primit la 5 X 1969

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tricotaje şi confecţii

BIBLIOGRAFIE

1. Далидович А. С., *Основы теории трикотажа*. М., 1948.
2. Leaf G. A. V., *Models of the Plain-Knitted Loop*. J. of the Text. Inst., Trans., februar 1960, p. 49.

CONTRIBUTIONS À LA MÉTHODOLOGIE DU CALCUL DES TRICOTS CÔTÉ ET INTERLOCK

(Résumé)

Dans la première partie de l'étude on établie des relations de calcul pour la longeur du fil d'une maille pour les tricots côté et interlock, tenant compte de la disposition réelle du fil dans le tricot. Ainsi, pour le tricot côté on prend en considération la disposition particulière de la boucle de platine et pour le tricot interlock on considère la maille disposée sur un cylindre éliptique.

Dans la deuxième partie, on vérifie la validité des relations établies par des mesures des parametres de structure pour 33 variantes de tricot.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia VI
INDUSTRIE UŞOARĂ

C. Z. 677.6

ASUPRA REZISTENŢEI ÎMBINĂRILOR PRIN COASERE REALIZATE CU AJUTORUL CUSĂTURILOR ELASTICE CU PATRU ŞI CINCI FIRE

DE

I. POTORAN, C. PREDA, S. MITU şi C. BUDULAN

1. Introducere

Atît în procesul de confecţionare cît şi în timpul purtării produselor de îmbrăcăminte, îmbinările prin coasere sînt supuse unor solicitări mecanice complexe care duc fie la ruperea cusăturii, fie la ruperea materialelor textile asamblate. În cele mai frecvente cazuri, aceste solicitări produc modificări în structurile cusăturilor sau a materialelor textile.

Principalele solicitări la care sînt supuse îmbinările prin coasere sînt: întinderea, compresiunea şi încovoierea. Acestea pot acţiona continuu, periodic sau accidental.

Solicitarea la întindere este cel mai des întîlnită. Ea poate acţiona asupra îmbinărilor prin coasere după mai multe direcţii: pe direcţia lungimii cusăturii, a lăţimii cusăturii sau pe o direcţie intermediară primelor două. La îmbinările prin coasere cu ajutorul cusăturilor elastice cu patru şi cinci fire, se recomandă ca între alungire şi sarcina la rupere a detaliilor din tricot şi alungirea şi sarcina la rupere a cusăturii ,să existe o anumită corespondenţă şi anume: a) alungirea cusăturii trebuie să aibă o valoare apropiată de valoarea corespunzătoare alungirii tricotului; pentru cusături ideale, alungirea cusăturii trebuie să fie egală cu alungirea tricotului; b) rezistenţa cusăturii trebuie să fie mai mică sau cel mult egală cu rezistenţa tricotului.

Datorită elasticităţii tricoturilor, îmbinările prin coasere a detaliilor din tricoturi care sînt supuse diferitelor solicitări mecanice, prezintă unele aspecte deosebit de interesante. Aceste aspecte vor fi prezentate în continuare pentru îmbinările realizate cu ajutorul cusătorilor elastice cu patru fire (fig. 1) şi a cusăturilor elastice cu cinci fire (fig. 5).

În cazul cusăturii elastice cu patru fire, îmbinarea cea mai utilizată este cea prezentată în fig. 2: aici este îmbinată bentiţa *1* confecţionată dintr-un tricot patent cu detaliul *2* al diferitelor produse de îmbrăcăminte.

2. Rezultatele cercetării

Pentru studierea comportării acestor tipuri de îmbinări solicitate la întindere se pot confecţiona epruvete care apoi sînt încercate pe dinamometrul pentru ţesături şi tricoturi, conform STAS 6752—63. Cercetările

au fost făcute pentru îmbinări realizate prin coasere cu aţă de cusut din bumbac pieptănat 12 tex × 3. Cele două detalii asamblate au fost confecţionate din tricot patent 1 : 1 şi tricot interloc simplu, realizate cu fire din bumbac pieptănat de fineţe 19 tex. Pentru a evidenţia modificările dimensionale ale cusăturii precum şi valorile corespunzătoare sarcinii la rupere şi alungirii la rupere ale îmbinării funcţie de tensiunea aplicată firelor din cusătură, au fost confecţionate două tipuri de probe: „tip *A*", la care tensiunea firelor este considerată „normală", astfel încît cusătura să aibă forma ca în fig. 1 sau fig. 5; „tip *B*", la care tensiunea firelor acelor

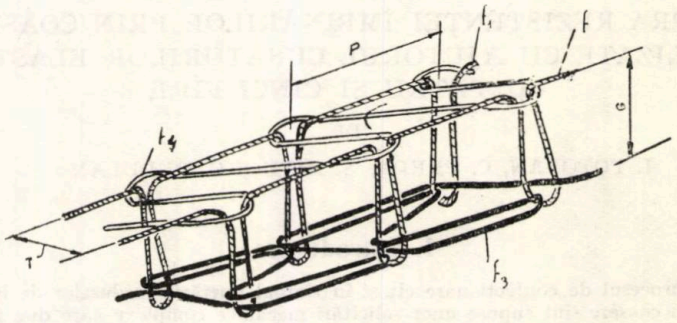


Fig. 1

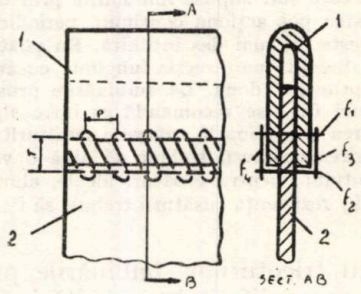


Fig. 2

este micşorată în aşa fel încît buclele firelor acelor să-şi mărească lungimea cu cca 1/3 *P*.

Au fost efectuate încercări pe dinamometru ţinînd seama de direcţia forţelor de întindere în raport cu lungimea sau lăţimea cusăturii.

În cazul solicitării la întindere în direcţia lungimii cusăturii (fig. 3 *a*) au fost înregistrate modificări importante privind mărimile corespunzătoare pasului cusăturii (*P*) şi lăţimii cusăturii (*T*). Astfel, pasul cusăturii creşte cu cca 50%... 68% iar lăţimea cusăturii scade cu cca 33%... 43% în raport cu mărimile iniţiale. Se produce mai întîi ruperea cusăturii şi

apoi ruperea materialelor (tabelul 1). Primele ruperi se produc la nivelul firelor acelor (f_1 şi f_2). Uneori apar ruperi ale firului lapucătorului (f_3) în punctele de contact cu firele celor două ace. Nu au fost însă înregistrate ruperi ale firului de acoperire (f_4).

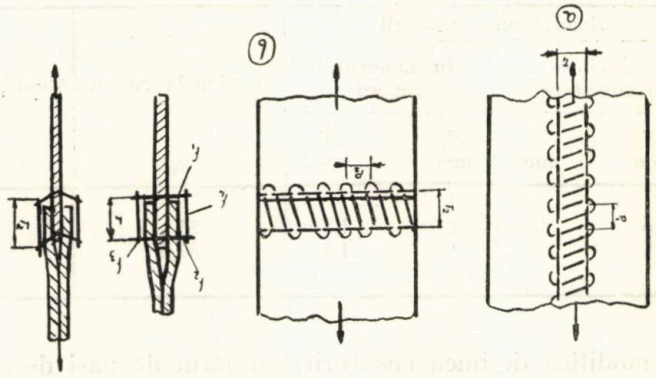


Fig. 3

Tabelul 1

Tipul probei	Dimensiunile cusăturii				Sarcina la rupere kgf		Alungirea la rupere mm	
	Înainte de solicitare		În momentul ruperii					
	P mm	T mm	P_1 mm	T_1 mm	cusătură	material	cusătură	material
A	2,5	3	3,7	2	16	34,5	47	68
B	2,5	3	4,2	1,7	27,5	36	59	73

Din datele prezentate în tabelul 1 rezultă că rezistenţa îmbinărilor la care tensiunea firelor acelor este mai mică decît cea „normală" (probe tip B) este superioară rezistenţei îmbinărilor la care tensiunea firelor acelor este „normală" (probe tip A). Acest lucru se poate explica prin faptul că la probele tip A extensibilitatea cusăturilor fiind mai mică, firele din cusătură acţionează asupra materialului lărgind orificiile făcute în material de către ace. Prin lărgirea acestor orificii are loc o slăbire accentuată a rezistenţei materialului şi deci şi a îmbinării prin coasere.

În cazul solicitării la întindere pe direcţia lăţimii cusăturii (fig. 3 *b*) se produc ruperi ale materialului în dreptul orificiilor executate în material de către acele de cusut. De asemenea se poate constata micşorarea pasului cusăturii cu cca 36%... 40% şi creşterea lăţimii cusăturii cu cca 38% ... 50% faţă de mărimile iniţiale.

În tabelul 2 sînt indicate modificările dimensiunilor cusăturilor precum și valorile corespunzătoare sarcinii la rupere și alungirii la rupere a îmbinărilor.

Tabelul 2

Tipul probei	Dimensiunile cusăturii				Sarcina la rupere	Alungirea la rupere
	Înainte de solicitare		În momentul ruperii			
	P mm	T mm	P_2 mm	T_2 mm	kgf	mm
A	2,5	3	1,6	4,2	55	43
B	2,5	3	1,5	4,5	57,5	49

Cînd se modifică desimea cusăturii (numărul de pași de cusătură pe 50 mm), pentru îmbinările solicitate la întindere pe direcția lungimii cusăturii se înregistrează valori diferite ale sarcinii la rupere a îmbinărilor. Cu cît numărul de pași de cusătură pe 50 mm (N_P /50 mm) este mai mare cu atît crește și rezistența cusăturii R_c (fig. 4), în timp ce rezistența materialului R_M devine mai mică.

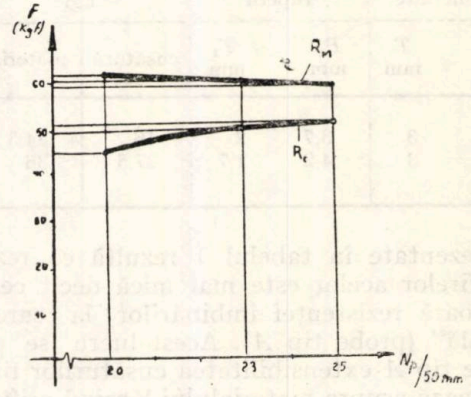


Fig. 4

Spre deosebire de cusătura elastică cu patru fire (fig. 1), cusătura elastică cu cinci fire (fig. 5) permite realizarea unui număr mai mare de îmbinări dintre care cele mai utilizate sînt prezentate în fig. 6. În cazul îmbinării din fig. 6 *a*, cele două straturi de material (*1* și *2*) sînt legate de firul acului din mijloc (f_2). Firele acelor marginale (f_1 și f_3) străpung numai un singur

strat iar marginile celor două straturi de materiale sînt acoperite de firul apucătorului (f_4) și firul de acoperire superior (f_5).

Sub acțiunea unor forțe paralele cu suprafața de îmbinare, care solicită îmbinarea la întindere, datorită decalării liniilor mediane $y_1 y_1'$ și $y_2 y_2'$ (fig. 6 *a*), rezultă o rotire a suprafeței de îmbinare, cu atît mai pronunțată cu cît grosimea materialelor care se cos este mai mare.

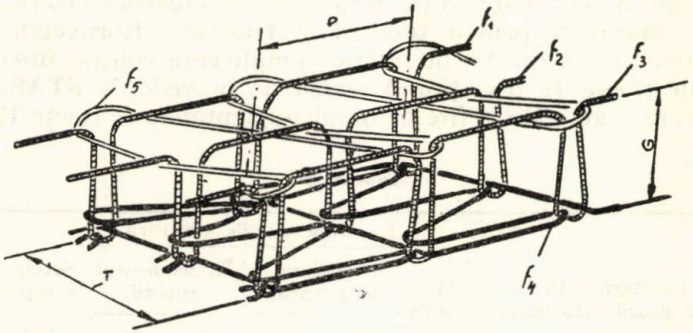


Fig. 5

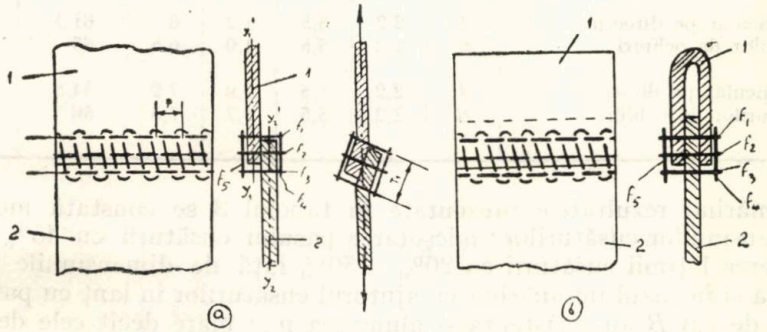


Fig. 6

Analizînd ceea ce se întîmplă cu materialele îmbinate supuse la întindere se constată o distribuție neuniformă a liniilor de forță, care se concentrează în dreptul orificiilor executate în materiale de către cele trei ace. Din această cauză materialele se pot sfîșia.

Simultan cu rotirea suprafeței de îmbinare are loc și o ușoară alunecare a straturilor de material. Acest lucru este posibil datorită alungirii firelor din cusătură și comprimării materialului în zona orificiilor executate de ace. Alunecarea straturilor de material determină deplasarea orificiilor făcute de acul mijlociu, firul f_2 fiind supus unei solicitări de forfecare. Concomitent cu forfecarea, în timpul solicitărilor repetate, are loc alunecarea ației prin

material care dînd loc la frecări ale firelor cu materialele îmbinate, micșorează rezistența îmbinării.

Experimentările făcute au scos în evidență rezultate diferite privind modificările dimensiunilor cusăturii și ale rezistenței îmbinării pentru cazurile cînd cusătura este executată perpendicular pe direcția șirurilor de ochiuri ale tricotului și cînd cusătura este executată perpendicular pe direcția rîndurilor de ochiuri ale tricotului.

În tabelul 3 sînt centralizate rezultatele încercărilor efectuate cu ajutorul dinamometrului pentru țesături și tricoturi. Epruvetele (fig. 6 *a*) au fost confecționate din tricot interloc simplu care conține fire de bumbac pieptănat de finețe 19 tex, ținînd seama de prevederile STAS 6752–63. Pentru coasere, s-au utilizat fire de bumbac pieptănat de finețe 12 tex × 3.

Tabelul 3

Direcția cusăturii față de rîndurile și șirurile tricotului	Tipul probei	Dimensiunile cusăturii				Sarcina la rupere kgf	Alungirea la rupere mm
		Înainte de solicitare		În momentul ruperii			
		P mm	T mm	P_2 mm	T_2 mm		
Perpendicular pe direcția șirurilor de ochiuri	*A*	2,2	5,5	1,2	6	61,5	65,5
	B	2,2	5,5	1,0	6,5	65	70,5
Perpendicular pe direcția rîndurilor de ochiuri	*A*	2,2	5,5	0,9	7,2	54,5	79
	B	2,2	5,5	0,7	7,5	56	85

Urmărind rezultatele prezentate în tabelul 3 se constată modificări ale dimensiunilor cusăturilor: micșorarea pasului cusăturii cu 45% ... 65% și creșterea lățimii cusăturii cu 20% ... 50% față de dimensiunile inițiale. La fel ca și în cazul îmbinărilor cu ajutorul cusăturilor în lanț cu patru fire, probele de tip *B* au rezistența și alungirea mai mare decît cele de tip *A*. De asemenea apar diferențe între valorile înregistrate pentru sarcina la rupere și alungirea la rupere funcție de direcția cusăturii în raport cu rîndurile și șirurile de ochiuri ale tricotului. Extensibilitatea tricotului în lungime este mai mică decît cea în lățime iar sarcina la care este supusă cusătura este suportată în bună parte de tricot, deformațiile produse în structura cusăturii fiind mai mici.

Pentru același tip de îmbinare (fig. 6 *a*), atunci cînd forțele de întindere acționează pe o direcție paralelă cu direcția cusăturii, s-a constatat: creșterea pasului cusăturii cu peste 50% față de mărimea inițială; micșorarea lățimii cusăturii cu peste 40% față de mărimea inițială; ruperea cusăturii la sarcini foarte mici comparativ cu sarcina la rupere a materialelor textile îmbinate prin coasere.

Ruperile cusăturilor s-au inregistrat în special pentru firele celor trei ace, valorile corespunzătoare sarcinii la rupere și alungirii la rupere pentru probele tip A fiind următoarele: $F = 19$ kgf și $\Delta l = 58$ mm pentru îmbinările la care cusăturile au fost executate perpendicular pe direcția șirurilor de ochiuri ale tricotului și $F = 17{,}5$ kgf și $\Delta l = 65$ mm pentru îmbinările la care cusăturile au fost executate perpendicular pe direcția rîndurilor de ochiuri.

În foarte puține cazuri s-a observat că simultan cu ruperea firelor acelor (f_1, f_2 și f_3) se produce și ruperea firului apucătorului (f_4). Nu au fost înregistrate ruperi ale firului de acoperire (f_5).

Pentru îmbinarea prezentată în fig. 6 *b* au fost efectuate încercări privind determinarea rezistenței atunci cînd cusătura este solicitată la întindere pe direcția lungimii sale, rezultatele fiind centralizate în tabelul 4. Materialele îmbinate au fost: tricot patent 1 : 1 și tricot interloc simplu, din aceleași materiale ca și în cazul îmbinărilor cu ajutorul cusăturilor cu patru fire (îmbinarea I_1 din tabelul 4); tricot patent 1 : 1 și tricot vanisat căptușit (îmbinarea I_2 din tabelul 4).

Tabelul 4

Îmbinarea	Tipul probei	Dimensiunile cusăturii				Sarcina la rupere kgf		Alungirea la rupere mm	
		În momentul ruperii		Înainte de solicitare					
		P mm	T mm	P_1 mm	T_1 mm	cusătură	material	cusătura	material
I_1	A	2,17	5,5	3,25	3	17,5	43,5	54	80
	B	2,17	5,5	3,5	2,7	19	45	59	83
I_2	A	2,17	5,5	3,3	3	21,5	38,5	60,5	142,5
	B	2,17	5,5	3,7	2,5	23,5	39	66	148

Funcție de materialele îmbinate au fost înregistrate valori diferite ale sarcinii la rupere și ale alungirii la rupere. Astfel la îmbinările I_2, valorile corespunzătoare sarcinii la rupere a cusăturii sînt mai mari decît la îmbinările I_1.

3. Concluzii

1. În urma cercetărilor efectuate asupra rezistenței la purtare a unui mare număr de produse confecționate din tricoturi, s-a constatat că alungirile tricoturilor nu depășesc 50% din valoarea corespunzătoare alungirilor la rupere. Pe baza acestei constatări se poate recomanda ca alegerea parametrilor de coasere să se facă în așa fel încît alungirile cusăturilor să fie egale cu cca 50% din valoarea alungirii la rupere a tricotului solicitat pe o direcție perpendiculară pe șirurile de ochiuri.

2. Pentru obţinerea unor îmbinări de calitate corespunzătoare se mai recomandă:

a) reglarea presiunii exercitate asupra materialelor care se îmbină de către picioruşul de presare, pentru ca forţa de presare să nu depăşească limitele de 400 ... 800 gf;

b) dotarea maşinilor de cusut cu patru şi cinci fire cu un transportor diferenţial;

c) reglarea corespunzătoare a înălţimii dinţilor transportorului, funcţie de grosimile materialelor care se cos;

c) mărirea elasticităţii cusăturii, prin micşorarea tensiunii firelor acelor, la fel ca în cazul probelor tip *B*;

d) alegerea corespunzătoare a mărimii pasului cusăturii în aşa fel încît numărul de paşi cuprinşi pe o lungime a cusăturii de 50 mm să nu depăşească limitele cuprinse între 20 ... 25 paşi.

Primit la 19 X 1969

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tricotaje şi confecţii

BIBLIOGRAFIE

1. Nicolaev N., *Tehnologia confecţionării tricotajelor.* Ed. tehn., Buc., 1950, p. 279.
2. Cociu V., *Tehnologia confecţiilor din piele.* EDP., Buc., 1965, pp. 277—282.

О СОПРОТИВЛЕНИИ ШВЕЙНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫХ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛАСТИЧНЫХ ШВОВ С ЧЕТЫРЬМЯ И ПЯТЬЮ НИТЯМИ

(Резюме)

Во время швейного процесса и эксплоатации, швейные соединения осуществляемые в виду соединения деталей одежды можно подвергать ряду механических действий: растягиванию, сжатию, изгибу. Из них, сопротивление растяжению в разных направлениях является самым частым, так как оно вызывает существенные изменения как в структуре швов так и в структуре соединённых матерялов.

Работа рассматривает влияние многочисленных факторов на швейные соединения деталей одежды, изготовленных из трикотажа, как например: структуры швов, основных объёмных элементов швов (шага, ширины, толщины), физико-механические свойства нитей, составляющих швы, структура и физико-механические свойства соединённых путъём вышивки, матерялов, технологические параметры швейного процесса, вид действий, направления сил, действующих на швейные соединения и др. В работе изложены изменения, появляющиеся в структуре швов для соединений, подвергнутых растягиванию в определённых паравлениях и условиях натяжения нитей в швейном процессе.

В конце работы приведены сведения о мерах которые можно принять для получения соединений соответствующего качества.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969
Secţia VI
INDUSTRIE UŞOARĂ

C. Z. 677

CONTRIBUŢII LA INTENSIFICAREA PROCESULUI DE VOPSIRE CU AJUTORUL CÎMPULUI ELECTRIC DE ÎNALTĂ FRECVENŢĂ

DE

FLORIN VĂLU, ELIZA PUŞCAŞU, EMIL HANGANU şi N. MÎNDREA

1. Introducere

Prin intensificare, pe lîngă reducerea duratei proceselor şi îmbunătăţirea proprietăţilor produselor, se pot realiza noi procese — inaccesibile pe alte căi — sau variante mixte ale proceselor existente.

Procesul de vopsire după cum rezultă din literatura de specialitate [1], poate fi intensificat pe cale chimică (cu ajutorul electroliţilor şi a agenţilor chimici de dispersie), pe cale termică (prin ridicarea temperaturii, respectiv vopsirea la temperaturi de peste 100°C) [2], prin procedee mecanice (agitare cu diferite dispozitive) [3], prin procedee fizice (cîmpuri ultrasonore, şocuri de presiune) [4] sau variante mixte ale unor asemenea procedee (acţiunea termohidrodinamică în strat fluidizat) [5].

În lucrarea de faţă s-a cercetat intensificarea procesului de vopsire la temperaturi joase, prin acţiunea cîmpului electric de înaltă frecvenţă asupra ţesăturilor foarte groase, pentru care vopsirile pătrunse — în profunzimea suportului textil — sînt greu realizabile din cauza coeficienţilor mici de difuziune. Experimentările au fost conduse într-un domeniu de frecvenţă de 4500 ... 5500 kHz, superior celui menţionat în literatura de specialitate [6], [7].

În toate procesele de intensificare pe baza mecanismului procesului de vopsire [8] — care constă în difuziunea colorantului din soluţie spre suprafaţa exterioară a fibrei, difuziunea colorantului de la suprafaţa exterioară a fibrei în interiorul acesteia, adsorbţia la suprafaţa interioară a fibrei şi fixarea pe această suprafaţă — se ţine seama de faptul că difuziunea în interiorul fibrei este mai mică decît difuziunea în soluţie datorită rezistenţelor determinate de reţeaua spaţială a macromoleculelor fibrei şi de asemenea de interacţiunea chimică între colorant şi fibră. Difuziunea colorantului în interiorul fibrei este condiţionată de faptul că în perioada iniţială a vopsirii pe suprafaţa fibrei se formează un strat de colorant de

concentraţie mai ridicată [9] care determină colorantul să difuzeze de la periferie spre centrul ei.

Totodată stratul concentrat consituie o barieră pe care particulele de colorant din soluţie trebuie s-o învingă pentru a intra în fibră.

Ca în orice proces de transfer de căldură sau de masă — în cazul nostru difuziunea colorantului în fibră — prin aplicarea procedeelor mecanice sau fizice de intensificare stratul limită interfacial este continuu modificat ca structură, subţiat sau distrus sub acţiunea hidrodinamică a soluţiei. Ca urmare a modificării factorilor hidrodinamici din soluţia de colorant, procesul de vopsire este intensificat.

Pornind de la acţiunea hidrodinamică similară de intensificare pe cale mecanică şi pe cale fizică [4], autorii au extins analogia între acţiunea cîmpului ultrasonor şi a cîmpului electric de înaltă frecvenţă asupra stratului limită.

Prin aplicarea cîmpului electric de înaltă frecvenţă în afară de acţiunea directă asupra stratului concentrat de la interfaţa material textil-soluţie, mai au loc procese de dispersare a colorantului, deci de uniformizare a soluţiei şi de degazare a materialului textil, care contribuie la creşterea coeficientului de difuziune a colorantului în fibră.

Materialul textil aşezat între plăcile condensatorului generatorului de înaltă frecvenţă este supus unei acţiuni perpendiculare a cîmpului electric de înaltă frecvenţă, care are un efect superior de modificare a formări şi structurii stratului limită decît acţiunea paralelă cu stratul de material textil. Alternanţa schimbării polarităţii cîmpului electric de înaltă frecvenţă favorizează formarea unui strat mai puţin compact şi asigură o mai bună dispersare şi uniformizare a soluţiei de colorant. Frecvenţa schimbării polarităţii cîmpului electric de înaltă frecvenţă influenţează decisiv cele trei procese: de modificare a structurii stratului concentrat, de dispersare şi de degazare, ceea ce are ca rezultat o mai bună pătrundere a colorantului în fibră.

Concomitent cu aceste procese are loc şi încălzirea materialului textil dintre plăcile condensatorului de înaltă frecvenţă, datorită pierderilor în dielectric. Apariţia căldurii în urma pierderilor dielectrice se explică prin schimbarea periodică a orientării ionilor ce nu pot urma cu exactitate frecvenţa de schimbare a cîmpului din cauza frecării interne [10]. La intensificarea procesului de vopsire contribuie şi această căldură atît sub forma cunoscută de activare termică, cît şi prin eliberarea gazelor incluse în soluţie şi în materialul textil.

Izolarea acţiunii termice, determinată de cîmpul electric de înaltă frecvenţă s-a realizat prin conducerea determinărilor la durate scurte ale procesului de vopsire şi la temperaturi joase în comparaţie cu cele uzuale de vopsire, deşi reducerea temperaturii influenţează negativ procesul de difuziune al colorantului în fibră datorită asocierii acestuia în soluţie. La temperaturi mici adsorbţia colorantului de către fibră este mai mare şi deci posibilitatea formării unui strat mai concentrat şi mai gros este avantajată în detrimentul difuziunii în fibră. Temperaturile joase favorizează

asocierea particulelor de colorant şi în soluţie, dar mai ales la suprafaţa fibrei, ca urmare a creşterii concentraţiei colorantului în stratul limită ce se formează în perioada iniţială a vopsirii, datorită adsorbţiei mai intense.

Experimentările au fost conduse deci în condiţii defavorabile determinate de micşorarea temperaturii şi de tendinţa de asociere a colorantului, tocmai pentru a scoate în evidenţă acţiunea cîmpului electric de înaltă frecvenţă.

2. Rezultatele cercetării

Acţiunea cîmpului electric de înaltă frecvenţă s-a urmărit pe o instalaţie (fig. 1) în care *1* este redresor, *2* — generator, *3* — plăcile condensatorului, *4* — suportul inelar, *5* — ţesătura, instalaţia avînd următorii parametrii: frecvenţa 4 000 ... 12 000 kHz, intensitatea curentului anodic 50 ... 200 mA, distanţa între plăcile condensatorului 5 ... 120 mm. Determinările au fost efectuate la frecvenţa de 4 500 ... 5 500 kHz, intensitatea 200 mA şi distanţa de 15 mm între plăcile condensatorului.

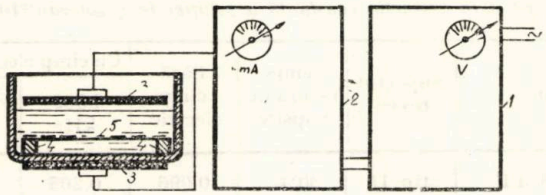


Fig. 1

Materialul textil — ţesături groase pentru filtru, din fibre celulozice — a fost supus în prealabil procesului de fierbere şi apoi fixat pe suporţi inelari şi introdus în poziţie orizontală în soluţia de colorant. S-au folosit două tipuri de ţesături: tip I cu fineţea Nm 50/2.4 pentru urzeală şi Nm 27/10 pentru bătătură, desimea în urzeală 110/10 cm şi 80/10 cm în bătătură; tip II cu fineţea Nm 34/2.4 pentru urzeală şi Nm 20/14 pentru bătătură, desimea în urzeală 100/10 cm şi în bătătură de 60/10 cm.

Procesul de vopsire a fost condus la următorii parametrii: hidromodul 1/50, concentraţia colorantului 3%, temperatura de vopsire 30 °C şi 60 °C, durata de vopsire 20 min, în prezenţa a trei coloranţi direcţi fabricaţi în R.S.R. (Albastru direct FF, Roşu direct 4A, Verde direct A).

Pentru compararea datelor experimentale s-au efectuat determinări cu şi fără cîmp electric de înaltă frecvenţă la aceiaşi parametri. Cîmpul electric de înaltă frecvenţă a fost aplicat în două variante: o dată cu introducerea ţesăturii în soluţia de colorant; cu acţiunea prealabilă a cîmpului electric de înaltă frecvenţă asupra soluţiei de colorant şi conducerea procesului de vopsire fără cîmp electric de înaltă frecvenţă, în scopul de a evidenţia influenţa cîmpului electric asupra dispersării colorantului şi a degazării soluţiei.

Cantitatea de colorant fixată de fibră s-a urmărit prin metoda indirectă (diferenţa dintre concentraţia iniţială şi finală a soluţiei de colorant), cu ajutorul unui electrofotocolorimetru şi este prezentată în tabelele 1, 2, 7, 8.

Tabelul 1

Colorant pe fibră la extincţia constantă a soluţiei în g colorant/100 g fibră

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire	Fără cîmp electric	Cîmp electric la frecvenţa de		
					4 500 kHz	5 000 kHz	5 500 kHz
1	Albastru direct FF	tip I	30 °C	0,108	0,244	0,475	0,719
2	Verde direct A	tip I	30 °C	0,089	0,187	0,371	0,558
3	Roşu direct 4A	tip I	30 °C	0,097	0,208	0,411	0,624

Tabelul 2

Colorant pe fibră la extincţia constantă a soluţiei în g colorant/100 g fibră

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire	Fără cîmp electric	Cu cîmp electric la frecvenţa de		
					4 500 kHz	5 000 kHz	5 500 kHz
1	Albastru direct FF	tip II	30 °C	0,096	0,205	0,398	0,603
2	Verde direct A	tip II	30 °C	0,074	0,154	0,302	0,451
3	Roşu direct 4A	tip II	30 °C	0,083	0,183	0,361	0,542

Tabelul 3

Timpul de semivopsire în minute

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire	Fără cîmp electric	Cu cîmp electric la frecvenţa de		
					4 500 kHz	5 000 kHz	5 500 kHz
1	Albastru direct FF	tip I	30 °C	20,4	0,45	0,30	0,21
2	Verde direct A	tip I	30 °C	37,0	0,64	0,42	0,27
3	Roşu direct 4A	tip I	30 °C	33,6	0,56	0,36	0,23

Cinetica procesului de vopsire s-a stabilit pentru cei trei coloranţi cu şi fără cîmp electric de înaltă frecvenţă, prin măsurarea concentraţiei soluţiei de colorant la intervalele de timp de: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 16, 25, 36 min, tot cu ajutorul electrofotocolorimetrului şi este reprezentată în fig. 2...7.

La interpretarea datelor experimentale s-a considerat că vopsirea se face din stratul concentrat de colorant de pe suprafața fibrei și deci că viteza de vopsire este egală cu viteza de difuziune în fibră în perioada inițială a vopsirii. Pentru calculul coeficientului de transfer de masă (difuziune) s-a ținut

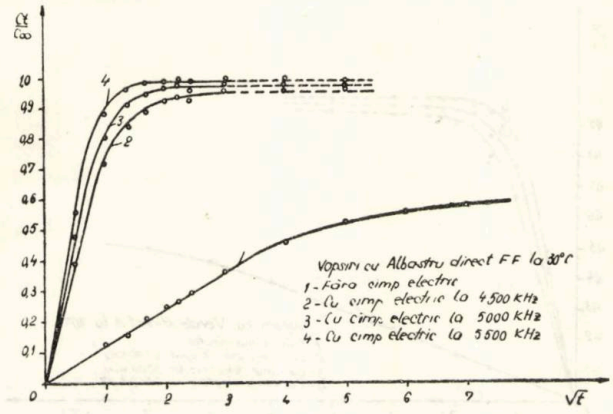


Fig. 2

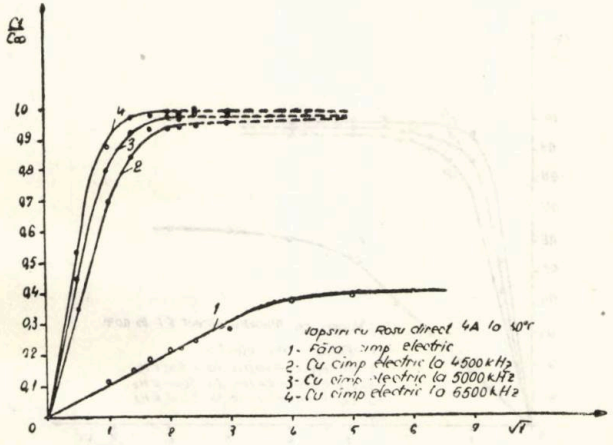


Fig. 3

seama de forma de prezentare a materialului textil (țesătură) supus vopsirii. În acest caz colorantul trebuie să pătrundă nu într-o fibră izolată, căreia i se poate aplica legea lui Fick, în ipoteza că fibra are forma unui cilindru perfect, infinit de lung, de rază constantă, ci într-un ansamblu de fibre, respectiv de fire. Datorită formei de prezentare a materialului textil, procesul de difuziune este mult mai complex și cuprinde : difuziunea între fire,

difuziunea între fibre și difuziunea în fibră. Utilizînd relația $C_t/C_\infty = \sqrt{K\,t}$ s-a calculat valoarea coeficientului total de transfer de masă K. Acesta determină întregul proces de vopsire prin stratul concentrat și țesătură pentru perioada inițială de vopsire și pentru temperaturi sub 80 °C. În relația de mai

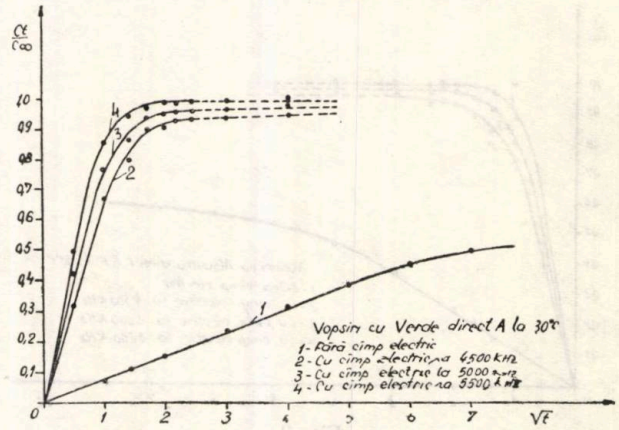


Fig. 4

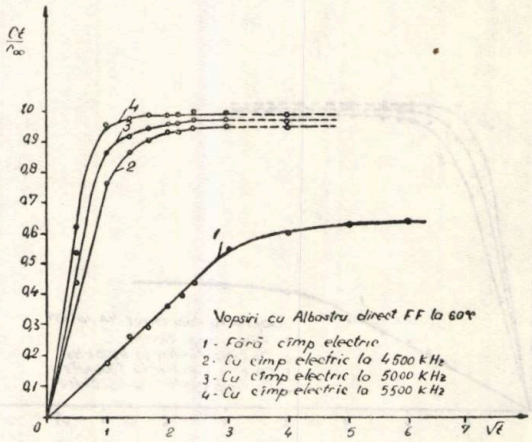


Fig. 5

sus: C_t — cantitatea de colorant în țesătură la timpul t; C_∞ — cantitatea de colorant în țesătură la echilibru, în momentul cînd extincția soluției a fost constantă; t — timpul de vopsire în min. Relația se aplică pentru compararea comportării coloranților față de materialele textile în cazul cînd nu sînt necesare valorile absolute ale coeficientului total de transfer de masă.

Reprezentînd datele experimentale prin variaţia raportului C_t/C_∞ în funcţie de $\sqrt{t}$ (din relaţia de mai sus), se obţine o dependenţă liniară atît timp cît colorantul care pătrunde în fibră este înlocuit cu o cantitate egală de colorant din soluţie. Variaţia liniară este valabilă numai pentru un anumit

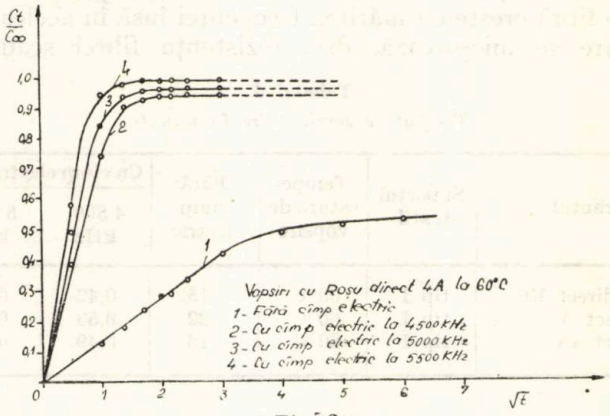


Fig. 6

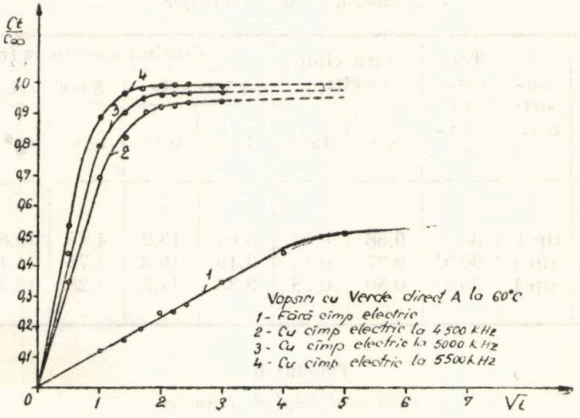


Fig. 7

timp al vopsirii, care variază cu frecvenţa cîmpului electric. Acest timp este mai mare în cazul vopsirilor efectuate fără cîmp electric de înaltă frecvenţă şi el descreşte în cazul aplicării acestuia.

Avind în vedere forma relaţiei reprezentate grafic rezultă că $\sqrt{K}$ reprezintă panta (tg α) curbelor ; prin urmare $tg^2 \alpha$ constituie o măsură aproximativă a coeficientului total de transfer. Utilizînd aceleaşi grafice s-a calculat şi timpul de semivopsire — timpul necesar absorbţiei jumătăţii din cantitatea de colorant consumată la echilibru — ca pătratul abscisei corespunzătoare ordonatei de 0,5.

Se pot desprinde o serie de rezultate.

a) Pentru determinările efectuate cu acțiunea cîmpului electric, din datele experimentale prezentate în tabelele 1 și 2 rezultă o creștere a cantității de colorant absorbită de fibră pînă la extincția constantă a soluției în cazul aplicării cîmpului electric de înaltă frecvență. Cantitatea de colorant legată de fibră crește cu mărirea frecvenței însă în aceleași timp gradul de polimerizare se micșorează, deci rezistența fibrei scade.

Tabelul 4

Timpul de semivopsire în minute

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire	Fără cîmp electric	Cu cîmp electric la frecvența de		
					4 500 kHz	5 000 kHz	5 500 kHz
1	Albastru direct FF	tip I	60 °C	15	0,42	0,25	0,16
2	Verde direct A	tip I	60 °C	22	0,53	0,36	0,20
3	Roșu direct 4A	tip I	60 °C	18	0,49	0,30	0,17

Tabelul 5

Coeficientul total de transfer

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire	Fără cîmp electric		Cu cîmp electric la frecvența de					
						4 500 kHz		5 000 kHz		5 500 kHz	
				tg α	$tg^2 \alpha$	tg α	$tg^2 \alpha$	tg α	$tg^2 \alpha$	tg α	$tg^2 \alpha$
1	Albastru direct FF	tip I	30 °C	0,58	0,34	3,64	13,2	4,45	19,80	5,71	32,5
2	Verde direct A	tip I	30 °C	0,37	0,14	3,19	10,2	3,75	14,10	5,00	25,0
3	Roșu direct 4A	tip I	30 °C	0,50	0,25	3,33	11,3	4,28	18,3	5,36	26,6

Tabelul 6

Coeficientul total de transfer

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire	Fără cîmp electric		Cu cîmp electric la frecvența de					
						4 500 kHz		5 000 kHz		5 500 kHz	
				tg α	$tg^2 \alpha$	tg α	$tg^2 \alpha$	tg α	$tg^2 \alpha$	tg α	$tg^2 \alpha$
1	Albastru direct FF	tip I	60 °C	0,91	0,82	3,82	14,79	5,0	25,0	6,26	39,2
2	Verde direct A	tip I	60 °C	0,58	0,33	3,33	11,3	4,25	18,1	5,42	29,2
3	Roșu direct 4A	tip I	60 °C	0,70	0,49	3,64	13,3	4,45	19,8	5,71	32,5

Tabelul 7

Colorant pe fibră la extincţia constantă a soluţiei în g colorant/100 g fibră

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire	Fără cîmp electric	Cu cîmp electric la frecvenţa de		
					4 500 kHz	5 000 kHz	5 500 kHz
1	Albastru direct FF	tip I	60 °C	0,25	1,08	1,28	1,58
2	Verde direct A	tip I	60 °C	0,17	0,81	1,03	1,25
3	Roşu direct 4A	tip I	60 °C	0,21	0,97	1,17	1,37

Tabelul 8

Colorant pe fibră la extincţia constantă a soluţiei în g colorant/100 g fibră (cu tratarea prealabilă a soluţiei)

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire	Fără cîmp electric	Cu cîmp electric la frecvenţa de		
					4 500 kHz	5 000 kHz	5 500 kHz
1	Albastru direct FF	tip I	30 °C	0,108	0,263	0,494	0,741
2	Verde direct A	tip I	30 °C	0,089	0,207	0,392	0,577
3	Roşu direct 4A	tip I	30 °C	0,097	0,226	0,432	0,643

Influenţa cîmpului electric de înaltă frecvenţă asupra vitezei de vopsire rezultă din datele tabelului 3 sub formă de timpi de semivopsire. Pentru coloranţii studiaţi timpii de semivopsire sînt mai mici în cazul vopsirilor în cîmp electric de înaltă frecvenţă, deci se poate prevedea o scădere substanţială a timpului total de vopsire.

Valorile coeficientului total de transfer de masă (tabelele 5 şi 6) cresc apreciabil în cazul aplicării cîmpului electric de înaltă frecvenţă, înregistrînd creşteri o dată cu mărirea frecvenţei.

b) Pentru experimentările efectuate la temperatura de 60 °C (tabelul 7) cantitatea de colorant fixată de fibră este mai mare decît la 30 °C, fapt ce se explică prin cumularea intensificării prin cîmp electric de înaltă frecvenţă cu intensificarea termică.

c) În cazul aplicării cîmpului electric de înaltă frecvenţă numai soluţiei de colorant, cantitatea de colorant fixată de fibră este mai mare decît în cazul vopsirii cu cîmp electric de înaltă frecvenţă (tabelul 8), aspect important atît în ceea ce priveşte randamentul coloristic în fibră cît şi păstrarea integrităţii fibrei textile.

3. Concluzii

1. Cantitatea de colorant legată de fibră este mai mare în cazul vopsirii în cîmp electric de înaltă frecvenţă a ţesăturilor celulozice groase.

2. Tratarea prealabilă a soluţiilor de colorant în cîmp electric de înaltă frecvenţă asigură pe lîngă conservarea integrităţii fibrei şi o cantitate mai mare de colorant fixată de fibră.

3. Indiferent de modul de aplicare a cîmpului electric de înaltă frecvenţă (concomitent cu vopsirea sau numai soluţiei) durata procesului de vopsire este mai mică, aspect important pentru practica industrială.

4. Pătrunderea este mai bună sub acţiunea cîmpului electric de înaltă frecvenţă, chiar în cazul ţesăturilor foarte groase şi a temperaturilor joase de vopsire, deci se asigură o utilizare mai bună a coloranţilor prin îmbunătăţirea randamentului de colorant în fibră.

Primită la 14 X 1969

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologie chimică textilă

BIBLIOGRAFIE

1. Викерстафф Т., *Физическая химия крашения*, Гизлегпром, М., 1956.
2. Беленкии К. И., *Теория и ирактика крашении*. Гизлегпром, М., 1958.
3. Grindea M., Vălu F., *Intensificarea procesului de vopsire cu cîmpuri vibratoare* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **XIII (XVII)**, *1—2*.
4. Vălu F., Luca I., Grindea M., *Contribuţii la intensificarea procesului de vopsire cu cîmp ultrasonor*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **XIII (XVII)**, *3—4*.
5. Vălu F., *Perspective privind introducerea proceselor tehnologice în strat fluidizat în industria textilă*. Ind. Textilă, 1961, *1*.
6. * * * *The Fixation of Reactive Dyes in High Frequency Electrical Field*. The Dyer, 1967, *11*, p. 811.
7. Vălu F., Luca I., *Intensificarea procesului de vopsire prin cîmpuri electrice de înaltă frecvenţă şi prin cîmpuri magnetice*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XVI (XX)**, *1—2*.
8. Grindea M., *Vopsirea şi imprimarea textilelor*. EDP. Buc., 1969.
9. Speakman J. B., Smith I., J.S.D.C., 1936, 52, p. 121.
10. Cişman A., *Fizica generală*. Ed. II, Ed. tehn., Buc., 1960.

CONTRIBUTIONS TO THE INTENSIFICATION OF THE DYEING PROCESS UNDER THE ACTION OF A HIGH FREQUENCY ELECTRICAL FIELD

(Summary)

The aim of the work was to study the intensification of the dyeing process on cotton cloths under the action of the high frequency electrical field between 4,500 kHz and 5,500 kHz, which is superior to the frequencies cited in literature.

Like ultrasound field, the high frequency electrical field acts on the structure of the limit layer at interface of the textile material-solution, on the dedassing of the textile mate rial and solution.

The experimental data attest the efficiency of the high frequency electric field even in the case of very thick cloth at lower temperatures then the usual dyeing temperatures.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969

EMIL GAIGINSCHI

(1904—1969)

În ziua de 31 octombrie 1969 s-a stins din viaţă profesorul doctor docent, inginer Emil Gaiginschi.

Profesorul Emil Gaiginschi s-a născut în oraşul Paşcani, la 7 octombrie 1904, într-o familie de muncitori ceferişti. După absolvirea liceului „Roman Vodă" din Roman, în anul 1923, urmează cursurile Institutului electrotehnic de pe lîngă Universitatea din Iaşi şi obţine titlul de inginer electrician în anul 1929.

Pasionat de tehnică, el lucrează timp de patru ani ca inginer în aviaţia militară, de unde, datorită meritelor sale, este selecţionat pentru a urma cursurile Şcolii naţionale superioare de aeronautică din Paris, pe care a absolvit-o în anul 1935.

Întors în țară și-a continuat activitatea în cadrul aviației, în paralel cu activitatea didactică, pe care o începuse încă din anul 1926 în calitate de preparator la Laboratorul de electricitate și căldură al Facultății de științe din Iași, laborator condus de acad. prof. Ștefan Procopiu.

Emil Gaiginschi obține titlul de doctor inginer, în anul 1949, cu lucrarea „Condițiile care trebuie îndeplinite de instalația de benzină a unui banc pentru încercarea motoarelor de avion în altitudine".

Începînd cu anul 1936 și pînă la dispariția sa, a activat continuu în învățămîntul superior, parcurgînd întreaga scară ierarhică a gradelor didactice; în anul 1948 devine profesor și șeful catedrei de motoare termice a Institutului politehnic din Iași. În anul 1954 i se conferă titlul de doctor docent în științe tehnice, fiind atestat în același an profesor în specialitatea „Motoare cu ardere internă".

De-a lungul celor peste 30 de ani de activitate în învățămîntul superior, prof. dr. docent Emil Gaiginschi s-a afirmat ca un pedagog desăvîrșit, înțelept îndrumător al tineretului și talentat cercetător.

În afară de numeroasele generații de ingineri formate în domeniul motoarelor termice, prof. Emil Gaiginschi a condus și un mare număr de teze de doctorat.

În domeniul activității științifice capacitatea sa creatoare s-a manifestat într-o serie de direcții esențiale; datorită calităților personale de cercetător, muncii pline de abnegație și spiritului său de organizare, el a creat școala ieșeană de cercetare în domeniul motoarelor cu ardere internă.

Cercetările inițiate și efectuate de profesorul Emil Gaiginschi în cadrul acestei școli se referă la termodinamica motoarelor cu ardere internă, deformarea plastică a metalelor cu aplicații la rupere prin oboseală a arborilor cotiți și procesul injecției de combustibil în motoarele Diesel. Această activitate intensă s-a desfășurat atît în Institutul politehnic din Iași cît și în cadrul Centrului de cercetări tehnice al Academiei Republicii Socialiste România, filiala Iași.

În domeniul termodinamicii motoarelor cu ardere internă profesorul Emil Gaiginschi a introdus noțiunile de „ciclu general" și „centru termodinamic al ciclurilor" în scopul generalizării și ușurării studiului motoarelor cu ardere internă.

Problema mecanismului ruperii metalelor prin oboseală a fost atacată atît sub aspect fundamental cît și aplicativ. Temele de cercetare fundamentală au urmărit adîncirea cunoașterii mecanismului fizic al deformației plastice atît sub sarcini variabile cît și sub sarcini statice a oțelurilor de construcție și a unor aliaje feromagnetice, în timp ce temele cu caracter aplicativ au urmărit ca scop principal creșterea securității în funcționare a organelor de motoare, îndeosebi a arborilor cotiți, prin elucidarea cauzelor care contribuie la ruperea lor și determinarea mijloacelor pentru a le înlătura.

În domeniul procesului de injecție în motoarele Diesel au fost atacate pe front larg diversele aspecte ale acestui proces urmărindu-se

ca scop final atît creșterea duratei de exploatare a întregului sistem de injecție cît și micșorarea consumului specific de combustibil.

Profesorul Emil Gaiginschi s-a remarcat nu numai ca un profund cercetător ci și ca un animator și remarcabil organizator științific, reușind ca într-un interval de timp relativ scurt să creeze unul dintre cele mai mari și mai bine dotate laboratoare de motoare cu ardere internă din țara noastră. Totodată s-a remarcat ca unul dintre fondatorii Centrului de cercetări tehnice din Iași, al cărui conducător și director a fost în perioada 1964—1969. Din prodigioasa activitate tehnică desfășurată de prof. Emil Gaiginschi se pot menționa sprijinul intens acordat Uzinei electrice din Iași și altor uzine electrice din Moldova în rezolvarea problemelor legate de dezvoltarea lor, de funcționarea lor economică și de creștere a securității în exploatare. În ultimii ani ai vieții a fost prezent de multe ori în mijlocul muncitorilor, tehnicienilor și inginerilor Uzinei de mecanică fină din Sinaia cu care colabora în scopul perfecționării echipamentului de injecție a motoarelor de tractor. A participat la numeroase manifestări științifice atît în țară cît și peste hotare.

În afara multiplelor activități didactice, științifice și metodice, profesorul Emil Gaiginschi a găsit timpul să desfășoare și o bogată și intensă activitate pe tărîm obștesc, avînd diverse sarcini și responsabilități pe linie de sindicat, ASIT, ARLUS etc. El a ținut numeroase conferințe strălucite, referate și lecții la diverse întreprinderi și uzine din orașul Iași și din alte orașe, pentru popularizarea științei și pentru ridicarea calificării muncitorilor.

Pentru activitatea sa multilaterală, profesorul Emil Gaiginschi a fost evidențiat, premiat și decorat cu ordine și medalii ale Republicii Socialiste România și anume: premiul III în anul 1960 și premiul II în anul 1966 conferite de Ministerul Învățămîntului pentru activitatea științifică, „Ordinul Muncii" cl. III, pentru merite deosebite în activitatea tehnică, Ordinul „Steaua Republicii Socialiste România" cl. IV, pentru merite deosebite în opera de construire a socialismului și „Meritul științific".

Stingerea din viață a profesorului doctor docent Emil Gaiginschi constituie o grea și dureroasă pierdere pentru Institutul politehnic din Iași precum și pentru întreaga școală de constructori de motoare termice din țara noastră.

Catedra de motoare termice

LISTA LUCRĂRILOR ȘTIINȚIFICE

1. *Cauze care provoacă ruperea oțelurilor.* Rev. aeronauticii, 1932, 5—6.
2. *Înțepenirea segmenților în motoarele de aviație.* Ed. Țerek, Iași, 1941.
3. *Condițiile care trebuie îndeplinite de instalația de benzină a unui banc pentru încercarea motoarelor de avion în altitudine.* Ed. Țerek, Iași, 1948.
4. *Variația debitului pompelor de benzină cu presiunea și temperatura la motoarele de avion.* Teză de doctorat, Iași, 1949.

5. *Coeficientul de umplere în lumina tehnicii sovietice*, (în colaborare). Rev. Metalurgia, 1951, 5.
6. *Bazele științifice al metodei acad. I. A. Oding pentru stabilirea cauzelor ruperii organelor de mașini*, (în colaborare). Rev. Metalurgia și construcția de mașini, 1954, 2.
7. *Înlocuirea motorinei cu combustibili grei în centralele Diesel*, (în colaborare). Rev. Metalurgia și construcția de mașini, 1954, 6.
8. *Utilizarea noțiunii „domeniul de reversibilitate a mașinilor termice" pentru stabilirea gradului de perfecție a ciclurilor teoretice ale motoarelor cu ardere internă*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1955, **I** (V), *1—2*.
9. *Ciclul teoretic general al motoarelor cu ardere internă. Considerațiuni asupra expresiilor generale ale randamentului termic și presiunii medii*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1955, **I** (V), *1—2*.
10. *Realizările în domeniul științei tehnice la Iași (electrotehnică, mecanică și industrie ușoară) după eliberare și în anii puterii populare (1944—1955)*. St. și cerc. șt., Fizică și șt. tehnice, Iași, 1955, **VII** - **2.**
11. *Motoare cu ardere internă*, Caietul *I* (curs). Litografia învățământului, unitatea Iași, 1955, 250 p.
12. *Domeniul de reversibilitate a mașinilor termice. Aplcația acestei noțiuni la studiul motoarelor cu ardere internă*. St. și cerc. de energetică, 1956, *4*.
13. *Considerațiuni asupra realizării unei variante constructive a mașinii de încercat materiale la oboseală, sistem I. V. Kudrițov*, (în colaborare). Rev. Metalurgia și construcția de mașini, 1956, *3*.
14. *Expresiile generale ale temperaturilor medii, utilizate în carnotizarea ciclurilor teoretice ale motoarelor cu ardere internă*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1956, **II** (VI), *3—4*.
15. *Expresia generală a gradului de perfecție a ciclurilor teoretice ale motoarelor cu ardere internă*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. Iași, din 26 iulie 1958.
16. *Observații asupra factorilor ce influențează figurile Akulov-Bitter*. Comunicare prezentată la Secția de științe tehnice a Filialei Iași a Academiei R.P.R., 1958.
17. *O metodă nouă pentru creșterea limitei la oboseală a oțelurilor*. Comunicare prezentată la Secția de științe tehnice a Filialei Iași a Academiei R.P.R., iunie 1958.
18. *Expresia generală a randamentului termic pentru ciclurile teoretice ale motoarelor cu ardere internă, în cazul căldurilor specifice variabile cu temperatura*, (în colaborare). Comunicare prezentată la Secția de științe tehnice a Filialei Iași a Academiei R.P.R., iunie 1958.
19. *Aspectul figurilor Akulov-Bitter, în cazul deformațiilor plastice*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Fizică și șt. tehnice, Iași, 1959, **IX.**
20. *Cu privire la calculul temperaturilor de la sfîrșitul compresiei și detentei în cazul ciclurilor teoretice, la călduri specifice variabile ale motoarelor cu ardere internă*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Fizică și șt. tehnice, Iași, 1959, **IX**, 2.
21. *Aspects of the Akulov-Bitter Patterns in Plastically Deformed Metals*, (în colaborare). Rev. Roumaine de Métallurgie, 1960, **V**, *1*.
22. *Studiul termodinamic al motoarelor cu ardere internă*. Caietele 2 și 3 (curs). Ed. de stat didactică și pedagogică, Buc., 1960.
23. *Îndreptare pentru calculul termic al motoarelor cu ardere internă cu piston*, (în colaborare). Ed. de stat didactică și pedagogică, Buc., 1960.
24. *Aspectul figurilor Akulov-Bitter în cazul deformațiilor plastice la cîteva aliaje de fier-carbon și fier-nichel*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1960.
25. *Proprietățile centrului termodinamic al ciclului izocor*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI** (X).
26. *Considerațiuni asupra termenelor de schimbare a uleiurilor la motoarele cu autoaprindere de pe autovehicule*, (în colaborare), Comunicare prezentată la Consfătuirea regională privitoare la utilizarea corectă a lubrifianților, Iași, 31 octombrie 1961.

27. *Semnificația și proprietățile centrului termodinamic al ciclului izocor*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași,
28. *Cercetări privitoare la studiul mecanismului fizic al deformației plastice cu ajutorul domeniilor magnetice mozaicale*, (în colaborare). Comunicare prezentată la consfătuirea de sudură și încercări de metale, Timișoara, 1962.
29. *Cu privire la structura domeniilor magnetice mozaicale*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, noiembrie 1962.
30. *Aplicarea noțiunii de „centrul dinamic" al ciclului izocor la ciclul termic al acestuia*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, **IX (VII)**, 3—4, 1963.
31. *Influența concentratorilor de tensiune asupra mecanismului fizic al deformațiilor plastice la metale sub acțiunea sarcinilor statice și variabile*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. Iași, noiembrie 1963.
32. *Cercetări privitoare la mecanismul fizic al deformației plastice la metale, sub acțiunea sarcinilor variabile*, (în colaborare). Lucrările consfătuirii de sudură și încercări de metale, 1962, Caietul **II**/2, IDT, 1964.
33. *Probleme actuale și perspectivele de dezvoltare ale motoarelor cu ardere internă de transport*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1965.
34. *Proprietățile comune ale centrelor termodinamice aparținînd ciclurilor teoretice fundamentale și relația de legătură dintre parametrii acestor centre*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Brașov, 1965.
35. *Aplicațiile similitudinii la calculul procesului de injecție*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Brașov, decembrie 1965.
36. *Activitatea de cercetare în domeniul motoarelor cu ardere internă în ultimii 20 de ani, la Iași; realizări și tendințe*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, din 20—30 septembrie 1967.
37. *Influența elementelor constructive ale supapei de refulare de la pompa U 24 FS 4—8×10 asupra parametrilor procesului de injecție al sistemului de pe motorul D—103*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, din 28—30 septembrie 1967.
38. *Influența lungimii și diametrului conductelor de înaltă presiune asupra parametrilor procesului de injecție*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, din 28—30 septembrie 1967.
39. *Influența unor aditivi asupra cifrei cetanice a motorinelor românești*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, din 28—30 septembrie 1967.
40. *Traductoare de deplasare pentru studiul experimental al sistemelor de injecție a motoarelor cu aprindere prin compresie*, (în colaborare). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, din 28—30 septembrie 1967.
41. *Influența unor aditivi asupra procesului de injecție*, (în colaborare). Lucrare predată în 1968 Uzinei de mecanică fină din Sinaia.
42. *Influența vîscozității combustibilului asupra calității pulverizării în cazul injecției mecanice*, (în colaborare). Bul. Inst. polit. Iași, 1969, **XV (XIX)**, 3—4, s. IV.
43. *Influența bulelor de gaze în instalația de injecție a motorului Diesel de tractor*, (în colaborare). Lucrare predată în 1969 Uzinei de mecanică fină din Sinaia.
44. *Cercetări experimentale privind influența unor aditivi asupra întîrzierii la autoaprindere a unor motorine românești*, (în colaborare). Lucrare trimisă în octombrie 1969 Comitetului de organizare a Conferinței de motoare cu ardere internă și acceptată pentru comunicare în sesiunea din 15—27 iunie 1970, de la București.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XV (XIX), fasc. 3—4, 1969

ANTON ȘESAN

(1916—1969)

În ziua de 16 august 1969 s-a stins din viață eminentul profesor și om de știință, Anton Șesan, șeful catedrei de statică și rezistență din Institutul politehnic, Iași.

S-a născut într-o familie de modești cărturari de la țară. După studii strălucite la liceul din Rădăuți și la Școala politehnică din București, obține în anul 1940 diploma de inginer constructor. Intră cu toată vigoarea caracteristică tinereții în viața aspră de șantier; datorită aptitudinilor de bun organizator și priceput inginer, ajunge repede conducător al unei întreprinderi de execuție. Baza teoretică și prac-

tică căpătată în școală și desăvîrșită cu migală în munca de șantier, precum și înclinațiile sale pentru cercetare, îl determină să intre, în 1943, în învățămîntul tehnic superior, ca asistent la disciplina „Rezistența materialelor" de la Politehnica „Gh. Asachi". Datorită meritelor în activitatea didactică, științifică și inginerească, Anton Șesan urcă repede treptele ierarhice din învățămîntul superior : în 1945 devine conferențiar, în 1947 profesor suplinitor de statica construcțiilor, în 1951 profesor titular provizoriu, iar în 1961 i se conferă gradul didactic superior de profesor titular definitiv la aceeași disciplină.

Ca o recunoaștere a meritelor științifice și a calităților de îndrumător competent, în 1964 i se acordă dreptul de conducător de doctorat, în specialitatea „Statica construcțiilor".

Talentul de bun organizator, de conducător priceput și ascultat, l-a dovedit și ca șef al catedrei de statică și rezistență (1951—1969), ca prodecan al facultății de construcții (1963—1965) și ca prorector al Institutului politehnic din Iași (1965—1967).

Paralel cu activitatea desfășurată în cadrul Institutului politehnic din Iași, profesorul Anton Șesan a mai activat cu rezultate remarcabile în proiectare și cercetare. A fost șeful grupei de rezistență la filiala Iași a Institutului de proiectare al industriei ușoare (IPIU), în perioada 1950—1953, șeful sectorului construcții la Institutul de proiectări al Ministerului Metalurgiei (IPROMET), filiala Iași, consilier la Institutul de proiectări al Ministerului Industriei Chimice (IPROCHIM), filiala Iași, cercetător la Academia R.S.R., filiala Iași (1951—1956), în care calitate a condus colectivul de construcții din cadrul secției de fizică și științe tehnice, și, în sfîrșit, conducătorul filialei din Iași a Institutului de cercetări în construcții (INCERC) din anul 1957, pînă la stingerea sa din viață.

Profesorul Anton Șesan a participat activ, fie cu diverse comunicări, fie ca organizator, la numeroase simpozioane tehnico-științifice, la sesiuni științifice, congrese tehnice, din țară și străinătate. Astfel, a prezentat comunicări, favorabil apreciate de participanți, la : congresul de la Dresda (R.D.G.) din 1963 (construcții metalice), congresul de la Kryniça (R.P.P.) din 1962 (siguranța construcțiilor), al II-lea congres de construcții metalice precomprimate de la Praga din 1965, congresul de calculul structurilor în domeniul plastic de la Leghigt University Bethlehem, Pensylvania (USA), al IV-lea congres internațional de seismicitate de la Santiago de Chile din ianuarie 1969 etc.

De asemenea a activat în diverse organizații obștești și a condus mai multe asociații profesionale, dovedind și în cadrul acestora talentul său de bun organizator, calitatea de polarizator de energii, înaltul spirit civic și patriotic de care era animat.

Pentru meritele sale, dovedite prin remarcabile realizări în activitatea inginerească, didactică, științifică și obștească, profesorul Anton Șesan a fost distins cu următoarele medalii și ordine ale Republicii Socialiste România : „Ordinul Muncii" cl. a III-a (1962), „Steaua Repu-

blicii" cl. a IV-a (1964), „A XX-a Aniversare a Eliberării Patriei" (1964) și „Meritul Științific" (1965).

Aria preocupărilor profesorului Anton Șesan a fost foarte întinsă, variată ; în unele direcții a fost deschizător de drumuri, în altele, adîncind investigația, a descoperit aspecte noi, cu care a îmbogățit tezaurul științei construcțiilor.

Din perioada de activitate nemijlocită în execuție, de numele său este legată realizarea a numeroase obiective industriale, civile, poduri, drumuri, hangare, complexe hidrotehnice etc.

Lucrînd direct în proiectare și cercetare, a contribuit cu experiența și competența sa la soluționarea unor probleme tehnice dificile legate de fundarea pe terenuri loessoide, de proiectarea și execuția structurilor din prefabricate cu bună conformare antiseismică, de consolidarea unor structuri de rezistență în vederea sporirii sarcinilor, de ameliorarea terenurilor de fundații pentru drumuri etc.

Prelegerile sale au rămas un model în ce privește nivelul conținutului, metodica de expunere și antrenare a masei de auditori și împletirea cu celelalte forme de învățămînt : seminarul și încercările de laborator și pe stand.

Activitatea științifică a profesorului Anton Șesan s-a manifestat viguros pe următoarele planuri distincte : cercetare proprie și colaborare, concretizată în peste 140 de lucrări publicate sau comunicate, precum și realizarea, după concepții proprii, a unei puternice baze materiale pentru cercetare.

În domeniul calculului deformațiilor structurilor, profesorul Anton Șesan definește și introduce noțiunea de „momente factoriale", cu ajutorul căreia stabilește relațiile statice generale între funcțiile încovoierii. Momentele factoriale permit generalizarea metodelor cunoscute de calcul a deformațiilor (grinda conjugată, metoda Krîlov etc.), exprimă corect influența exercitată de forța tăietoare asupra deformațiilor, aduc simplificări de calcul esențiale în stabilirea liniilor de influență ale sistemelor static nedeterminate și permit determinarea directă a deformațiilor plastice. Extinde această noțiune la domeniul solicitărilor dinamice, introducînd conceptul de „momente exponențiale" de diverse ordine ; pentru utilizarea eficientă a calculatoarelor electronice în statica construcțiilor introduce operatorii „matrice factoriale de transfer", „determinanți factoriali" și „matrice de corecție dinamică". Cu ajutorul acestora din urmă reușește să determine deformațiile structurilor spațiale cu contururi oarecare, sub sarcini statice și dinamice.

În domeniul metodelor de calcul al structurilor, definește și introduce noțiunea de „momente active" (de nod, bară, lanț cinematic și sistem), care permit folosirea diferitelor sisteme de bază, rezolvarea prin aproximații succesive, într-o singură treaptă, a cadrelor oarecare și fundamentarea teoretică a metodelor de calcul interativ cunoscute. Metoda momentelor active, combinată cu teoria grafelor, facilitează cal-

culul structurilor cu mașini cifrice, calea iterativă propusă de autor evitînd inversarea de matrice.

În calculul static al structurilor în domeniul plastic, profesorul Anton Șesan demonstrează unicitatea principiului lucrului mecanic minim și, pe această bază, stabilește un sistem general de trei grupe de ecuații de echilibru (de bară, de nod și de lanț cinematic), care cuprinde toate cazurile de echilibru static : mecanic, elastic și plastic. Cu ajutorul noțiunii de „energie legată", fundamentează teoretic starea de „autotensiuni", observată ca fenomen fizic de Bauschinger. Ajunge la concluzia că prin producerea de autotensiuni convenabile structurile metalice pot fi pretensionate, ceea ce s-a dovedit experimental a fi deosebit de util din punct de vedere practic. De asemenea dovedește că actualul criteriu normalizat de încercare a structurilor, și anume „al deformațiilor remanente", nu este corect, întrucît limita elastică este funcție de istoricul încărcărilor anterioare, putînd ajunge, *in extremis*, să coincidă cu cea de cedare. Ajunge astfel să fundamenteze, ca metodă de încercare a structurilor, „metoda descărcării", și să determine starea de tensiuni prin relaxarea probelor. Metoda, verificată practic pe o importantă construcție industrială existentă, se dovedește nu numai valabilă, dar mai ales eficientă economic și fără riscurile de cedare ce însoțesc în mod obișnuit metoda deformațiilor remanente.

În domeniul siguranței structurilor, profesorul A. Șesan și colaboratorii săi ajung la o exprimare generalizată a siguranței cu ajutorul momentelor statistice, din care, prin particularizare, se poate obține oricare din formulările cunoscute (metoda rezistențelor admisibile, metoda la rupere, metoda stărilor limită). Folosind teoria convoluțiilor, generalizează metoda Freudenthal de compunere a probabilităților la curbe de distribuție asimetrice sau oarecare. De asemenea stabilește modul de determinare a coeficientului de omogenitate pentru calculul în domeniul plastic, precum și semnificația „siguranței" în acest domeniu.

În domeniul cercetării comportării structurilor la acțiuni seismice, care a constituit preocuparea dominantă a profesorului Anton Șesan în ultima perioadă din viața sa, a studiat și pus la punct o metodă eficientă pentru determinarea caracteristicilor dinamice ale construcțiilor, cu ajutorul „captorilor seismici", concepuți și realizați în laboratoarele conduse de el. Puternica și moderna bază materială pe care a creat-o pentru cercetările din acest domeniu, deși pusă în funcțiune abia în ultimul timp, i-a permis să întreprindă studii experimentale cu rezultate remarcabile. A stabilit astfel că variațiile în timp ale eforturilor inițiale din structurile precomprimate sînt funcție de caracteristicile dinamice, a confirmat experimental valorile „echivalentului mecanic" stabilite de cercetătorii români (colectivul acad. Șt. Bălan), a determinat capacitatea de disipare a energiei la structurile metalice solicitate seismic în domeniul elasto-plastic, a observat că eforturile maxime nu corespund nici deplasărilor maxime, nici accelerațiilor maxime, depinzînd doar de energia instantanee cumulată.

Accelerațiile mari, de perioadă foarte scurtă, nu sînt periculoase : la primul nivel al structurii accelerațiile au caracterul seismului iar la nivelele superioare tind către o variație armonică. De asemenea, prof. Anton Șesan a conceput „seisme convenționale" corespunzătoare valorilor maxime ale deplasărilor, vitezelor și accelerațiilor, pentru a caracteriza zone de cutremur, a stabilit o metodică de cercetare seismică pe platforme seismice de diverse mărimi, combinată cu utilizarea calculatorului analogic, ceea ce permite extinderea schemei parțiale la întreaga structură precum și optimizarea proiectării structurilor.

*
* *

Pînă în 1950 nu exista la Iași, pentru cercetări experimentale în construcții, decît laboratorul de materiale de construcții, condus de regretatul prof. Al. Chelărescu. De atunci încoace, an de an, baza materială de cercetare a facultății de construcții s-a îmbogățit, în special ca urmare a legăturilor cu producția.

De toată această bază materială este nemijlocit legat numele profesorului Anton Șesan. În 1953 el ia inițiativa înființării unui laborator de geotehnică, pentru a putea studia ameliorarea loessurilor din Moldova, temă din planul Academiei R.S.R., filiala Iași. Baza materială a acestui laborator crește considerabil în urma contractului încheiat cu fostul Minister al Gospodăriei Comunale și Industriei locale, pentru studiul drumurilor din pămînt stabilizat.

În același scop, ca urmare a strădaniilor deosebite depuse de profesorul A. Șesan, alături de alte cadre didactice din Politehnică, se proiectează și se realizează, după concepții proprii, o stație pilot pentru încercări de drumuri la Iași și alta la București. Tot profesorului A. Șesan i se datorește existența laboratorului de fotoelasticimetrie.

Remarcabile prin originalitatea concepției și capacitatea instalațiilor și aparaturii sînt însă laboratorul de electronică pentru construcții, standul de încercări statice și dinamice a structurilor metalice solicitate în domeniul plastic, dar mai ales complexul de cercetări seismice al catedrei. Laboratorul de electronică, cel mai dezvoltat din țară, cuprinzînd instalații electronice originale și aparatură de mare sensibilitate (captori seismici, tensometrie acustică, captori dinamici, programatoare electronice cu celule fotoelectrice, vibrometre de palpare, platformă electronică cu program pentru studiul răspunsului seismic pe modele, calculator analogic pentru studiul comportării seismice al structurilor cu 5...20 grade de libertate etc.) a permis efectuarea unor studii deosebit de importante pentru economia națională (studiul folosirii armăturii bi-Stahl pentru elemente de construcții și îmbinări de panouri mari ; studiul comportării la acțiuni seismice a structurii unei mari termocentrale, ce are prevăzute cazane suspendate la cota +92 m și un coș de fum de 250 m înălțime etc.).

Complexul de cercetări seismice cuprinde : o platformă seismică de 1 tf pentru vibrații armonice, o platformă de 15 tf cu mișcări perio-

dice de deplasare și rotire, după un seism programat, și platforma de 180 tf, cu 5 sisteme de acționare (periodică, uniform accelerată cu șocuri la capete de cursă, cu programare electronică și transmisie hidraulică, cu programare mecanică și cu programare electro-hidraulică), pentru studiul răspunsului seismic al unor clădiri întregi sau părți de clădiri. Concepute pe principiul lagărelor hidraulice plane cu labirinți de autostabilizare (invenție brevetată de profesorul Șesan și colectivul său în S.U.A., Italia, Iugoslavia, Japonia), aceste platforme și sistemele de acționare depășesc performanțele atinse de instalațiile similare din lume. Interesul manifestat de centrele de cercetări seismice de mare prestigiu din străinătate (Italia, Universitatea Berkeley din California (S.U.A.) și Taşkent (U.R.S.S.)) și propunerile de colaborare adresate de ele confirmă valoarea realizărilor profesorului Anton Șesan și constituie un puternic îndemn pentru continuatorii operei sale de a menține prioritatea și avansul obținut de el și în acest domeniu de o deosebită importanță practică și teoretică.

* * *

În cele de mai sus au fost schițate numai cîteva din cele mai importante rezultate obținute de profesorul Anton Șesan în activitatea sa desfășurată pe multiple planuri, lăsînd la o parte contribuțiile sale în conducerea doctoranzilor, în domeniul filozofiei inginerești, ca animator al revistei *Teoria și practica construcțiilor*, în cadrul C.N.C.S. etc., etc.

Este de-a dreptul uimitor cum un om, într-un interval de timp relativ scurt, a putut cuprinde, cu atîta competență și cu rezultate atît de remarcabile, o arie extrem de vastă și de variată de preocupări. Și nu era încă timpul recoltei celei mari. Căci profesorul Anton Șesan ajunsese în anotimpul cînd roadele semănăturilor erau de-abia în pîrgă...

N. Preda

LISTA LUCRĂRILOR ȘTIINȚIFICE

1. *Ipsosul în construcții.* Revista ASIT, 1949, 5.
2. *Ameliorarea loessurilor și a pămînturilor loessoide.* (I). *Tratarea prealabilă cu hidrat de calciu,* (în colaborare cu A. Cernătescu și N. Popescu). St. și cerc. șt., Acad. R.P.R., filiala Iași, 1954, **V**, *1*—2.
3. *Calculul cadrelor prin metoda rotirilor,* (în colaborare cu N. Popescu). Rev. Univ. „Al. I. Cuza" și Inst. polit. Iași, 1954, **I**, *1*—2.
4. *Variante și simplificări ale metodei distribuirii momentelor,* (în colaborare cu N. Orlovschi). Teoria și practica construcțiilor, 1954, **I**, *1*.
5. *O generalizare a metodei rotirilor,* (în colaborare cu N. Popescu). Teoria și practica construcțiilor, 1954, **II**, 2.
6. *Ecuații reduse ale metodei deformațiilor,* (în colaborare cu N. Popescu). Bul. Inst. polit. Iași, 1955, **I** (V), *1*—2.
7. *Metoda distribuirii momentelor folosind rotirile sau momentele active numai de nod,* (în colaborare cu N. Popescu și N. Orlovschi). Bul. Inst. polit. Iași, 1955, **I** (V), *1*—2.
8. *O altă formă a ecuațiilor de condiție a metodei deformațiilor,* (în colaborare cu N. Popescu). Teoria și practica construcțiilor, 1955, **2**, *1*.

9. *Folosirea varului hidraulic la stabilizarea pămînturilor loessoide*, (în colaborare cu A. Cernătescu, N. Popescu și Gh. Dima). Teoria și practica construcțiilor. 1955, **II**, 2.
10. *Calculul cadrelor cu stîlpi înclinați folosind momentele active*, (în colaborare cu N. Popescu). St. și cerc. șt., Acad. R.P.R., filiala Iași, 1955, **VI**, *3—4*.
11. *O generalizare a metodei distribuirii momentelor*, (în colaborare cu N. Orlovschi). St. și cerc. șt., Acad. R.P.R., filiala Iași, 1955, **VI**, *3—4*.
12. *Ameliorarea loessurilor și a pămînturilor loessoide*. (II). *Modularea caracteristicilor fizico-mecanice ale pămînturilor loessoide cu ajutorul aditivilor*, (în colaborare cu A. Cernătescu, O. Nichita, Gh. Dima și Fl. Modreanu). St. și cerc. șt., Acad. R.P.R., filiala Iași, 1956, **VII**, 2.
13. *Ameliorarea loessurilor și a pămînturilor loessoidale*. (III). *Hidrofobizarea pămînturilor loessoide cu ajutorul săpunurilor tehnice*, (în colaborare cu A. Cernătescu, O. Nichita, V. Ciubotaru, Fl. Modreanu, Gh. Dima, V. Dianu și A. Vulpe). St. și cerc. șt., Acad. R.P.R., filiala Iași, 1956, **VII**, 2.
14. *Compactarea pămînturilor pentru baraje*. Bul. Inst. polit. Iași, 1956, **II (VI)**, *1—2*.
15. *Adaosuri de modulare în vederea stabilizării cu lianți a loessurilor și a pămînturilor loessoidale*, (în colaborare cu A. Cernătescu, O. Nichita, Gh. Dima și Fl. Modreanu). St. și cerc. șt., Acad. R.P.R., filiala Iași, 1956, **VII**, *1*.
16. *Simplificarea ecuațiilor metodei deformațiilor și a calculului iterativ la cadre oarecare*, (în colaborare cu N. Orlovschi). Bul. Inst. polit. Iași, 1957, **III (VII)**, *3—4*.
17. *Asupra posibilității de impermeabilizare a unor pămînturi din preajma Iașului pentru canale de irigație*, (în colaborare cu A. Cernătescu, Gh. Dima, C. Ciobanu, L. Macarevici și Vl. Boghian). Bul. Inst. polit. Iași, 1957, **III (VII)**, *3—4*.
18. *Asupra formei unitare a metodei forțelor și deformațiilor*. Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*.
19. *Relations statiques générales pour l'étude de la flexion*. Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*.
20. *Use of „Factorial Moments" in the Determination of Influence Lines in Statically Indeterminate Structures*, Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*.
21. *Generalizarea metodei distribuirii momentelor în calculul plastic la cadre oarecare*. Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*.
22. *Number Reduction of Unknowns in the Stope Deflection Method*. Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*.
23. *Asupra necesității studierii problemelor rutiere în stații pilot*, (în colaborare cu N. Preda, D. Atanasiu și R. Vîrlan). Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*.
24. *Unele generalizări ale metodei Krîlov, referitoare la deformația grinzilor drepte*. Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*.
25. *Hidrofobizarea pămînturilor loessoide prin adaosuri de săpunuri tehnice*, (în colaborare). St. și cerc. șt., Acad. R.P.R., filiala Iași, 1958, **VII**, 2.
26. *Studiul utilizării în condiții optime a pămînturilor locale la construcția barajelor* (I), (în colaborare). St. și cerc. șt., Acad. R.P.R., filiala Iași, 1958, **VII**, *1—2*.
27. *Unele generalizări ale metodei Krîlov referitoare la deformația grinzilor drepte*. Bul. Inst. polit. Iași, 1959, **V (IX)**, *3—4*.
28. *Asupra capacității portante a unor grinzi metalice*, (în colaborare cu I. Dumitrescu). Bul. Inst. polit. Iași, 1959, **V (IX)**, *3—4*.
29. *Forma analitică a metodei Cross*. Bul. Inst. polit. Iași, 1959, **V (IX)**, *3—4*.
30. *Legătura cu producția a cercetărilor științifice ale cadrelor didactice de la facultatea de construcții a Institutului politehnic din Iași*, (în colaborare cu D. Atanasiu, V. Focșa și A. Mihul). Rev. Înv. sup., 1959, 2.
31. *O formă generalizată și unitară a metodelor de calcul static*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică jubiliară a Inst. de Mec. Apl. „Traian Vuia", Acad. R.P.R., 4—7 iulie 1960.
32. *Momente factoriale și folosirea lor în calculul structurilor*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică jubiliară a Inst. de Mec. Apl. „Traian Vuia", Acad. R.P.R., 4—7 iulie 1960.

33. *Asupra unor metode iterative de calcul static în domeniul elastic și plastic.* Comunicare prezentată la sesiunea științifică jubiliară a Univ. „Al. I. Cuza", Iași, octombrie 1960.
34. *Studiu experimental și teoretic pentru realizarea unei copertine la stadionul sportiv 23 August Iași,* (în colaborare cu C. Mihai, M. Manolovici, D. Diaconu și I. Miroș). Comunicare prezentată la sesiunea științifică jubiliară a Univ. „Al. I. Cuza", Iași, octombrie 1960.
35. *Un operator static pentru calculul deformațiilor în domeniul elastic și plastic.* Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI (X)**, *1—2.*
36. *Probleme de probabilitate în calculul la stările limită,* (în colaborare cu S. Covali, N. Gheorghiu și A. Vulpe). Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI (X)**, *3—4.*
37. *Una forma generalizzata del metodi di calcolo elastico e plastico delle strutture.* Comunicare la al X-lea Congres de Mecanică Aplicată, Stresa, Italia, 17 septembrie 1960.
38. *Probleme de probabilitate în calculul coeficienților de omogenitate pentru oțeluri și betoane,* (în colaborare cu S. Covali, D. Diaconu și M. Manolovici). Comunicare prezentată la sesiunea științifică jubiliară a INCERC, București.
39. *Sur la sécurité des constructions calculées dans le domaine plastique.* Comunicare prezentată la Congresul de la Kryniça, Polonia, 1962.
40. *Probleme de maxim și minim în echilibrul elastico-plastic și plastic,* (în colaborare cu M. Manolovici). Bul. Inst. polit. Iași, 1963, **IX (XIII)**, *3—4.*
41. *Über die Tragfähigkeit und „Sicherkeit" der Stahlkonstruktionen die durch Restspannungen vorgespannt sind.* Comunicare prezentată la Congresul de la Dresda, 1963.
42. *Pretensionări, autotensiuni și rezervele de adaptare statică a structurilor.* Comunicare prezentată la Congresul de la I.P.Z., Polonia, septembrie 1963.
43. *Coeficienți de omogenitate în calculul plastic.* Comunicare prezentată la Congresul de la Kryniça, Polonia, 1963.
44. *Experimental Determination of Natural Periods and Damping in Buildings,* (în colaborare cu I. Ciongradi, D. Diaconu și L. Strat). Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X (XIV)**, *3—4.*
45. *Die Tragfähigkeit und Sicherkeit von durch Restspannungen vorgespannten Stahlkonstruktionen.* Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, 1964, **13**, *3.*
46. *O exprimare generalizată a echilibrului și a siguranței structurilor pentru domeniul mecanic, elastic și plastic.* Comunicare prezentată la Conferința de mecanică aplicată organizată de Acad. R.P.R., în colaborare cu Min. Înv., septembrie 1965.
47. *Un calcul operațional al deformațiilor statice și dinamice,* (în colaborare cu I. Ciongradi). Comunicare prezentată la Conferința de mecanică aplicată organizată de Acad. R.P.R., în colaborare cu Min. Înv., septembrie 1965.
48. *Studii și cercetări experimentale privind comportarea dinamică și seismică a structurilor,* (în colaborare cu D. Diaconu, I. Ciongradi, M. Iticovici și M. Groper). Comunicare prezentată la Conferința de mecanică aplicată organizată de Acad. R.P.R., în colaborare cu Min. Înv., septembrie 1965.
49. *Asupra metodei și criteriilor de încercare a structurilor de acoperiș,* (în colaborare cu M. Manolovici). Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *3—4.*
50. *Generalizarea „momentelor factoriale" sub forma „momente exponențiale",* (în colaborare cu I. Ciongradi). Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *1—2.*
51. *Operații cu variabile aleatorii în teoria siguranței construcțiilor,* (în colaborare cu S. Covali). Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *3—4.*
52. *Über die Berechnung der Grenzzustände und der Sicherkeit von vorgespannten Metallkonstruktionen.* Comunicare prezentată la al II-lea Congres de construcții metalice precomprimate, Praga, 1965.
53. *Aspecte ale calculului plastic al structurilor supuse la sarcini seismice.* Comunicare prezentată la Congresul de calcul plastic, Leghigt Univ. Bethlehem, Pennsylvania, USA, 1965.

54. *Modele și scheme analogice pentru studiul seismic al structurilor*, (în colaborare cu M. Iticovici, C. Lupașcu, D. Diaconu, I. Ciongradi, D. Vasilescu și L. Strat). Invenție O.S.I. brevet în S.U.A., Japonia, Italia, Iugoslavia.
55. *Proiectarea optimizată a structurilor în domeniul plastic cu ajutorul analogiei electronice*, (în colaborare cu G. Popescu și D. Vasilescu). Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*.
56. *Asupra probabilității de cedare din teoria siguranței construcțiilor*, (în colaborare cu S. Covali și G. Popescu). Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*.
57. *Utilizarea teoriei grafelor în formularea matricială a metodei momentelor active*, (în colaborare cu A. Vulpe și N. Tutoș). Bul. Inst. polit. Iași, 1968, **XIV (XVIII)**, *1—2*.
58. *Seisme convenționale pentru cercetări experimentale și proiectare optimizată cu ajutorul calculatoarelor analoge*, (în colaborare cu D. Diaconu și I. Ciongradi). Comunicare prezentată la cel de al IV-lea Congres internațional de seismologie inginerească, Santiago de Chile, ianuarie 1969.
59. *Metodica de studiu și verificare seismică a structurilor prin încercări experimentale la platforme seismice la diferite dimensiuni combinate cu folosirea calculatoarelor analogice*, (în colaborare cu I. Ciongradi și D. Diaconu). Comunicare prezentată la cel de al IV-lea Congres de seismologie inginerească, Santiago de Chile, ianuarie, 1969.
60. *Generalizarea metodei „momentelor active" la calculul spațial al structurilor folosind calculul matricial*, (în colaborare cu A. Vulpe și Fl. Macovei). Comunicare prezentată la conferința de mecanică aplicată a Acad. R.S.R., iunie 1969.
61. *A Method and Equipment to Test Structures at Simulated Seismic Actions*, (în colaborare cu G. d'Albon, I. Ciongradi și L. Strat). Comunicare prezentată la Simpozionul internațional RILEM, Buc., septembrie 1969.
62. *Une nouvelle méthode d'essai des structures et des toits*, (în colaborare cu M. Manolovici). Comunicare prezentată la Simpozionul internațional RILEM, Buc., septembrie 1969.
63. *Studiul utilizării în condiții optime a pământurilor locale la construcția barajelor*. (I). *Studiul utilizării pământurilor din valea rîului Bahlui la vest de Iași*, (în colaborare cu A. Cernătescu, D. Atanasiu și Gh. Dima). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. Iași, februarie 1955.
64. *Concepția și calculul coeficienților de siguranță în construcții*. (I). *Asupra aplicării coeficienților de siguranță specifici în proiectările curente*, (în colaborare cu N. Popescu, N. Preda, Vl. Boghian ,N. Orlovschi, R. Untu, C. Leonte și A. Vulpe). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1955.
65. *Folosirea varului hidraulic la stabilizarea loessurilor și a pământurilor loessoide*, (în colaborare cu A. Cernătescu, N. Popescu și Gh. Dima). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1955.
66. *O generalizare a metodei rotirilor*, (în colaborare cu N. Popescu). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1955.
67. *Noi ecuații de condiție a metodei deformațiilor*, (în colaborare cu N. Popescu). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1955.
68. *Ecuații reduse ale metodei deformațiilor*, (în colaborare cu N. Popescu). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1955.
69. *Folosirea rotirilor de nod și a momentelor active de nod în metoda distribuirii momentelor*, (în colaborare cu N. Popescu și N. Orlovschi). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1955.
70. *Asupra posibilității de impermeabilizare a unor pământuri din preajma Iașului pentru canale de irigații și diguri*, (în colaborare cu Gh. Dima, C. Ciobanu, L. Macarevici și Vl. Boghian). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, mai 1956.
71. *Metoda „coeficienților nedeterminați" (Filipescu) ca formă unitară a metodei forțelor și a deformațiilor*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, mai 1956.

72. *Simplificarea ecuațiilor metodei deformațiilor și a calculului iterativ la cadre oarecare*, (în colaborare cu N. Orlovschi). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. Iași, mai 1956.
73. *Asupra necesității studiilor în stații pilot în problemele rutiere*, (în colaborare cu N. Preda, R. Vîrlan și D. Atanasiu). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, mai 1956.
74. *Folosirea momentelor factoriale în calculul deformațiilor și a sistemelor static nedeterminate*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, mai 1956.
75. *Generalizarea metodei distribuirii momentelor la calculul în domeniul plastic*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, iunie 1958.
76. *Folosirea „momentelor factoriale" la calculul liniilor de influență la sisteme static nedeterminate*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, iunie 1958.
77. *Calculul cadrelor cu noduri deplasabile folosind un număr redus de necunoscute sau noduri de echilibrat*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, iunie 1958.
78. *Studiul capacității de adaptare a unor grinzi metalice cu diferite grade de încastrare*, (în colaborare cu I. Dumitrescu). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, iunie 1958.
79. *Problema siguranței în construcții și calculul static în domeniul elastic și plastic*, (în colaborare cu A. Vulpe și D. Papuc). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. Iași, iunie 1958.
80. *Probleme de metodică în predarea Rezistenței materialelor la facultatea de construcții a I.P.I.* Comunicare prezentată la Consfătuirea catedrelor de rezistența materialelor, februarie 1959.
81. *Problema ieftinirii construcțiilor de locuințe și posibilitățile de realizare în regiunea Iași*, (în colaborare cu V. Focșa, P. Mîlcomete, T. Silion, A. Miron, A. Radu și A. Veiner). Comunicare prezentată la Consfătuirea privind reducerea prețului de cost în construcția de locuințe, martie 1959.
82. *Metode noi de calcul și posibilități de aplicare în proiectarea economică a construcțiilor din regiune*, (în colaborare cu N. Preda, M. Diaconu, S. Păun și A. Vulpe). Comunicare prezentată la Consfătuirea privind reducerea prețului de cost în construcția de locuințe, martie 1959.
83. *Rolul și obiectivele cercetării științifice în etapa actuală a dezvoltării construcțiilor din Moldova*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1960.
84. *Studiul și încercarea unor grinzi cu zăbrele cu noduri rigide*, (în colaborare cu A. Mihul, N. Orlovschi, V. Bausic, D. Diaconu, M. Manolovici și A. Vulpe). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1960.
85. *Un operator static pentru calculul deformațiilor în domeniul elastic și plastic*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1960.
86. *Fundamentarea teoretică a metodelor de calcul elastic sau plastic*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1960.
87. *Probleme de probabilitate în calculul la stările limită*, (în colaborare cu S. Covali, A. Vulpe, N. Gheorghiu). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1960.
88. *Asupra condițiilor de echilibru și operanților în calculul static*, (în colaborare cu N. Orlovschi). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1960.
89. *Studiul capacității portante la structuri metalice și de zidărie în calculul la stările limită*. INCERC, Iași, tema **IX-1-a**, 1961.
90. *Generalizări și simplificări în calculul structurilor cu grad mare de nedeterminare cinematic-elastică*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit din Iași, noiembrie 1962.
91. *Stări de coacțiune în adaptarea plastică pe secțiune și intersecțiuni*, (în colaborare cu I. Dumitrescu, E. Nour, N. Ungureanu, C. Amariei și L. Tanasachi). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, noiembrie 1962.

92. *Rezerve statice la unele structuri static nedeterminate*, (în colaborare cu N. Orlovschi, M. Diaconu, A. Vulpe, C. Amariei, E. Cozma şi Al. Dumitraş). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, noiembrie 1962.
93. *Probleme de calcul static în domeniul elastico-plastic*, (în colaborare cu A. Vulpe, E. Nour, M. Manolovici şi N. Ungureanu). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, noiembrie 1962.
94. *Analiza statistică şi calculul de probabilitate în aplicarea metodei stărilor limită*, (în colaborare cu S. Covali şi L. Tanasachi). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, noiembrie 1962.
95. *Folosirea anizotropiei magnetice pentru determinarea eforturilor la elemente şi structuri metalice*, (în colaborare cu A. Vulpe, M. Manolovici, I. Ciongradi şi Al. Dumitraş). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, noiembrie 1962.
96. *Determinarea eforturilor cu ajutorul tensometriei acustice*, (în colaborare cu N. Orlovschi, N. Ungureanu, M. Manolovici şi C. Amariei). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, noiembrie 1962.
97. *Unele probleme de calcul static al structurilor din panouri mari de zidărie vibrată*, (în colaborare cu V. Bauşic, D. Diaconu, M. Manolovici, E. Cozma şi I. Ciongradi). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, noiembrie 1962.
98. *Asupra încercărilor dinamice pe modele*, (în colaborare cu I. Ciongradi şi D. Diaconu). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, noiembrie 1962.
99. *Studii experimentale privind caracteristicile dinamice ale construcţiilor din panouri mari*, (în colaborare cu D. Diaconu şi I. Ciongradi). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. de construcţii, Bucureşti, noiembrie 1962.
100. *Determinarea perioadelor vibraţiilor proprii la clădirile din panouri mari*, (în colaborare cu M. Groper, D. Diaconu şi I. Ciongradi). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. de construcţii, Bucureşti, noiembrie 1962.
101. *Asupra apariţiei şi dezvoltării articulaţiilor plastice la cadre*, (în colaborare cu E. Nour şi L. Tanasachi). Studiu experimental, INCERC, Iaşi, 1962.
102. *Studiul metodelor de prelucrare statistică a datelor experimentale*, (în colaborare cu S. Covali, L. Tanasachi şi D. Diaconu). INCERC, Iaşi, tema **VI** *-2-a*, 1962.
103. *Studiul rezervelor de capacitate portantă a unor structuri uzuale*, (în colaborare cu E. Nour, N. Ungureanu şi C. Amariei). INCERC, Iaşi, tema **VII-2-***b*, 1962.
104. *Siguranţa structurilor calculate la stările limită*. INCERC, Iaşi, tema **VI-2-***a*, 1962.
105. *Studiul autotensiunilor şi a influenţei lor asupra apariţiei articulaţiilor plastice*, (în colaborare cu E. Ivanov şi L. Tanasachi). INCERC, Iaşi, tema **IV** *-4. 1963.*
106. *Studiul dinamic al unor construcţii etajate*, (în colaborare cu I. Ciongradi, D. Diaconu, M. Manolovici, C. Lupaşcu şi L. Strat). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, februarie 1965.
107. *Studiul dinamic pe modele supuse la acţiuni programate*, (în colaborare cu D. Diaconu, I. Ciongradi şi L. Strat). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, februarie 1965.
108. *Studiul răspunsului dinamic cu ajutorul unui calculator analogic*, (în colaborare cu I. Ciongradi, C. Lupaşcu, D. Diaconu şi A. Vulpe). Comunicare prezentată la sesiuea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, februarie 1965.
109. *Influenţa tensiunilor iniţiale asupra caracteristicilor dinamice*, (în colaborare cu D. Diaconu şi D. Vasilescu). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, februarie 1965.
110. *Sisteme canonice în calculul dinamic al sistemelor de bare*, (în colaborare cu I. Ciongradi). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, februarie 1965.
111. *O generalizare a operatorilor „momente factoriale" pentru calculul static şi dinamic*, (în colaborare cu I. Ciongradi). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, februarie 1965.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

112. *O nouă metodă de încercare a construcțiilor folosită la studiul experimental al acoperișului unei hale industriale*, (în colaborare cu N. Orlovschi, A. Mihul și M. Manolovici). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1965.
113. *Mărirea sarcinii de exploatare la cadre metalice*, (în colaborare cu N. Orlovschi, A. Vulpe, E. Ivanicov, N. Ugureanu, C. Amariei și Al. Dumitraș). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1965.
114. *Asupra ordinei de apariție a articulațiilor plastice*, (în colaborare cu C. Amariei, E. Ivanov și Al. Dumitraș). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1965.
115. *Studiul caracteristicilor dinamice pe structuri reale*, (în colaborare cu D. Diaconu, I. Ciongradi, A. Vulpe, D. Vasilescu și L. Strat). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, februarie 1965.
116. *Comportarea construcțiilor înalte supuse acțiunii seismice*, (în colaborare cu D. Diaconu, M. Manolovici, C. Lupașcu, M. Groper, M. Iticovici, G. d'Albon, I. Ciongradi, L. Strat și D. Vasilescu). INCERC, tema **IV-*4*-II**, 1965.
117. *Siguranța structurilor calculate la stările limită în raport cu coeficienții reali de omogenitate realizați în 1963—1965*, (în colaborare cu S. Covali, M. Manolovici, E. Ivanicov, C. Mihai, C. Amariei și Al. Dumitraș). INCERC, tema **IV - 7**, 1965.
118. *Studiul rezervelor de capacitate portantă*, (în colaborare cu E. Ivanicov, C. Mihai, L. Tanasachi, M. Manolovici, M. Groper, C. Amariei, N. Ungureanu și Al. Dumitraș). INCERC, tema **IV - *8***, 1965.
119. *Asupra caracteristicilor dinamice ale construcțiilor tipizate, cu puține nivele*, (în colaborare cu D. Diaconu). INCERC, tema **IV-*4*-II**, 1965.
120. *Metode și aparate pentru încercări nedistructive*, (în colaborare cu G. d'Albon, M. Groper, V. Hanganu, N. Irimiciuc și I. Ciongradi), INCERC, tema **IV-*4*—II**, 1965.
121. *Comportarea buiandrugilor din beton armat în cadrul diafragmelor antiseismice*, (în colaborare cu D. Diaconu, M. Manolovici, M. Groper, T. Patelli, I. Ciongradi și L. Strat). INCERC. tema **IV-*4*-III**, 1965.
122. *Considerații teoretice și experimentale privind calculul plastic la sarcini repetate*, (în colaborare cu M. Manolovici, C. Amariei, E. Neacșu și C. Mihai). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, septembrie 1967.
123. *Studiul comportării structurilor în cadre la acțiuni seismice folosind calculatoare analogice*, (în colaborare cu I. Ciongradi, D. Diaconu, M. Iticovici, C. Lupașcu și D. Gorbănescu). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, septembrie 1967.
124. *Asupra unor operatori în calculul elastic al structurii*, (în colaborare cu A. Vulpe și N. Tutoș). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, septembrie 1967.
125. *Studiul variației caracteristicilor dinamice în elemente metalice și de beton, funcție de efortul de precomprimare*, (în colaborare cu D. Diaconu, C. Ionescu și G. Popescu). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, septembrie 1967.
126. *Cercetări asupra rezistenței la tracțiune a îmbinării elementelor de construcții metalice cu buloane de înaltă rezistență, preîntinse* (în colaborare cu V. Baușic, M. Groper, St. Răzvan și G. d'Albon). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, septembrie 1967.
127. *Asupra calculului structurilor în domeniul plastic la calculatoarele analogice*, (în colaborare cu C. Amariei, G. Popescu și D. Vasilescu). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, septembrie 1967.
128. *Aplicarea teoriei grafelor și formularea matricială în calculul sistemelor static nedeterminate*, (în colaborare cu A. Vulpe și N. Tutoș). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, septembrie 1967.
129. *Cercetări pe modele privind variația rigidității diafragmelor funcție de distribuția golurilor*, (în colaborare cu V. Dascălu și P. Moșescu). Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Inst. polit. din Iași, septembrie 1967.

130. *Procedeu, dispozitiv şi nit special pentru asamblarea mecanizată a tablelor ondulate pentru acoperişuri cu acces dintr-o singură parte a acestora,* (în colaborare cu V. Bauşic, Şt. Răzvan şi M. Groper). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, septembrie 1967.
131. *O nouă metodă de încercare a structurilor, aplicată la studiile în vederea consolidării şedurilor de la I.I.S. Ţesătura, Iaşi,* (în colaborare cu M. Manolovici). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Iaşi, septembrie 1967.
132. *Folosirea în proiectarea la sarcini seismice a structurilor, a calculatoarelor analogice,* (în colaborare cu D. Diaconu, C. Lupaşcu şi M. Iţicovici). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a C.N.C.S., decembrie 1967.
133. *Comportarea îmbinărilor elementelor de construcţii metalice cu buloane de înaltă rezistenţă la sarcini statice şi sarcini repetate pentru structurile Combinatului siderurgic Galaţi,* (în colaborare cu V. Bauşic, M. Groper şi Şt. Răzvan). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a C.N.C.S., decembrie 1967.
134. *Bulon de control pentru tehnologia de preîntindere la execuţie şi a controlului în timp a variaţiilor eforturilor la buloanele de înaltă rezistenţă,* (în colaborare cu G. d'Albon şi M. Groper). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a C.N.C.S., decembrie 1967.
135. *Un nou procedeu de asamblare mecanizată a tablelor ondulate pentru acoperişuri,* (în colaborare cu V. Bauşic, M. Groper şi Şt. Răzvan). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a C.N.C.S., decembrie 1967.
136. *Asupra proiectării la greutate minimă prin programare geometrică,* (în colaborare cu C. Amariei, G. Botez şi D. Vasilescu). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Timişoara, mai 1968.
137. *Generalizarea „momentelor factoriale" sub forma operatorilor „determinaţi factoriali",* (în colaborare cu A. Vulpe şi Fl. Macavei). Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Inst. polit. din Timişoara, mai 1968.
138. *Utilizarea teoriei grafelor în formularea matriceală a metodei momentelor active,* (în colaborare cu A. Vulpe şi N. Tutoş). Bul. Inst. polit., Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1—2.*
139. *Rezolvarea structurilor spaţiale articulate,* (în colaborare cu A. Vulpe, N. Tutoş şi Fl. Macavei). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3—4.*
140. *A New Shaking Table Used to Test Structures at Seismic Actions,* (în colaborare cu G. d'Albon, I. Ciongradi şi L. Strat). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1969, **XV (XIX)**, *1—2.*
141. *Use of the „Factorial Moments" Operators in the Solving of Space Contours,* (în colaborare cu A. Vulpe şi Fl. Macovei). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1969, **XV (XIX)**, *3—4,* Secţ. VI.
142. *Modelarea comportării construcţiilor la acţiuni seismice folosind un nou tip de platformă vibrantă,* (în colaborare cu G. d'Albon, I. Ciongradi şi L. Strat). Rev. Construcţii şi materiale de construcţie, 1970, *4* (sub tipar).
143. *Simplificări în rezolvarea structurilor spaţiale prin metoda momentelor active,* (în colab. cu A. Vulpe şi Fl. Macavei). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1970, **XVI (XX)**, *3—4,* Secţ. VI (sub tipar).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

Dat la cules 3.01.1970. Bun de tipar 28.05.1970
Apărut 1970. Hîrtie velină B/63 g/m², 70×100/16
Coli tipar 34,5 planşe 40

Tiparul executat la Intreprinderea poligrafică
Iaşi str. V. Alecsandri nr. 12 sub comanda 451
Republica Socialistă România